

На правах рукописи

САУРИН Василий Васильевич

ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ОЦЕНКА КАЧЕСТВА  
РЕШЕНИЙ В ВАРИАЦИОННЫХ  
ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

01.02.04 — механика деформируемого твёрдого тела

А в т о р е ф е р а т  
диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор В. Н. Паймушин,  
доктор физико-математических наук, профессор А. К. Любимов,  
доктор физико-математических наук, профессор В. С. Никитин.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук.

Защита диссертации состоится “27” февраля 2014 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при ИПМех РАН по адресу: 119526, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1, ИПМех РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН.

Автореферат разослан “15” января 2014 г.

Учёный секретарь

диссертационного совета Д 002.240.01

кандидат физико-математических наук

Е. Я. Сысоева

**Цель работы** заключается в исследовании интегро-дифференциальных постановок задач линейной теории упругости, разработке вариационных и проекционных подходов к решению таких задач, построению двусторонних энергетических оценок качества приближенных решений.

**Актуальность** выбранной темы обусловлена тем, что в теории упругости не так много задач, для которых разработаны алгоритмы, позволяющие сравнительно быстро и достоверно вычислять поля напряжений и перемещений. Еще меньше таких задач, для которых решения найдены в аналитической форме. Это связано с тем, что обычно в теории упругости исследуют поведение тел и конструкций, характеризующиеся сложной формой и неоднородной структурой материала. Поэтому представляют интерес такие постановки задач, в частности, вариационные, где численное решение и оценки его качества можно получать с помощью модификации широко распространенных методов, таких, например, как методы Рунге и Галеркина, метод конечного элемента и т.п. Для численных подходов характерно использование дискретизации задачи на ранних стадиях решения. Одним из недостатков таких подходов является то, что априори довольно трудно определить связь между исходной системой в частных производных и ее конечномерной моделью. Такая связь может быть установлена при помощи явных оценок качества решения, следующих напрямую из формулировок задач упругости, полученных на основе предложенных автором методов. Развитые вариационные подходы позволяют также разрабатывать новые процедуры уточнения и адаптации конечно-элементных сеток при заданных критериях качества.

**Методы исследования.** При исследовании статических и спектральных задач, поставленных в работе, применяются различные методы анализа напряженно-деформированного состояния упругих тел и конструкций. Методологическую основу составляют классические под-

ходы теории упругости и вариационного исчисления, вариационные принципы (принципы минимума полной потенциальной и дополнительной энергий), методы Ритца и Галеркина, метод конечных элементов, методы спектрального анализа. Основное внимание в диссертации уделено разработке методов формулирования краевых задач в линейной теории упругости, основанные на методе интегро-дифференциальных соотношений, предложенного В.В.Сауриным и Г.В.Костиним и существенно модифицированный автором. Это относится к вариационным и проекционным подходам базирующимся на полиномиальных, кусочно-полиномиальных и полу-дискретных аппроксимациях искомых функций.

**Научная новизна.** Предложены новые вариационные формулировки для краевых задач линейной теории упругости, основанные на интегральном представлении уравнения состояния (закон Гука). Получены необходимые условия стационарности этих задач и доказана их эквивалентность с исходной системой уравнений упругости в частных производных. Установлена прямая связь предложенных вариационных постановок с классическими вариационными принципами минимума полной потенциальной и дополнительной энергий, сформулированными в перемещениях и напряжениях соответственно. Показано, что такие вариационные постановки позволяют строить разнообразные двусторонние энергетические оценки качества численного решения. На основе метода интегро-дифференциальных соотношений (МИДС) разработаны новые и модифицированы известные численные алгоритмы анализа напряженно-деформированного состояния упругих тел (методы Ритца, Бубнова–Галеркина, Петрова–Галеркина и конечных элементов). Для численного алгоритма метода конечных элементов (МКЭ) предложены регулярные процедуры уточнения и адаптации конечно-элементных сеток. С использованием проекционной техники и методов асимптотического анализа разработаны различные уточняющие моде-

ли прямолинейных упругих балок на основе двумерных и трехмерных уравнений линейной теории упругости. Для трехмерного случая исследовано влияние формы поперечного сечения балки на ее прочностные, жесткостные и спектральные характеристики. Решен ряд модельных статических и спектральных задач линейной теории упругости, показывающие эффективность предложенной методики.

**Достоверность и обоснованность результатов.** Полученные результаты основываются на корректности постановок исследуемых задач, строгом использовании математических методов, наглядности решений модельных задач, а также на сравнении результатов компьютерного моделирования с теоретическими выводами.

**Практическая значимость работы.** Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при постановке и решении задач линейной теории упругости. Разработанные вариационные, асимптотические и проекционные методы математического моделирования упругих тел и конструкций могут быть применены для проведения более качественного и достоверного анализа их напряженно-деформированного состояния.

**Апробация результатов исследования.** Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК России, [1]–[18], в монографии [19], в журналах, научных сборниках и трудах конференций [20]–[44]. Основные результаты, выносимые на защиту и опубликованные в работах [1]–[44], получены автором диссертации. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на российских и международных профильных научных конференциях [20]–[44], семинаре по механике и оптимизации конструкций ИПМех РАН, семинаре имени академика А.Ю. Ишлинского при Научном совете РАН по механике систем и Научном совете РАН по проблемам управления движением и навигации, семинаре по проблемам механики сплошной среды, семинаре по

механике сплошной среды им. Л.А. Галина, семинаре по механике деформируемого твердого тела НИИ механики МГУ, семинаре академика Морозова Н.Ф. ИПМаш РАН, семинаре по механике Казанского государственного университета.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Количество страниц в диссертации — 406, в том числе иллюстраций — 102 и таблиц — 13.

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Данная диссертация посвящена разработке идей МИДС применительно к задачам линейной теории упругости.

В Главе 1 дан обзор литературы, приведены основные формулировки краевых задач теории упругости в перемещениях и напряжениях и описаны классические вариационные принципы. Также приведены некоторые приближенные математические модели, которые применяются в теории упругости. Весь приведенный в этой главе материал используется в последующих главах диссертации.

Глава 2 посвящена применению МИДС к задачам линейной теории упругости. В п. 2.1 обсуждаются основные идеи МИДС. Во-первых, показано, что возможности построения аналитических решений задач линейной теории упругости весьма ограничены. Следовательно некоторые из соотношений теории упругости должны быть ослаблены, т. е. выполнены приближенно. Однако, вопросы, какие из определяющих соотношений теории упругости следует удовлетворять точно, а какие приближенно обычно в теории упругости не обсуждаются.

Введем в рассмотрение тензор напряжений  $\sigma^0$ , который связан с тензором деформации  $\varepsilon^0$  следующим образом

$$\sigma^0 = C : \varepsilon^0. \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon^0$  это тензор Коши

$$\varepsilon^0 = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T), \quad (2)$$

$C$  – тензор модулей упругости,  $u$  – вектор перемещений. Знак “двое-точие” обозначает двойное тензорное произведение. Индекс ‘0’ показывает, что соответствующие тензоры  $\varepsilon^0(u)$  и  $\sigma^0(u)$  зависят только от геометрических параметров (перемещений  $u$ ).

Наоборот, поля напряжений  $\sigma$  порождают соответствующий тензор деформации

$$\varepsilon = C^{-1} : \sigma. \quad (3)$$

Обсудим механический смысл, основных соотношений линейной упругости более подробно. Уравнение равновесия заданное формулой

$$\nabla \cdot \sigma + f(x) = 0 \quad (4)$$

отражает третий закон Ньютона, и, вообще говоря, должны быть строго выполнены. Здесь  $f(x)$  – плотность объемной силы.

С геометрической точки зрения, кинематические уравнения, в рамках предположения о малости деформаций и перемещений просто описывают деформированное состояние тела и также должны быть справедливыми.

Что касается граничных условий, их форма обусловлена типом краевой задачи которая решается, и они должны быть заданы априори.

Выполнение закона Гука в виде линейных алгебраических уравнений (1) или (3) не выглядит так безоговорочно обязательным. Реальные упругие конструкционные материалы подчиняются этому линейному закону лишь приблизительно. Вообще говоря, гипотеза о линейной зависимости между напряжениями и деформациями связана в первую очередь с целью упрощения задачи теории упругости. Кроме того, в связи с тем, что условия однородности для реальных материалов строго

не реализованы (может быть, за исключением некоторых кристаллов), модули упругости находятся экспериментально и обычно с довольно большой ошибкой. Это означает, что формулировка задач теории упругости имеет неопределенность, связанную с идентификацией материальных констант.

Определяющие соотношения теории упругости описывают напряженно-деформированное состояние в любой внутренней точке упругого тела. Кроме того, предполагается, что напряжения во внутренних точках тела должны стремиться к граничным напряжениям. Аналогично, перемещения внутренних точек переходят непрерывно в их граничные значения. Это предполагает, что компоненты тензора упругих модулей  $C$ , определенные во внутренности области, непрерывно проходят через границу. С другой стороны, необходимо принять во внимание, что граничные условия создаются конкретными физическими и геометрическими факторами. Например, некоторые части границы могут быть общими частями между двумя или более средами (упругими или неупругими). В этом случае любая граничная точка принадлежит одновременно рассматриваемому телу и телам, которые вызывают эти граничные условия. Некоторые внутренние поверхности тела также могут быть границами различных материалов. Таким образом, любая точка этих границ принадлежит одновременно к материальным частям с различными механическими свойствами. Иными словами, тензор упругих модулей на таких поверхностях, строго говоря, не определен.

Для учета такой неопределенности в линейных задачах теории упругости предлагаются следующие интегральные соотношения между напряжениями и деформациями в теле, занимающего область  $\Omega$

$$\Phi_\sigma = \int_\Omega \zeta : \zeta d\Omega = \int_\Omega (\sigma - \sigma^0(u)) : (\sigma - \sigma^0(u)) d\Omega = 0, \quad (5)$$

$$\Phi_\varepsilon = \int_\Omega \xi : \xi d\Omega = \int_\Omega (\varepsilon(\sigma) - \varepsilon^0(u)) : (\varepsilon(\sigma) - \varepsilon^0(u)) d\Omega = 0, \quad (6)$$



Другим важным квадратичным функционалом, который также соответствует уравнению состояния, является функционал энергетической ошибки

$$\Phi[u, \sigma] = \int_{\Omega} \varphi(u, \sigma) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \xi(u, \sigma) : \varsigma(u, \sigma) d\Omega = 0. \quad (7)$$

В работе показано, что для любых кинематически допустимых полей перемещений и равновесных полей перемещений значения интегралов  $\Phi_{\sigma}$ ,  $\Phi_{\varepsilon}$  и  $\Phi$  всегда неотрицательны. Используя это свойство формулируются три интегро-дифференциальные краевые задачи: найти  $u^*(x)$  и  $\sigma^*(x)$ , которые минимизируют функционалы  $\Phi_{\sigma}$ ,  $\Phi_{\varepsilon}$  и  $\Phi$  относительно  $u$  и  $\sigma$  (соответственно Задачи 1,2,3) при ограничениях (2) и (3). В этой части работы ограничимся следующими граничными условиями

$$u = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad \sigma \cdot n = \bar{q}(x), \quad x \in \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset. \quad (8)$$

Здесь  $n$  – внешняя нормаль к границе области  $\Gamma$ ,  $\bar{q}(x)$  – заданная функция нагрузки.

Качество полей перемещений и напряжений, или, другими словами, их близость к точному решению  $u^*$  и  $\sigma^*$ , может быть количественно установлена, например, с помощью следующих безразмерных параметров (относительные интегральные ошибки)

$$\Delta_{\sigma} = \frac{\Phi_{\sigma}}{\Psi_{\sigma}}, \quad \Delta_{\varepsilon} = \frac{\Phi_{\varepsilon}}{\Psi_{\varepsilon}}, \quad \Delta = \frac{\Phi}{W_{\sigma}}. \quad (9)$$

Здесь неотрицательные функционалы  $\Psi_{\sigma}$  и  $\Psi_{\varepsilon}$

$$\Psi_{\sigma} = \int_{\Omega} \sigma : \sigma d\Omega \geq 0, \quad \Psi_{\varepsilon} = \int_{\Omega} \varepsilon : \varepsilon d\Omega = \int_{\Omega} \sigma : C^{-2} : \sigma d\Omega \geq 0, \quad (10)$$

вводятся с помощью тензора напряжений  $\sigma$  и

$$W_{\sigma} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : C^{-1} : \sigma d\Omega \geq 0$$

является энергией напряжений упругого тела.

В п. 2.2 рассматриваются две двумерные модельные задачи условной минимизации функционалов  $\Phi_\sigma$ ,  $\Phi_\varepsilon$  и  $\Phi$ , для решения которых разработан численный алгоритм на основе метода Рунге с использованием полиномиальных аппроксимаций искомых функций:

$$\tilde{u}_i = \sum_{k+l=0}^{N_u} u_i^{(kl)} x_1^k x_2^l, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sum_{k+l=0}^{N_\sigma} \sigma_{ij}^{(kl)} x_1^k x_2^l, \quad i, j = 1, 2, \quad (11)$$

где  $u_i^{(kl)}$  и  $\sigma_{ij}^{(kl)}$  – неизвестные коэффициенты компонентов перемещений и напряжений, соответственно,  $N_\sigma$  и  $N_u$  – степени полных полиномиальных приближений  $\tilde{u}_i$  и  $\tilde{\sigma}_{ij}$ . В качестве примера, рассмотрен плоский изгиб прямоугольной упругой пластины с  $\Omega = \{x : x_1 \in (0, x_1^0), x_2 \in (0, x_2^0)\}$ . Предполагается, что однородная изотропная пластина нагружена некоторым напряжением сдвига  $q_0(x_2) = \frac{6q^0}{(x_2^0)^2} \left(x_2 - \frac{x_2^2}{x_2^0}\right)$  распределенными по краю с координатой  $x_1 = x_1^0$ . Тело защемлено вдоль края, где  $x_1 = 0$ . Остальные ребра пластины свободны от нагрузок. Расчеты были проведены для задач 1–3 с различными полиномиальными аппроксимациями степени  $N_\sigma$ .

Упругие энергии  $W_i(N) = W(\tilde{u}, \tilde{\sigma})$  для Задач 1–3 приведены на Рис. 1, где упругая энергия определяется как

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon^0 d\Omega. \quad (12)$$

Как можно видеть из Рис. 1 (справа), приближенное значение  $W_1$  (сплошная линия) энергии  $W$  монотонно убывает при увеличении порядка  $N_\sigma$ . В отличие от этого, значения энергий  $W_2$  и  $W_3$  (пунктирные и штрих-пунктирные кривые соответственно) монотонно растут, если число  $N_\sigma$  увеличивается.

Скорость уменьшения функций, введенных в (9),

$$\Delta_1 = \Delta_\sigma(\tilde{u}, \tilde{\sigma}), \quad \Delta_2 = \Delta_\varepsilon(\tilde{u}, \tilde{\sigma}), \quad \Delta_3 = \Delta(\tilde{u}, \tilde{\sigma})$$

являются важными характеристиками сходимости алгоритма. Относительные интегральные ошибки  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , соответствующие Зада-

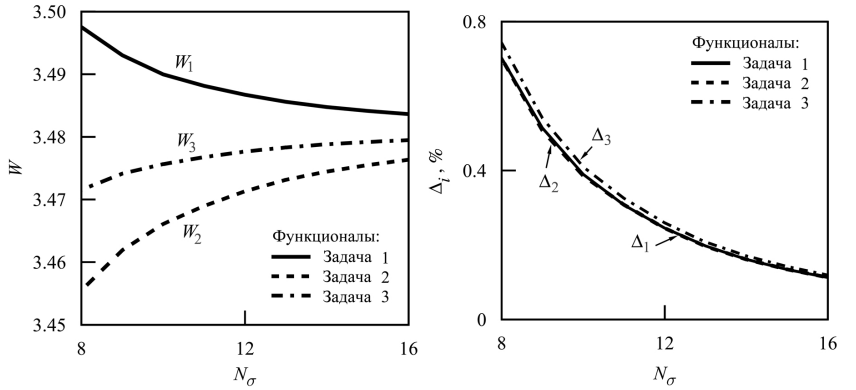


Рис. 1: Упругие энергии  $W_i$  как функции числа степеней свободы  $N$  (слева), относительная интегральная ошибка  $\Delta_i(N_\sigma)$  для Задач 1–3 (справа).

чам 1–3, представлены как функции от  $N_\sigma$  на Рис. 1 (справа) сплошной, штриховой и штрих-пунктирной кривыми, соответственно. Эти значения близки друг к другу и монотонно уменьшаются, если порядок аппроксимации  $N_\sigma$  растет.

В п. 2.4 исследована задача о свободных колебаниях круглых и эллиптических мембран. В классическом подходе, основанном на принципе Гамильтона, элементы матрицы  $K$  линейно связаны с собственными числами  $\lambda$ . Применение МИДС к формулированию данной краевой задачи приводит к тому что характеристическое матричное уравнение  $Ka = 0$  для нахождения собственных чисел является квадратичным относительно неизвестного параметра  $\lambda$  и эта матрица имеет следующую структуру:

$$K(\lambda) = \lambda^2 K^{(2)} + \lambda K^{(1)} + K^{(0)}, \quad K^{(0)}, K^{(1)}, K^{(2)} \in \mathcal{R}^{N \times N} \quad (13)$$

Собственные числа  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2N$  находятся из условия  $\det K(\lambda) = 0$ . Так как определитель матрицы  $K(\lambda)$  является полиномом с действительными коэффициентами, то, как следует из основной теоремы ал-

гебры, решение уравнения (13) состоит из действительных и пар комплексно сопряженных корней. Если значения собственных частот действительные, то они вместе с собственными векторами  $a^{(j)}$  точно удовлетворяют всем отношениям интегро-дифференциальной задачи. Эти собственные значения  $\lambda_j$  и векторы  $a^{(j)}$  представляет собой точное решение задачи.

Если использованные конечномерные аппроксимации не дают возможности найти точное решение, то числа  $\lambda_j$ , удовлетворяющие уравнению (13), могут быть только комплексными величинами. Таким образом, компоненты собственных векторов  $a^{(j)}$ , также оказываются комплексными величинами. Несмотря на то, что комплексные собственные значения не имеют механического смысла, их действительные части служат в качестве приближенного решения этой краевой задачи. Следующий критерий также может быть использован для оценки качества полученных приближенных решений:

$$\Delta_M = \tau^{-1} \Phi_M(\tilde{a}^{(j)}, \tilde{\lambda}_j) < \mu, \quad (14)$$

где  $\mu$  – положительная действительная величина, характеризующая точность решения,  $\tau$  – натяжение мембраны,  $\Phi_M$  – минимизируемый функционал. При этом мнимая часть собственного значения  $\text{Im}(\lambda_j)$  является неявной оценкой качества решения.

В п. 2.5 исследуются вариационные свойства предложенных функционалов  $\Phi_\sigma$ ,  $\Phi_\varepsilon$  и  $\Phi$ . Доказано, что для Задач 1 и 2 уравнениями Эйлера-Лагранжа (условия стационарности) соответственно являются соотношения  $\varsigma = 0$  и  $\xi = 0$ , которые совместно с ограничениями (2), (3) и граничными условиями (8) составляют полную систему уравнений в частных производных в линейной упругости. Показано, что условия стационарности любой линейной комбинации  $\Phi_\sigma$  и  $\Phi_\varepsilon$  являются соотношениями закона Гука. Таким образом построено семейство вариационных принципов.

Функционал энергетической ошибки  $\Phi$  позволяет разделить интегро-дифференциальную задачу, первоначально сформулированную в терминах напряжений и перемещений, на две независимые подзадачи: одну в перемещениях (принцип минимума полной потенциальной энергии), другую в напряжениях (принцип минимума полной дополнительной энергии). Доказана следующая теорема: *для любых кинематически допустимых полей перемещений  $u$ , подчиняющихся граничным условиям (8) и равновесных полей напряжений  $\sigma$ , удовлетворяющих граничные условия (8), сумма полных потенциальной и дополнительной энергий неотрицательна:*

$$\Phi[u, \sigma] = \Pi[u] + \Pi_c[\sigma] \geq 0. \quad (15)$$

Как следует из структуры функционала  $\Phi$ , задача минимизации с ограничениями эквивалентна независимой минимизации потенциальной энергии  $\Pi$  относительно допустимой вектор-функции  $u$  при краевых ограничениях на перемещения и дополнительной энергии  $\Pi_c$  относительно тензорной функции  $\sigma$ , удовлетворяющей условию равновесия при граничных ограничениях, заданных в напряжениях:

$$\min_{u, \sigma} \Phi[u, \sigma] = \min_u \Pi[u] + \min_{\sigma} \Pi_c[\sigma] = \Pi[u^*] + \Pi_c[\sigma^*]. \quad (16)$$

Для различных вариационных формулировок, следующих из МИДС, предложены различные двусторонние энергетические оценки качества приближенного решения. Например, в терминах полных потенциальной и дополнительной энергий сформулированы следующие оценки: *при любых кинематически допустимых полях перемещений  $u(x)$ , удовлетворяющих однородным граничным условиям, и любых полях равновесных напряжений  $\sigma(x)$ , подчиняющихся граничному условию (8) в напряжениях, справедливы следующие двусторонние оценки упругой энергии, запасенной в теле*

$$-\Pi(u) \leq W(u^*, \sigma^*) \leq \Pi_c(\sigma). \quad (17)$$

Здесь  $W$  – точное значение упругой энергии запасенное телом.

В п. 2.8 обосновывается вариационный принцип для задачи о теле на упругом основании. В дополнение к граничным условиям (8) добавлено условие следующего вида, заданного на части границы  $\Gamma_3$

$$\sigma \cdot n + \kappa u = 0, \quad x \in \Gamma^{(3)}, \quad \kappa > 0, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \Gamma. \quad (18)$$

Здесь  $\kappa$  – коэффициент постели. Показано, что введением двух потенциалов упругого основания

$$W_u^w = \int_{\Gamma^3} \frac{\kappa}{2} u^2 d\Gamma, \quad W_\sigma^w = \int_{\Gamma^3} \frac{1}{2\kappa} (\sigma \cdot n)^2 d\Gamma = W_u^w \quad (19)$$

задача, сформулированная в перемещениях и напряжениях разделяется на две независимые: одну – в перемещениях, другую – в напряжениях. Для этих задач, как и в предыдущем случае справедливы, например, следующие двусторонние энергетические оценки. Если перемещения на границе  $\Gamma^1$  исчезают, то справедливы верхняя и нижняя границы точного значения упругой энергии, запасенной в теле и Винклеровском основании

$$-\Pi^w(u) \leq W(u^*, \sigma^*) + W^w(u^*, \sigma^*) \leq \Pi_c^w(\sigma), \quad (20)$$

где  $\Pi^w$  и  $\Pi_c^w$  – полные потенциальная и дополнительная энергии тела на упругом основании соответственно. И наоборот, если поверхностные нагрузки  $\bar{q}(x)$  исчезают на  $\Gamma^2$ , то любые допустимые поля перемещений и напряжений также гарантируют следующие двусторонние энергетические оценки

$$-\Pi_c^w(\sigma) \leq W(u^*, \sigma^*) + W^w(u^*, \sigma^*) \leq \Pi^w(u). \quad (21)$$

Выводы данного раздела подтверждены на примере решения модельных двумерных задач о теле на упругом основании.

Глава 3 фокусируется на численном подходе, базирующемся на МИДС и методе конечных элементов. Разработан адаптивный алго-

ритм с использованием кусочно-полиномиальные аппроксимации высоких порядков кинематически допустимых перемещений и равновесных напряжений для произвольной триангуляции области. Обсуждаются различные стратегии уточнения и адаптации сетки, разработанные на основе явных локальных и интегральных двусторонних энергетических оценках приближенного решения.

В п. 3.1 обсуждаются вопросы связанные с аппроксимацией искомым функций кусочно-полиномиальными сплайнами с различной степенью гладкости. Описан адаптивный алгоритм построения непрерывных аппроксимаций перемещений для произвольной триангуляции области.

В п. 3.2 приведено аналитическое решение для треугольника Аргириса, позволяющее строить гладкие ( $C^1$ ) сплайны. Аналитически построена матрица жесткости для треугольника Аргириса. Обсуждены вопросы построения  $C^2$ -аппроксимации для треугольного элемента.

В п. 3.3 описывается МКЭ алгоритм решения задач линейной теории упругости на основе вариационного принципа минимума энергетической ошибки. Особое внимание уделяется решению задачи в напряжениях, для которых аппроксимации напряжений должны удовлетворять не только специальные межэлементные условия, но и уравнения равновесия внутри каждого треугольника. В связи с тем, что равновесие каждого элемента связано с равновесием тела в целом, матрица податливости  $K^\sigma$  может быть слишком заполненной, для того чтобы выполнять эффективные вычисления. Чтобы избежать вычислительных трудностей, сопровождающих такие задачи, предложено изменить квадратичный функционал  $\Pi_c$  следующим образом. Добавим неотрицательный член к полной дополнительной потенциальной энергии  $\Pi_c$  и составим новый функционал  $\Pi_c^s$  следующим образом

$$\Pi_c^s = \Pi_c + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^{N_S} \int_{S_i} ((\sigma_k + \sigma_{k+1}) \cdot n) \cdot ((\sigma_k + \sigma_{k+1}) \cdot n) dS_i. \quad (22)$$

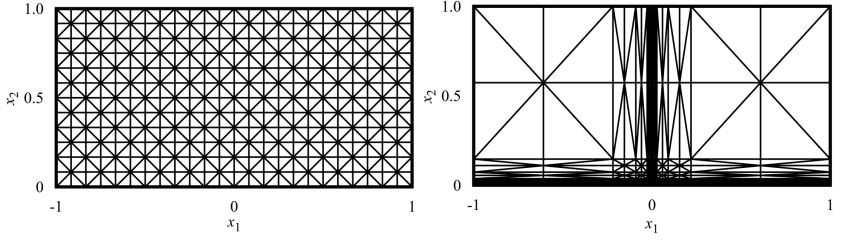


Рис. 2: Равномерная (слева) и адаптированная треугольные сетки (справа).

Здесь  $S_i$  является стороной, общей для двух треугольников, по которой выполняется интегрирование,  $N_S$  – число межэлементных сторон в конечно-элементной сетке;  $\beta > 0$  – весовой коэффициент. Матрица податливости  $K^\sigma$  определяется из условий минимума функционала  $\Pi_c^s$ . Такой прием строго обоснован в этом разделе. Эффективность разработанного алгоритма продемонстрирована на примере решения двумерных задач теории упругости.

В п. 3.4 продемонстрированы возможности разработанного МКЭ алгоритма по адаптации и уточнения конечно-элементных сеток на примере решения двумерной задачи о растяжении прямоугольной пластины с трещиной. На Рис. 2 показаны равномерная (слева) и адаптированная треугольные сетки (справа). Адаптированная сетка получена из равномерной с тем же числом элементов соответствующим изменением расстояние между горизонтальными и вертикальными межэлементными линиями. Новые координаты  $x_1^{(i,1)}$  при  $i = 1, \dots, 2M - 1$  и  $x_2^{(1,j)}$  при  $j = 1, \dots, M - 1$  ( $M$ – параметр сетки) были выбраны таким образом, чтобы значения следующих интегралов

$$\Phi^{1,i} = \int_0^h \int_{x^{(i-1,1)}}^{x^{(i,1)}} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad i = 1, \dots, 2M$$

$$\Phi^{2,j} = \int_{x^{(1,j-1)}}^{x^{(1,j)}} \int_{-l}^l \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad j = 1, \dots, M$$



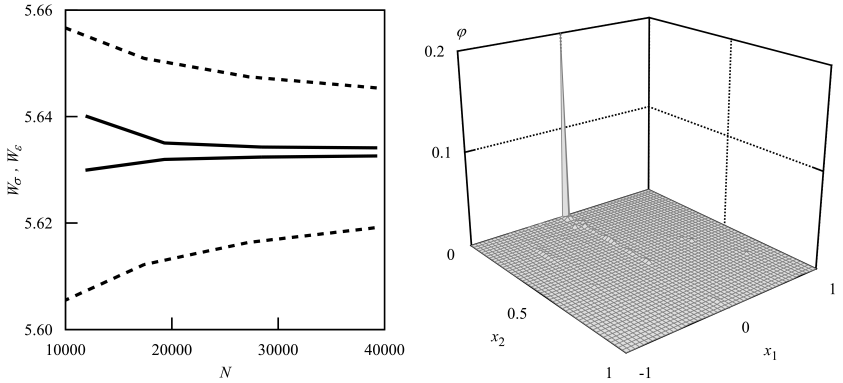


Рис. 3: Двусторонние оценки упругой энергии при различном числе степеней свободы  $N$  для равномерной (пунктирные линии) и адаптированной (сплошные линии) сеток (слева) и распределение плотности энергетической ошибки  $\varphi(x_1, x_2)$  при  $M = 12$ ,  $N_u = 6$  для адаптированной сетки (справа).

были приблизительно равны друг другу для всех  $i$  и  $j$ .

На Рис. 3 (слева) показана двусторонняя сходимость упругой энергии  $W(N)$  для равномерной сетки при фиксированной степени полинома  $N_u = 6$  (пунктирные линии) и адаптированной сетки при фиксированном параметре  $M = 12$  (сплошные линии). Представленные зависимости находятся в хорошем соответствии с теоретическими двусторонними оценками. Относительная погрешность энергии  $\Delta_3$  для адаптированных сеток достигает значения около 0.033% при  $N \approx 40000$ . Эта относительная интегральная ошибка в 14 раз меньше, чем, полученная с помощью равномерной сетки при тех же параметрах аппроксимации.

Распределение локальной ошибки  $\varphi(x_1, x_2)$  представлено на Рис. 3 при  $M = 12$  и  $N_u = 6$ . Функция  $\varphi$  почти везде равна нулю за исключением узкой области, окружающей носик трещины.

Глава 4 посвящена подходам, в которых исходная задача, сформулированная в уравнениях в частных производных аппроксимируется си-

стемой обыкновенных дифференциальных уравнений. Разработанная вариационная техника распространяется на случай полу-дискретных аппроксимаций вектора перемещений и тензора напряжений, включая, с одной стороны, полиномиальные разложения конечной размерности относительно некоторых координатных компонентов и, с другой стороны, неизвестные функции относительно оставшейся компоненты. Подход проиллюстрирован на примере плоских статических и динамических балочных задачах.

В п. 4.1 описан алгоритм сведения задачи в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В рамках гипотез плоской теории упругости с использованием классических вариационных принципов минимума полных потенциальной и дополнительной энергий и полу-дискретных аппроксимаций компонент вектора перемещений

$$\tilde{u} = \sum_{k=0}^{N_u} u^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}, \quad \tilde{v} = \sum_{k=0}^{N_v} v^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}. \quad (23)$$

и тензора напряжений

$$\tilde{\sigma}_x = \sum_{k=0}^{N_\sigma} \sigma_x^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}, \quad \tilde{\tau}_{xy} = \sum_{k=0}^{N_\sigma+1} \tau_{xy}^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}, \quad \tilde{\sigma}_y = \sum_{k=0}^{N_\sigma+2} \sigma_y^{(k)}(x) \frac{y^k}{h^k}. \quad (24)$$

построены разрешающие системы уравнений Эйлера-Лагранжа второго порядка в перемещениях и четвертого порядка в напряжениях.

В п. 4.2 проводится анализ напряженно-деформированного состояния балки. Используя решения систем ОДУ, полученных в п. 4.1, строятся двусторонние энергетические оценки качества приближенного решения. Как было показано ранее значение неотрицательного функционала энергетической ошибки  $\Phi$  может быть представлено для рассматриваемых граничных условий в виде суммы полных потенциальной и дополнительной энергий в соответствии с

$$\Phi[a, b] = \int_{-l}^l \varphi_x(x, a, a', b, b', b'') dx = \Pi[a] + \Pi_c[b] \geq 0. \quad (25)$$

Здесь

$$a = \left\{ u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N_u)}, v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(N_v)} \right\}^T,$$

$$b = \left\{ \sigma_x^{(2)}, \sigma_x^{(3)}, \dots, \sigma_x^{(N_\sigma)} \right\}^T, \quad b(x) \in \mathcal{R}^{N_\sigma-1}$$

векторы проектных параметров. Относительная интегральная ошибка может быть задана

$$\Delta = \frac{\Phi[a, b]}{W_\sigma[b]}, \quad W_\sigma[b] = \Pi_c[b], \quad (26)$$

где энергия напряжения  $W_\sigma$  совпадает с полной дополнительной энергией  $\Pi_c$ .

В п. 4.3 составляется система ОДУ разрешающая задачу о собственных колебаниях прямолинейной балки на основе вариационного подхода и полу-дискретных аппроксимаций перемещений и напряжений. Как было показано, для чисто полиномиальной аппроксимации в Главе 2, интегро-дифференциальный подход дает комплексные собственные значения и формы колебаний. Результирующие приближения выбираются, как действительная часть  $\text{Re } \omega_1$  и  $\text{Re } \tilde{\sigma}$ .

В п. 4.4 рассматривается асимптотический подход, в котором выводятся определяющие уравнения для упругих балок, используя метод, который включает в себя разложение неизвестных функций перемещений и напряжений по малому параметру (соотношение размера поперечного сечения балки к его длине). Совместная система обыкновенных дифференциальных уравнений краевой задачи состоит из коэффициентов, выбранных соответствующим образом из полу-дискретных полиномиальных разложений соотношения между напряжениями и деформациями (асимптотические аппроксимации). Привлекательность этого метода состоит в том, что дифференциальный порядок приближенной системы уравнений в два раза меньше, чем порядок, вытекающий из вариационного подхода.

С использованием асимптотического подхода получены дифференциальные уравнения различного порядка, описывающие напряженно-деформированное состояние упругой балки. Проведено сравнение полученных результатов с решениями балочных уравнений Эйлера-Бернулли. Показано, что предложенный подход позволяет также анализировать поведение балок сделанных из анизотропного материала.

Далее (п. 4.5) в рамках плоской теории упругости получены приближенные уравнения, описывающие с различной степенью точности собственные продольные и поперечные колебания. Показано, что в простейшем случае продольные движения описываются ОДУ второго порядка, в то время как поперечные колебания – ОДУ четвертого порядка. Несмотря на то, что по форме эти уравнения соответствуют уравнениям балки Эйлера-Бернулли, они являются более содержательными. Так уравнение продольных колебаний, полученное асимптотическим подходом, имеет вид

$$\frac{d^2 \sigma_x^{(0)}}{dx^2} + \lambda^2 \sigma_x^{(0)} = 0, \quad (27)$$

где, в отличие от балки Эйлера-Бернулли, параметр  $\lambda$  имеет более сложную связь с собственной частотой  $\omega$

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 h^2} \left( 1 - \frac{\omega^2 \nu^2}{\omega^2 - 8\omega_0^2} \right). \quad (28)$$

Здесь  $\omega_0$  является характерной частотой, определяемая соотношением  $\omega_0^2 = \frac{E}{\rho h^2}$ . Два положительных корня  $\omega_+$  и  $\omega_-$  явно определены как функции целого числа  $m \geq 0$ :

$$\omega_{\pm}(m) = \omega_0 \sqrt{\frac{8 + \gamma^2 m^2 \pm \sqrt{64 + \gamma^2 m^2 [\gamma^2 m^2 - 16(1 - 2\nu^2)]}}{2(1 - \nu^2)}}. \quad (29)$$

Здесь  $\gamma = \frac{\pi h}{l}$  – характеристический параметр балки,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $h$  и  $l$  – высота и длина балки соответственно. Частоты  $\omega_{\pm}$  определяют два типа собственных решений (форм), показанные на

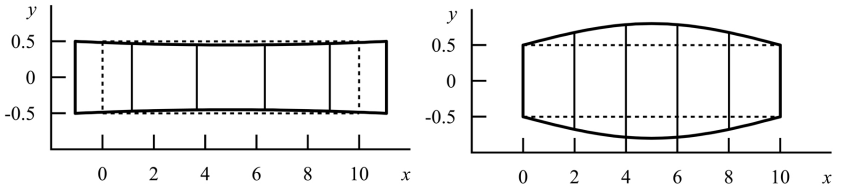


Рис. 4: Продольные собственные формы для  $\omega_-(1)$  (слева) и  $\omega_+(1)$  (справа).

Рис. 4 Собственные формы балки для  $\omega_-(1)$  и  $\omega_+(1)$  показаны сплошными линиями на Рис. 4 соответственно. Недеформированная балка представлена на обоих рисунках пунктирными линиями.

П. 4.6 посвящен исследованию трехмерных статических задач с помощью асимптотического подхода. Рассмотрена задача изгиба и кручения прямолинейного стержня прямоугольного сечения, защемленного на одном конце и нагруженного на другом силами и моментами. Другие грани призмы считаются свободными от нагрузок. Показано, что вследствие симметрии поперечного сечения относительно двух осей решение распадается на четыре независимых, а именно, растяжение, кручение и два изгиба относительно двух ортогональных осей. Исследовано влияние защемленного сечения призмы (эффект Сен Венана) на напряженно- деформированное состояние стержня. Например, показано что защемленный конец балки оказывает существенное влияние на распределение растягивающих напряжений вдоль балки. Это влияние распространяется на значительное расстояние (более 20 % от длины балки при заданных параметрах  $l/h = 10$ ). Исследована также характерная депланация поперечного сечения, которая показывает, что гипотеза Бернулли о плоских сечениях существенно нарушается в окрестности зажатого сечения.

В п. 4.7 описаны различные модификации метода Петрова-Галерки-

на, основанные на интегральных проекциях соотношений между напряжениями и деформациями на специальное пространство тестовых функций и полу-дискретизации допустимых полей перемещений и напряжений. Численные проекционные алгоритмы разработаны с целью построения систем с минимальной размерностью, которые гарантируют качество данного решения.

В п. 4.8 обсуждается связь между проекционными, асимптотическими и вариационными подходами. Показано, что в одних случаях эти подходы совпадают, а иногда имеют значительные различия. Так, например в асимптотическом подходе точность получаемых решений в значительной мере зависит от выбора системы координат, в то время как, проекционный подход не имеет такого недостатка.

Глава 5 фокусируется на приложениях проекционного подхода к пространственным статическим и спектральным задачам теории упругости, применительно к балкам с несимметричным поперечным сечением.

В п. 5.1 описываются три алгоритма построения разрешающей системы ОДУ для задачи определения напряженно-деформированного состояния упругого тела на основе МИДС и соответствующей проекционной техники. Показано, что при нахождении общего решения построенное системы ОДУ определитель системы имеет следующую структуру:

$$\det(K + \lambda E) = \lambda^{12} P_{N_d-12}(\lambda) = 0. \quad (30)$$

Здесь  $P_{N_d-12}$  является полиномом степени  $N_d - 12$  относительно параметра  $\lambda$ . Корень  $\lambda = 0$  с кратностью 12 отражает полиномиальную часть общего решения, в то время как корни уравнения

$$P_{N_d-12}(\lambda) = 0 \quad (31)$$

формируют решение, состоящее из экспоненциальных членов. Отме-

тим, что решения уравнения (31) в общем случае являются комплексными величинами и описывают эффект Сен Венана.

Далее в этой Главе исследуется консольная балка с треугольным сечением и на этом примере показывается эффективность проекционных алгоритмов, предложенных в предыдущем разделе. Описывается проекционная модель балки, основанная только на полиномиальной части общего решения уравнения (30). Особое внимание уделяется эффективно вычислению таких геометрических и механических характеристик, таких как изгибная и крутильная жесткость, координаты центра изгиба и т.д.

Подход, разработанный на основе проекционной техники, распространяется на трехмерные динамические задачи. Проведен частотно-волновой анализ свободных и вынужденных колебаний балки с треугольным сечением. Характерные особенности собственных частот и форм проиллюстрированы на примере комбинированных крутильных, продольных и поперечных колебаний балок с треугольным сечением. Обсуждены спектральные характеристики балок и их специальные резонансные свойства связанные с отсутствием симметрии.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

Даны новые вариационные постановки краевых и спектральных задач линейной теории упругости, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных, а также смешанными граничными условиями. Полученные интегро-дифференциальные формулировки сводятся к нахождению минимума квадратичных функционалов состояния системы при заданных дифференциальных ограничениях. Выведены необходимые условия стационарности рассмотренных функционалов. Показано, что условия стационарности этих функционалов совместно с уравнениями равновесия и граничными условиями эквивалентны полной системе уравнений линейной теории упру-

гости. Выявлена связь предложенных вариационных постановок с классическими вариационными принципами минимума полной потенциальной и дополнительной энергий. При этом, интегро-дифференциальные формулировки часто позволяют разделить задачу на две независимые подзадачи в перемещениях и в напряжениях, соответственно. Получены явные двусторонние оценки запасаемой упругой энергии для различных типов граничных условий. Разработан адаптивный алгоритм решения задач упругости с использованием кусочно-полиномиальной аппроксимации высоких порядков кинематически допустимых перемещений и равновесных напряжений для произвольной триангуляции области. Обсуждены различные стратегии уточнения и адаптации сетки, разработанные на основе явных локальных и интегральных двусторонних энергетических оценок приближенного решения. Разработаны вариационные, асимптотические и проекционные подходы на основе полудискретных аппроксимаций вектора перемещений и тензора напряжений, включая, с одной стороны, полиномиальные разложения конечной размерности относительно некоторых координатных компонентов и, с другой стороны, неизвестные функции относительно оставшейся компоненты. Представлены соответствующие алгоритмы для двух- и трехмерного моделирования статических задач, а также анализа свободных колебаний упругих балок. На основе проекционного подхода разработан численный алгоритм решения пространственных статических задач для упругих балок с несимметричным поперечным сечением. Предложенный подход позволяет также эффективно вычислять такие геометрические и механические характеристик, как изгибная и крутильная жесткость, координаты центра изгиба. Количественно оценено влияние формы поперечного сечения и граничных условий (эффект Сен-Венана) на деформации балки. Подход, разработанный на основе проекционной техники, распространен на трехмерные динамические задачи. Проведен частотно-волновой анализ свободных и вынужденных ко-



лебаний балки. Характерные особенности собственных частот и форм проиллюстрированы на примере комбинированных крутильных, продольных и поперечных колебаний балок с треугольным сечением. Обсуждены спектральные характеристики балок и их специальные резонансные свойства связанные с отсутствием симметрии.

## Список литературы

- [1] Костин Г.В., Саурин В.В. Интегродифференциальный подход к решению задач линейной теории упругости // Доклады АН. 2005. Т. 404. № 5. С. 628–631.
- [2] Костин Г.В., Саурин В.В. Итегро-дифференциальная постановка и вариационный метод решения задач линейной теории упругости // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сборник. Н-Новгород, 2005. Вып. 67. С. 190–198.
- [3] Костин Г.В., Саурин В.В. Вариационные подходы в теории балок // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 84–98.
- [4] Костин Г.В., Саурин В.В. О свободных колебаниях балок // Доклады АН. 2006. Т. 411 . № 5 . С. 617–621.
- [5] Костин Г.В., Саурин В.В. Метод интегродифференциальный соотношений в задаче о собственных колебаниях балки. Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сборник. Н-Новгород, 2006. Вып. 68. С. 139–149.
- [6] Костин Г.В., Саурин В.В. Асимптотический подход к задаче о свободных колебаниях балки // ПММ. 2007. Том 71. Вып. 4. С. 670–680.

- [7] Костин Г.В., Саурин В.В. Метод интегродифференциальных соотношений в линейной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 36–49.
- [8] Костин Г.В., Саурин В.В. Асимптотический подход к анализу напряженно-деформированного состояния упругих тел // Доклады АН. 2008. Т. 423. № 6. С. 753–757.
- [9] Костин Г.В., Саурин В.В. Метод интегродифференциальных соотношений для анализа собственных колебаний мембран // ПММ. 2009. Том 73. Вып. 3. С. 459–473.
- [10] Саурин В.В. О вариационных подходах в линейной теории упругости // Доклады АН. 2007. Т. 415. № 4. С. 486–490.
- [11] A. Borovkov, V. Palmov, N. Banichuk, E. Stein, V. Saurin, F. Barthold, Yu. Misnik Macro-failure criterion for the theory of laminated composite structures with free edge delaminations. Computers and Structures, V. 76, N. 1, pp. 195–204, 2000.
- [12] A. Borovkov, V. Palmov, N. Banichuk, V. Saurin, F. Barthold, E. Stein Macro-failure criterion and optimization of composite structures with edge delaminations. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, V. 1, N. 1, p. 91, 2000.
- [13] Kostin G.V., Saurin V.V. Analytical Derivation of Basis Functions for Argyris Triangle. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 81(Suppl. 4), 2001. P. 871–872
- [14] G. V. Kostin, V. V. Saurin The method of integrodifferential relations for linear elasticity problems, Archive of Applied Mechanics, V. 76, N. 7–8, pp. 391–402, 2006.

- [15] G. V. Kostin, V. V. Saurin A variational formulation in fracture mechanics, *International Journal of Fracture*, V. 150, N. 1–2, pp. 195–211, 2008.
- [16] G. V. Kostin, V. V. Saurin Asymptotic approach to free beam vibration analysis, *Journal of Aerospace Engineering*, V. 22, N. 4, pp. 456–459, 2009.
- [17] Kostin G.V., Saurin V.V. Variational approach to static and dynamic elasticity problems. In Kounadis, A. N. and Gdoutos, E. E. (Eds.) *Recent Advances in Mechanics*. Springer, 2011. P. 131-158.
- [18] V.V. Saurin Shape design sensitivity analysis for fracture conditions. *Computers and Structures*, V. 76, N. 1, pp. 399–405, 2000.
- [19] Kostin G.V., Saurin V.V. *Integrodifferential Relations in Linear Elasticity*. Series: De Gruyter Studies in Mathematical Physics 10, De Gruyter, 2012.
- [20] Saurin V.V., Kostin G.V.: Reliable modeling to analyze free beam vibrations // In “Advances in Mechanics: Dynamics and Control: Proceedings of the 14th International Workshop on Dynamics and Control” / [ed. by F.L. Chernousko, G.V. Kostin, V.V. Saurin] Moscow: Nauka, 2008. P. 274–280. ISBN 978-5-02-036667-1
- [21] Kostin, G.V., Saurin, V.V.: An Analysis of Triangular Membrane Vibration by FEM and Ritz Method with Smooth Polynomial Basis Functions. *Abst. of the Annual Scientific Conf. of GAMM*, April 2000, Goettingen, Germany.
- [22] Saurin, V.V., Kostin, G.V.: Analytical Derivation of Smooth Shape unctions and Stiffness Matrix for 2-D Mechanical Problems. *Abst. of the Annual Scientific Conf. of GAMM*, April 2000, Goettingen, Germany.

- [23] Kostin,G.V., Saurin,V.V.: Application of FEM and Ritz Method with Smooth Approximation for Membrane Eigenvalue Problem. Abst. of the Int. Conf. "FEM for 3D Problems" June-July 2000, Jyvaeskylae, Finland.
- [24] Saurin,V.V., Kostin,G.V., Paramoshkin,O.G.: Finite Element Method with Continuous Interelement Derivatives. Abst. of the Int. Conf. "FEM for 3D Problems June-July 2000, Jyvaeskylae, Finland.
- [25] Kostin,G.V., Saurin,V.V.: Solution of the Membrane Eigenvalue Problem by FEM with Smooth Piecewise Polynomial Approximation. Abst. of the III Int. Workshop on Accurate Solution of Eigenvalue Problems. July 2000, Hagen, Germany.
- [26] Kostin,G.V., Saurin,V.V.: Validation of Membrane Eigenvalues by FEM Smooth Spline Approximation. Abst. of the GAMM-IMACS Int. Symp. SCAN2000, September 2001, Karlsruhe, Germany.
- [27] Kostin,G.V., Saurin,V.V.: Integro-Differential Approach in the Linear Theory of Elasticity. Abst. of the Int. Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics – 2005", July 2005, St. Petersburg, Russia.
- [28] Kostin,G.V., Saurin,V.V.: Numerical Analysis of Linear Elasticity Problems Based on the Integro-Differential Approach. Abst. of the Int. Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics – 2005", July 2005, St. Petersburg, Russia.
- [29] Kvanin A.V., Kostin, G.V., Saurin,V.V.: Finding Optimal Parameters of a Beam on Elastic Base under Various Loading. Abst. of the Int. Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics – 2005", July 2005, St. Petersburg, Russia.

- [30] Kostin,G.V., Saurin,V.V.: Variational Approaches in the Beam Theory. Abst. of the 77th Annual Meeting of GAMM, March 2006, Berlin, Germany.
- [31] Kostin,G.V., Saurin,V.V.: FEM Realization Based on Integral Strain-Stress Relations. Abst. of the 12th Conference MAFELAP, June 2006, London, UK.
- [32] Kostin,G.V., Saurin,V.V.: Integro-Differential Approach in the Linear Theory of Elasticity. Abst. of the 12th Conference MAFELAP, June 2006, London, UK.
- [33] Saurin,V.V., Kostin,G.V.: Reliable Modeling to Analyze Free Beam Vibrations. Abst. of the 14th Workshop on Dynamics and Control, May 28–June 2, 2007, Zvenigorod, Russia.
- [34] Saurin,V.V., Kostin,G.V.: An integrodifferential approach for free beam vibrations. Proc. of the Int. Summer School-Conf. APM. June–July 2007, St. Petersburg, Russia.
- [35] Kostin,G.V., Saurin,V.V.: A variational formulation in fracture mechanics. Proc. of the IFC Interquadrennial Conference, July 07–12, 2007, Moscow, Russia.
- [36] Saurin,V.V., Kostin,G.V.: A new approach to analysis of free beam vibrations. Abst. of the 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, July 16–20, 2007, Zurich, Switzerland.
- [37] Saurin,V.V., Kostin,G.V.: Free beam vibration analysis based on the method of integrodifferential relations. Proc. of 3rd IFAC Workshop PSYCO'07, August 29–31, 2007, St. Petersburg, Russia. Periodic Control Systems, V. 3, Part 1

- [38] Kostin,G.V., Saurin,V.V.: FEM realization based on integral strain-stress relations. Abst. of ENUMATH 2007 Conference. September 10-14, Graz, Austria, p. 118.
- [39] Saurin,V.V., Kostin,G.V.: Integrodifferential approach in the linear theory of elasticity. Abst. of ENUMATH 2007 Conference. September 10-14, Graz, Austria, p. 117.
- [40] Kostin,G.V., Saurin,V.V.: A variational analysis in dynamical problems of linear elasticity. Abst. of the GAMM 2008, March 30–April 4, 2008, Bremen, Germany.
- [41] Saurin,V.V., Kostin,G.V.: An asymptotic approach to analysis of 3D beam stress-strain elastic states. Abst. of the GAMM 2008, March 30–April 4, 2008, Bremen, Germany.
- [42] Saurin,V.V., Kostin,G.V.: A new variational approach to the linear theory of elasticity. Abst. of the Conference on Modeling, Simulation and Optimization of Complex Processes, Heidelberg, July 21–25, 2008. p. 51.
- [43] Kostin G.V., Saurin V.V.: A new variational approach to static problems of elasticity // Abstract of the 1st International Conference on Material Modelling (September 15–17, 2009, Dortmund, Germany) P. 137.
- [44] Saurin V.V., Kostin G.V.: Variational approach to static and dynamic elasticity problems // In the Proceedings of P.S. Theocaris Symposium on Recent Advance in Mechanics (September 17–19, 2009, Athens, Greece)/ [ed. by N.A. Koumadis, E.E. Gdoutos] Athens: Pericles S. Theocaris Foundation, 2009. P. 21–22. ISBN 978-960-98938-0-0

Саурин Василий Васильевич

**Двойственность и оценка качества решений  
в вариационных задачах теории упругости**

Автореферат диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

01.02.04 — Механика деформируемого твёрдого тела

Подписано к печати 26.11.2013. Заказ № 35-2013. Тираж 100 экз.

---

Отпечатано на ризографе Федерального государственного  
бюджетного учреждения науки Института проблем механики  
им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук  
119526, Москва, пр-т Вернадского, 101, 1