Сборник тезисов

Всероссийской конференции

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

посвященной памяти Виктора Павловича Маслова

НИУ ВШЭ, МИЭМ им. А.Н. Тихонова,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет

Москва, 17-19 июня 2024

Оглавление

Квазиклассические асимптотики безмассовой двумерной системы уравнений Дирака с быстроменяющимся потенциалом

А. И. Аллилуева

ИПМех РАН, Москва;
e-mail: esina_anna@list.ru

Рассматривается безмассовая двумерная система уравнений Дирака, описывающая эволюцию волновых функций в графене, которая имеет вид:

$$
\begin{aligned}
i\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon\left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\right)v + Fu, \\
i\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t} &= \varepsilon\left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u + Fv,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $x \in R^2$, F – потенциал, ε – малый параметр, который стремится к нулю, и характеризует отношение масштабов локализованной неоднородности и общего изменения внешнего поля.

Потенциал $F = F\left(\frac{\Phi(x,t)}{\varepsilon}, x, t\right)$ зависит от быстрой переменной $y = \frac{\Phi(x,t)}{\varepsilon}$ и является гладкой функцией, причем $F(x,y,t) \to F^{\pm}(x,t)$ при $y \to \pm\infty$ быстрее любой степени y со всеми своими производными. Функции $F^{\pm}$ также гладкие. Это условие отражает локализованный характер неоднородности. Параметр $\varepsilon \to 0$, $\Phi(x,t) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, причем уравнение $\Phi(x,t) = 0$ задает гладкую регулярную гиперповерхность $M \subset \mathbb{R}^3$ (вблизи нее локализована неоднородность).

Начальные условия имеют вид:

$$
\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{pmatrix} u^0 \\ v^0 \end{pmatrix} e^{i\frac{S^0}{\varepsilon}},
\tag{2}
$$

где $u^0 = u^0(x)$, $u^0 = u^0(x)$ и $S^0(x)$ – гладкие функции, причем u^0 и v^0 финитны, $\nabla S^0|_{\mathrm{supp} u^0} \neq 0$, $\nabla S^0|_{\mathrm{supp} v^0} \neq 0$ и $\mathrm{supp}\, u^0 \cap M = \varnothing$, $\mathrm{supp}\, v^0 \cap M = \varnothing$. Начальный волновой пакет находится вне локализованной неоднородности, задача состоит в описании рассеяния такого начального пакета на M.

Наличие негладкой зависимости от ε в коэффициенте уравнения не позволяет прямо применить к задаче конструкцию канонического оператора Маслова [1]. Уравнениям с быстроменяющимися коэффициентами посвящено много работ (см., например, [2,3,4,5]). Для описания асимптотики мы используем соображения, приведенные в [5], а также технику, развитую для построения солитонообразных асимптотик нелинейных уравнений (см., например, [6]).

Результат работы – асимптотический ряд для решения задачи Коши, классические траектории определяются "предельными" по быстрой переменной y гамильтонианами, а наличие локализованного возмущения приводит к изменению геометрии соответствующего лагранжева многообразия – оно разделяется на две компоненты, описывающие прошедшие и отраженные волны.

Список литературы.

1. V.P. Maslov and M.V. Fedoriuk, Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics, Math. Phys. Appl. Math., vol. 7, Dordrecht: Springer, 1981.

2. С.Ю. Доброхотов. Приложение теории Маслова к двум задачам с операторнозначным символом. УМН, 1984, т.39, вып.4, стр. 125.

3. В.С. Буслаев. Адиабатическое возмущение периодического потенциала // ТМФ. 1984. Т. 58, N 2. с. 233-243.

4. С.Ю. Доброхотов, А.И. Шафаревич Квазиклассические асимптотики в задаче рассеяния волновых пакетов на быстроменяющемся потенциале вида $-2|\nabla\Phi|^2/ch^2(\Phi/h)|$// ДАН СССР, 1987, т. 295, N 6. с. 1347-1351.

5. А. И. Шафаревич, Квазиклассическое рассеяние волновых пакетов на узком слое, в котором потенциал быстро меняется, Матем. заметки, 45:1 (1989), 106-114; Math. Notes, 45:1 (1989), 72-77.

6. V. P. Maslov, G. A. Omel'yanov, Asymptotic soliton-form solutions of equations with small dispersion, Russian Math. Surveys, 36:3 (1981), 73-149.

Распределение собственных значений случайных нормальных матриц и асмптотика ортогональных многочленов

А. И. Аптекарев

Институт Прикладной Математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва;
e-mail: aptekaa@keldysh.ru

Ансамбли случайных нормальных матриц имеют ряд интересных приложений (двумерный рост Лапласа, диффузия ограниченных агрегаций). Мы обсудим связь распределения собственных значений этих матриц с асимптотикой многочленов, ортогональных по площади и совместно ортогональных многочленов (СОМ-ов). Для некоторой специальной меры распределения этих случайных матриц соответствующие СОМ-ы удовлетворяют рекуррентным соотношениям, коэффициенты которых являются решениями дискретного уравнения Пенлеве I. Наш результат состоит в нахождении асимптотики этих решений, что позволяет найти главный член асимптотики СОМ-ов, и дать новые, более простые доказательства результатов о распределении собственных значений случайных нормальных матриц.

Совместная работа с В.Ю. Новокшеновым.

Интегрирование гипергеометрической системы дифференциальных уравнений Лауричеллы

С. И. Безродных

Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва;
e-mail: sbezrodnykh@mail.ru.

Рассматривается следующая система N уравнений с частными производными, которая была введена в работе Дж. Лауричеллы в связи с изучением гипергеометрической функции многих переменных $F_D^{(N)}$, см. [1], [2]:

$$z_j(1-z_j)\frac{\partial^2 u}{\partial {z_j}^2} + (1-z_j)\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{N} z_k \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial z_k} +$$

$$+\Big[c-(1+a_j+b)z_j\Big]\frac{\partial u}{\partial z_j} - a_j \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{N} z_k \frac{\partial u}{\partial z_k} - a_j b\, u = 0, \qquad j=\overline{1,N};$$

здесь $u = u(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ — искомая функция, $\mathbf{z} := (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ — комплексное векторное переменное, $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ и $b, c \in \mathbb{C}$ — комплексные параметры.

В докладе будет представлен вид некоторых базисов в пространстве решений системы Лауричеллы, а также формулы перехода между ними. В том числе, приведен полный набор формул, дающий решение проблемы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ в $\mathbb{C}^N$, см. [3]. Для базисов даны два вида представлений — в виде N–кратных гипергеометрических рядов Горна и интегралов типа Эйлера по петлеобразным контурам Похгаммера. В докладе также продемонстрировано применение полученных результатов к решению проблемы вычисления параметров интеграла Кристоффеля — Шварца в ситуации кроудинга; об эффекте кроудинга см. [3], [4].

Благодарности. Работа выполнена за счет гранта РНФ №24-11-00372, https://rscf.ru/project/24-11-00372.

Список литературы.

1. G. Lauricella, Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili, Rendiconti Circ. math. Palermo, 7 (1893), 111–158.

2. H. Exton, Multiple hypergeometric functions and application. New York: J. Willey & Sons inc, 1976.

3. С. И. Безродных, Формулы для вычисления интегралов типа Эйлера и их приложение к задаче построения конформного отображения многоугольников, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 63:11 (2023), 1763–1798.

4. L. Banjai, Revisiting the crowding phenomenon in Schwarz — Christoffel mapping, SIAM Journal on Scientific Computing, 30:2 (2008), 618–636.

Еще одна бильярдная задача

С. В. Болотин

Московский математический институт им. В.А.Стеклова, Москва;
e-mail: bolotin@mi.ras.ru.

В работах С.Ю. Доброхотова и В.Е. Назайкинского по квазиклассическому приближению для вырожденного волнового уравнения возникла задача исследования геодезического потока римановой метрики, стремящейся к бесконечности на границе области. После регуляризации задача сводится к изучению вырожденного бильярда типа Биркгофа. Будет получена нормальная форма регуляризованного геодезического потока вблизи границы и доказан вариант теоремы Лазуткина для соответствующего бильярдного отображения. Доклад основан на совместной работе с Д.В. Трещевым.

Асимптотические методы при исследовании динамики внутренних гравитационных волн в стратифицированных природных средах

В. В. Булатов

Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН, Москва;
e-mail: internalwave@mail.ru

Среди большого многообразия наблюдаемых волновых процессов различной физической природы в океане и атмосфере Земли особое место вызывает взаимодействие возбуждаемых волн с гидродинамическими потоками. Движение стратифицированной среды является одним из основных факторов, влияющих на динамику внутренних гравитационных волн, как в естественных условиях, так и в технических устройствах. В современных научных исследованиях при анализе динамики внутренних гравитационных волн в природных стратифицированных средах с учетом наличия течений применяются асимптотические методы исследования аналитических моделей волновой генерации. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей внутренних гравитационных волн основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье и их асимптотическом анализе [1]. Для аналитического решения можно использовать модельные представления основных гидрологических параметров, например, постоянное распределение частоты плавучести и линейные зависимости фонового сдвигового течения от глубины. Модельные представления гидрологических параметров качественно верно могут описать как характер, так и масштабы пространственной изменчивости сдвиговых океанических течений. Использование модельных представлений для основных гидрологических характеристик (частоты плавучести и фоновых сдвиговых течений) позволяют редуцировать основную спектральную задачу к более простой, а также исследовать эту упрощенную задачу аналитически. Используя модельную гидрологию, получены аналитические выражения, описывающие дисперсионные зависимости, которые выражаются через модифицированную функцию Бесселя мнимого индекса. При выполнении условия устойчивости Майлса-Ховарда и больших числах Ричардсона для построения аналитических решений были использованы дебаевские асимптотики модифицированной функции Бесселя мнимого индекса. Подробно изучены свойства дисперсионного уравнения и исследованы основные аналитические свойства дисперсионных кривых. В приближении стационарной фазы построены интегральные представления решений для дальних волновых полей. Асимптотически исследованы зависимости волновых характеристик возбуждаемых полей от основных параметров использованных моделей стратификации, течений и режимов генерации. Показано, что при больших числах Ричардсона дебаевские асимптотики функции Бесселя мнимого индекса позволяют получить явные аналитические представления основных дисперсионных соотношений, которые дают возможность эффективно рассчитывать амплитудно-фазовую структуру дальних волновых полей внутренних гравитационных волн, а также исследовать различные режимы волновой генерации для модельных представлений частоты плавучести и сдвиговых течений [2,3].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (№23-21-00194).

Список литературы.

1. В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров, Волны в стратифицированных средах, Изд. Наука, Москва, 2015

2. В. В. Булатов , ТМФ, 211:2 (2022), 200–215

3. В. В. Булатов , Труды МИАН, 322 (2023), 71-82

О кризисах тепловыделения при фильтрации газа через завалы Чернобыльской АЭС и в потоке жидкости в цилиндре

М.М. Вотякова[1,2], *В.Г. Данилов*[3], *А.А. Ковалишин*[4], *Д.С. Миненков*[1,2]

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
[2] Московский физико-технический институт,
[3] Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики",
[4] Научно Исследовательский Центр "Курчатовский институт";
e-mail: votiakova.mm@phystech.edu, vgdanilov@mail.ru, kovalishin_aa@nrcki.ru, minenkov.ds@gmail.com

В работе [1] рассматривалась фильтрации нагреваемого газа (тепловая конвекция в пористой среде) и обнаружен эффект "запирания" потока: когда интенсивность тепловыделения превышает некоторое критическое значение, то газ через среду не течет и температура его бесконечно возрастает. При нагреве потока жидкости в цилиндре (при больших давлениях) также может возникнуть кризис тепловыделения [2], похожий на сглаженный эффект типа запирания тепловой конвекции в пористой среде. Если в цилиндре сформировано течение Пуазейля, то средняя скорость по сечению (расход) удовлетворяет закону движения типа закона Дарси, то есть расход жидкости подчиняется тем же уравнениям движения, что и скорость фильтрации жидкости (газа) в пористой среде.

В [1] пренебрегали теплопроводностью газа и рассматривали течение в вертикальном цилиндре, верхнее основание которого открыто в атмосферу (давление задается на входе и выходе цилиндра), кроме того исследовалось уравнение состояния идеального газа. В данной работе этот результат обобщен на случай уравнения состояния Ван-дер-Ваальса.

Другой результат связан с постановкой, когда все величины заданы в начале трубы (что соответствует течению в трубе, рассматриваемой как часть трубопровода). В этом случае система решается при любых значениях тепловыделения, но при приближении тепловыделения к критическим значениям температура начинает быстро возрастать, что сглаженным образом отражает тот же самый эффект "запирания" потока. Исследована зависимость критического тепловыделения от параметров потока, сравнение полученных теоретических значений с экспериментальными [2] показывает хорошее соответствие.

Благодарности. Авторы благодарны С.Ю. Доброхотову за ценные дискуссии. Исследование осуществлено частично в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и частично по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500442-3).

1. *Маслов В.П., Мясников В.П., Данилов В.Г.*, Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. Москва: Наука, 1988. 144 с.

2. *Алексеев Г.В., Силин В.А., Смирнов А.М., Субботин В.И.* Исследование температурных режимов стенки трубы при теплосъеме водой сверхкритического давления. Теплофизика выс. темп., 1976. Т. 14. № 4. 769–774 с.

Двухпалубная структура пограничного слоя в задачах обтекания поверхностей с малыми неровностями

Р. К. Гайдуков

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва;
e-mail: roma1990@gmail.com.

В работах В. П. Маслова [1,2] было начато применение метода Уизема для построения асимптотических решений гидро- и газодинамических задач, зависящих от одной быстрой переменной $S(t,x)/\varepsilon,\ x \in R^n, n = 2,3,\ S$ – гладкая функция, $\varepsilon \to +0$ – малый параметр. Одним из хорошо известных примеров решений такого типа в гидродинамике является однофазное решени $f = f\left(y/(\varepsilon\sqrt{x})\right)$, описывающее пограничный слой Прандтля при двумерном обтекании ровной тонкой пластины.

Дальнейшим развитием идей из работ [1,2] стало открытие двухпалубной структуры пограничного слоя [3] при исследовании задачи обтекания пластины с волнистой поверхностью – были получены асимптотические многофазные решения, сочетающие в себе погранслойные свойства и быстрые осцилляции, возникающие из-за неровностей на обтекаемой поверхности. Отметим, что для локализованных неровностей многомасштабные решения были обнаружены ранее – в 1970х годах была открыта трехпалубная структура [4], но математически строгий вывод уравнений, описывающих ее, был сделан только недавно [5].

С момента открытия, двухпалубная структура была обнаружена [6] во множестве (как двумерных, так и трехмерных) задач обтекания шероховатых поверхностей (как с локализованными, так и с периодическими неровностями) – при обтекании пластин, в том числе – с изменяющейся во времени формой неровностей, в течениях внутри труб и каналов, в течениях, индуцированных вращающимся диском. Характерной особенностью исследуемых течений стало наличие (при превышении высоты неровности некоторого критического значения) зоны отрыва пограничного слоя со стационарным вихрем внутри нее.

Благодарности.
Поддержано Программой фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Список литературы.

1. В. П. Маслов, Когерентные структуры, резонансы и асимптотическая неедин-ственность для уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса, УМН, 41:6 (1986), 19–35

2. В. П. Маслов, Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений, М.: Наука, 1987

3. V. G. Danilov, V.P. Maslov, K. A. Volosov, Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer Processes, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995

4. F. T. Smith, Laminar flow over a small hump on a flat plate, J. Fluid Mech., 57 (1973), 803–824

5. V. G. Danilov, R. K. Gaydukov, Asymptotic multiscale solutions to Navier–Stokes equations with fast oscillating perturbations in boundary layers, Russian Journal of Mathematical Physics, 29:4 (2022), 431-455

6. Р. К. Гайдуков, В. Г. Данилов, Асимптотические решения задач обтекания с двухпалубными структурами пограничного слоя, Математические заметки, 112:4 (2022), 521-533

Ранговый анализ смены режимов течения Колмогорова

М. А. Гузев[1], А. Н. Долуденко[2], А. Д. Ермаков[4], А. О. Посудневская [3,4], С.В. Фортова[4]

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток;
[2]Объединенный институт высоких температур РАН, Москва;
[3]Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Москва;
[4]Институт автоматизации проектирования РАН, Москва;
e-mail: guzev@iam.dvo.ru, sfortova@mail.ru.

Проблема классификации режимов гидродинамических течений в зависимости от физических параметров модели всегда была в центре внимания исследователей. Классическим примером является задача Колмогорова о двумерном турбулентном течении, возбуждаемым стационарной внешней силой [1]. В [2] было показано, что в зависимости от величины коэффициента донного трения α, амплитуды силы накачки G и числа Рейнольдса Re могут формироваться ламинарный, хаотический и вихревой типы течений. Построенные на фазовой плоскости (α, G) диаграммы течений позволили определять их тип. В данной работе решается задача классификации течений, используя метод ранговых распределений Маслова [3]. Были построены распределения частоты встречаемости (ω) завихренности (vorticity) скорости в зависимости от ранга (r) для значений параметров модели, соответствующим различным типам течений. Показано, что хаотический (turbulent) режим характеризуется графиком S-образного вида, имеющим точку перегиба (см. Рис.1). Ламинарному (laminar) и вихревому (vortex) режимам соответствуют выпуклые функции с различным асимптотическим поведением.

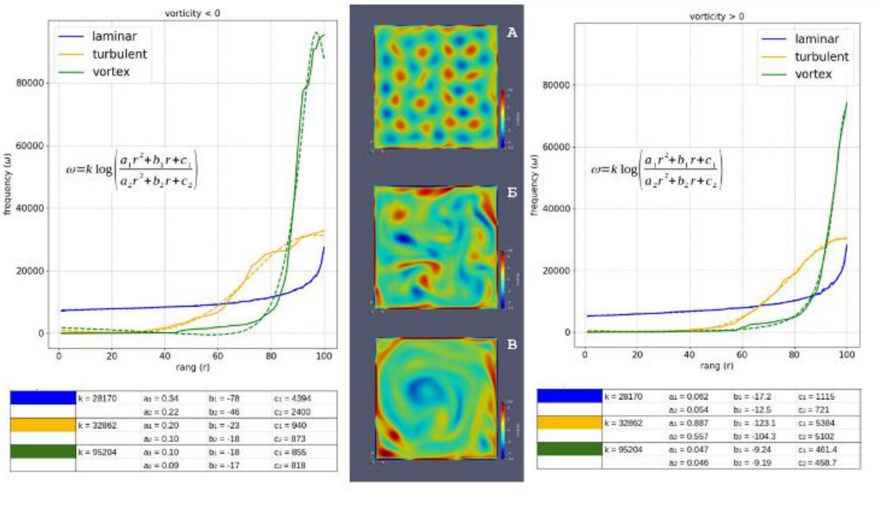


Рис. 1: Ранговые распределения частоты встречаемости завихренности скорости для лами-нарного (А) , турбулентного (Б) и вихревого (В) режимов течения Колмогорова.

Благодарности.
Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (госзадания 075-00459-24-00, 075-00270-24-00, 075-01129-23-00, 075-15-2022-1099, 124022400174-3 и АААА-А-19-119041590048-0) и Российского научного фонда (грант РНФ 23-72-30006).

Список литературы.

1. A.N. Kolmogorov. Proceedings of the USSR Academy of Sciences, 30, 299303, 1941.

2. A.N. Doludenko, S.V. Fortova, I.V. Kolokolov, V.V. Lebedev. Coherent vortex versus chaotic state in two-dimension turbulence, Annals of Physics, 447:2 (2022), 169072

3. M.A. Guzev, E.Y. Nikitina, E.V. Chernysh. V.P. Maslov's Approach to the Analysis of Rank Distributions, Russian Journal of Mathematical Physics, 28:1 (2021), 56-65.

Алгебры сингулярностей и взаимодействия нелинейных волн

В. Г. Данилов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва; e-mail: vgdanilov@mail.ru

В. П. Маслов обратил внимание на алгебраическую подоснову сингулярных решений квазилинейных гиперболических уравнений [1].

Простым примером здесь является модуль порождённый линейными комбинациями $\{1, H(x)\}$ над кольцом гладких функций (здесь $H(x)$ — функция Хевисайда). Анализ этих соображений привёл В.М. Шелковича и автора к подходу, названному методам слабых асимптотик. Мы будем рассматривать обобщенные функции f из $D'(\mathbb{R}^1)$ и их гладкие аппроксимации $f^\varepsilon(x) \in C^\infty$ при $\varepsilon > 0$ и такие что для любой пробной функции $\psi(x)$ существует предел $(f^\varepsilon, \psi) = (f, \psi)((\cdot, \cdot)$ — спаривание в $D')$. Обозначим через $O_{D'}(\varepsilon^\infty)$ (регулярные) обобщенные функции, такие, что $\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$:

$$(f^\varepsilon, \psi) = O_{D'}(\varepsilon^\alpha). \tag{3}$$

Рассмотрим линейную оболочку $H_\varepsilon(a)$ всех регуляризации функций Хевисайда вида $\Omega(\frac{x-a}{\varepsilon})$, где $\Omega(z) \in C^\infty, \Omega(-\infty) = 0, \Omega(\infty) = 0, \Omega' \in C_0^\infty$.

Линейное оболочка множества $\operatorname{span}\{1, H_\varepsilon(a)\}$ над полем вещественных чисел образует алгебру и, очевидно, для любого элемента $f^\varepsilon \in \operatorname{span}\{1, H_\varepsilon(a)\}$ справедливо представление

$$f^\varepsilon = A + BH(x-a) + O_{D'}(\varepsilon). \tag{4}$$

Мы будем говорить, алгебра $\operatorname{span}\{1, H_\varepsilon(a)\}$ есть конечно порождённая в слабом смысле алгебра с образующими $[1, H(x-a)]$.

Такая же конструкция применима для описания взаимодействия ударных волн. Именно, рассмотрим модуль над кольцом $\operatorname{span}\{1, H_\varepsilon(a)\}|_{x=b}$, порожденный элементами линейного пространсва $\operatorname{span}\{1, H_\varepsilon(a), H_\varepsilon(b)\}$. Легко видеть, что это любой элемент этого модуля может быть представлен в виде.

$$f^\varepsilon = A + BH(x-a) + CH(x-b) + O_{D'}(\varepsilon), \tag{5}$$

что означает разложение произведений (или функций от линейных комбинаций функций Хевисайда)$H(x-a)H(x-b)$ в линейную комбинацию функций Хевисайда (с коэффициентами из $\operatorname{span}\{1, H_\varepsilon(a)\}|_{x=b}$, то есть $A = g(\frac{a-b}{\varepsilon})$ и так далее).

Эти формулы (и анологичные) позволяют явно описывать взаимодействия нелинейных волн, отвечающих сингулярностям-образующим конечно порожденных в слабом смысле алгебр (модулей). В докладе будет рассказано о взаимодействии $\delta-$ударных волн [2], похожем на взаимодействии (слияние) ударных волн и на взаимодействие солитонов КДФ.

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Список литературы.

1. Маслов В. П. Три алгебры, отвечающие негладким решениям систем квазилинейных гиперболических уравнений //Успехи мат. наук. – 1980. – Т. 35. – №. 2. – С. 252-253.

2. Danilov V. G. Weak Asymptotics Method Approach to the Problem of δ-Shock Wave Interactions //Mathematical Notes. – 2020. – V. 108. – №. 1. – P. 29-38.

Некомпактные лагранжевы многообразия и их приложения

С. Ю. Доброхотов

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва;
e-mail: s.dobrokhotov@gmail.com

Обычно в задачах, связанных с каноническим оператором Маслова, заданном на некомпактном лагранжевом многообразии, предполагается, что соответствующая амплитуда – финитная функция. Однако во многих интересных ситуациях это предположение оказывается очень жестким. Мы рассматриваем различные примеры, включая случаи, когда многообразия оказываются некомпактными по импульсам и когда от условия финитности амплитуды следует отказаться. Среди них- эволюционные задачи с локализованными начальными данными, задачи о береговых волнах в бассейнах с пологими берегами и собственных функциях оператора Шредингера для атома водорода и др.

Благодарности. Работа поддержана грантом РНФ № 24-11-00213.

Численная реализация метода канонического оператора В.П. Маслова для моделирования пространственной и пространственно-временной структуры поля коротких радиоволн, распространяющихся в ионосфере Земли

Е. Б. Ипатов, Д. С. Лукин, Е. А. Палкин

Российский новый университет, Москва;
e-mail: ipatoveb@mail.ru, luknet1@yandex.ru, palkin@rosnou.ru.

Метод канонического оператора В.П.Маслова (КОМ) представляет эффективный математический подход к решению задач распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. Важным направлением его применения являются задачи распространения коротких радиоволн в неоднородной, магнитоактивной плазме земной ионосферы. Особый интерес представляют зоны пространственной и временной фокусировки радиоволн вследствие рефракции радиоволны и дисперсионных свойств ионосферы. Пример лучевой геометрии при формировании зон фокусировки в неоднородной, магнитоактивной ионосферной плазме приведен на Рис.1. Естественным образом вытекает задача о по-строении асимптотического решения волновых уравнений, описывающее распределение волнового поля в таких областях. Такое решение представляет КОМ.

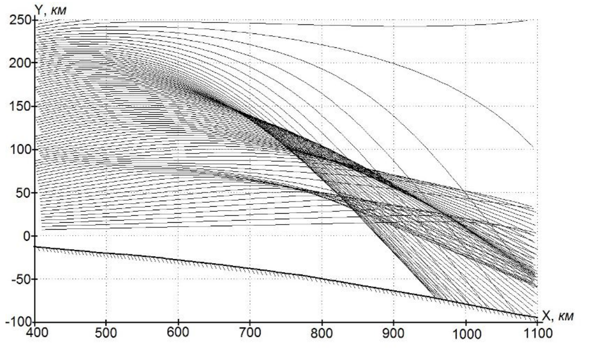


Рис. 2: Геометрия лучевых семейтв в области сложной фокусировки.

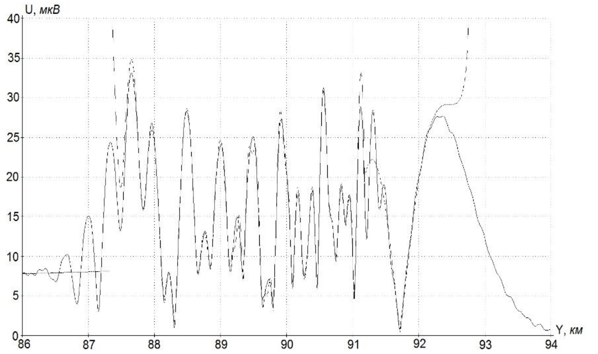


Рис. 3: Амплитуда поля для сечения $X = 1070$ км.

Алгоритм применения КОМ для численного моделирования имеет два возможных варианта: выполнить анализ интегральных форм локальных КОМ на особых картах и по-строить равномерные асимптотические разложения с помощью специальных функций волновых катастроф (СВК), или численно определить функции, входящие в локальные формы КОМ непосредственно на лагранжевых многообразиях, определенных из решений лучевых уравнений [1]. На Рис. 2 представлен результат расчета сложной пространствен-ной структуры поля, полученный прямым вычислением КОМ. Ключевыми здесь явля-ются: 1) точность и «плотность» определения лучевых траекторий; 2) анализ особых (фо-кальных) точек и выбор оптимального канонического атласа; 3) точность расчетов фазо-вых, амплитудных функций с разбиением единицы; 4) согласование фаз, амплитуд и ин-дексов карт в случае возникновения «связанных» многообразий (эффект просачивания радиоволны, отражение от границ раздела сред); 5) корректное суммирование локальных канонических операторов (учет степени когерентности).

Список литературы.

1. E.B. Ipatov, D.S. Lukin and E.A. Palkin. Maslov canonical operator in problems of nu-merical simulation of diffraction and propagation of waves in inhomogeneous media./Soviet journal of numerical analysis and mathematical modelling. VNU Science-press BV.5;6 (1990), 465 – 488.

Асимптотика скорости бегущей волны в уравнении КПП

Л. А. Калякин

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа;
e-mail: klenru@mail.ru.

В связи с задачей о возмущении бегущей волны [1] актуальной является проблема асимптотики по времени для решений, которые выходят такую волну. Для уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова (КПП)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + f(\varphi) = 0, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}$$

со времен первой работы [2] получен ряд результатов в этом направлении, и современное состояние теории отражено в обзоре [3]. В асимптотической конструкции ключевую роль играет вычисление сдвига фазы волны

$$\varphi(x,t) = \Phi(x - S(t)) + O(t^{-1})$$

или ее скорости. Формула для скорости имеет вид

$$\frac{dS}{dt} = v_* + c_0 t^{-1} + c_1 t^{-3/2} + O(t^{-2}).$$

Константы v_*, c_0, c_1 являются универсальными, т.е. не зависят от начальных данных. Они получаются из формальных асимптотических конструкций. Выражение для константы c_1 впервые предъявлено в [3]. Однако, приведенные в [3] аргументы вызывают сомнение, поскольку состоят в ссылках на недоказанные утверждения. В данном докладе указан простой и эффективный способ вычисления c_1 и последующих поправок в асимптотике волны. Эти результаты указывают возможные подходы к решению задачи [4] о возмущении бегущей волны как для параболических,так и для гиперболических уравнений

Список литературы.

1. В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов, Математическое моделирование процессов тепломассопереноса, М., Наука, 1987

2. А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме, Бюллетень МГУ. Матем., мех., 1:6 (1937),1–25

3. U. Ebert , W. van Saarloos,Front propagation into unstable states: Universal algebraic convergence towards uniformly translating pulled fronts, Physica D: Nonlinear Phenomena , V.146:1-4, (2000), 1-99

4. В. Г. Данилов, Асимптотичемкие решения типа бегущих волн для полулинейных параболических уравнений с малым параметром, Математические заметки, 48:2 (1990),148–151

Новые интегральные представления для канонического оператора Маслова на изотропном многообразии с комплексным ростком

А. И. Клевин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва;
e-mail: klyovin@mail.ru.

Канонический оператор Маслова с комплексными фазами (теория комплексного ростка, см. [1]) позволяет строить асимптотические решения широкого класса линейных (псевдо)дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром в виде осциллирующих функций, локализованных в окрестности поверхностей различных размерностей, меньших размерности исходной задачи (например, асимптотики в виде гауссовых волновых пакетов или гауссовых волновых пучков). Основной геометрический объект в таких задачах — расслоение с базой — изотропным многообразием в вещественном фазовом пространстве и слоями — плоскостями (комплексным ростком) в комплексифицированном фазовом пространстве. В настоящей работе (см. [2]) строятся новые представления канонического оператора с комплексным фазами, аналогичные предложенным недавно С. Ю. Доброхотовым, В. Е. Назайкинским и А. И. Шафаревичем (см. [3]) для вещественного канонического оператора, позволяющие избежать перехода в не очень эффективную в практических приложениях импульсно-координатную систему координат, что обычно необходимо делать при применении канонического оператора в стандартном виде. Практическим результатом является получение более простых для конкретных вычислений выражений. В некоторых случаях возможно эффективное представление асимптотических решений в виде специальных функций.

Список литературы.

1. В. П. Маслов, Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях, Наука, Москва, 1977

2. A. I. Klevin, New Integral Representations for the Maslov Canonical Operator on an Isotropic Manifold with a Complex Germ, Russ. J. Math. Phys., 29:2 (2022), 183–213

3. С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, А. И. Шафаревич, Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах, Изв. РАН. Сер. матем., 81:2 (2017), 53–96

Диффузия и формальная устойчивость в гамильтоновых системах

В. В. Козлов

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва;
e-mail: vvkozlov@presidium.ras.ru

Будет рассказано о новым механизме диффузии в гамильтоновых системах дифференциальных уравнений, который отличается от механизма переходных цепочек, предложенного В.И. Арнольдом. Обсуждаются вопросы существования инвариантных торов аналитических гамильтоновых систем, которые обладают лишь конечной гладкостью, или которые только непрерывны. Будет приведен пример аналитической гамильтоновой системы с формально устойчивым положением равновесия, но которое на самом деле неустойчиво по Ляпунову. При анализе устойчивости здесь используется новый механизм диффузии.

Стохастические уравнения Линдблада непрерывно наблюдаемых квантовых систем и их многочастичные пределы

В. Н. Колокольцов

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Москва;
e-mail: v.n.kolokoltsov@gmail.com.

Многочастичным пределам квантовых взаимодействий и соответствующим нелиней-ным уравнениям, как на векторах Гильбертова пространства, так и на матрицах плотности, были посвящены многие работы В.П. Маслова. В недавних работах автор построил теорию многочастичных пределов непрерывно наблюдаемых квантовых систем, подучив новые предельные нелинейные стохастические уравнения квантовой фильтрации. В качестве применения этих предельных уравнений была развита теория квантовых игр среднего поля. Однако строгое обоснование этих пределов было проведено лишь для чистых состояний, то есть для нелинейных стохастических уравнений в Гильбертовом пространстве. Ныне предлагается развитие этой теории для соответствующих уравнений на смешаных состояний, то есть для уравнений на матрицы плотности типа нелинейных стохастических уравнений Линдблада. С математической точки зрения трудность, которую следует преодалеть, состоит в том, что естественным пространством состояний для этих уравнений является Банахово пространство симметричных операторов с конечным следом, для которого подходящего аналога теории стохастических интегралов и стохастических уравнений Ито просто не существует. В докладе предлагается подход, позволяющий справиться с этой проблемой и построить последовательную теорию всех возникающих в этой теории нелинейных опеаторнозначных стохастических уравнений, которые можно рассматривать также как своего рода бесконечномерные комплекснозначные нелинейные диффузии типа МакКина-Власова.

Экспоненциальная локализация собственных функций магнитного оператора Шредингера

Ю. А. Кордюков

ИМВЦ УФИЦ РАН, Уфа;
e-mail: yurikor@matem.anrb.ru

Рассмотрим квазиклассический магнитный оператор Шредингера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ вида

$$H_\hbar = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - A_j(x) \right)^2 + \hbar V(x), \quad \hbar > 0,$$

где $A_j, j = 1, \ldots, 2n$, и V — гладкие вещественнозначные функции. Положим

$$B_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}, \quad j, k = 1, \ldots, 2n.$$

Предполагается, что функции $B_{jk}, j, k = 1, \ldots, 2n$, и V ограничены в $\mathbb{R}^{2n}$ вместе с производными произвольного порядка. Предполагается также, что ранг матрицы $B(x) = (B_{jk}(x))$ для любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$ равен $2n$, причем существует такая постоянная $c_0 > 0$, что $|B(x)| \geq c_0$ для любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$.

Для любого $x \in \mathbb{R}^{2n}$ обозначим через $\pm i a_j(x), j = 1, \ldots, n$, с $a_j(x) > 0$ собственные значения кососимметрической матрицы $B(x)$. Положим

$$\Lambda_{\mathbf{k}}(x) = \sum_{j=1}^{n} (2k_j + 1) a_j(x) + V(x), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Для конечного отрезка $[a, b]$ рассмотрим замкнутое подмножество $\mathcal{K}_{[a,b]}$ в $\mathbb{R}^{2n}$, состоящее из всех точек $x \in \mathbb{R}^{2n}$, для которых $\Lambda_{\mathbf{k}}(x) \in [a, b]$ при некотором $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^n$.

Предположим, что множество $\mathcal{K}_{[a,b]}$ компактно.

Теорема 1. *Существуют такие $\epsilon > 0$ и $\hbar_0 > 0$, что для любого $\hbar \in (0, \hbar_0]$ спектр оператора $H_\hbar$ на интервале $[\hbar a + \epsilon \hbar^{5/4}, \hbar b - \epsilon \hbar^{5/4}]$ дискретен.*

Теорема 2. *Для любых $a_1 > a$ и $b_1 0$ и $C, c > 0$, что для любой собственной функции $u_\hbar \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \cap L^2(\mathbb{R}^{2n})$ оператора $H_\hbar$ при некотором $\hbar \in (0, \hbar_0]$ с соответствующим собственным значением $\lambda_\hbar \in [\hbar a_1, \hbar b_1]$: $H_\hbar u_\hbar = \lambda_\hbar u_\hbar$, справедлива оценка*

$$\int_X e^{2cd(x, \mathcal{K}_{[a,b]})/\hbar^{1/2}} |u_\hbar(x)|^2 dx \leq C \|u_\hbar\|^2,$$

где $d(x, \mathcal{K}_{[a,b]})$ обозначает расстояние от x до $\mathcal{K}_{[a,b]}$.

О корректной разрешимости дробно-операторных уравнений методом Маслова–Хевисайда

Д. В. Костин

Воронежский государственный университет, Воронеж;
e-mail: dvkostin@rambler.ru

В банаховом пространстве E рассматривается линейный замкнутый оператор A с областью определения $D(A) \subset E$ такой, что оператор $-A$ является генератором (производящим оператором) сильно непрерывной полугруппы $U(t, -A)$ класса C_0 с оценкой

$$\|U(t, -A)\varphi\| \le Me^{-\omega t}, \quad \omega > 0. \tag{1}$$

рассматривается полиномиальное уравнение

$$P_n(A^\alpha)u = \sum_{m=0}^{n} a_m (A^\alpha)^m u = f, \tag{2}$$

$a_m \in \mathbb{C}$, с M–символом Маслова скалярного многочлена $P_n(x)$.

Ставится вопрос об ограниченной обратимости оператора $P_n(A^\alpha)$, что соответствует корректной разрешимости по Адамару уравнения (2). Ответ на который дает следующая

Теорема корректности I. Если A удовлетворяет условиям (1), а операторный полином $P_n(A^\alpha)$ имеет символ Маслова $P_n(x)$ с корнями p_k, удовлетворяющими условиям $\max\limits_{k=1,\dots,m} Re p_k = \overline{p} < \omega^\alpha$, то для $f \in D(A^n)$ существует единственное решение уравнения (2) $u \in D(A^n)$, которое представимо в виде

$$u = \int_0^\infty \int_0^\infty h_{\alpha,t}(\xi) q(t) U(\xi, -A) f d\xi dt,$$

где $h_{\alpha,t}(\xi)$— функция Иосиды, а $q(t)$ является решением задачи

$$\sum_{m=0}^{n} a_m q^{(m)}(t) = \delta, \quad q(0) = q'(0) = \dots = q^{(n-1)}(0) = 0.$$

Здесь δ— дельта–функция Дирака.

При этом выполняется оценка корректности

$$\|u\| \le \frac{M\|f\|}{|a_n|(\omega^\alpha - \overline{p})^n}.$$

Если операторный полином $P_n(A^\alpha)$ имеет символ Маслова $P_n(x)$ с простыми корнями p_k, $k = 1, \dots, n$ и они удовлетворяют условию $Re\, p_k < \omega^\alpha$, то для теоремы корректности справедлива следующая формулировка

Теорема корректности II. Решение уравнения (2) имеет вид

$$u = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(p_k)} \int_0^\infty E_{\alpha,\alpha}(p_k t^\alpha) U(t, -A) f dt,$$

где $E_{\alpha,\alpha}$—функция Миттаг–Леффлера и справедлива оценка корректности

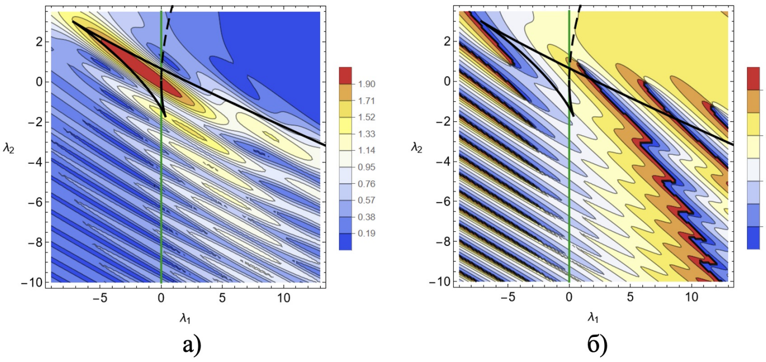
$$\|u\| \le M \sum_{k=1}^{n} \frac{\|f\|}{|p'_n(p_k)|(\omega^\alpha - Re p_k)}.$$

Система дифференциальных уравнений для определения фундаментального вектора специальных функций волновых катастроф

А. С. Крюковский, Д. С. Лукин, Д. В. Растягаев

АНО ВО «Российский новый университет», Москва;
e-mail: kryukvsky56@yandex.ru, luknet1@yandex.ru, rdv@rosnou.ru.

Разработан метод получения линейной системы дифференциальных уравнений (ДУ) для фундаментального вектора специальных функций волновых катастроф (СВК). Фундаментальный вектор СВК содержит основную СВК и ряд её первых производных и необходим для построения равномерных асимптотик в областях структурно-устойчивых волновых катастроф, порождаемых фокусировкой и дифракцией электромагнитных, гра-витационных и акустических волн. Для основных катастроф (без ограничений) система ДУ, является однородной, для краевых катастроф одно из уравнений содержит в правой части сужение основной СВК на край, для угловых катастроф – два уравнения являются неоднородными и т.д. Сужения СВК входят в равномерную асимптотику, причем суже-ния краевых СВК, это основные СВК, а сужения угловых СВК – краевые СВК. Они так-же образуют фундаментальные вектора. Анализ канонической системы ДУ в частных производных для фундаментального вектора СВК позволил получить системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), для решения которых применимы стандартные методы, обладающие высоким быстродействием, точностью и устойчивостью. В частности, системы ОДУ получены для основных СВК: $A_{2-5}, D_{4-5}, E_6, P_8$, краевых СВК: $B_{2-5}, C_{2-4}, F_4, K_{4,2}, F_{1,0}$, угловых СВК: A_1^4, $A_1 A_2 A_1^2$ и др. [1-3]. Пример расчета амплитудной и фазовой структуры краевой СВК особенности типа B_5 приведён на рис.1.



а) б)

Рис. 4: Амплитудная (а) и фазовая (б) структуры СВК краевой катастрофы B_5 [4].

Список литературы.

1. А. С. Крюковский. Дифракция и распространение электромагнитных и акустических волн. М.: МФТИ. (1992), 29-48.

2. A. S. Kryukovskii, D. S. Lukin. Journal of Communications Technology and Electronics, (2003). V.48. No 8, 831-840.

3. А. С. Крюковский Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф. М.: РосНОУ, 2013.

4. M. S. Domnina, A. S. Kryukovsky, D. V. Rastyagaev. Journal of Communications Technology and Electronics. (2023). V. 68. No S3. 338-348.

Операторы Шредингера с точечными взаимодействиями. Задача Гриневича–Новикова.

М. М. Маламуд[1], *В. В. Марченко*[2]

[1]РУДН, Москва, РФ;
[2]МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, РФ;
e-mail: malamud3m@gmail.com, wmarchenko@rambler.ru

Хорошо известно, что положительный спектр оператора Шредингера $-\Delta+q$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$, с убывающим потенциалом $q(x) = O(1 + |x|)^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, чисто абсолютно непрерывен. Однако, оператор $-\Delta + q$ может иметь (вложенное) нулевое собственное значение. Этот эффект для случая рациональных потенциалов $q(x_1, x_2)$ обнаружен в [1] Таймановым и Царевым, использовавшим для этого преобразование Мутара.

Для оператора Шредингера $-\Delta + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \delta(x - x_j)$ с точечными взаимодействиями этот эффект был обнаружен Гриневичем и Новиковым в [2]. Напомним, что согласно Березину–Фаддееву под оператором Шредингера с точечными взаимодействиями $X = \{x_j\}_1^m (\subset \mathbb{R}^3)$ понимают любую реализацию (самосопряженное расширение) $\mathbf{H}_B$ трехмерного оператора Лапласа в $L^2(\mathbb{R}^3)$, суженного на область: $\mathrm{dom}(\mathbf{H}) = \big\{f \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3) : \ f(x_j) = 0, \ j \in \{1, \ldots, m\}\big\}$. Реализации $\mathbf{H}_B$ параметризуются граничными матрицами $B = B^* \in \mathbb{C}^{m\times m}$, связывающими подходящие следы функций из области $\mathrm{dom}(\mathbf{H}^*)$ максимального оператора.

В работе [2] при условии, что $\{x_j\}_{j=1}^m$ – вершины правильного четного m-угольника, доказано, что при скалярной граничной матрице $B = \alpha_0 I$ и специальном α_0 ядро оператора Шредингера $\ker \mathbf{H}_B$ – ненулевое. Более того, в [2] высказана и проверена для четных $m \le 96$ гипотеза о том, что кратность нулевого собственного значения оператора $\mathbf{H}_B$ равна единице. Полное решение этой задачи, поставленной в [2], получено в недавней заметке [3]. Там же, в [3], получено описание инвариантных реализаций $\mathbf{H}_B$ общего вида, обладающих свойством $\ker \mathbf{H}_B \ne \{0\}$. Для этого использовано полученное в [4] описание всех реализаций, инвариантных относительно группы симметрий множества $X = \{x_j\}_1^m (\subset \mathbb{R}^3)$, при помощи теплицевых матриц специального вида.

Доклад будет посвящен как решению задачи Гриневича–Новикова, так и описанию общих инвариантных реализаций $\mathbf{H}_B$, для которых $\ker \mathbf{H}_B \ne \{0\}$.

Список литературы.

1. И. А. Тайманов, С. П. Царев, ТМФ, 157:2 (2008), 188–207.

2. П. Г. Гриневич, Р. Г. Новиков, ТМФ, 193:2 (2017), 309–314.

3. M.M. Malamud and V.V. Marchenko, On Kernels of Invariant Schrödinger Operators with Point Interactions. Grinevich–Novikov Conjecture. Dokl. Math. 109:2 (2024)

4. М. М. Маламуд, В. В. Марченко, Матем. заметки, 110:3 (2021), 471–477.

Операция комплексификации транзитивных алгеброидов Ли

А. С. Мищенко

Московский государственный университет им. М.В.Ломонсова;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики;
e-mail: asmish-prof@yandex.ru

Теория алгеброидов Ли допускает многочисленные обобщения на случай поля комплексных чисел, которые позволяют переносить геометрию алгеброидов Ли на категории голоморфных многообразий, кэлеровых многообразий или почти комплексных многообразий. Строгого же введения в теорию комплексных алгеброидов Ли до сих пор не появилось, как, впрочем, и обоснованных мотивировок как теории комплексных алгеброидов Ли, так и операций комплексификации и овеществления для алгеброидов Ли. В докладе обсуждается вопрос возможности комплексификации алгеброидов Ли основанных на конструкции М.Атья, так называемых алгеброидов Ли-Атья. Приводятся естественные мотивировки построения тождеств Якоби, правила Лейбница и модульной структуры в алгеброидах Ли-Атья, а также векторных расслоений, оснащенных анкором.

О фазовых и конфигурационных пространствах для одного класса дифференциальных уравнений, вырождающихся на границе области

В. Е. Назайкинский

ИПМех РАН, Москва;
e-mail: nazaikinskii@yandex.ru

Пусть Ω — гладкое многообразие с краем. Гамильтонианы на $T^*\Omega$ вида $H(x,p) = \phi(x)\langle p, B(x)p\rangle$, где $B(x) = B^*(x) > 0$ — гладкая матричная функция, а $\phi(x)$ — определяющая функция края $\partial\Omega$ (т.е. $\phi(x) > 0$ при $x \in \Omega^\circ = \Omega \setminus \partial\Omega$, $\phi(x) = 0$ на $\partial\Omega$ и $\nabla\phi(x) \neq 0$ на $\partial\Omega$), встречаются в задаче о набеге длинных волн на пологий берег (см. [1] и приведённую там литературу). Их фазовый поток неполон (подходя к $\partial\Omega$, траектории уходят на бесконечность по p за конечное время). В [2] введены симплектическое пространство Φ и гладкая проекция $\pi\colon \Phi \to \Omega$, такие, что $T^*\Omega^\circ \simeq \pi^{-1}(\Omega^\circ)$ — плотное открытое подмножество в Φ, а функции $H(x,p)$ продолжаются с $\pi^{-1}(\Omega^\circ)$ до гладких гамильтонианов на Φ с полным фазовым потоком. Альтернативное определение пространства Φ дано в [3]. Другое фазовое пространство $\widehat{\Phi}$ с аналогичными свойствами было введено в [4] с помощью следующей конструкции. Рассмотрим замкнутое многообразие $\widehat{\Omega} = \{(\xi,x)\colon \xi^2 = 2\phi(x)\} \subset \mathbb{R}^1_\xi \times \Omega$, положим $\widehat{\Phi} = T^*\widehat{\Omega}$ и определим проекцию $\widehat{\pi}\colon \widehat{\Phi} \to \Omega$ как композицию $T^*\widehat{\Omega} \to \widehat{\Omega} \to \Omega$.

В докладе изучается связь между Φ и $\widehat{\Phi}$. Заметим, что множество $\widehat{\pi}^{-1}(\Omega^\circ) \subset \widehat{\Phi}$ канонически диффеоморфно дизъюнктному объединению $T^*\Omega^\circ \sqcup T^*\Omega^\circ$ и определим естественную проекцию $\alpha\colon \widehat{\pi}^{-1}(\Omega^\circ) \simeq T^*\Omega^\circ \sqcup T^*\Omega^\circ \to T^*\Omega^\circ \simeq \pi^{-1}(\Omega^\circ)$, сужение которой на каждый из экземпляров пространства $T^*\Omega^\circ$ — тождественное отображение. Далее, определим инволюцию $\widehat{\tau}\colon \widehat{\Phi} \to \widehat{\Phi}$ как каноническое преобразование, ассоциированное с отображением $(\xi,x) \mapsto (-\xi,x)$ базы $\widehat{\Omega}$. Множество $\widehat{\Phi}_0 = \operatorname{Fix}\widehat{\tau}$ её неподвижных точек — гладкое $(n-2)$-мерное подмногообразие в $\widehat{\Phi} \setminus \widehat{\pi}^{-1}(\Omega^\circ)$.

Теорема. *Отображение α продолжается по непрерывности до двулистного накрытия $\widehat{\alpha}\colon \widehat{\Phi} \setminus \widehat{\Phi}_0 \to \Phi$. При этом $\Phi = (\widehat{\Phi} \setminus \widehat{\Phi}_0)/\mathbb{Z}_2$, где действие нетривиального элемента группы $\mathbb{Z}_2$ задается инволюцией $\widehat{\tau}$.*

Список литературы

1. С.Ю. Доброхотов, В.Е. Назайкинский, “Асимптотики волновых и вихревых локализованных решений линеаризованных уравнений мелкой воды”, в сб. “Актуальные проблемы механики”, М.: Наука, 2015, с. 98–139.
2. В.Е. Назайкинский, “Геометрия фазового пространства для волнового уравнения, вырождающегося на границе области”, Матем. заметки, 92:1 (2012), 153–156.
3. А.Ю. Аникин, С.Ю. Доброхотов, В.Е. Назайкинский, А.А. Толченников, “Униформизация и квазиклассические асимптотики для класса уравнений, вырождающихся на крае многообразия”, Проблемы матем. анализа, 122 (2023), 5–24.
4. S. Bolotin, D. Treshchev, “Another billiard problem”, Russ. J. Math. Phys., 31:1 (2024), 50–59.

Асимптотика периодических и стационарных решений начально-краевых задач для уравнений реакция-диффузия тихоновского типа

Н. Н. Нефедов

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва;
e-mail: nefedov@phys.msu.ru

В докладе представленырезультаты исследования новых классов начально-краевых задач для систем так называемых быстрых и медленных сингулярно возмущенных систем уравнений реакция-диффузия в случае быстрого и медленного уравнений, которые принято называть системами Тихоновского типа. Получены условия существования решений стационарных решений с переходными слоями, а также периодических решений в случае периодических источников, построена асимптотика решений, доказано существование решений с построенной асимптотикой, получены условия асимптотической устойчивости по Ляпунову таких решений как решений соответствующих начально-краевых задач. В основе исследований лежит так называемый асимптотический метод дифференциальных неравенств, развитый на системы сингулярно возмущенных уравнений (см. [1]).

Результаты продемонстрированы на задаче вида:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}_u(u,v) := \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} - g(u,v,x,\varepsilon) = 0,\\
&\mathcal{N}_v(u,v) := \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - f(u,v,x,\varepsilon) = 0,\ x \in (0,1),\ t \in R^+,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}(0,t,\varepsilon) = u^0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = u^1,\ t \in R^+,\\
&v(0,t,\varepsilon) = v^0,\ v(1,t,\varepsilon) = v^1,\ t \in R^+,\\
&u(x,0,\varepsilon) = u_{init}(x,\varepsilon),\ v(x,0,\varepsilon) = v_{init}(x,\varepsilon),\ x \in [0,1],
\end{aligned}$$

и ее периодическом параболическом аналоге в многомерном по пространственной переменной случае. Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, u^0, u^1, v^0, v^1 - заданные постоянные, $u_{init}(x,\varepsilon), v_{init}(x,\varepsilon)$ - заданные функции. Такие системы естественным образом возникают при моделировании быстрых бимолекулярных реакций в случае, когда один из источников (реакция, нелинейный источник, взаимодействие) интенсивный (порядка $1/\varepsilon^2$), а второй порядка единицы.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00069).

Список литературы.

1. Н.Н.Нефедов, Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция-диффузия-адвеция: теория и применение, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 61:12 (2021), 2074–2094.

Периодические пограничные слои в системах реакция-диффузия-адвекция тихоновского типа с KPZ-нелинейностями

Н.Н. Нефедов,[1] *Е.И.Никулин*[1], *А.О.Орлов*[1]

[1]МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, Москва;
e-mail: nefedov@phys.msu.ru, nikulin@physics.msu.ru, orlov.andrey@physics.msu.ru.

Рассматривается система быстрого и медленного уравнений реакция-диффузия-адвекция с нелинейностями, содержащими градиент искомой функции в квадрате (KPZ - нелинейностями):

$$\mathcal{N}_u(u,v) := \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \varepsilon^2 A(u,x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - g(u,v,x,t,\varepsilon) = 0,\ 0 < x < 1,\ t \in R,$$

$$\mathcal{N}_v(u,v) := \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} - B(v,x,t)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - f(u,v,x,t,\varepsilon) = 0,\ 0 < x < 1,\ t \in R,$$

$$u(x,t,\varepsilon) = u(x,t+T,\varepsilon),\ v(x,t,\varepsilon) = v(x,t+T,\varepsilon),\ x \in [0,1].$$

где $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ - малый параметр.

Пусть для функции $u(x)$ задан один из следующих вариантов граничных условий:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t,\varepsilon) = u^0(t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon) = u^1(t),\ t \in R$$

или

$$u(0,t,\varepsilon) = u^0(t),\ u(1,t,\varepsilon) = u^1(t),\ t \in R.$$

Для функции v задано условие Дирихле:

$$v(0,t,\varepsilon) = v^0(t),\ v(1,t,\varepsilon) = v^1(t),\ t \in R.$$

Проведено исследование периодических по времени решений поставленных задач. Построена погранслойная асимптотика решений в случае граничных условий Неймана и Дирихле. Рассмотрен случай квазимонотонных источников и систем без требования квазимонотонности. Для доказательства теорем существования используется асимптотический метод дифференциальных неравенств.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект №23-11-00069.

Список литературы.

1. Н. Н. Нефедов, “Существование, асимптотика и устойчивость по Ляпунову решений периодических параболических задач для систем реакция-диффузия тихоновского типа”, Матем. заметки, 115:2 (2024), 276–285; Math. Notes, 115:2 (2024), 232–239

2. Н. Н. Нефедов, А. О. Орлов, ”Существование и устойчивость решений с внутренним переходным слоем уравнения реакция-диффузия-адвекция с KPZ-нелинейностью”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:8 (2023), 1007–1021.

3. P. Hess, Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity. Pitman Resaerch Notes in Math. Series, Longman Scientific, 1991.

Асимптотическое распределение полюсов вещественных решений уравнения Пенлеве III

В. Ю. Новокшенов

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа;
e-mail: novik53@mail.ru.

Изучается двухпараметрическое семейство вещественных решений специального уравнения Пенлеве третьего типа,

$$u'' = \frac{(u')^2}{u} - \frac{u'}{x} + 4\frac{(n-1)u^2 - n}{x} + 4u^3 - \frac{4}{u},$$

которое применяется во многих моделях математической физики. С помощью метода изомонодромных деформаций строятся асимптотики при $x \to \infty$ на вещественной полуоси, в том числе распределение полюсов сингулярного решения. При $n \gg 1$ показано, что вещественные полюсы отсутствуют при $x < n/2$, а правее точки $x = n/2$ полюсы распределены как нули функций Бесселя. В окрестности этой точки изучен переходный слой, сшивающий регулярное и сингулярное решения. Оказывается, что этот переходный слой продолжается в комплексную плоскость x, где существуют два типа решеток полюсов вне и внутри окружности $|x| = n/2$.

Иллюстрацией указанного распределения полюсов служит Рис. 1, где левой части изображены лучи, вдоль которых расположены полюсы при $|x| < n/2$, а вне этого круга полюсы образуют решетку нулей деформированной эллиптической функции.

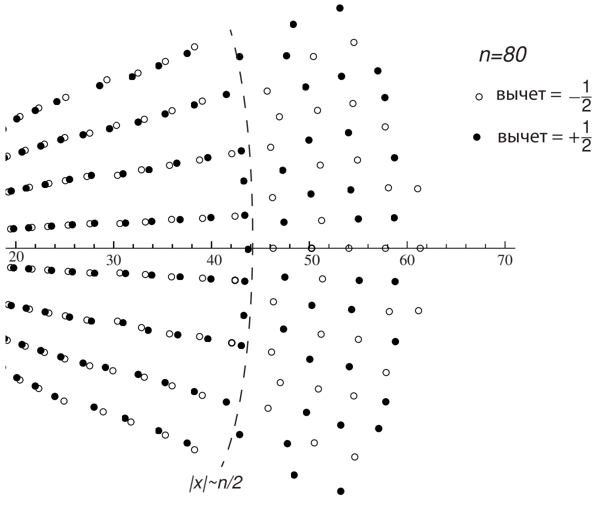


Рис. 5: Перестройка распределения полюсов в правой полуплоскости $\operatorname{Re} x > 0$ на окружности $|x| = n/2$.

Список литературы.

1. В. Ю. Новокшенов, Матем. сборник, (2024) (в печати)

Динамика и структура полей физических переменных в поверхностных течениях жидкостей в различных моделях

А. А. Очиров[1], *К. Ю. Лапшина*[1], *У. О. Трифонова*[2]

[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва;
[2] ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Ярославль;
e-mail: ochir@ipmnet.ru, krislapshina03@gmail.com,
ulya-trifonova02@yandex.ru.

Поверхностные течения в жидкостях привлекают внимание исследователей на протяжении многих столетий. Математическое изучение процессов начинается с работ Л. Эйлера и Дж. Г. Стокса, которые отмечали необходимость постановки задачи с учетом гетерогенности жидкости: неравномерного распределения плотности из-за неоднородности температуры и концентрации примесей. В настоящее время развитие математического аппарата и технологий численного счета и моделирования позволяет решать задачи с учетом неравномерного распределения плотности. В исследовании рассмотрена задача о распространении поверхностных периодических течений в разных моделях жидкости: в идеальной однородной и стратифицированной, вязкой однородной и стратифицированной [1], произведен учет сжимаемости жидкости [2]. Математическая формулировка задачи представляет собой редуцированную систему фундаментальных уравнений гидродинамики с физически обоснованными граничными условиями [3]. Рассматриваются периодические течения, характеризующиеся положительно определенной частотой волнового движения и волновым вектором, компоненты которого могут быть комплексными. Такой подход позволяет построить дисперсионные уравнения, связывающие компоненты волнового вектора с частотой, определяющие динамику и структуру периодических течений. Полученные дисперсионные соотношения решаются с применением методов теории регулярных и сингулярных разложений [4]. При решении естественным образом выделяются регулярные компоненты, определяющие крупномасштабные волновые компоненты течений и сингулярные компоненты, описывающие тонкоструктурные лигаментные компоненты. Регулярные решения в предельных переходах сводятся к известным волновым соотношениям в идеальной жидкости. Сингулярные решения при выполнении предельных переходов вырождаются. Исследованы поля физических переменных в разных моделях среды. Визуализированы компоненты, определяющие тонкую структуру течений в полях плотности и давления.

Благодарности. Работа выполнена по теме государственного задания (No госрегистрации 124012500442-3)

Список литературы.

1. Чашечкин Ю. Д., Очиров А. А. Расчет двумерных периодических возмущений свободной поверхности жидкости в различных моделях среды Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 513: 1 (2023), 95–102

2. Chashechkin, Y.D.; Ochirov, A.A. Periodic Flows in a Viscous Stratified Fluid in a Homogeneous Gravitational Field. Mathematics, 11 (2023) 4443

3. Chashechkin Y. D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows Axioms, 10:4 (2021) 286

4. Найфэ А. Введение в методы возмущений М.: Мир, Москва, 1984

Осциллирующий туннельный эффект основных состояний для оператора на гиперболоиде

С. В. Румянцева

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва;
e-mail: srumyanceva@hse.ru

Данная работа посвящена построению квазиклассических туннельных асимптотик спектра квадратичного оператора на неприводимом эрмитовом представлении алгебры Ли su(1,1):

$$\hat{H} = \hat{Y}_1^2 - \hat{Y}_2^2 + \alpha(\hat{A} - \beta)^2,$$

где эрмитовы операторы $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{A}$ являются образующими алгебры. Классические траектории получаются после пересечения двух гиперболоидов: гиперболоида симплектического листа $\hat{A}^2 - \hat{Y}_1^2 - \hat{Y}_2^2$ и гиперболоида рассматриваемого оператора при постоянной энергии. В координатах Дарбу на гиперболоиде гамильтониан задает ландшафт симметричной двойной ямы. В работе [1] было доказано, что асимптотика туннельного расщепления спектра не только экспоненциально убывает, как обычно бывает в двойных ямах, но и быстро осциллирует. Данный эффект можно объяснить тем, что представление спектральной задачи в координатах Дарбу в пространстве L_2 имеет вид не дифференциального уравнения Шредингера 2-ого порядка, а вид обыкновенного дифференциального уравнения 4-ого порядка. Применяя когерентное преобразование, мы показали, что спектральная задача для рассматриваемого оператора переходит в дифференциальное уравнение 2-ого порядка в пространстве голоморфных функций. Для решения задачи о построении асимптотики разности пары близких энергий были согласованы асимптотики собственных функций оператора в окрестностях точек поворота, используя комплексный метод ВКБ [2]. Мы отдельно рассматриваем случаи верхних и нижних энергетических уровней, так как от этого зависит тип точек поворота. В докладе будут представлены теоремы о виде асимптотик туннельного расщепления верхних и нижних энергетических уровней, а также утверждение об их связи. Было получено, что туннельные асимптотики для верхних энергетических уровней отличаются от туннельных асимптотик для основного состояния в $\sqrt{\pi/e}$ раз. Аналогичное утверждение также верно для уравнений Шредингера с симметричным двуямным потенциалом [3].

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Список литературы.

1. Е. В. Выборный, С. В. Румянцева, Квазиклассические асимптотики осциллирующего туннелирования для квадратичного гамильтониана на алгебре su(1,1), Мат. заметки, 112:5 (2022), 665-681

2. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, Изд. Наука, Москва, 1976

3. С. Ю. Доброхотов, В. Н. Колокольцов, В. П. Маслов, Расщепление нижних энергетических уровней уравнения Шредингера и асимптотика фундаментального решения уравнения, ТМФ, 87:3 (1991), 323-375

Асимптотические спектральные серии оператора Шрёдингера с дельта-потенциалом в полюсах двух- и трехмерных поверхностей вращения

В. В. Рыхлов[12], *А. И. Шафаревич*[12]

[1]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;
[2]Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва;
e-mail: vladderq@gmail.com, shafarev@yahoo.com

Рассматривается спектральная задача для оператора Шрёдингера

$$H\psi = E\psi + o(h), \quad H = -\frac{h^2}{2}\Delta + \delta_{x_1}(x) + \delta_{x_2}(x), \quad x \in M,$$

где $h \to +0$, x_j – полюса M, M – двумерная $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ или трехмерная $M^3 \subset \mathbb{R}^4$ поверхность вращения:

$$M^2 = \{(v(s)\cos\varphi, v(s)\sin\varphi, w(s)) \,\big|\, s \in [s_1, s_2], \varphi \in \mathbb{S}^1\} \quad \text{и}$$

$$M^3 = \{(v(s)\cos\theta\cos\varphi, v(s)\cos\theta\sin\varphi, v(s)\sin\theta, w(s)) \,\big|\, s \in [s_1, s_2], \varphi \in \mathbb{S}^1, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\},$$

$s \in [s_1, s_2]$ – натуральный параметр кривой $(v(s), w(s)) \subset \mathbb{R}^2$, и значения s_j соответствуют точкам x_j.

Оператор H определен на функциях из $L^2(M)$ как самосопряженное расширение оператора Δ, действующего на функциях $\psi_0 \in W_2^2(M)$, обращающихся в нуль в полюсах x_j. В области определения оператора H лежат функции, имеющие особенности в точках x_j, а именно, для $\psi \in D(H)$ имеется асимптотическое равенство [1] при $x \to x_j$

$$\psi(x) = -\frac{a_j}{2\pi}\ln d(x, x_j) + b_j + o(1) \text{ на } M^2, \quad \psi(x) = \frac{a_j}{4\pi}\frac{1}{d(x, x_j)} + b_j + o(1) \text{ на } M^3, \tag{6}$$

где $d(x, x_j)$ – геодезическое расстояние на M между точками x и x_j, а коэффициенты a_j при сингулярной части и b_j при регулярной связаны следующим образом:

$$i(\mathbf{I} + U)a + \frac{2}{h^2}(\mathbf{I} - U)b = 0, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, U – некоторый унитарный оператор.

В работе получены явные выражения для условий квантования Бора–Зоммерфельда–Маслова, позволяющие изучить поведение асимптотического спектра. Асимптотические собственные функции имеют представление в терминах функций Бесселя и Неймана.

Список литературы.

1. J. Brüning, V. A. Geyler, Scattering on compact manifolds with infinitely thin horns, J. Math. Phys., 44:2 (2003), 371–405

2. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, Изд. Наука, Москва, 1976

3. W. Wasow, Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations, Изд. Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1965

Аналитические и алгебраические индексы эллиптических операторов, ассоциированных с группами квантованных канонических преобразований

А. Ю. Савин

Российский университет дружбы народов, Москва;
e-mail: a.yu.savin@gmail.com

С представлением дискретной группы G в пространстве функций на многообразии M квантованными каноническими преобразованиями ассоциирован класс операторов, называемых G-операторами, порожденный операторами представления и псевдодифференциальными операторами. Этот класс операторов довольно широк и охватывает множество интересных примеров. Например, если представление индуцировано действием группы G на M диффеоморфизмами, то мы получаем так-называемые операторы со сдвигами (см. работы Карлемана, Антоневича, Скубачевского и др.).

Для G-операторов были получены условия эллиптичности в общем случае. В случае операторов со сдвигами были получены формулы индекса для многих классов действий групп на многообразии.

Мы рассматриваем проблему вычисления индекса G-операторов для групп квантованных канонических преобразований общего вида. Это довольно сложная задача; например, она содержит в качестве частного случая задачу Атьи–Вайнштейна об индексе квантованных канонических преобразований. Для решения этой проблемы предлагается использовать подход, связанный с алгебраической теорией индекса (см. работы Федосова, Неста, Цыгана и др.). При этом вычисление фредгольмова индекса сначала сводится к задаче вычисления так называемого алгебраического индекса, определяемого через полные символы операторов (пользуясь квазиклассическими методами), а затем вычисление алгебраического индекса через главный символ оператора и характеристические классы многообразия (переход от индекса в алгебре к индексу в топологии).

Благодарности

Доклад основан на совместной работе с Эльмаром Шроэ (Ганновер).

Список литературы

1. В. П. Маслов, Теория возмущений и асимптотические методы, Изд. МГУ, Москва, 1965

2. B.V. Fedosov, Deformation Quantization and Index Theory, Mathematical Topics, vol. 9, Akademie Verlag, Berlin, 1996

3. A. Gorokhovsky, N. de Kleijn, R. Nest, Equivariant algebraic index theorem, J. Inst. Math. Jussieu (2019) 1–27

4. A. Savin, E. Schrohe, Analytic and algebraic indices of elliptic operators associated with discrete groups of quantized canonical transformations. J. Funct. Anal. 278 (2020), no. 5, 108400, 45 pp.

Асимптотика решения начально-краевой задачи для одномерного уравнения Клейна–Гордона с переменными коэффициентами

Е. С. Смирнова[1,2]

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва;
[2]Балтийский Федеральный Университет им. Канта, Калининград;
e-mail: smirnova.ekaterina.serg@gmail.com.

В работе рассматривается одномерное уравнение Клейна–Гордона с переменными коэффициентами на полуосях $y \geq 0$, $\tau \geq 0$:

$$h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - h^2 c^2(y) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + a(y)U = 0 \tag{8}$$

с граничным и начальными условиями:

$$U\Big|_{y=0} = F(\tau), \tag{9}$$

$$U\Big|_{\tau=0} = U_\tau\Big|_{\tau=0} = 0. \tag{10}$$

Такая начально-краевая задача для уравнения Клейна–Гордона возникает из физической задачи по моделированию волновых возмущений в атмосферном газе. Одномерное уравнение Клейна-Гордона возникает путем редуцирования одномерной системы уравнений гидротермодинамки для вертикальной скорости, давления и плотности до одного уравнения на скорость (8) [1, 2].

Построено асимптотическое при $0 < h << 1$ решение задачи (8)-(10), которое состоит из быстроубывающей при отдалении от точки $y = 0$ (погранслойной) части и бегущей быстроосциллирующей части [2], представляемой в виде канонического оператора Маслова [1,3].

Благодарности.

Работа выполнена совместно с Доброхотовым С.Ю. при финансовой поддержке БФУ им. Канта в рамках научного проекта №122051300013-8.

Список литературы.

1. S. Dobrokhotov, E. Smirnova. Asymptotics of the Solution of the Initial Boundary Value Problem for the One-Dimensional Klein–Gordon Equation with Variable Coefficients. Russian Journal of Mathematical Physics, 31:2 (2024), 187-198.

2. Е.С. Смирнова. Асимптотика решения одной начально-краевой задачи для одномерного уравнения Клейна–Гордона на полуоси. Математические заметки, 114:4 (2023), 602-614.

3. В.П. Маслов, М.В. Федорюк. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М. "Наука Москва, 1976.

Дисперсионное соотношение и структура спектра в кинетической модели бесстолкновительной плазмы

С. А. Степин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет;
e-mail: ststepin@mail.ru

Обсуждаются исследовавшиеся в [1] вопросы спектральной устойчивости и неустойчивости стационарных состояний динамической системы, представляющей собой кинетическую модель двухкомпонентной разреженной плазмы. В рассматриваемом бесстолкновительном приближении взаимодействие заряженных частиц осуществляется посредством самосогласованного электромагнитного поля, которое с одной стороны индуцируется движением заряженных частиц, а с другой оказывает воздействие на эволюцию плотностей их распределения. Дисперсионное соотношение Ландау позволяет дать явное описание структуры спектра генератора эволюционной полугруппы, задающей динамику распределения частиц, и предложить способ определения соответствующего индекса неустойчивости. В качестве примера рассматривается модель двухпучковой неустойчивости и выводятся эффективно проверяемые условия существования незатухающих мод.

Список литературы

1. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, Линейная теория затухания Ландау, Математический сборник, 127(169): 4(8) (1985), 445-475

Омбилическая особенность квазиклассического приближения к решениям фокусирующего Нелинейного уравнения Шрёдингера с малой дисперсией

Б. И. Сулейманов

ИМВЦ УФИЦ РАН, Уфа;
e-mail: bisul@mail.ru

Система уравнений ($\alpha(\rho) > 0$)

$$\rho'_t + (\rho v)'_x = 0, \quad v'_t + vv'_x - \alpha(\rho)\rho'_x = 0, \tag{11}$$

являющаяся эллиптическим вариантом системы уравнений движения одномерного изоэнтропического газа, описывает квазиклассическое приближения к решениям фокусирующего варианта нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с малой дисперсией

$$-i\varepsilon\Psi'_t = \varepsilon^2\Psi''_{xx} + K(|\Psi|^2)\Psi \qquad (\alpha(\rho) = 2K'(\rho), \qquad 0 < \varepsilon \ll 1)$$

В статье [B. Dubrovin, T. Grava, C. Klein, On universality of critical behaviour in the critical behaviour in the focusing nonlinear Schrödinger equation, elliptic umbilic catstrophe and the tritonque to the Painlevé-I equation (Journal of Nonlinear Science. 2009, v. 19, iss. 1 p. 57–94)] для частного случая $\alpha(\rho) = 4$, соответствующего интегрируемому фокусирующему НУШ с малой дисперсией, на уровне рассмотрения формальных асимптотических решений было показано, что для решений квазиклассического приближения характерны точки градиентных катастроф ($\rho(t_*, x_*) = \rho_* > 0, v(t_*, x_*) = v_*$), связанные с типичной с точки зрения математической теории катастроф особенностью сечения эллиптической омбилики.

Доклад (основанный на совместном с А.М. Шавлуковым исследовании) посвящен процедуре строгого математического обоснования аналогичного заключения сразу для общей эллиптической системы квазиклассического приближения (11).

Данное обоснование использует известные результаты теории особенностей гладких отображений для аналитического варианта и результат Э. Пикара об аналитичности решений общего неавтономного линейного эллиптического уравнения с двумя независимыми переменными.

Операторы Шредингера с PT-симметричными потенциалами

И. А. Тайманов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
e-mail: taimanov@math.nsc.ru

В докладе осуждаются PT-симметричные операторы Шрёдингера, т.е. операторы с потенциалами, удовлетворяющими условию PT-симметрии:

$$u(x) \to \overline{u(Px)},$$

где оператор P обращает ориентацию и $P^2 = \mathrm{Id}$. Например, в одномерном случае под PT-симметричностью потенциала понимается вполнение соотношения

$$u(x) = \overline{u(-x)}.$$

Излагаются два результата:

1) быстроубывающие потенциалы N-мерных операторов Шрёдингера с унитарными S-матрицами при $N > 1$ являются вещественными (при $N = 1$ существуют комплекснозначные экспоненциально убывающие PT-потенциала (совместный результат с Р.Г. Новиковым) [1];

2) классификация алгебро-геометрических (конечнозонных) одномерных PT-симметричных операторов Шрёдингера [2].

Список литературы.

1. Novikov, R.G., Taimanov, I.A, On unitarity of the scattering operator in non-Hermitian quantum mechanics, Ann. Henri Poincare (2024) (published online)

2. Taimanov, I.A., Finite-zone PT-potentials, arXiv:2404.11971.

Асимптотическое решение уравнения Максвелла с локализованной правой частью

А. А. Толченников

ИПмех РАН, Москва;
e-mail: tolchennikov-aa@gmai.com.

В докладе будет рассмотрено уравнение Максвелла в неоднородной среде

$$\hat{p} \times \hat{p} \times E + q(\overset{2}{x}, \overset{1}{\hat{p}}, h)E = F\left(\frac{x-\xi}{h}\right), \tag{12}$$

здесь $E(x)$ – трехмерный вектор, q описывает неоднородность среды. Старшая часть матричного символа имеет два собственных значения: $H^0(x,p) = q^0 > 0$ (кратности 1, эллиптическое), $H^1(x,p) = q^0 - |p|^2$ (кратности 2, гиперболическое). Вдали от источника ξ поле описывается при помощи канонического оператора на лагранжевой поверхности, составленной из траекторий системы Гамильтона, выпущенных из пересечения вертикальной лагранжевой плоскости $x = \xi$ с нулевой поверхностью уровня гамильтониана H^1. Дальнее поле определяется проекцией 3-вектора $\widetilde{F}$ на двумерное собственное пространство, отвечающее собственному значению H^1.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №24-11-00213.

Список литературы.

1. А.Ю. Аникин, С.Ю. Доброхотов, В.Е. Назайкинский, М. Руло, Лагранжевы многообразия и конструкция асимптотик для (псевдо)дифференциальных уравнений с локализованными правыми частями, ТМФ, 214: 1 (2023).

О квантовой теореме Флоке
On quantum Floquet theorem

Д. В. Трещев

Московский математический институт им. В.А.Стеклова, Москва;
e-mail: treschev@mi.ras.ru.

Я изучаю квантовую частицу на окружности в силовом поле периодического во времени потенциала. Соответствующее уравнение Шрёдингера представляет собой линейное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве H функций, квадратично интегрируемых на окружности. Доказываю, что оператор монодромии этой системы представляет собой сумму диагонального и компактного операторов.

I study a quantum particle on a circle in the force field of a periodic in time potential. The corresponding Schrodinger equation is a linear differential equation on the Hilbert space H of square integrable functions on the circle. I prove that the monodromy operator for this system is a sum of a diagonal operator and a compact one.

О лагранжевой геометрии грассманиана $\mathrm{Gr}(1, n)$

Н. А. Тюрин

ЛТФ ОИЯИ, Дубна;
e-mail: ntyurin@theor.jinr.ru

Лагранжева геометрия или геометрия лагранжевых подмногообразий как отдельный предмет возникла благодаря В.П. Маслову и его революционному подходу к исследованиям уравнений в частных производных, получившему название метода канонического оператора. В работах, написанных им самим и его учениками М.Карасевым, С. Доброхотовым, А. Шафаревичем и многими другими, были найдены и представлены основные характеристики лагранжевых подмногообразий, используемые ныне всем математическим сообществом (но часто без соответствующих ссылок на оригинальные работы, особенно в трудах западных коллег): класс Маслова, индекс Маслова, условие Бора – Зоммерфельда, — да и само название главного объекта исследований было предложено создателем теории квазиклассических приближений.

Со временем спектр приложений лагранжевой геометрии в современной математической физике существенно расширился: в связи с гипотезой о Зеркальной симметрии необходимой оказалась задача классификации лагранжевых подмногообразий алгебраических компактных многообразий (и более обще — кэлеровых). Напомним, что по самому своему определению алгебраическое многообразие обязано обладать кэлеровой метрикой Ходжева типа, и соответствующая кэлерова форма может рассматриваться как симплектическая (таким образом, с точки зрения Геометрического квантования алгебраическое многообразие *ad hoc* снабжено данными предквантования и комплексной поляризацией). При этом вариации формы в фиксированном классе когомологий не влияет на результаты классификации возможных типов лагранжевых подмногообразий, но выбор различных главных поляризаций в принципе приводит к разным результатам.

Настоящая работа посвящена нахождению новых топологических типов, реализуемых гладкими лагранжевыми подмногообразиями в многообразии Грассмана $\mathrm{Gr}(1, n)$ проективных прямых в комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$. Для построения примеров мы используем обобщение конструкции А.Е. Миронова, предложившего в 2004 году метод построение в комплесных аффином и проективном пространствах. Конструкция Миронова использует естественное торическое действие и антиголоморфные инволюции, поэтому ее возможно обобщить и на случай грассманиана, который допускает неполный набор коммутирующих первых интегралов.

В докладе представлены примеры $S_k \subset Gr(1, n)$ гладких лагранжевых подмногообразий степеней однородности k, где $k = 0, ..., n$.

Об адиабатическом почти периодическом операторе Шредингера

А. А. Федотов

Санкт-Петербургский Государственный Университет;
e-mail: a.fedotov@spbu.ru

Будет обсуждаться одномерный оператор Шредингера, действующий в $L^2(\mathbb{R})$ по правилу

$$H\psi(x) = -\psi''(x) + v(x)\psi + w(\varepsilon x)\psi, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

где $\varepsilon > 0$ – параметр, а v и w – вещественнозначные периодические функции с периодом единица.

Хорошо известно, что если ε – рациональное число, а v и w достаточно регулярны, то спектр H является абсолютно непрерывным и имеет зонную структуру (состоит из счетного набора интервалов, которые могут накапливаться только к $+\infty$). Если ε иррационально, то спектр может содержать и сингулярную компоненту и иметь канторову структуру.

Мы будем считать, что параметр ε мал. В этом случае говорят, что H – периодический оператор Шредингера с адиабатическим возмущением w. В предположении, что $v \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, а $w(x) = \lambda \cos(2\pi x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, будут описаны геометрия (в старшем порядке)и природа спектра оператора H у нижнего края спектра невозмущенного оператора и намечены основные идеи исследования.

Доклад основан на совместных работах с F. Klopp'ом, см. обзоры [1,2].

Список литературы.

1. A. A. Fedotov, Monodromization method in the theory of almost-periodic equations, St. Petersburg Mathematical Journal, 25 (2015), 303-325.

2. A. A. Fedotov, Complex WKB method (one-dimensional linear problems in the complex plane), Mathematical Notes, 114:6 (2023), 1418-1479.

Траекторные эквивалентности компактных и некомпактных интегрируемых систем

А. Т. Фоменко[1], *Г. В. Белозеров*[1]

[1]МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва;
e-mail: atfomenko@mail.ru, gleb0511beloz@yandex.ru

В настоящее время активно изучаются интегрируемые гамильтоновы системы (далее ИГС) с двумя степенями свободы. Такие системы часто возникают в различных задачах физики и механики. Одним из наиболее развитых методов исследования топологии и устройства траекторий ИГС является метод инвариантов, разработанный А.Т.Фоменко (более подробно см. [1], [2]).

Использование инвариантов помогает находить эквивалентные системы, которые на первый взгляд никак друг с другом не связаны. С помощью этого метода А.Т.Фоменко и А.В.Болсинов показали непрерывную траекторную эквивалентность задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде и случая Эйлера динамики твердого тела (см. [3]).

Пожалуй, наиболее геометрически наглядными ИГС с двумя степенями свободы являются интегрируемые биллиарды, ограниченные софокусными квадриками, и их обобщения биллиардные книжки, введенные В.В.Ведюшкиной. Такие системы не являются гладкими, однако к их исследованию применим подход с использованием инвариантов. Как оказалось, траекторные инварианты биллиардов устроены весьма нетривиально. Получена траекторная классификация обширного класса биллиардов.

В последнее время стали активно изучаться ИГС с некомпактными слоями. Для таких систем нами были получены аналоги реберных траекторных инвариантов. Оказалось, что в случае цилиндрических слоев таким инвариантом служит количество слоев с замкнутыми траекториями. Если же слои двух систем гомеоморфны плоскости, то системы на соответствующих регулярных участках слоения Лиувилля гладко сопряжены.

Список литературы.

1. А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1990, 54, 3, 546-575.

2. А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация, т. 1, 2, Ижевск, издательский дом Удмуртский университет, 1999.

3. А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела, Доклады РАН, 1994, 339, 3, 293-296.

Равномерные геометрические асимптотики ортогональных полиномов, задаваемых разностными уравнениями

А. В. Цветкова

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва;
e-mail: annatsvetkova25@gmail.com.

Многие ортогональные многочлены $u(n, z)$ (n – номер многочлена, z – его аргумент), например, многочлены Чебышева, Эрмита, Лагерра, Якоби и др., определяются рекуррентными соотношениями (или конечно-разностными уравнениями) второго порядка. При больших номерах n они аппроксимируются экспонентой, тригонометрическими или специальными функциями сложного аргумента. Например, полиномы Эрмита аппроксимируются формулами Планшереля-Ротаха, в которых специальная функция – это функция Эйри Ai, полиномы Лежандра аппроксимируются функцией Бесселя нулевого порядка и т.д.

В докладе обсуждается подход к нахождению асимптотик решений уравнений такого типа, которые при этом равномерны (и единообразны) по переменной z. Подход основан на идее о переходе от дискретных уравнений к непрерывным псевдодифференциальным уравнениям, предложенной В.П. Масловым [1]. Сложность заключается в том, что символ получаемого псевдодифференциального оператора комплекснозначный, однако развиваемый нами подход позволяет избавиться от комплексности и получить глобальные асимптотики в виде специальных функций [2]. В частности, мы обсудим примеры, для которых реализуются асимптотики в терминах функций Эйри Ai и Bi, а также в терминах функции Бесселя J_0.

Благодарности.

Доклад основан на совместных работах с С.Ю. Доброхотовым. Исследования выполнены при поддержке Российского Научного фонда (проекты 21-11-00341 и 24-11-00213).

Список литературы.

1. В. П. Маслов, Операторные методы, Мир, Москва, 1976
2. S. Yu. Dobrokhotov, A. V. Tsvetkova, An approach to finding the asymptotics of polynomials given by recurrence relations, Russ. J. of Math. Phys., 28:2 (2021), 198–223

Волны и лигаменты в периодических течениях гетерогенных жидкостей: асимптотическая теория и лабораторный эксперимент

Ю. Д. Чашечкин

Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН, Москва;
e-mail: chakin@ipmnet.ru

Выполнение в 2009-2012 гг. Государственного контракта Минобранауки № 02.518.11.7157 «Лабораторное моделирование ключевых процессов в стратифицированной гидросфере и атмосфере» под руководством академика В.П. Маслова оказало большое влияние на имплементацию асимптотических методов в Лаборатории механики жидкостей ИПМех РАН применительно к задачам расчета динамики и тонкой пространственной структуры наблюдаемых периодических процессов, включающих поверхностные, внутренние и акустические волны. В качестве основы была взята система фундаментальных уравнений механики неоднородных сред с учетом эффектов вращения и трансформации внутренней энергии в изучаемых течениях. Полное асимптотическое решение линеаризованной системы фундаментальных уравнений, построенное методами теории сингулярных возмущений с учетом условия совместности, положено в основу современной классификации компонентов течений, в которую в дополнение к известным волнам, вихрям, струям, следам включены лигаменты [1]. Анализ расширенных дисперсионных соотношений проведен для различных типов волн – гравитационных (поверхностных и внутренних), капиллярных, инерционных, акустических и гибридных [2]. Процессы прямого нелинейного взаимодействия всех компонентов течений обеспечивают быструю эволюцию картины течений [3]. Результаты расчетов внутренних волн и сопутствующих лигаментов удовлетворительно согласуются с данными визуализации картины течения при движении пластины и сферы в лабораторном бассейне [4, 5].

Благодарности.
Работа выполнена в рамках Госзадания (№ 123021700044-0)

Список литературы.

1. Chashechkin Y.D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. V. 10. Iss.4. 286.

2. Chashechkin, Y.D., Ochirov, A.A. Periodic flows in a viscous stratified fluid in a homogeneous gravitational field // Mathematics 2023, 11, 4443.

3. Chashechkin, Yuli D. Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // Mathematics. 2021. V. 9(6). No. 586.

4. Chashechkin Yu. D., Zagumennyi I. V. 2D hydrodynamics of a plate: from creeping flow to transient vortex regimes // Fluids. 2021. V. 6(9). 310.

5. Chashechkin, Y.D. Discrete and Continuous Symmetries of Stratified Flows Past a Sphere // Symmetry 2022, 14(6), 1278.

Коротковолновые асимптотические решения строго гиперболических систем со скачкообразно меняющимися коэффициентами

А. И. Шафаревич[1,2]

[1] Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова;
[2] Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН, Москва;
e-mail: shafarev@yahoo.com.

Хорошо известно, что коротковолновые асимптотические решения линейных строго гиперболических по Петровскому систем, коэффициенты которых не зависят от малого параметра (или зависят от него регулярно), описываются в терминах канонического оператора Маслова на наборе лагранжевых поверхностей. Эти поверхности инвариантны относительно гамильтоновых полей, гамильтонианы которых удовлетворяют характеристическому уравнению для старшего символа гиперболической системы.

Если коэффициенты разрывны, или зависят от малого параметра сингулярно (т.е. их слабые пределы не гладкие), решение имеет более сложный вид вблизи носителя сингулярности; в общем случае соответствующая теория не разработана. В докладе описывается асимптотика решения задачи Коши в случае, когда коэффициенты меняются скачкообразно, т.е. они или их слабые пределы терпят разрыв на некоторой гиперповерхности в пространстве независимых переменных. В этой ситуации лагранжевы поверхности перестраиваются в точках, соответствующих указанной поверхности, причем перестройка управляется геометрией проективной гиперповерхности в двойственном пространстве, определяемой старшим символом системы. Доказано, что решение разлагается в асимптотический ряд, слагаемые которого выражаются через канонический оператор Маслова на перестраивающихся лагранжевых поверхностях; функции, к которым применяются эти операторы, удовлетворяют вспомогательной задаче рассеяния для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а коэффициенты оператора монодромии такой задачи определяют коэффициенты отражения и прохождения волн через поверхность скачка коэффициентов.

Квазиклассические асимптотики для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом

А. И. Шафаревич[12], *О. А. Щегорцова*[1]

[1]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;
[2]Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН, Москва;
e-mail: shafarev@yahoo.com, olga.shchegortsova@gmail.com.

Рассматривается нестационарное уравнение Шредингера с потенциалом, представляющим собой сумму гладкой функции и дельта-функции, локализованной на поверхности коразмерности 1. Начальные данные выбираются в виде быстро осциллирующих и локализованных волновых пакетов. Оператор Шредингера с дельта-потенциалом определяется с помощью теории расширений и краевых условий на поверхности-носителе дельта-особенности.

Для широкого класса уравнений с гладкими коэффициентами квазиклассическая теория развита в работах В.П. Маслова. Математическая теория квазиклассических асимптотик, применимая при наличии фокальных точек, была развита в работах В.П. Маслова [1, 3] для широкого класса уравнений с гладкими коэффициентами. Теория комплексного ростка Маслова [2, 3] позволяет описывать квазиклассические асимптотики уравнений с гладкими коэффициентами, локализованные в малой окрестности подмногообразия положительной коразмерности.

Однако к операторам с дельта-потенциалами существующая теория, вообще говоря, неприменима, и требует модификации. В общем случае, для описания решения используются специальные геометрические объекты — изотопные поверхности и комплексные векторные расслоения над ними.

Влияние дельта-потенциала проявляется в том, что падающая волна при взаимодействии с дельта-потенциалом разбивается на две части — отраженную и прошедшую. При этом отвечающие задаче геометрические объекты перестраиваются в точках поверхности-носителя дельта-функции. Их перестройка описана и определяется краевыми условиями, задающими область определения оператора.

Список литературы.

1. В. П. Маслов, М. В. Федорюк, Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.:Наука, 1976.

2. В. П. Маслов, Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях, М.: Наука, 1977

3. В. П. Маслов, Асимптотические методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988.

Асимптотические представления фундаментальных решений систем ОДУ с большим параметром

А. А. Шкаликов

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Москва;
e-mail: ashkaliko@yandex.ru

Рассматривается $n \times n$ система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' - By - C(\cdot, \lambda)y = \lambda Ay, \quad y = y(x), \quad x \in [0, 1],$$

где A, B, $C = C(\cdot, \lambda)$ — матрицы с суммируемыми по переменной x элементами, причем $C(\cdot, \lambda) \to 0$ в L_1 –норме.

В докладе в новой форме будут представлены дополнения и обобщения результатов теории Биркгофа–Тамаркина–Лангера об асимпптотических представлениях фундаментальных решений рассмматриваемой системы в секторах и полуполосах комплексной плоскости при $\lambda \to \infty$. Акцент будет сделан на минимальность требований к гладкости элементов матриц и на различных формах условий, при которых гарантируется существование асимптотических представлений.

Доклад основан на совместных работах с А.П.Косаревым, в частности, работе [1].

Благодарности.

Исследования выполнены при поддержке Российского научного фонда, грант 20-11-20261.

Список литературы

1. А.П.Косарев, А.А.Шкаликов, Асмптотические представления решений $(n \times n)$–систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром, Матем. заметки, **116**: 2 (2024), 290-313.

Условия непрерывности локально ограниченных гомоморфизмов связных групп Ли

А. И. Штерн

Механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва;
e-mail: rroww@mail.ru.

Любой локально ограниченный гомоморфизм связных групп Ли непрерывен на коммутанте группы. Этот факт приводит к различным достаточным условиям непрерывности такого гомоморфизма на всей группе.

Благодарности.
Исследование поддержано Московским центром фундаментальной и прикладной математики.

Список литературы.

1. А.И.Штерн, Автоматическая непрерывность локально ограниченного гомоморфизма групп Ли на коммутанте, Мат. Сб. (2024) том 215, № 6, стр. 151-158.