

На правах рукописи

Вин Ко Ко

**КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛОСТЯХ
НЕПОДВИЖНЫХ И ПОДВИЖНЫХ ТЕЛ**

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук**

Москва - 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования (ФГБОУ ВПО) «Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана» на кафедре «Космические аппараты и ракеты-носители» СМ-1.

Научный руководитель: **Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители», МГТУ им. Н. Э. Баумана**
Темнов Александр Николаевич

Официальные оппоненты: **Булатов Виталий Васильевич**
доктор физико-математических наук,
профессор, старший научный сотрудник,
Институт проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН)

Богданов Андрей Николаевич
кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова (МГУ)

Ведущая организация: **НИИ прикладной математики и механики
Томского государственного университета**

Защита состоится « 27 » сентября 2018 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при Институте проблем механики Российской академии наук по адресу: 119526 Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН (<http://www.ipmnet.ru>).

Автореферат разослан « 07 » августа 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.240.01,
кандидат физико-математических наук

Е.Я. Сысоева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Исследование колебаний неоднородных сложных гидродинамических систем является актуальной задачей динамики твердых тел, имеющих полости наполненные жидкостью. Изучение процессов, связанных с расслоением жидкости важно как с фундаментальной точки зрения так и с прикладной. Интерес этого исследования вытекает, прежде всего из большого спектра научных задач и практических приложений, связанных с решениями геофизических, фармакологических, технологических и ракетно-космических проблем. В настоящее время актуальность рассматриваемых задач подтверждается более глубоким изучением физических процессов, происходящих как внутри Земли, так и в воздушных слоях атмосферы, а также модернизацией и совершенствованием различных технологических процессов в машиностроении, и возрастающим использованием жидкого газа и криогенных жидкостей в промышленности и ракетно-космической технике.

В машиностроении широко используются конструкции, в которых имеются объемы слоистой жидкости; например, топливные баки объектов авиационной и ракетно-космической техники, резервуары для транспортировки жидкостей, а также для хранения нефтепродуктов и сжиженных газов, водонапорные башни и. т.д. Неоднородная жидкость, частично заполняющая полости, значительно влияет на движение всей системы; особенно, когда масса жидкости гораздо превосходит массу сухой конструкции. В этих случаях движение жидкости может существенно изменить движение всей конструкции.

К настоящему времени отсутствуют теоретические и экспериментальные результаты о динамике сосуда со слоистой жидкостью, на свободной поверхности которой имеются волны стационарной амплитуды. Дефицит исследований в данном направлении объясняется как сложностью, возникающих математических проблем, так и трудностями постановки самого эксперимента, поскольку необходимо обеспечить возбуждение стоячих волн стационарной амплитуды в слоистой жидкости.

Однако в ряде случаев качественное первоначальное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе простых линейных моделей и аналитических методов их исследования. В этом отношении весьма характерны и разнообразны задачи динамики многослойных жидкостей.

Цель диссертационной работы заключается в теоретическом и экспериментальном исследовании динамики слоистых жидкостей в неподвижных и подвижных сосудах, а также в исследовании динамики твердых тел, имеющих полости, наполненные подобной жидкостью.

Методы исследования. В работе использованы известные методы для решений задачи динамики однородных жидкостей, а также динамики движения твердого тела с жидкостью. При решении проблем, возникающих в ходе выполнения диссертационной работы, использованы различные аналитические и вычислительные методы: метод конечных элементов, метод разделения переменных, метод обобщенных координат, метод пограничного слоя, метод механических аналогов. При выполнении экспериментальных исследований использовались метод свободных колебаний и метод вынужденных колебаний.

Научную новизну диссертационной работы имеют следующие результаты:

1. Исследованы вопросы динамики многослойной идеальной и вязкой жидкостей в полости неподвижного твердого тела.
2. Получены теоретические и численные результаты основных динамических характеристик жидкостей для полостей различных конфигураций.
3. Исследованы вопросы взаимодействия слоистой идеальной жидкости и полости подвижного твердого тела.
4. Получены теоретические зависимости и численные результаты вычислений инерционных характеристик твердого тела с жидкостью, учитывающих подвижность несмешивающихся жидкостей и показывающих отличия от соответствующих динамических характеристик твердого тела с однородной жидкостью.
5. Приведены результаты экспериментальных исследований, подтверждающие правильность полученных численных результатов и достоверность разработанной теории движения твердых тел со слоистой жидкостью.
6. Исследована устойчивость движения твердого тела, имеющего полость наполненной трёхслойной жидкостью.
7. Разработан механический аналог, моделирующий колебания трёхслойной идеальной и вязкой жидкостей.

Практическая ценность. Результаты полученных исследований могут быть использованы при совершенствовании различных технологических процессов как в машиностроении так и в фармакологии, а также при проектировании космических заправочных станций, космических танкеров, морских газовозов.

Достоверность полученных результатов следует из сравнения с известными аналитическими и численным решениям, полученными в предыдущих работах, связанных с колебаниями однородной жидкости, частично заполняющих полость подвижного или неподвижного твердых

тел, а также подтверждёнными экспериментальными исследованиями настоящей работы.

Апробация работы: основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных и всероссийских научных конференциях, в том числе: Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня рождения В. И. Феодосьева, (МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016); XVIII международный симпозиум «Уникальные феномены и универсальные ценности культуры» (МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016); VII и VIII Международные научные школы молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах» (ИПМех РАН 2016; ИПМех РАН 2017); XLI международная научная конференция «Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королёва (МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017); Международная молодежная научная конференция «XLIII Гагаринские чтения», (МАИ, 2017); Международная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (ФАРМ-2017), (МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017).

Публикации по работе: список научных трудов по диссертационной работе составляет 12 публикаций, в том числе 5 публикации, в рецензируемых научных изданиях и журналах ВАК.

Личный вклад автора. Постановка задачи проводилась совместно с научным руководителем А. Н. Темновым. Создание экспериментальной установки, проведение экспериментальных работ, и обработка экспериментальных данных выполнены автором лично. Анализ численных и экспериментальных результатов проводился с научным руководителем. Работы [1,2,3,5] были написаны совместно с научным руководителем. Работа [4] была выполнена лично соискателем.

Структура и объем диссертации. Текст диссертации изложен на 157 страницах машинописного текста, иллюстрированного 109 рисунками и 7 таблицами. Диссертация состоит из введения, 5 глав с краткими выводами по каждой главе, заключения, списка публикаций и литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается актуальность проблемы, научная новизна, методы исследования, практическая ценность и достоверность полученных результатов, а также приведены данные о структуре и объеме диссертации, апробации работы и публикации.

В первой главе приводится литературный обзор современного состояния исследований динамики слоистой жидкости, который условно разделен на две части. К первой группе отнесены работы, касающиеся движения слоистых жидкостей и твердых тел в жидкостях, занимающих открытую область пространства. Основополагающие результаты по этой

теме связаны с именами таких ученых как Стокс, Гельмгольц, Рэлей. Дальнейшее развитие основных результатов получено в работах Краусса В., Миропольского Ю.З., Сретенского Л.Н., Секержа-Зеньковича Я. С.. Современные достижения в этой области имеются в работах Булатова В. В., Владимирова Ю. В., Нестерова С.В., Секержа-Зеньковича С. Я., Селезова И. Т., Стуровой И.В., Чашечкина Ю. Д..

К другой группе отнесены работы, касающиеся колебаний жидкостей, частично или полностью заполняющих полость неподвижного твердого тела, а также работы, связанные с движением твердых тел, имеющих полости частично или полностью заполненные жидкостью. Это цикл работ прежде всего связан с трудами Жуковского Н.Е., а современное состояние этого вопроса содержится в работах Черноусько Ф.Л., Колесникова К.С., Акуленко Л. Д., Нестерова С.В., Микишева Г. Н., Рабиновича Б. И., Пожалостина А.А., Шклярчука Ф. Н. и многих других.

Во второй главе рассмотрены свободные колебания N-идеальных жидкостей, каждая из которых совершает несжимаемое движение. Определены собственные частоты и формы колебаний жидкостей и приведены результаты численных расчетов для цилиндрического, цилиндрического с радиальными перегородками, коаксиального цилиндрического с радиальными перегородками и конического сосудов.

В предположении о потенциальности движения каждого слоя жидкости проблема определения движения многослойной жидкости приведена к задачам Неймана определения потенциалов смещений $\chi_i(x_i, r, \eta, t)$, удовлетворяющих уравнениям Лапласа,

$$\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_i^2} = 0; (i = 0, 1, 2, \dots, N-1), \quad (1)$$

условиям непротекания на смачиваемых поверхностях S_i и динамическим граничным условиям на поверхностях раздела $\Gamma_i, (i = 1, 2, \dots, N-1)$, содержащих производные по времени (см. рис.1)

$$\left(\rho_i \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial t^2} \Big|_{x_i=0} - \rho_{i+1} \frac{\partial^2 \chi_{i+1}}{\partial t^2} \Big|_{x_{i+1}=h_{i+1}} \right) = \{(\rho_{i+1} - \rho_i) g\} \frac{\partial \chi_i}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2)$$

Здесь $\chi_i(x_i, r, \eta, t), (i = 0, 1, 2, \dots, N-1)$ – потенциалы смещений частиц жидкостей, связанные с соответствующими потенциалами скоростей $\Phi_i(x_i, r, \eta, t)$, формулами $\Phi_i = \partial \chi_i / \partial t$, а поле смещений частиц жидкостей запишется в виде $-\bar{w}^{(i)}(x_i, r, \eta, t) = \nabla \chi_i$, где ∇ - оператор Гамильтона. ρ_{i+1}, ρ_i - плотности каждого слоя жидкости, N - число жидкостей.

Для определения собственных частот колебаний многослойной жидкости потенциалы χ_0, χ_i и χ_{N-1} представляются в виде:

$$\chi_0 = \varphi_0(x_0, y, z) \cdot \sigma_1(t); \chi_{N-1} = \varphi_{N-1}(x_{N-1}, y, z) \cdot \sigma_{N-1}(t); \quad (3)$$

$$\chi_i = \varphi_{ii}(x_i, y, z) \sigma_i(t) + \varphi_{ii+1}(x_i, y, z) \sigma_{i+1}(t); i=1, 2, \dots, N-2; \quad (4)$$

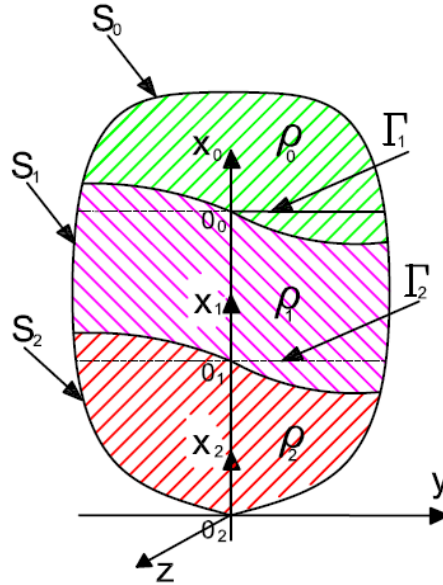


Рис. 1. Общий вид сосуда произвольной формы с трёхслойной жидкостью где: σ_1 и σ_2 - функции времени, описывающие волновые движения поверхностей разделов.

После подстановки потенциалов (3), (4) и представления $\sigma_{kn} = A_k \sin(pt + \alpha)$ в динамические граничные условия (2), было получено частотное уравнение, которое для произвольного числа N слоёв жидкостей имеет вид

$$a_0 \lambda^M + a_1 \lambda^{M-1} k_n + a_2 \lambda^{M-2} k_n^2 + \dots + a_M k_n^M = 0; (n=1, 2, \dots) \quad (5)$$

где M -число поверхностей раздела жидкостей. ($M=N-1$), $\lambda = p^2 L / g$, L -характерный размер полости, p - искомая частота колебаний N слоёв жидкостей,

k_n - собственное число задачи Неймана, получаемой из уравнений Лапласа при разделении переменных

$$\Delta_2 Y(y, z) + k^2 Y(y, z) = 0, \quad \partial Y / \partial n_0 = 0, \quad (6)$$

Свойства коэффициентов a_i и чисел k_n приводят к выводу: спектр колебаний многослойной жидкости является дискретным и при $n \rightarrow \infty$ квадраты собственных частот стремятся к бесконечности.

В диссертации были определены собственные частоты главных колебаний трёх жидкостей, полностью заполняющих сосуды различных форм: круглый цилиндрический сосуд, круглый цилиндрический сосуд с радиальными перегородками, коаксиальный цилиндрический сосуд с радиальными перегородками, конический сосуд. На рисунках (2) - (4)

представлены результаты расчетов собственных чисел ($\lambda_{1,2} = p_{1,2}^2 r_0 / g = \bar{p}_{1,2}^2$) в зависимости от ($\bar{h}_1 = h_1 / r_0$) для различных значений ($\bar{\rho}_0 = \rho_0 / \rho_2, \bar{\rho}_1 = \rho_1 / \rho_2$), ($\bar{h}_0 = h_0 / r_0$), ($\bar{h}_2 = h_2 / r_0$) для цилиндрического бака (рис.2); цилиндрического бака с радиальными перегородками и коаксиального цилиндрического бака с радиальными перегородками (рис.3), конического сосуда (рис.4).

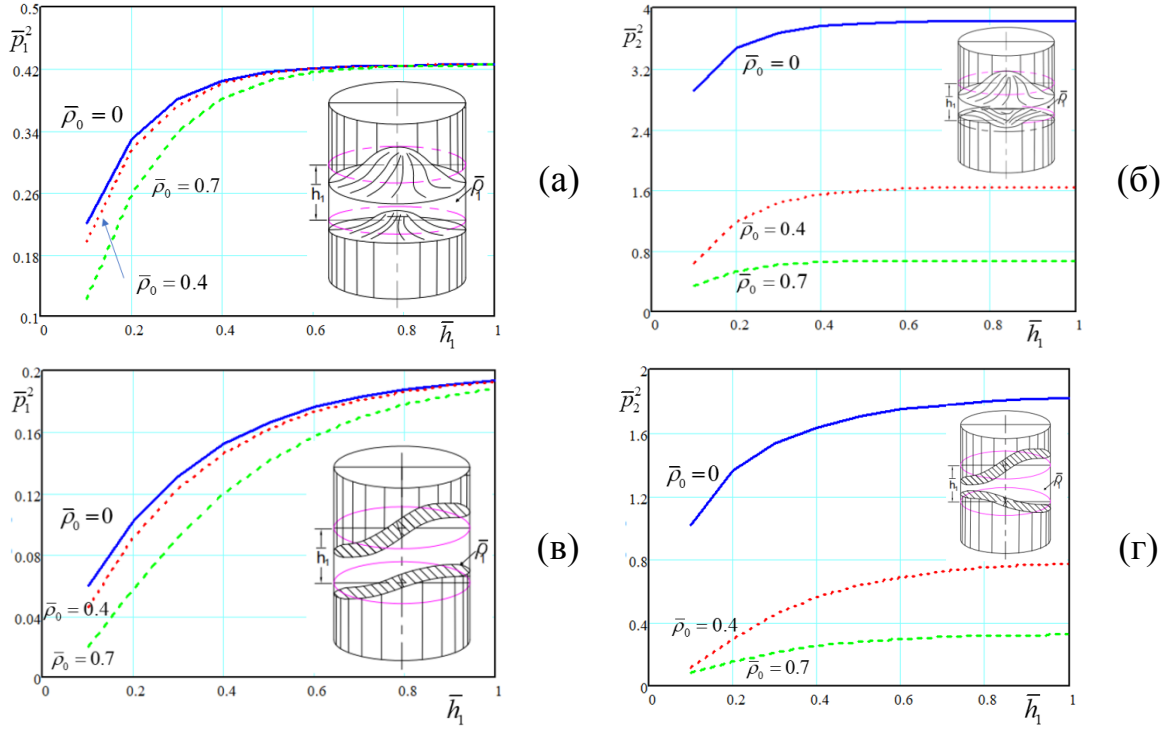


Рис. 2. Зависимость первой (а) и второй (б) главных частот $\bar{p}_{1,2}^2$ ($n=1, m=0$), ($\xi_{10} = 3.832$), первой (в) и второй (г) главных частот $\bar{p}_{1,2}^2$ ($n=1, m=1$), ($\xi_{11} = 1.8412$), от изменения глубины средней жидкости при $\bar{\rho}_1 = 0.8, \bar{h}_0 = \bar{h}_2 = 1$.

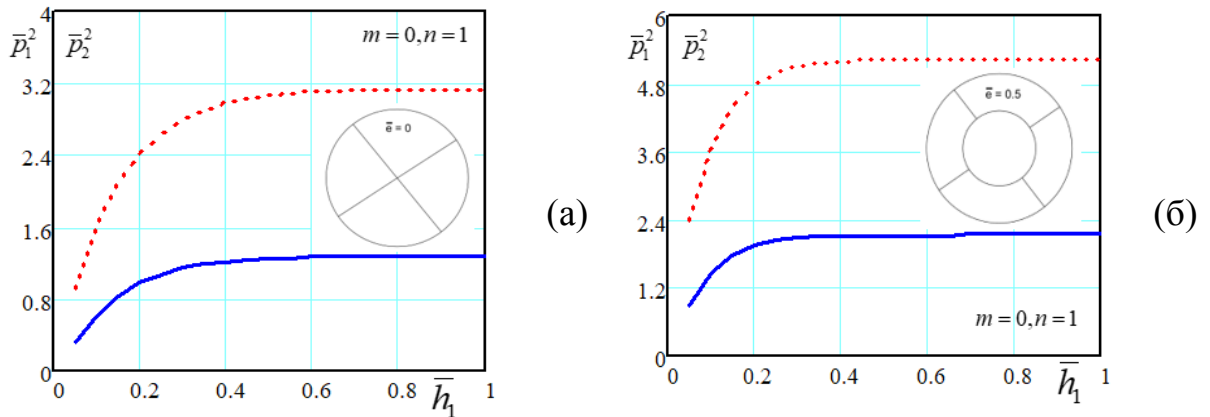


Рис. 3. Зависимость первой и второй главных частот $\bar{p}_{1,2}^2$ (а) ($\bar{e} = 0$), (б) ($\bar{e} = 0.5$) от изменения глубины средней жидкости при $\bar{h}_0 = 1, \bar{h}_2 = 1, \bar{\rho}_0 = 0.1, \bar{\rho}_1 = 0.5$. (сплошная линия – синфазные колебания, пунктирная-противофазные)

Во втором пункте второй главы рассмотрена задача о колебаниях слоистой жидкости в коническом баке. За характерный размер принят радиус R_3 dna конической полости. На рисунках (4. а, б, в, г) представлены результаты численных расчетов собственных значений в безразмерном виде $[\Omega_{1,2} = \bar{\Omega}_{1,2} \sqrt{g / R_3}]$ в зависимости угла ϑ_0 .

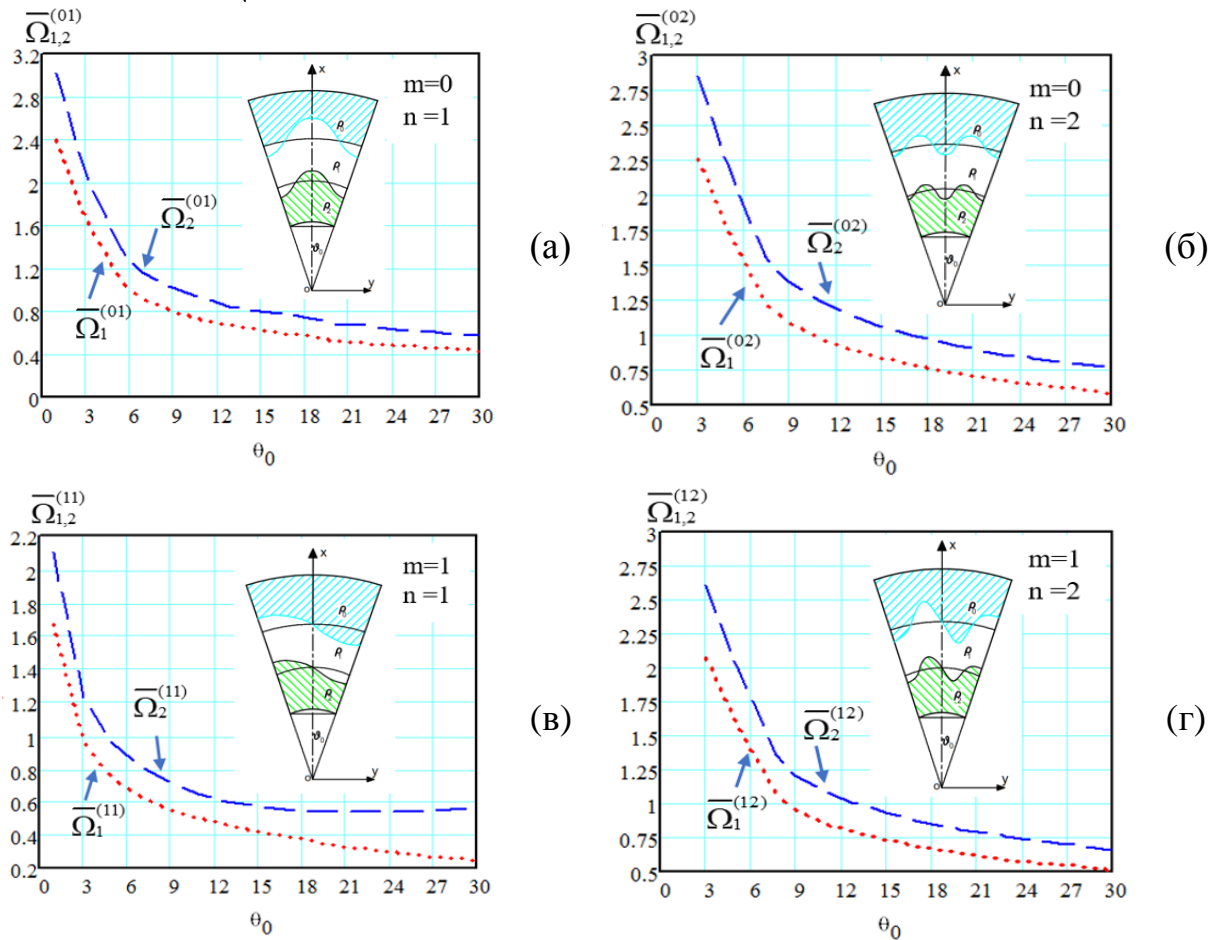


Рис. 4. Зависимость безразмерных собственных первых и вторых главных частот $\bar{\Omega}_1^{(01)}, \bar{\Omega}_2^{(01)}$ (а), $\bar{\Omega}_1^{(02)}, \bar{\Omega}_2^{(02)}$ (б), $\bar{\Omega}_1^{(11)}, \bar{\Omega}_2^{(11)}$ (в), $\bar{\Omega}_1^{(12)}, \bar{\Omega}_2^{(12)}$ (г) от различных углов ϑ_0 . (пунктирные линии - синфазные колебания, штриховые - противофазные)

В третьем пункте второй главы рассмотрена задача о колебаниях слоистой жидкости в цилиндрическом баке с использованием метода конечных элементов. Дана вариационная постановка задачи о собственных колебаниях несмешивающихся жидкостей и численная реализация определения стационарных значений функционала (7), отвечающего

вариационной задаче. Далее сравнены результаты численных расчетов с результатами точных решений и получены формы колебаний жидкостей на поверхностях раздела для первых двух тонов (см. рис.5).

$$F(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2) = \frac{\sum_{i=0}^2 \rho_i \int_{\Omega_i} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_i d\Omega_i}{\sum_{i=0}^1 (\rho_{i+1} - \rho_i)^{-1} \int_{\Gamma_{i+1}} (\rho_{i+1} \Phi_{i+1} - \rho_i \Phi_i)^2 d\Gamma_{i+1}}, (i = 0, 1, 2). \quad (7)$$

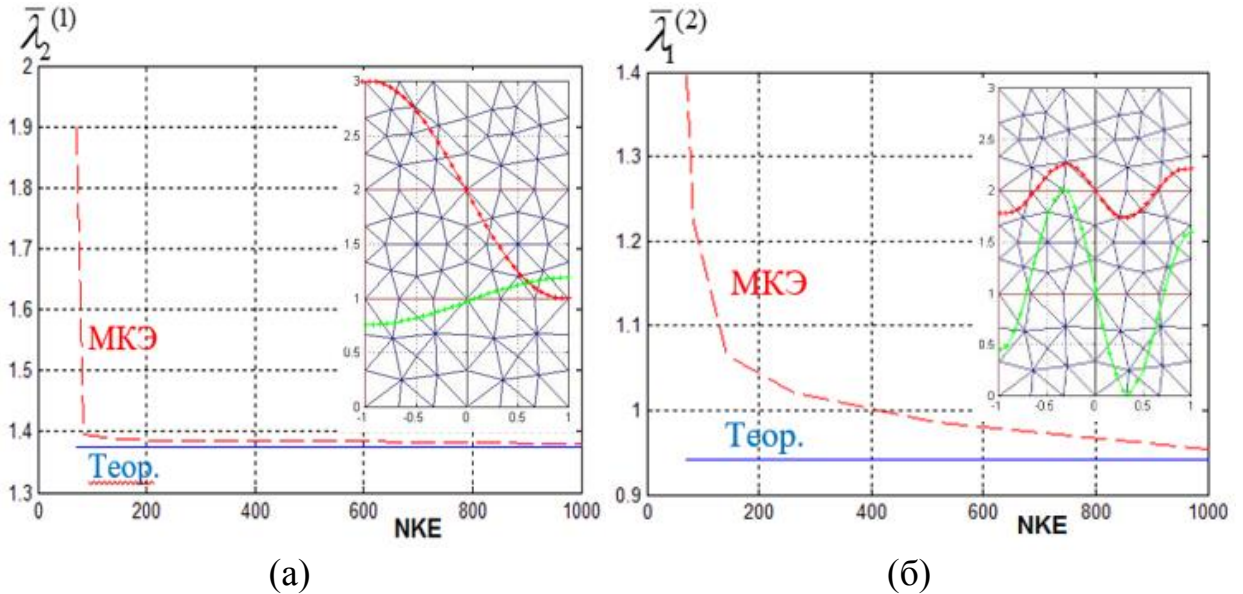


Рис. 5. Зависимости главных частот $\bar{\lambda}_{1,2}^{(1,2)}$ (а)- противофазные формы колебаний ($n = 1$) и (б)- синфазные ($n = 2$) от числа конечных элементов

$$N_{КЭ} \text{ при } \bar{\rho}_1 = 0.7, \bar{\rho}_0 = 0.1 \text{ и } \bar{h}_0 = \bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 1.$$

В конце второй главы разработан механический аналог, моделирующий колебания двухслойной и трёхслойной идеальной жидкости в неподвижном баке. Рассмотрена механическая система в виде невесомого стержня с маятниками. Точки подвеса маятников расположены на одной прямой. Вертикальное положение продольной оси, при отсутствии отклонений маятников, принято за невозмущённое состояние, отвечающее горизонтальному положению поверхностей раздела жидкостей при отсутствии их возмущений. Используя уравнения Лагранжа 2-ого рода, были получены уравнения колебаний системы маятников

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_1 + m_1 \frac{g}{l} s_1 + m_1 \frac{(l+b)}{\delta} \ddot{s}_2 &= 0; \\ \left(m_2 + m_1 \frac{(l+b)^2}{\delta^2} \right) \ddot{s}_2 + \frac{g}{\delta} \left(m_2 - m_1 \frac{(l+b)}{\delta} \right) s_2 + m_1 \frac{(l+b)}{\delta} \ddot{s}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Из сопоставления уравнений колебаний жидкости и уравнений колебаний механического аналога (8) были определены параметры предлагаемой маятниковой системы.

В третьей главе исследовались свободные колебания трёхслойной вязкой жидкости. В первом пункте данной главы представлена постановка задачи о колебаниях трёхслойной вязкой жидкости, заполняющей сосуд произвольной формы. Движения вязких жидкостей записаны в виде уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial t} = -\frac{\nabla p^{(i)}}{\rho_1} - g\vec{k} + \nu_i \Delta \vec{u}^{(i)}; \operatorname{div} \vec{u}^{(i)} = 0; (i=0,1,2) \quad (9)$$

которые дополнены условиями прилипания на смачиваемых поверхностях, условиями равенства нормальных и касательных напряжений и условиями равенства скоростей жидкостей на поверхностях раздела.

Для решения подставленной задачи во втором пункте третьей главы рассмотрена задача о колебаниях двухслойной вязкой жидкости полностью заполняющей неподвижный бак с использованием метода пограничного слоя. Ограничиваясь только первым приближением, были получены формулы для собственных частот $\bar{\beta}_{2j}^*$ и коэффициента затухания двухслойной вязкой жидкости $\bar{\gamma}_{2j}$ в виде:

$$\bar{\lambda}_j^{(2)} = -\bar{\gamma}_{2j} + i\bar{\beta}_{2j}^*, \bar{\gamma}_{2j} = \frac{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)\varepsilon_{II}}{2\sqrt{2}(\bar{\beta}_{2j})^{3/2}}(\bar{\rho}_2 A_{2j} + \bar{\rho}_1 A_{12j}), \bar{\beta}_{2j}^* = \sqrt{\bar{\beta}_{2j}^2 - \bar{\gamma}_{2j}^2}, \quad (10)$$

$$\text{где } A_{12j} = \frac{\int_{S_1} (\nabla' \bar{\varphi}^{(1)})^2 dS_1}{\int_{\Gamma} (\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}^{(2)})^2 d\Gamma}, A_{2j} = \frac{\int_{S_2} (\nabla' \bar{\varphi}^{(2)})^2 dS_2}{\int_{\Gamma} (\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}^{(2)})^2 d\Gamma}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{II}^2 = \frac{(\nu_1 + \nu_2)}{r_0 \sqrt{g r_0}}$$

В третьем пункте, используя результаты, полученные для двухслойной вязкой жидкости, разработаны механические аналоги колебаний двух вязких жидкостей, которые рассматривались как парциальные подсистемы механического аналога колебаний трёх вязких жидкостей, целиком заполняющих полость неподвижного твердого тела. Используя уравнения Лагранжа 2-ого рода, получены уравнения колебаний системы маятников с демпферами в виде,

$$M_{Imn} \ddot{s}_{In} + \mu_{In} \dot{s}_{In} + M_{Imn} \frac{g}{l_n} s_{In} - M_{Imn} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n} \ddot{s}_{In} - \mu_{In} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n} \dot{s}_{In} = 0; \quad (12)$$

$$\left(M_{IIIn} + M_{IMn} \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2} \right) \ddot{s}_{IIIn} + \left(\mu_{IIIn} + \mu_{In} \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2} \right) \dot{s}_{IIIn} + \frac{g}{\delta_n} \left(M_{IIIn} - M_{IMn} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n} \right) s_{IIIn} - M_{IMn} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n} \ddot{s}_{In} - \mu_{In} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n} \dot{s}_{In} = 0. \quad (13)$$

Характеристическое уравнение механической системы маятников, имитирующей колебания трёх вязких жидкостей имеет вид

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0. \quad (14)$$

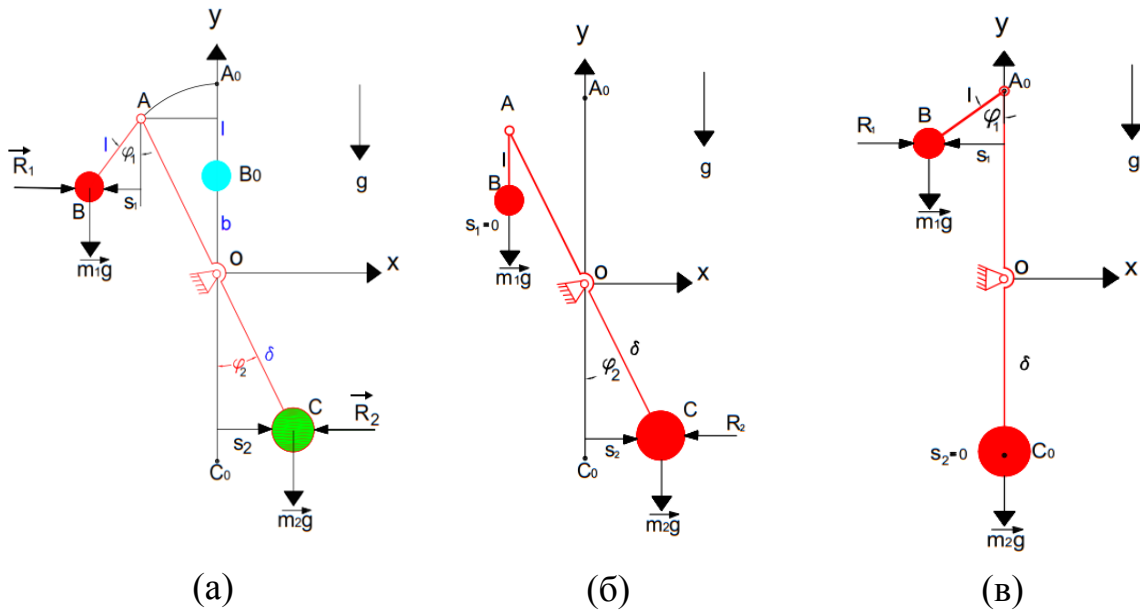


Рис. 6. Механические аналоги, имитирующие колебания трёхслойной (а) и двухслойной вязкой жидкостью (б), (в).

Используя вышеуказанный метод механического аналога, в четвертом пункте рассмотрены свободные колебания вязкой трёхслойной жидкости в круговом цилиндрическом сосуде.

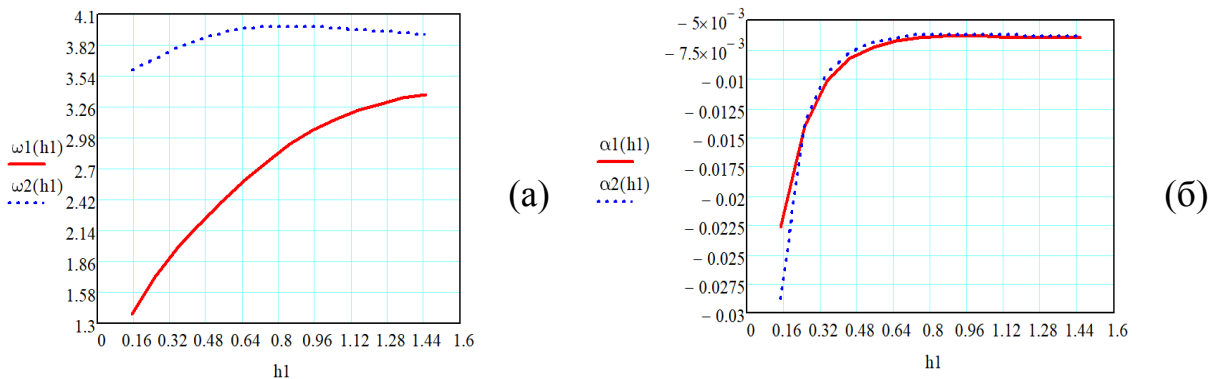


Рис. 7. Зависимость собственных частот $\omega_{1,2}$ (а), коэффициентов затухания $\alpha_{1,2}$ (б) трёхслойной вязкой жидкости [1/с] от глубины средней жидкости h_1 [м] при $h_0 = h_2 = 1.5$ [м] и $\rho_0 = 0.1, \rho_1 = 0.5$ [$10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$].

Приведены результаты численных расчетов в зависимости собственных частот $\omega_{1,2}$ и коэффициента затухания $\alpha_{1,2}$ от глубины средней жидкости и плотности верхней жидкости (сплошные линии - синфазные колебания, пунктирные - противофазные).

В последнем пункте главы 3 приведен сравнительный анализ коэффициентов затухания полученных в диссертации для двухслойной вязкой жидкости с результатами других авторов (см. рис.8).

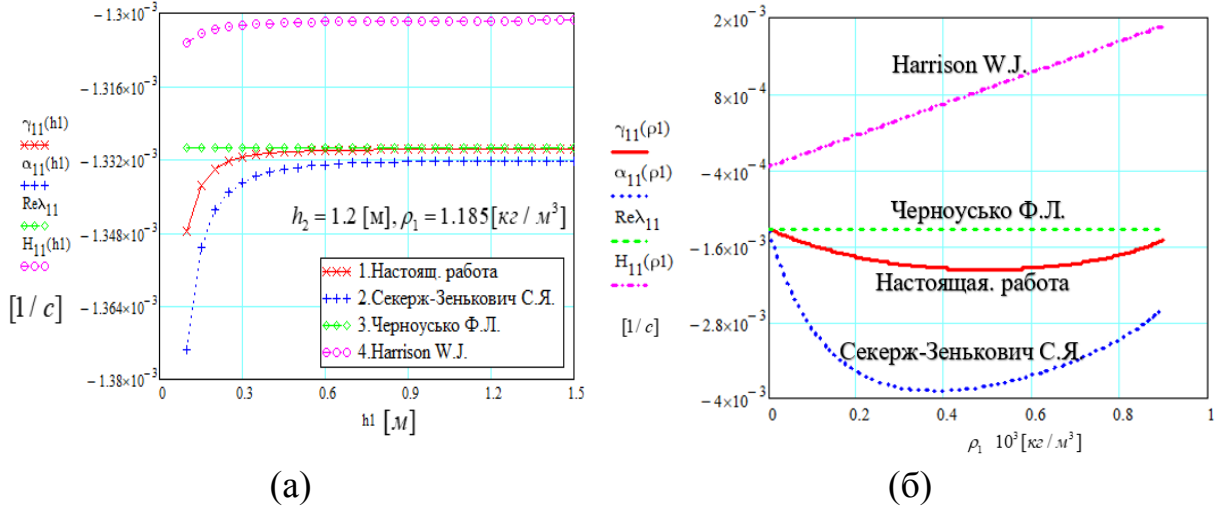


Рис. 8. Зависимость коэффициентов затухания от (а) глубины верхней жидкости h_1 и (б) плотности верхней жидкости ρ_1 , ($h_1 = h_2 = 1.2$) при ($n = m = 1$)

В четвертой главе диссертации приведена постановка задачи о движении жидкостей в полости подвижного твёрдого тела. Для составления уравнений движения твердого тела с идеальными жидкостями были использованы теоремы об изменениях количества движения и момента количеств движения материальной системы твёрдое тело–жидкость. Полученные дифференциальные уравнения движения рассматриваемой гидромеханической системы имеют вид:

$$\mu_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} + C_{1n} \sigma_{1n} + \lambda_{1n \vartheta} \ddot{\vartheta} + \lambda_{1n \sigma_2} \ddot{\sigma}_{2n} + \lambda_{1n g} \vartheta + \lambda_{1n u} \ddot{u} = 0, (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (15)$$

$$\mu_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} + C_{2n} \sigma_{2n} + \lambda_{2n \vartheta} \ddot{\vartheta} + \lambda_{2n \sigma_1} \ddot{\sigma}_{1n} + \lambda_{2n g} \vartheta + \lambda_{2n u} \ddot{u} = 0, (n = 1, 2, 3, \dots); \quad (16)$$

$$M \ddot{u} + \vec{\theta} \times \vec{S} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} = \vec{F}^{(e)}, \vec{S} = M \vec{r}_C, \quad (17)$$

$$\left(J_k + \sum_{i=0}^2 (J_i + \sum_{n=1}^{\infty} J_{in}) \right) \cdot \ddot{\theta} + g(\vec{S} \times \vec{\theta}) + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\gamma}_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} + g \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\gamma}_{1n}^* \sigma_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\gamma}_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} + g \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\gamma}_{2n}^* \sigma_{2n} + \vec{S} \times \ddot{u} = \vec{M}_o^{(e)}; \quad (18)$$

где $\mu_{1n}, \mu_{2n}, C_{1n}, C_{2n}, \lambda_{1n\vartheta}, \lambda_{2n\vartheta}, \lambda_{1n\sigma_2}, \lambda_{2n\sigma_1}, \lambda_{1n\vartheta}, \lambda_{2n\vartheta}, \lambda_{1nu}, \lambda_{2nu}, \vec{\gamma}_{1n}, \vec{\gamma}_{1n}^*, \vec{\gamma}_{2n}, \vec{\gamma}_{2n}^*$ - гидродинамические коэффициенты, определяемые через интегральные соотношения.

Во втором пункте четвертой главы рассмотрены параметрические колебания слоистой жидкости в цилиндрическом баке, при которых сосуд совершал гармонические колебания по закону $s = s_0 \cos pt$ в направлении, параллельном вектору ускорения свободного падения \vec{g} .

Уравнения параметрических колебаний трёхслойной вязкой жидкости после перехода к главным координатам $\lambda_{1nm}, \lambda_{2nm}$ были записаны в виде двух уравнений Матье,

$$\frac{\partial^2 \lambda_{1nm}}{\partial \tau^2} + \alpha_{1nm} \frac{\partial \lambda_{1nm}}{\partial \tau} + (l_{1nm} - 2q_{1nm} \cos(2\tau)) \lambda_{1nm} = 0; \alpha_{1nm} = 2\eta_{1nm} / \Omega_{1nm}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \lambda_{2nm}}{\partial \tau^2} + \alpha_{2nm} \frac{\partial \lambda_{2nm}}{\partial \tau} + (l_{2nm} - 2q_{2nm} \cos(2\tau)) \lambda_{2nm} = 0; \alpha_{2nm} = 2\eta_{2nm} / \Omega_{2nm},$$

где $l_{1nm} = 4\Omega_{1nm}^2 / p^2, 2q_{1nm} = 4s_0\Omega_{1nm}^2 / \nu_1 g = -4\ddot{s}_1 \Omega_{1nm}^2 / gp^2, \tau = pt / 2,$ (20)

$$l_{2nm} = 4\Omega_{2nm}^2 / p^2, 2q_{2nm} = 4s_0\Omega_{2nm}^2 / \nu_2 g = -4\ddot{s}_2 \Omega_{2nm}^2 / gp^2. \quad (21)$$

На рисунке 9 представлены области параметрического резонанса трёхслойной идеальной и вязкой жидкостей в случае $(n=1), (m=1)$, полученных в первом приближении для первой области устойчивости.

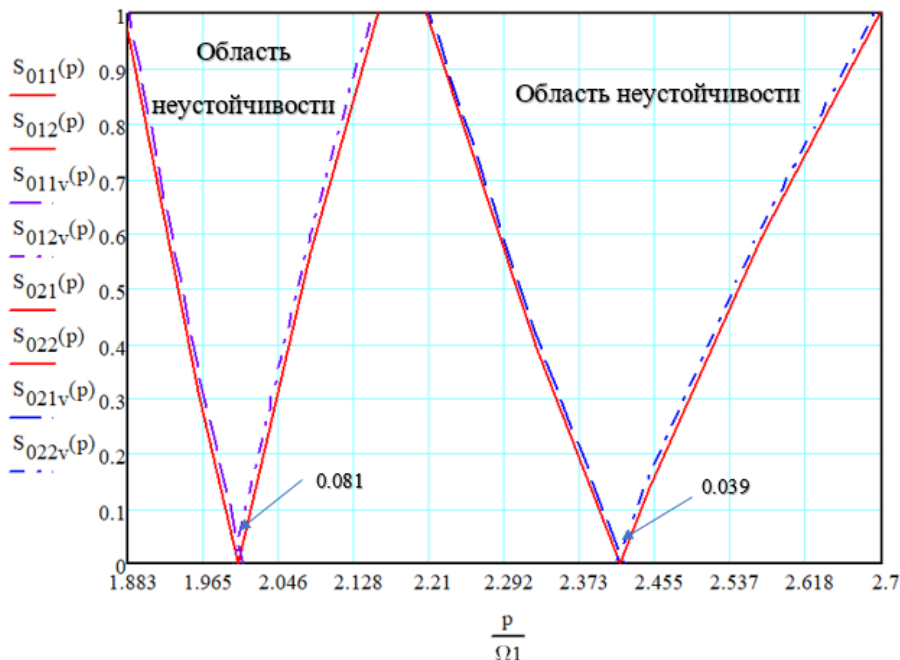


Рис. 9. Области неустойчивости трёхслойной идеальной и вязкой жидкости в зависимости амплитуды s_0 от частоты возбуждения p в безразмерном

В третьем пункте четвертой главы приведены уравнения движения твердого тела, имеющего цилиндрическую полость, целиком заполненную слоистой идеальной жидкостью. Вычислены динамические характеристики системы:

J_n - момент инерции эквивалентного тела-тела, состоящего из трех жидкостей, разделенных двумя жесткими перегородками Γ_1 и Γ_2 .

μ_{1n} и μ_{2n} - обобщенные массы жидкостей при колебаниях по n -ому тону и отвечающих верхней и нижней поверхностям разделов жидкостей.

L'_{1n} и L'_{2n} - плеча гидродинамических сил, возникающих при колебаниях верхней и нижней поверхностей разделов жидкостей.

$$J_n = \frac{\left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right)}{I_0}, \mu_{1n} = \frac{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})}{M}, \mu_{2n} = \frac{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n})}{M}, L_{1n} = \frac{L'_{1n}}{r_0}, L_{2n} = \frac{L'_{2n}}{r_0} \quad (22)$$

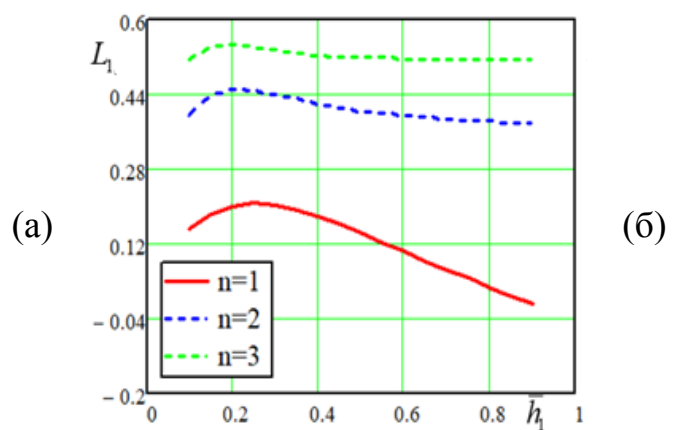
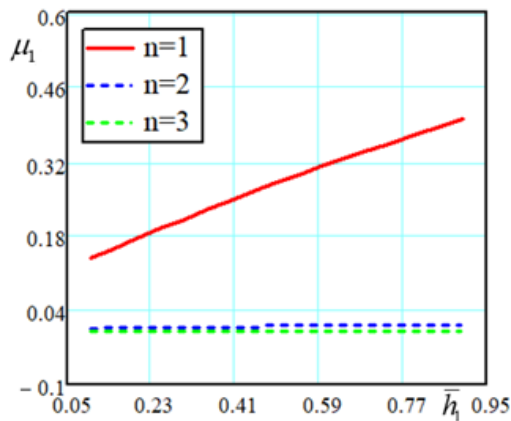


Рис. 10. Зависимость обобщенных масс жидкостей (а), плеч гидродинамических сил (б), возникающих при колебаниях верхней поверхности раздела Γ_1 от глубины средней жидкости для $n=1, 2, 3$,

$$\bar{\rho}_0 = 0.3, \bar{\rho}_1 = 0.5, \bar{h}_0 = 1, \bar{h}_2 = 1 - \bar{h}_1.$$

В четвертом пункте этой главы рассмотрены малые движения твердого тела, имеющего круговую цилиндрическую полость, целиком заполненную слоистой жидкостью и совершающим горизонтальное движение. Пусть круговой цилиндр радиуса r_0 полностью наполнен тремя несжимаемыми идеальными жидкостями и закреплен на подвижной платформе общей массой M , способной совершать поступательное движение по горизонтальному гладкому основанию.

Уравнения движения платформы с цилиндром и жидкостью имеют вид,

$$M^* \ddot{u}_c + m_{1n}^* \ddot{\sigma}_{1n} + m_{2n}^* \ddot{\sigma}_{2n} = F_0 \sin pt, \quad (23)$$

$$\ddot{\sigma}_{1n} + \beta_{1n}^2 \sigma_{1n} - a_{12n} \ddot{\sigma}_{2n} + b_{1n} \ddot{u}_c = 0, \quad (24)$$

$$\ddot{\sigma}_{2n} + \beta_{2n}^2 \sigma_{2n} - a_{21n} \ddot{\sigma}_{1n} + b_{2n} \ddot{u}_c = 0. \quad (25)$$

где $m_{1n}^* = (m'_{1n} - m'_{0n})$, $m_{2n}^* = (m'_{2n} - m'_{1n})$, $\alpha_{1n} = (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})$,
 $\alpha_{2n} = (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n})$, $a_{12n} = \frac{m'_{1n}}{chk_n h_1 \cdot \alpha_{1n}}$, $a_{21n} = \frac{m'_{1n}}{chk_n h_1 \cdot \alpha_{2n}}$, $b_{1n} = \frac{m_{1n}^*}{\alpha_{1n}}$, $b_{2n} = \frac{m_{2n}^*}{\alpha_{2n}}$,
 $\beta_{1n}^2 = b_{1n} \omega_n^2$, $\beta_{2n}^2 = b_{2n} \omega_n^2$.

Уравнения движения твердого тела могут быть записаны в виде, при $n = 1$

$$F_0 = a_0 M_{np}, \quad (26)$$

где M_{np} - масса преобразованного твердого тела, a_0 - амплитудное значение ускорения,

$$M_{np} = M^* \left[1 + \frac{m_1^* \left[b_1 (-p^2 + \beta_2^2) + b_2 p^2 a_{12} \right] p^2}{M^* (\Omega_1^2 - p^2)(\Omega_2^2 - p^2)} + \frac{m_2^* \left[b_2 (-p^2 + \beta_1^2) + b_1 p^2 a_{21} \right] p^2}{M^* (\Omega_1^2 - p^2)(\Omega_2^2 - p^2)} \right]. \quad (27)$$

График отношения M_{np} / M^* приведен на рис. 11. При построении графика были приняты следующие обозначения,

$$f(\bar{p}) = \frac{M_{np}}{M^*}, \bar{p}^2 = \frac{p^2}{\Omega_1^2}, \bar{\Omega}_2 = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}, \bar{\beta}_1^2 = \frac{\beta_1^2}{\Omega_1^2}, \bar{\beta}_2^2 = \frac{\beta_2^2}{\Omega_1^2}, \bar{h}_1 = \frac{h_1}{r_0}, \quad (28)$$

$$\Delta_1 = (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_0), \Delta_2 = (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1), \quad (29)$$

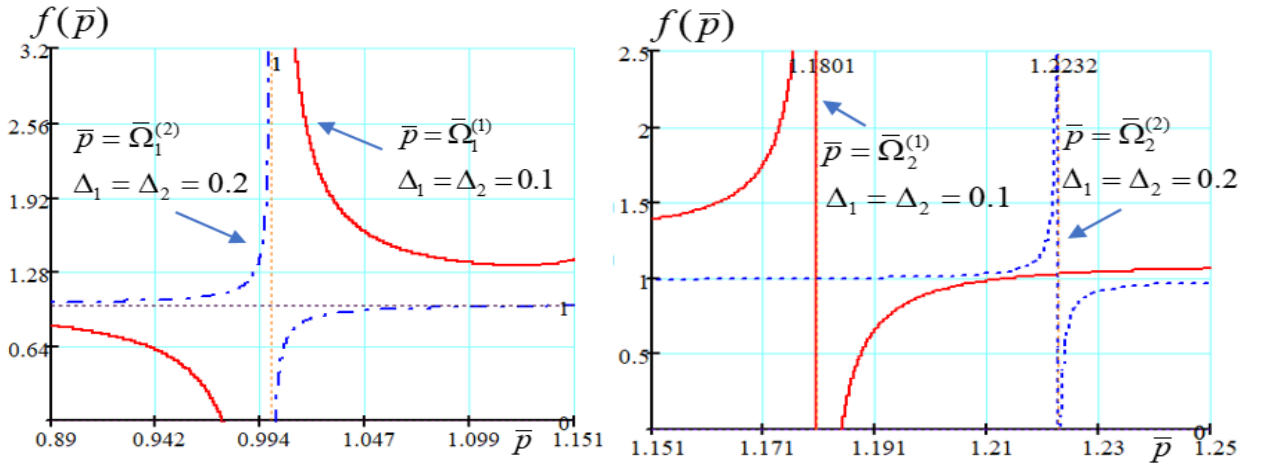


Рис. 11. Зависимость безразмерной массы преобразованного твердого тела

$$f(\bar{p}) = M_{np} / M^* \text{ от безразмерной частоты колебаний, } (n = 1) (\bar{\Omega}_1^{(1)}, \bar{\Omega}_1^{(2)}, \bar{\Omega}_2^{(1)}, \bar{\Omega}_2^{(2)} \text{ - первые и вторые главные частоты для случаев } \Delta_1 = \Delta_2 = 0.1 \text{ и } \Delta_1 = \Delta_2 = 0.2).$$

В последнем пункте четвертой главы исследована устойчивость колебаний на горизонтальной плоскости твердого тела, в виде круглого полуцилиндра с закреплённым невесомым цилиндрическим баком, полностью заполненного тремя несмешивающимися жидкостями. Составленные дифференциальные уравнения движения рассматриваемой гидродинамической системы, с использованием результатов из третьего пункта данной главы, имеют вид

$$J_p \ddot{\mathcal{G}} + S^* g \mathcal{G} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} - g \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \sigma_{1n} -$$

$$-g \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \sigma_{2n} = 0 \quad ; \quad (30)$$

$$(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}) \ddot{\sigma}_{1n} + (m'_{1n} - m'_{0n}) \omega_n^2 \sigma_{1n} + B_{1n} \ddot{\mathcal{G}} - m'_{1n} / ch \xi_n h_1 / r_0 \ddot{\sigma}_{2n} -$$

$$-(m'_{1n} - m'_{0n}) g \mathcal{G} = 0, n = 1, 2, 3 \dots \quad (31)$$

$$(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}) \ddot{\sigma}_{2n} + (m'_{2n} - m'_{1n}) \omega_n^2 \sigma_{2n} + B_{2n} \ddot{\mathcal{G}} - m'_{1n} / ch \xi_n h_1 / r_0 \ddot{\sigma}_{1n} -$$

$$-(m'_{2n} - m'_{1n}) g \mathcal{G} = 0, n = 1, 2, 3 \dots \quad (32)$$

где J_p - момент инерции приведенного твердого тела, $J_p = J_{pm} + J_p^{\circ}$ - момент инерции твердого тела и момент инерции эквивалентного тела относительно оси, проходящей через точку P,

$$J_p^{\circ} = I_0 + m_{\text{жс}} (R - a)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n, \quad m_{\text{жс}} = m_0 + m_1 + m_2, \quad (33)$$

$J_{pm} = m_m R (\frac{3R}{2} - 2a)$, $a = \frac{4R}{3\pi}$, $m_0 = \pi r_0^2 \rho_0 h_0$, $m_1 = \pi r_0^2 \rho_1 h_1$, $m_2 = \pi r_0^2 \rho_2 h_2$ - массы каждой жидкости,

I_0 - момент инерции затвердевших жидкостей относительно оси, проходящей через точку O,

$S^* g \mathcal{G} = (m_m a - m_{\text{жс}} H / 2) g \mathcal{G}$ - статический момент твердого тела и затвердевших жидкостей относительно оси, проходящей через точку O, σ_{1n} и σ_{2n} - обобщенные координаты волновых движений на поверхностях разделов жидкостей, $m'_{0n} = \rho_0 V$, $m'_{1n} = \rho_1 V$, $m'_{2n} = \rho_2 V$ - приведенные массы колеблющихся жидкостей,

$$V = \frac{2\pi r_0^3}{\xi_n (\xi_n^2 - 1)} th \xi_n h_1 / r_0, \quad B_{1n} = [m'_{1n} (l_0 - A_{1n}) - m'_{0n} (l_0 + A_{0n})], \quad (34)$$

$$B_{2n} = [m'_{2n} (l_1 - A_{2n}) - m'_{1n} (l_1 + A_{1n})]. \quad (35)$$

На рис. (12) представлены области устойчивости колебаний твердого тела, имеющего полость наполненной тремя жидкостями, на рис. (13) -

двумя жидкостями со свободной поверхностью. На этих же рисунках показано расположение корней характеристического уравнения, принадлежащих верхней и нижней границам области устойчивости.

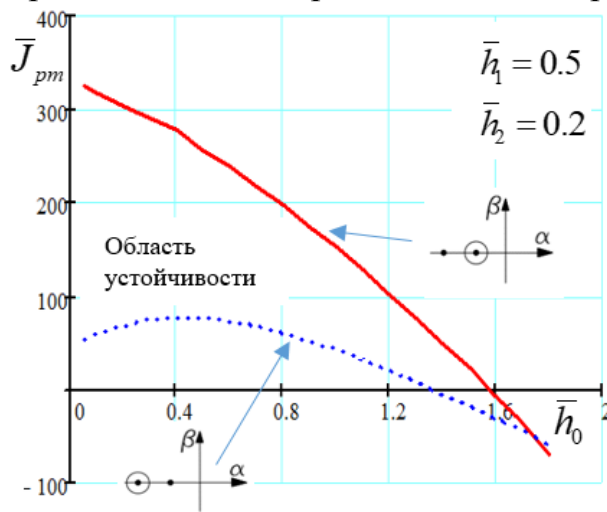


Рис. 12

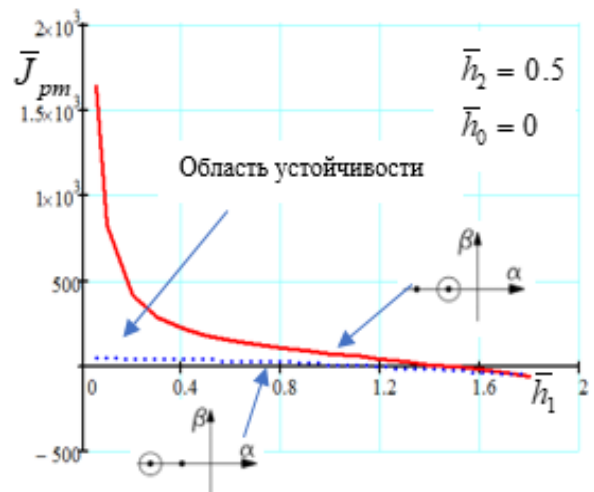


Рис. 13

В пятой главе приведены результаты экспериментального исследования колебаний слоистой жидкости в неподвижном и подвижном баках. Дано описание экспериментальной установки и кинематической схемы установки. В качестве испытуемых жидкостей были выбраны вода $\rho_2 = 1000 \text{ кг} / \text{м}^3$, подсолнечное масло плотностью ($\rho_1 = 920 \text{ кг} / \text{м}^3$) и муравьиный спирт ($\rho_0 = 830 \text{ кг} / \text{м}^3$), с коэффициентами поверхностного натяжения вода - подсолнечное масло ($\sigma_1 = 0.013 \text{ Н} / \text{м}$) и подсолнечное масло - муравьиный спирт ($\sigma_2 = 0.02 \text{ Н} / \text{м}$), значение кинематической вязкости воды ($\nu_2 = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$), подсолнечное масло ($\nu_1 = 39,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$) и муравьиного спирта ($\nu_0 = 1,54 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$).

В этой главе определены основные динамические характеристики колебаний слоистой жидкостью, а также приведено сравнение полученных экспериментальных показаний с теоретическими результатами.

Для нахождения собственных частот колебаний слоистой жидкости использовался метод свободных колебаний. Для создания начальных условий свободных колебаний жидкостей подвижной платформе с баком задавались колебания посредством возвратно-поступательного движения, вблизи резонансной частоты колебаний жидкостей. После некоторого времени совместных колебаний бака с жидкостями платформа мгновенно останавливалась, а жидкости совершали свободные колебания в неподвижном баке. При проведении эксперимента на ноутбуке регистрировались вынужденные и свободные колебания жидкостей, а также перемещения самого бака.

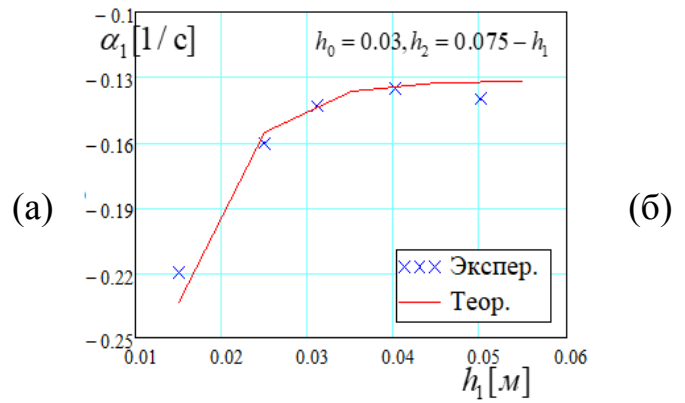
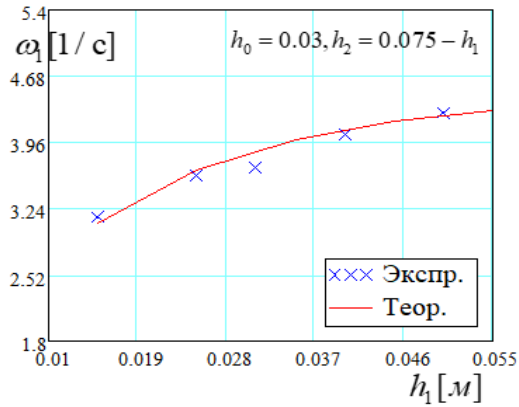


Рис. 14. Зависимости первой главной частоты (а) и коэффициента затухания (б) от толщины средней жидкости, определенные по формулам (14) и определенные в эксперименте

В пятой главе приведены также результаты по колебаниям на горизонтальной плоскости твёрдого полуцилиндра с цилиндрическим прозрачным баком частично заполненного двумя несмешивающимися жидкостями. Эксперимент проводился с использованием метода свободных колебаний и регистрировался на видеокамеру Айфон 5С (I Phone 5s).

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

- В диссертации теоретически и экспериментально исследованы колебания многослойной идеальной и вязкой жидкостей в неподвижных и подвижных баках различных формы, а также рассмотрены движения слоистой жидкости полностью или частично заполняющей полость подвижного твёрдого тела.
- В многослойной идеальной жидкости, полностью заполняющей ограниченную область существуют волны на поверхностях раздела жидкостей, которые родственны волнам на свободной поверхности однородной жидкости в том смысле, что если $n \rightarrow \infty$ (n -номер тона колебаний) главные частоты колебаний $p_n^k \rightarrow \infty$ ($k = 1, 2, \dots, N - 1$, N - число слоёв жидкостей).
- Существенным отличием колебаний многослойной жидкости от колебания свободной поверхности однородной жидкости является наличие для каждого числа n конечного множества главных частот многослойной жидкости.
- В трёхслойной идеальной жидкости для каждого числа n низким частотам главных колебаний отвечают синфазные формы движений поверхностей раздела жидкостей, а второй главной частоте – противофазные движения.
- Коэффициент затухания волновых движений многослойной жидкости всегда больше при прочих равных условиях коэффициента затухания свободной поверхности однородной жидкости.
- При наличии двух поверхностей раздела синфазные колебания имеют меньшие значения коэффициентов затухания, чем колебания, происходящие в противофазе.
- При прочих равных условиях, возникновение параметрических колебаний трёхслойной жидкости происходит на больших амплитудах возбуждения сосуда, по сравнению с однородной жидкостью.
- Частоты совместных колебаний многослойной жидкости в ограниченном объёме всегда меньше при прочих равных условиях, соответствующих частот колебаний свободной поверхности однородной жидкости.
- Движение твёрдого тела, имеющего полость, полностью заполненную многослойной жидкостью, качественно отличается от случая движения твёрдого тела, имеющего полость целиком заполненную однородной несжимаемой жидкостью.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Вин Ко Ко, Темнов А. Н.* Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде и их механические аналоги// Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 57-69.
2. *Вин Ко Ко, Темнов А. Н.* Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде, совершающим плоское движение//Наука и образование, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., № 10, 2016.
3. *Вин Ко Ко, Темнов А. Н.* Расчет колебаний дискретно-стратифицированных жидкостей методом конечных элементов// Наука и образование, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., № 05, 2016.
4. *Вин Ко Ко.* О колебаниях полуцилиндра, имеющего цилиндрическую полость с несмешивающимися жидкостями// Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Машиностроение.2017. № 6. С. 89-98.
5. *Вин Ко Ко, Темнов А. Н.* Экспериментальное и теоретическое исследование колебаний твердого тела со слоистой жидкостью// Инженерный журнал: наука и инновации, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., № 04, 2018. С. 1-13.
6. *Вин Ко Ко, Темнов. А.Н.* Механические аналоги колебания дискретно-стратифицированной жидкости//Сборник тезисов. Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня рождения В.И.Феодосьева.2016.С.231-234.
7. *Вин Ко Ко* Моделирование волновых движений стратифицированных жидкостей с использованием механических аналогов//Сборник тезисов. 7-ая международная научная школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», ФГБУН ИПМех. им. А.Ю. Ишлинского РАН, 2016. С.16-19.
8. *Вин Ко Ко,Темнов. А.Н.* Колебание слоистой жидкости в баках неподвижных и подвижных твердых тел//Сборник тезисов. 8-ая международная научная школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», ФГБУН ИПМех. им. А.Ю. Ишлинского РАН, 2017 г. С.230-233.
9. *Вин Ко Ко* Исследование устойчивости малых движений твердого тела, имеющего полость, наполненную слоистой жидкостью//Сборник тезисов. Международная молодежная научная конференция «XLIII Гагаринские чтения», МАИ–Московский авиационный институт, 2017 г. С. 15-22.

10. *Вин Ко Ко* Малые движения дискретно-стратифицированной жидкости в баках космических заправщиков//Сборник тезисов. XLI международная научная конференция «Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королёва и других выдающиеся отечественных ученых-пионеров освоения космического пространства», 2017 г. С. 34.
11. *Вин Ко Ко, Темнов. А.Н.* Экспериментальное и теоретическое исследования колебаний слоистой жидкости//Сборник тезисов. Международная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (FARM-2017), 2017.С. 42-73.

Вин Ко Ко

**КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛОСТЯХ
НЕПОДВИЖНЫХ И ПОДВИЖНЫХ ТЕЛ**

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Подписано к печати 28.06.2018. Заказ № 15-2018 г. Тираж -75 экз.

Отпечатано в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
119526, Москва, проспект Вернадского, 101, корп. 1

