

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. Н.Э. БАУМАНА

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи

Вин Ко Ко

**КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛОСТЯХ
НЕПОДВИЖНЫХ И ПОДВИЖНЫХ ТЕЛ**

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
Темнов Александр Николаевич

Москва – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ СЛОИСТОЙ ЖИДКОСТИ.....	10
1.1. Обзор литературы.....	10
1.1.1. Исследование динамики слоистых жидкостей в неограниченных областях.....	10
1.1.2. Исследование динамики слоистых жидкостей в ограниченных областях.....	15
1.2. Вывод по обзору литературы.....	25
ГЛАВА 2. КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СЛОИСТОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛОСТЯХ НЕПОДВИЖНЫХ ТЕЛ	26
2.1. Колебание многослойной жидкости в произвольном баке.....	26
2.1.1. Постановка задачи.....	26
2.1.2. Постановка вспомогательных краевых задач и их решения	28
2.1.3. Колебания несмешивающихся жидкостей в круговом цилиндрическом баке.....	30
2.1.4. Результаты численных расчетов динамических характеристик колебаний трёхслойной жидкости в круглом цилиндрическом баке.....	33
2.1.5. Колебания трёхслойной жидкости в соосных круглых цилиндрах со сплошными радиальными перегородками	39
2.1.6. Результаты численных расчетов динамических характеристик колебаний трёхслойной жидкости в круглом цилиндрическом баке с радиальными перегородками.....	42
2.2. Колебания слоистой жидкости в коническом баке	45
2.2.1. Постановка задачи.....	45
2.2.2. Вывод уравнений колебаний трёхслойной жидкости в коническом баке	47

2.2.3. Определение собственных частот колебаний трёхслойной жидкости в коническом баке	50
2.3. Исследование колебаний слоистой жидкости в цилиндрическом баке методом конечных элементов	52
2.3.1. Постановка задачи.....	52
2.3.2. Вариационная постановка задачи.....	54
2.3.3. Метод конечных элементов	55
2.3.4. Результаты численных расчетов и сравнение с точным решением.....	57
2.3.5. Определение формы колебаний	59
2.4. Механический аналог колебаний слоистой жидкости в неподвижном баке.....	61
2.4.1. Вывод уравнений движения колебаний маятниковой системы.....	62
2.4.2. Возможные маятниковые аналоги колебаний жидкостей	64
Вывод по главе 2	65
ГЛАВА 3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЁХСЛОЙНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ	66
3.1. Постановка задачи о колебаниях трёхслойной вязкой жидкости	66
3.2. Определение собственных колебаний двухслойной жидкости с использованием метода пограничного слоя.....	68
3.3. Механический аналог колебаний трёх вязких жидкостей, целиком заполняющих полость неподвижного твердого тела	78
3.4. Приближенный метод для вычисления корней характеристического уравнения	83
3.5. Свободные колебания вязкой трёхслойной жидкости в сосуде конкретной формы	85
3.6. Сравнительный анализ полученных результатов с результатами других авторов.....	93
Вывод по главе 3	96
ГЛАВА 4. ДИНАМИКА СЛОИСТЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОДВИЖНЫХ ЁМКОСТЯХ	97

4.1. О движении жидкостей в полости подвижного твёрдого тела	97
4.1.1. Постановка задачи.....	97
4.1.2. Постановка вспомогательных краевых задач и их решения	99
4.1.3. Вывод уравнения движения твердого тела с полостью, содержащей три жидкости	101
4.2. Параметрические колебания слоистых жидкостей в цилиндрическом баке.....	104
4.2.1. Постановка задачи.....	104
4.2.2. Постановка вспомогательных краевых задач и их решения	106
4.2.3. Параметрические колебания вязкой слоистой жидкости	110
4.3. Уравнения движения твердого тела, имеющего цилиндрическую полость, целиком заполненную слоистой жидкостью	113
4.3.1. Постановка задачи.....	113
4.3.2. Вычисление динамических характеристик	117
4.4. Малые движения твердого тела, имеющего круговую цилиндрическую полость, целиком заполненную слоистой жидкостью	119
4.4.1. Постановка задачи.....	119
4.4.2. Вывод уравнений движения.....	122
4.4.3. Результаты численных расчетов.....	124
4.5. Исследование устойчивости движения твердого тела, имеющего цилиндрическую полость, наполненной тремя несмешивающимися жидкостями	125
4.5.1. Постановка задачи.....	125
4.5.2. Вывод уравнений движения.....	125
4.5.3. Исследование устойчивости колебания твердого тела	129
Выводы по главе 4.....	133
ГЛАВА 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТОЙ ЖИДКОСТИ В НЕПОДВИЖНОМ И ПОДВИЖНОМ БАКАХ.....	134
5.1. Экспериментальное исследование колебаний слоистой жидкости	134

5.2. Описание экспериментальной установки.....	134
5.3. Кинематическая схема установки	135
5.4. Экспериментальное определение основных характеристик колебаний слоистой жидкости.....	138
5.5. Экспериментальное исследование колебаний полуцилиндра с двумя несмешивающимися жидкостями.....	140
Вывод по главе 5	142
ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ	143
ЛИТЕРАТУРА	144

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Исследование колебаний неоднородных сложных гидродинамических систем является актуальной задачей динамики твердых тел, имеющих полости наполненные жидкостью. Изучение процессов, связанных с расслоением жидкости важно как с фундаментальной точки зрения, так и с прикладной. Интерес этого исследования вытекает, прежде всего из большего спектра научных задач и практических приложений, связанных с решениями геофизических, фармакологических, технологических и ракетно-космических проблем. В настоящее время актуальность рассматриваемых задач подтверждается более глубоким изучением физических процессов, происходящих как внутри Земли, так и в воздушных слоях атмосферы, а также модернизацией и совершенствованием различных технологических процессов в машиностроении, и непрерывно возрастающим использованием жидкого газа и криогенных жидкостей в промышленности и ракетно-космической технике.

В машиностроении широко используются конструкции, в которых имеются объемы слоистой жидкости; например, топливные баки объектов авиационной и ракетно-космической техники, резервуары для транспортировки жидкостей, а также для хранения нефтепродуктов и сжиженных газов, водонапорные башни и т.д. Однородная жидкость, частично заполняющая полости, значительно влияет на движение всей системы; особенно, когда масса жидкости гораздо превосходит массу сухой конструкции. В этих случаях движение жидкости может существенно изменить движение всей конструкции.

К настоящему времени отсутствуют теоретические и экспериментальные результаты о динамике сосуда со слоистой жидкостью, на свободной поверхности которой имеются волны стационарной амплитуды. Дефицит исследований в данном направлении объясняется как сложностью, возникающих математических проблем, так и трудностями постановки самого эксперимента, поскольку необходимо обеспечить возбуждение стоячих волн стационарной амплитуды в слоистой жидкости.

Однако в ряде случаев качественное первоначальное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе простых линейных моделей и аналитических методов их исследования. В этом отношении весьма характерны и разнообразны задачи динамики многослойных жидкостей.

Цель диссертационной работы заключается в теоретическом и экспериментальном исследовании динамики слоистых жидкостей в неподвижных и подвижных сосудах, а также в исследовании динамики твердых тел, имеющих полости, наполненные подобной жидкостью.

Методы исследования. В работе использованы известные методы для решений задачи динамики однородных несмешивающихся жидкостей, а также динамики движения твердого тела с жидкостью. При решении проблем, возникающих в ходе выполнения, диссертационной работы использованы различные аналитические и вычислительные методы: метод конечных элементов, метод разделения переменных, метод обобщенных координат, метод пограничного слоя, метод использования механических аналогов. При выполнении экспериментальных исследований использовались метод свободных колебаний и метод вынужденных колебаний.

Научную новизну диссертационной работы имеют следующие результаты:

1. Исследованы вопросы динамики трёхслойной идеальной и вязкой жидкостей и в полости неподвижного твердого тела.
2. Получены теоретические и численные результаты основных динамических характеристик жидкостей для осесимметричных полостей различных конфигураций.
3. Исследованы вопросы взаимодействия слоистой идеальной жидкости и полости подвижного твердого тела.
4. Получены теоретические и численные результаты в виде зависимости инерционных характеристик твердого тела, учитывающих подвижность несмешивающихся жидкостей и показывающих отличия от динамики твердого тела с однородной жидкостью.

5. Приведены результаты экспериментальных исследований, подтверждающие правильность полученных численных результатов и достоверность разработанной теории движения твердых тел со слоистой жидкостью.
6. Разработаны методики вычисления собственных частот волновых движений слоистой жидкостью.
7. Исследована устойчивость движения твердого тела, имеющего полость наполненной трёхслойной жидкостью.
8. Разработан механический аналог, моделирующий колебания трёхслойной жидкости.

Практическая ценность. Результаты полученных исследований могут быть использованы при проектировании космических заправочных станций, космических танкеров, морских газовозов, при совершенствовании различных технологических процессов в машиностроении.

Достоверность полученных результатов следует из сравнения с известными аналитическими и численным решениям, полученными в предыдущих работах, а также подтверждёнными экспериментальными исследованиями настоящей работы.

Структура и объем диссертации. Текст диссертации изложен на 157 страницах машинописного текста, иллюстрированного 109 рисунками и 7 таблицами. Диссертация состоит из введения, 5 глав с краткими выводами по каждой главе, заключения, списка публикаций и литературы.

Апробация работы: основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных и всероссийских научных конференциях:

1. XVIII международный симпозиум «Уникальные феномены и универсальные ценности культуры» «ЧЕЛОВЕК В УСЛОВИЯХ ТЕХНОГЕННОЙ ЦИВИЛИЗАЦИИ: ПРОБЛЕМЫ И ВОЗМОЖНОСТИ», сборник научных докладов, МГТУ им. Н. Э. Баумана, (Москва, апрель-май 2016 г.).

2. 7-ая международная научная школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, (Москва, 30 ноября-02 декабря 2016 г.).
3. 8-ая международная научная школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, (Москва, 07-09 ноября 2017 г.).
4. XLI международная научная конференция «Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С. П. Королёва и других выдающиеся отечественных ученых-пионеров освоения космического пространства», МГТУ им. Н. Э. Баумана, (Москва, 24-27 января 2017 г.).
5. Международная молодежная научная конференция «XLIII Гагаринские чтения», МАИ–Московский авиационный институт, (Москва, 5-20 апреля 2017 г.).
6. Международная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (FARM-2017), МГТУ им. Н. Э. Баумана, (Москва, 24-27 октября, 2017 г.).
7. Всероссийская научно-техническая конференция «Механика и математическое моделирование в технике», посвященная 100-летию со дня рождения В. И. Феодосьева, МГТУ им. Н. Э. Баумана, (Москва, 17-19 мая 2016 г.).

Публикации: список научных трудов по диссертационной работе составляет 12 публикаций, в том числе 5 публикации, в рецензируемых научных изданиях и журналах.

ГЛАВА 1. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ СЛОИСТОЙ ЖИДКОСТИ

1.1. Обзор литературы

Все работы, связанные с колебаниями слоеных (дискретно-стратифицированных) жидкостей условно разделим на две группы. К первой группе отнесем работы, касающиеся колебаний слоистых (дискретно-стратифицированных) жидкостей, частично или полностью заполняющих полость неподвижного твердого тела, а также работы, связанные с движением твердых тел, имеющих полости частично или полностью заполненные слоеной жидкостью. К другой группе отнесем работы, касающиеся движения слоистых (дискретно-стратифицированных) жидкостей и твердых тел в жидкостях, занимающих открытую область пространства.

1.1.1. Исследование динамики слоистых жидкостей в неограниченных областях

Крупное направление, изучающее малые движения стратифицированной жидкости сформировалось в середине девятнадцатого века. Это направление связано с изучением внутренних волн в океане и атмосфере. Этот цикл исследований близок к рассматриваемым в данной работе вопросам. Внутренние волны возникают в жидкой среде, находящейся под действием некоторого внешнего силового поля, вследствие стратификации жидкости, в результате неравномерного прогрева массы жидкости и. т. д. Теоретическое исследование внутренних волн было начато Стоксом (1847 г.) [130]. Гельмгольцем (1868 г.) [123]. Стокс и]. Гельмгольц исследовали волны, возникающие на поверхностях раздела двух жидкостей разной плотности. Теоретическое исследование непрерывно стратифицированной среды впервые провел Рэлей (1883 г.) [128]. Он применил уравнения непрерывно стратифицированной жидкости к переходному слою между двумя жидкостями и при толщине этого слоя, стремящегося к нулю, получил те же значения динамических характеристик, что и Стокс. Затем

последовали работы Гринхила [121], который рассматривал колебания жидкости, состоящей из слоев одинаковой плотности и толщины.

После начала двадцатого века количество публикаций, посвященных колебаниям стратифицированной жидкости, связанных изучением внутренних волн в океане и атмосфере, сильно возросло. Ограничимся обсуждением наиболее крупных монографий и книг, в которых обобщены исследования по данной тематике и имеется обширная библиография.

Среди работ этой группы, в первую очередь, следует отметить монографию немецкого океанолога В. Крауса [63]. В этой монографии освещены вопросы условий возникновения линейных внутренних волн с параметрами среды и геометрией водоема. В этой же книге приведены способы сбора, обработки и интерпретации экспериментальных данных по внутренним волнам. В монографии Ю. З. Миропольского [71] дано описание теоретических методов исследования линейных внутренних волн в океане, а также приведён анализ нелинейных эффектов.

Если распределение плотности отличается от экспоненциального, то постановка задачи о колебаниях стратифицированных жидкостей приводит к сложному дифференциальному уравнению. Чтобы получить представление о динамике внутренних волн в подобных случаях можно реальное распределение плотности заменить суммой слоёв, внутри которых плотность постоянна. В приложении к процессам, происходящим в океане, наиболее реальной является трёхслойная модель [71] стратификации, состоящая из верхнего квазиоднородного слоя, слоя сезонного термоклина и нижнего слоя постоянной плотности.

В работе [30] проведено численное исследование обтекания двумерного кругового цилиндра стратифицированной жидкостью с периодами плавучести $T = 25,2; 6,28$ с в широком диапазоне значений чисел Рейнольдса и Фруда. Обнаружено, что при наличии опережающего возмущения перед цилиндром, смещающимся вниз по течению с увеличением числа Рейнольдса, линии равной солёности имеют форму полукруглого гребня с острыми зубцами. Исследована

закономерность изменения формы присоединенных волн и появления в следе за цилиндром слоев жидкости с различной плотностью. В течениях с периодом плавучести $T = 6,28$ с при числах Рейнольдса $Re < 60$ в следе за цилиндром обнаружены застойные зоны, при $Re > 60$ такие зоны отсутствуют.

В работе [125] Lu, Chwang рассматривалось теоретическое и экспериментальное исследование волновых процессов, которые являются наиболее актуальными проблемами гидромеханики. Отметим некоторые работы (1967–2007 гг.), посвященные проблеме распространения волн в слоистых средах.

Короткий обзор достижений в исследовании волновых движений в жидкостях (за 1999–2008 гг.) представлен в работе (Селезов и др., 2009) [86-90], где детально описаны результаты, полученные в работе (Choi, Camassa) [119].

В работе (Kakinuma et al., 2012) [124] рассмотрено взаимодействие как поверхностных, так и внутренних волн с упругой пластиной на поверхности контакта или свободной поверхности. Смоделированы внутренние и поверхностные волны в зависимости от точечной нагрузки.

В работах (Калиниченко, Секерж-Зенькович) [36-42, 85] проведено экспериментальное исследование профилей двумерных гравитационных стоячих волн. Установлено, что для таких волн имеет место система вторичных циркуляционных течений, охватывающих всю толщу жидкости.

В работе (Camassa et al.) [118] исследованы нелинейные волны в двухслойной жидкости со свободной поверхностью. В работе (Debsama et al.) [120] рассматривались полностью нелинейные длинные волны в двухслойной жидкости.

В публикациях (Авраменко) [1], (Селезов) [86-90] рассмотрены задачи, в которых учитывается поверхностное натяжение, что существенно влияет на распространение капиллярно-гравитационных волн, где имеет место вклад высоких гармоник в волновой процесс в целом.

В этих работах методом многомасштабных разложений исследованы двухслойные системы вида «полупространство – полупространство», «слой – полупространство» и система «слой – слой», а также представлено обоснование

методологических нюансов метода многомасштабных разложений. Распространение и взаимодействие внутренних и поверхностных волн методом многомасштабных разложений исследовалось в следующих работах. В работе (Селезов и др., 2009) [86-90] изучалось нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных волн. Проведен детальный анализ первого линейного приближения.

В линейном приближении рассматривается распространение внутренних гармонических волн в трехслойной жидкости для произвольных волновых чисел. Получены решения бегущей волны и выведено дисперсионное уравнение. Приводятся корни дисперсионного уравнения и зависимость решения от соотношения плотностей жидкостей. Фазовые и групповые скорости строятся, как функции длины волны для различных волновых режимов. [129].

В работах Селезова И. Т. [86-90] рассмотрена новая нелинейная задача распространения волновых пакетов в системе «жидкий слой с твердым дном—жидкий слой со свободной поверхностью». Методом многомасштабных разложений получены первые три линейных приближения нелинейной задачи. Получены решения первых двух линейных приближений, а также условия разрешимости второго и третьего линейных приближений. Выведены эволюционные уравнения для огибающих волновых пакетов на поверхности контакта и на свободной поверхности. Представлен анализ форм волновых пакетов на поверхности контакта и на свободной поверхности.

В работе [15] рассмотрены вопросы, связанные с динамикой внутренних гравитационных волн в экспоненциально стратифицированных средах бесконечной глубины. Обсуждаются адекватность и пределы применимости используемой модели стратифицированной среды, а также основные качественные особенности динамики плоских волновых пакетов внутренних гравитационных волн. Показано что как минимум в двух отношениях, внутренние гравитационные волны в безграничной экспоненциально стратифицированной среде качественно отличаются от акустических и электромагнитных колебаний: частоты колебаний распространяющихся внутренних волн не могут превосходить

частоту плавучести, и внутренние гравитационные волны распространяются не по нормали к волновым фронтам.

В работе [105] с помощью метода конечных элементов в прямоугольной области найдены приближенные собственные значения двумерной спектральной задачи с нелинейным вхождением параметра, возникающей в связи с проблемой нормальных колебаний вязкой несжимаемой экспоненциально-стратифицированной жидкости.

В работе [114] найдено преобразование, с помощью которого нелинейная система уравнений теории длинных волн, описывающая пространственные колебания многослойной стратифицированной жидкости во вращающемся круговом параболическом бассейне, сведена к обычным уравнениям модели многослойной мелкой воды над ровным неподвижным дном. Это преобразование получено в результате анализа теоретико-групповых свойств уравнений движения вращающейся мелкой воды, а также более общей модели, учитывающей кусочно-постоянную стратификацию жидкости. Наличие у рассматриваемых уравнений движения нетривиальных симметрий позволило провести групповое размножение решений. С использованием известного стационарного вращательно-симметричного решения получен класс периодических по времени решений, описывающий нелинейные колебания в круговом параболоиде с замкнутыми или квазизамкнутыми (эргодическими) траекториями движения жидких частиц.

В статье [95] в линейной постановке в приближении Буссинеска решена плоская задача о движениях трехслойной жидкости, вызванных вибрациями кругового цилиндра. Цилиндр полностью помещен в среднем линейно стратифицированном слое, верхний и нижний слои являются однородными и ограничены жесткими горизонтальными стенками. Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой. Выполнены расчеты коэффициентов присоединенных масс и демпфирования в зависимости от частоты колебания цилиндра и толщин слоев.

В монографии В.В.Булатова, Ю.В.Владимирова [15] рассмотрены фундаментальные проблемы волновой динамики природных неоднородных сред

(океан, атмосфера) и дано сравнение получаемых аналитических результатов с данными натурных измерений.

1.1.2. Исследование динамики слоистых жидкостей в ограниченных областях

В СССР целый ряд исследований, относящихся к этой проблеме, связан с именами К. С. Колесникова, Г. Н. Микишева, Б. И. Моисеева, В. В. Румянцева Ф. Л. Черноусько, Шклярчука Ф. Н. и др.

Монография [112] Ф. Л. Черноусько посвящена динамике твёрдого тела с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость. В монографии разработан метод обобщённых потенциалов, позволяющий проводить исследование и расчёт различных конкретных задач движения тела с жидким наполнением.

В учебнике К. С. Колесникова [45-47] рассмотрены дифференциальные уравнения возмущенного движения твердого тела с жидкостью как объекта управления и исследована устойчивость движения рассматриваемой механической системы.

В монографиях Г.Н. Микишева, Б.И.Рабиновича [68-70,84] основное внимание уделено учёту влияния подвижности жидких компонентов топлива в баках и магистралях на динамическую устойчивость замкнутой системы твердое тело-жидкость-автомат стабилизации, двигательная установка.

Монография [32] Л. В. Докучаева посвящена задачам нелинейной динамики летательного аппарата с деформируемыми элементами в виде гибких стержней. Рассмотрены вопросы устойчивости движения таких систем с учетом колебаний жидкости в жестких полостях, являющихся элементами конструкции системы.

Другой значимой работой, относящейся к этой проблеме, является докторская диссертация В. А. Бужинского [10].

В. А. Бужинский перенес методы теории трещин механики деформируемого твердого тела в области гидродинамики для рассмотрения колебаний пластин в несжимаемой маловязкой жидкости. Автор предложил новую, приближенную модель движения несжимаемой маловязкой жидкости, предназначенную для

определения сил сопротивления, действующих на тела с острыми кромками при их чисто колебательном движении. На основе этой модели В. А. Бужинский построил полуэмпирическую асимптотическую теорию вихревого сопротивления.

В работе [116] разработан алгоритм расчета колебаний по методу отсеков (под конструкций) многоступенчатых жидкостных ракет-носителей с поперечным делением ступеней. Представлены примеры расчета колебаний отдельных оболочек (баков) и составных конструкций с баками, содержащими жидкость, с оценками точности.

Дальнейшее развитие современной техники привело к формированию нового приложения в изучении динамики неоднородных жидкостей. Появились работы о колебаниях слоисто-неоднородной, и непрерывно стратифицированной жидкостей, заполняющих частично или полностью неподвижный сосуд замкнутой формы [54-60,96-103]. В исследованиях [54-60] было получено, что колебания несмешивающихся жидкостей в сосуде обладают дискретным спектром частоты и установлена применимость вариационных методов для решения задачи о колебаниях несмешивающихся жидкостей произвольном сосуде.

В работах [96-103] изучалось поведение слоистых, несмешивающихся жидкостей в полости подвижного твердого тела и их влияние на движение системы тело-жидкость. Эта работы показала, что расслоение жидкости приводит к новым динамическим особенностям системы тело-жидкость. В частности, теорема Жуковского Н. Е. О движении твёрдого тела с полостью, наполненной жидкостью, становится неприменимой к телу, содержащему неоднородную жидкость. В статье [26] приведены численные примеры на колебания дискретно-стратифицированных жидкостей.

В работах [3-7] исследуется задача о колебаниях двухслойной тяжелой жидкости, целиком заполняющей прямоугольный сосуд. Методом разделения переменных построено решение задачи Коши-Пуассона и исследованы его свойства. Поставлена и решена задача об управлении движением сосуда с финальным условием гашения внутренних волн жидкости.

В статье [5] исследуется задача о колебаниях твердого тела, имеющего прямоугольную полость и упруго связанной с неподвижным основанием. Полость целиком заполнена тяжелой двухслойной жидкостью, которая может совершать плоское движение. Асимптотическими методами построено приближенное решение задачи о взаимодействии колебаний такого сосуда и жидкости при различных предположениях относительно частот, обусловленных упругой связью и собственными колебаниями двухслойной жидкости.

В статье [3-7] исследуются внутренние волновые движения устойчиво стратифицированной жидкости в подвижном сосуде и способы управления этими колебаниями. Рассматривается случай экспоненциальной стратификации, отличающийся рядом существенных особенностей по сравнению со случаем дискретной стратификации.

Математические вопросы колебаний непрерывно-стратифицированной жидкости, заполняющей неподвижный сосуд произвольной формы, впервые рассмотрены в работах [56-60, 100]. Дальнейшее исследование математических проблем колебаний стратифицированных жидкостей рассмотрено в работах С. А. Габова, А. Г. Свешникова [20, 21].

В работе [100] рассмотрены некоторые особенности спектра оператора, соответствующего второй краевой задаче для уравнения типа С. Л. Соболева. К такой задаче можно привести систему дифференциальных уравнений, описывающих малых колебаний непрерывно-стратифицированной несжимаемой идеальной жидкости.

В работах [48-53] выведены частотные уравнения собственных колебаний двухслойной и многослойной жидкостей в прямом круговом цилиндре с мембранами, расположенными на “свободной” и внутренних поверхностях многослойной жидкости. Выведено и исследовано частотное уравнение собственных совместных колебаний кольцевой мембраны и жидкости. Оценено влияние перегрузки, натяжения и геометрии мембраны, а также глубины заполнения жидкости. Показано, что потеря устойчивости плоской формы равновесия мембраны может произойти только при отрицательной перегрузке. Из

динамического и статического подходов найдены критические значения величин перегрузки и натяжения мембран при которых происходит потеря устойчивости.

В работе [44] экспериментально изучается динамика границы раздела двух несмешивающихся жидкостей различной плотности в горизонтальной цилиндрической полости при вращении. Под действием центробежной силы жидкости распределяются в виде вложенных цилиндров – столб легкой жидкости занимает устойчивое положение вдоль оси вращения полости. Рассматривается методика измерения амплитуды колебаний границы раздела. Изучено влияние скорости вращения полости на амплитуду волны, которая возбуждается на цилиндрической границе раздела. Проводится сравнение экспериментальных значений амплитуды с теоретическими.

В работах [81,82] проанализирована динамика непроницаемой мембраны, взаимодействующей с жидкостью. Рассматриваемую краевую задачу можно применять в качестве первого приближения для анализа динамики такого фазоразделителя. Изложено точное аналитическое решение краевой задачи о малых свободных осесимметричных колебаниях двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения. Получено трансцендентное частотное уравнение, члены которого — быстро сходящиеся ряды.

В работе [108] исследована задача о малых движениях вязкой жидкости, плотность которой в равновесном состоянии имеет стабильное расслоение. Исходная краевая задача сводится к задаче Коши в некотором Гильбертовом пространстве.

В работе [115] рассматривается задача о собственных акустических колебаниях неоднородного цилиндра, состоящего из стеклянной трубки, заполненной жидкостью. В работе предложено несколько алгоритмов решения этой задачи и по одному из них проведены расчеты в ряде частных случаев.

В работе [14] изучалось возбуждение колебаний границы несмешивающихся жидкостей импульсным ультразвуковым пучком, параллельным границе раздела и приведены результаты наблюдения эволюции

формы колебаний границы при изменении амплитуды и длительности импульсов возбуждения, а также расстояния от излучателя. Выявлена возможность возбуждения различных мод колебаний границы раздела, находящихся в ограниченном объеме.

В работах [22,23] изучается задача о малых движениях и нормальных колебаниях системы из двух тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, частично заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя жидкость считается вязкой, а верхняя—идеальной. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы. Для соответствующей спектральной задачи получены утверждения о локализации спектра, асимптотическом поведении ветвей собственных значений, утверждение о наличии существенного спектра задачи.

В работе [43] экспериментально изучается динамика двухслойной системы, находящейся в центрифугированном состоянии, во внешнем силовом поле. Жидкости разной плотности стратифицируются в центробежном поле, образуя цилиндрическую границу раздела. При вращении на границе раздела возбуждается инерционная волна малой амплитуды, которая генерирует медленное отстающее движение границы раздела. Поверхность раздела при этом остается практически невозмущенной, и волна проявляет себя лишь в слабом радиальном смещении столба легкой жидкости относительно оси полости. Скорость границы раздела определяется отношением ускорения свободного падения к центробежному ускорению. На границе раздела пороговым образом возбуждается волна другого типа, что сопровождается резким изменением скорости границы раздела. Изучена роль таких параметров, как отношение вязкостей жидкостей и относительное наполнение жидкостей.

В статье [8] изучаются свойства собственных значений и собственных функций в задаче о нормальных колебаниях вязкой несжимаемой стратифицированной жидкости, заполняющей упругий сосуд. Получены утверждения о локализации спектра и доказана теорема о полноте собственных

функций с конечным дефектом. Изучение задач о движении жидкости в сосуде относится к числу классических задач гидромеханики.

В работе [12] рассматриваются малые (линейные) колебания идеальной жидкости, частично заполняющей сосуд, секционированный перфорированными перегородками. В предположении большого числа перфорационных отверстий приведена математическая формулировка задачи с усредненными условиями на перегородках. Дана вариационная формулировка усредненной спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости. Установлены некоторые общие свойства спектра частот собственных колебаний. Рассмотрен ряд конкретных примеров.

В работе Моисеева К.В. [73] на основе математической модели, построенной в линейном приближении, изучаются особенности образования слоистых течений при естественной конвекции слабо стратифицированной неоднородной жидкости. Установлены области параметров, при которых образуется послойно-ячеистая структура течения при боковом подогреве.

В работе [127] проведено теоретическое и экспериментальное исследование плесканий двух жидкостей при наличии свободной поверхности. Экспериментальная установка состоит из осциллирующего бака, наполненного двумя слоями несмешивающихся жидкостей. Математическая модель получается в результате применения вариационного подхода Лагранжа к формулировке потенциального движения жидкости. Для того, чтобы учесть демпфирование жидкостей, введены обобщенные диссипативные силы. Для этой цели, коэффициенты логарифмического затухания оцениваются с помощью вейвлет-анализа экспериментальных свободных колебаний системы жидкости. Численное интегрирование математической модели дает результаты, которые находятся в достаточно хорошем согласии с экспериментальными результатами.

Развитие ракетно-космической техники в последнее время привело к широкому использованию различных криогенных жидкостей. Для увеличения срока хранения крио-продуктов на борту космических аппаратов или в танкерах будущих космических заправочных станций необходимо создать некоторый запас

холода. С этой целью крио-продукт охлаждают до температуры тройной точки. При этой температуре криогенный продукт замерзает и его можно получить в виде мелких кристаллов. Смесь кристаллов с жидкой фазой называется шугой, а полученный продукт шугообразным (шугообразный водород, шугообразный сжиженный газ). Таким образом, в баке образуется крио-продукт, одновременно находящийся в трёхфазовом состоянии, образуя при этом три слоя жидкости.

В работе [122] приведены результаты по хранению и колебаниям шугообразного водорода в баке объемом 62 м^3 в условиях нормальной гравитации. В экспериментах варьировали (меняли) частоту колебаний и амплитуду, тип газа наддува, давление и объем свободного пространства для оценки влияния каждого из этих параметров на давление в баке и температуру жидкости стенки. В общей сложности было проведено 91 тестирование с жидким водородом и 62 теста с шугообразным. Были выполнены испытания, как в закрытых баках, так и в баках с истечением во время колебаний. В отчете представлены и рассмотрены подробно основные результаты испытаний при колебаниях жидкого водорода в закрытом баке, а также представлены некоторые общие тенденции для испытаний шугообразного водорода. Также представлены общие (суммарные) сравнения между колебаниями жидкого и шугообразного водорода.

Исследования динамики жидкости в неподвижном или колеблющемся сосуде имеют большое значение для решения как фундаментальных, так и многих прикладных задач [68-70, 45-47]. Задача о волнах в сосудах произвольной формы при различных способах возбуждения представляет значительный интерес, и этот раздел гидродинамики с течением времени стал классическим [92-94, 72-77, 64, 112 и др.].

Задача о горизонтальных поступательных колебаниях прямоугольного сосуда, частично наполненного жидкостью, впервые была рассмотрена Л.Н. Сретенским в 1951 г. [92-94]; позднее близкая по постановке задача решена Н.Н. Моисеевым [76,77]. В литературе эту задачу часто называют задачей Л.Н.

Сретенского. В указанных работах вычислено суммарное давление стоячих поверхностных волн на стенки сосуда и составлено уравнение его движения.

Обобщение задачи Л.Н. Сретенского на случай двухслойной жидкости, заполняющей частично цилиндрическую полость в подвижном твёрдом теле, совершающего плоское движение проведено в работе [25]– рис. 1.1.

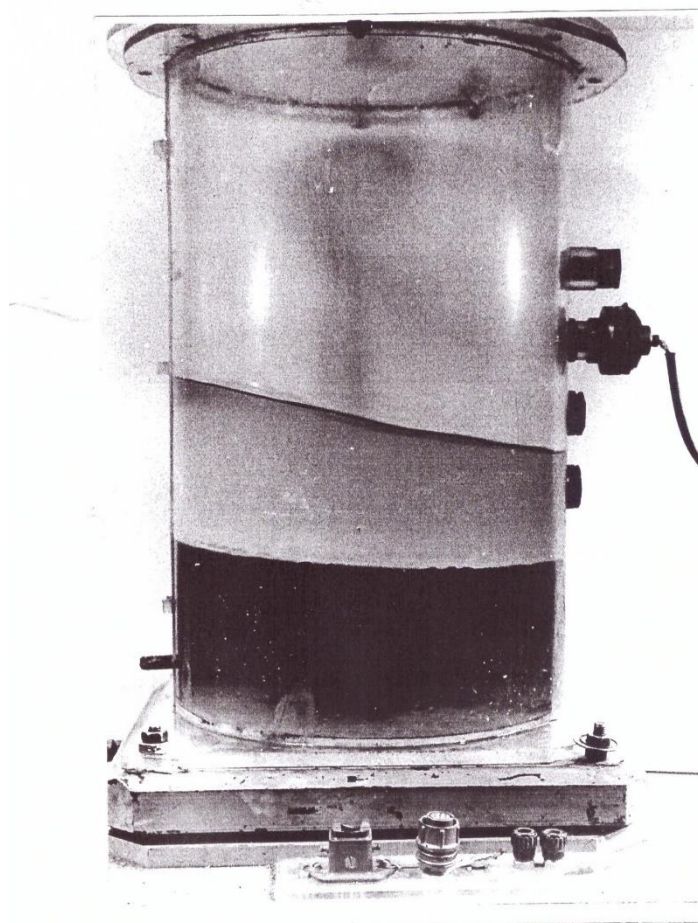


Рис. 1.1. Колебания двухслойной жидкости со свободной поверхностью в цилиндрическом сосуде.

Для сосуда, совершающего горизонтальное поступательное движение обобщение задачи Л.Н. Сретенского на случай двухслойной жидкости было выполнено в работе [6] – рис. 1.2.

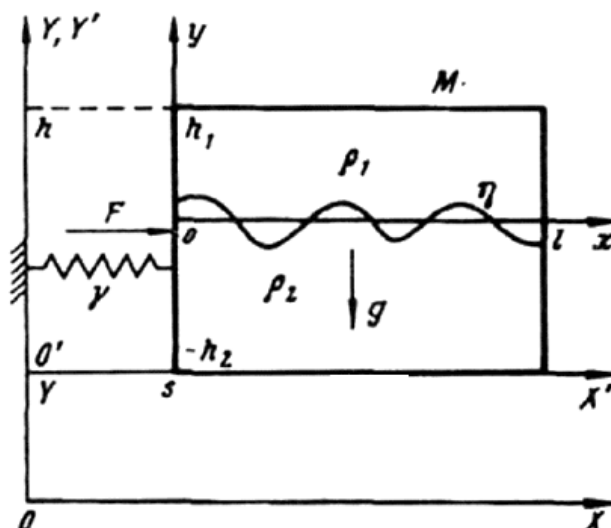


Рис. 1.2. Обобщение задачи Л.Н. Сретенского на случай горизонтальных перемещений прямоугольного сосуда с двухслойной жидкостью.

При анализе динамики ракет-носителей и космических аппаратов колебания свободной поверхности жидкого топлива рассматривают, используя твердотельную линейную маятниковую математическую модель, в которой колеблющееся жидкое топливо заменяется системой математических маятников.

Обыкновенный плоский маятник может рассматриваться как классическая механическая нелинейная система, с помощью которой моделируются колебания жидкости в подвижном сосуде [28,45].

В работе [28] рассмотрена многозвенная маятниковая система, состоящая из физических маятников. Один маятник (несущий) имеет инерционные параметры существенно превосходящие остальные (носимые), размещенные на несущем. К анализируемой системе, в частности, приводится расчетная схема двухступенчатой ракеты на жидком топливе при использовании маятников в качестве аналогов колеблющегося топлива.

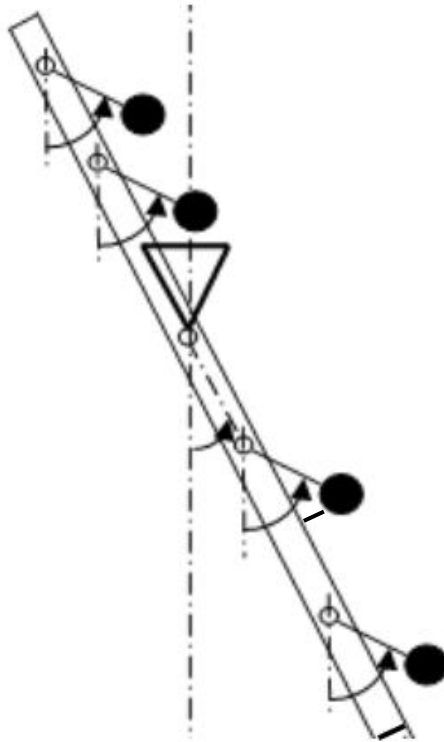


Рис.1.3. Варианты представления маятникового аналога ракеты-носителя на жидком топливе

В работе [29] исследованы закономерности реализации гравитационного нелинейного волнового движения в двухслойной стратифицированной жидкости, для конечной глубины верхнего, более легкого слоя. Рассмотрены особенности реализации нелинейного внутреннего резонансного взаимодействия гравитационных волн, порожденных свободной поверхностью и поверхностью контакта жидких сред. Показано, что в расчетах второго порядка малости реализуются как вырожденные, так и вторичные комбинационные резонансные взаимодействия.

Особенности течений в поле стоячей гравитационной поверхностной волны в прямоугольном сосуде при наличии в нем демпфирующих элементов выявлены в [36-42, 91, 111].

Работы С. Я. Секерж-Зеньковича [85] и В. А. Калиниченко [36-42] посвящены экспериментальному исследованию волн Фарадея, под которыми в гидродинамике понимаются стоячие волны, возбуждаемые при параметрическом резонансе в жидкости, подверженной вертикальным колебаниям. В этих работах

методами экспериментальной гидродинамики исследованы гравитационные волны Фарадея на свободной поверхности однородной жидкости и на границе раздела двухслойной жидкости. Изучены механизмы разрушения поверхностных и внутренних волн, а также эффекты критической глубины для поверхностных волн, эффекты срыва параметрических колебаний жидкости.

1.2. Вывод по обзору литературы

Из приведённого обзора литературы следует, что к настоящему времени многие теоретические вопросы колебаний многослойной жидкости достаточно подробно исследованы, как в открытых областях, так и в ограниченных объёмах. В тоже время развитие современной техники, наступающая индустриализация космического пространства, углублённое исследование многих геофизических процессов требует создания практических методов расчета колебаний многослойной жидкости в полостях неподвижных и подвижных твердых тел.

Разработка методов расчёта динамического поведения многослойной жидкости, заполняющей частично или полностью полость неподвижного твердого тела, а также разработка методов расчёта динамики твёрдых тел, имеющих полости, наполненные подобной слоисто неоднородной жидкостью, представляется собой актуальную проблему и является предметом исследования данной диссертации.

ГЛАВА 2. КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СЛОИСТОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛОСТЯХ НЕПОДВИЖНЫХ ТЕЛ

В главе 2 рассмотрены колебания слоистых идеальных жидкостей, каждая из которых совершает несжимаемое движение. Получены дифференциальные уравнения для обобщённых координат, отражающих волновые движения жидкостей на поверхностях разделов. Определены собственные частоты, формы колебаний жидкостей и приведены результаты численных расчетов для цилиндрических баков разных поперечных сечений. Исследована задача о колебаниях слоистой жидкости в коническом баке. В главе приведена вариационная постановка задачи о собственных колебаниях несмешивающихся жидкостей и численная реализация определения стационарных значений функционала, отвечающего вариационной задаче, методом конечных элементов. В конце второй главы получены формулы, определяющие параметры предлагаемого механического аналога асимметричных колебаний трёхслойной и двухслойной жидкостей.

2.1. Колебание многослойной жидкости в произвольном баке

2.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему из N невязких несжимаемых и несмешивающихся жидкостей, полностью заполняющих некоторый произвольный сосуд. Введем системы координат $O_i x_i y z$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N-1$) с началами, расположенными на поверхностях разделов жидкостей и на дне (см. рис. 2.1.). Обозначим через ρ_i, h_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N-1$) - плотность и глубину каждого слоя жидкости. При решении задачи примем следующие допущения:

- а) перемещения и скорости всех частиц жидкостей есть малые величины в том смысле, что произведениями к квадратам их можно пренебречь по сравнению со значениями любой из этих величин;
- б) движение каждой жидкости в отдельности является потенциальным.

Вследствие сделанных допущений исследование колебаний слоёв жидкостей может быть описано уравнениями Лапласа для потенциалов смещений частиц жидкостей в цилиндрической системе координат [83].

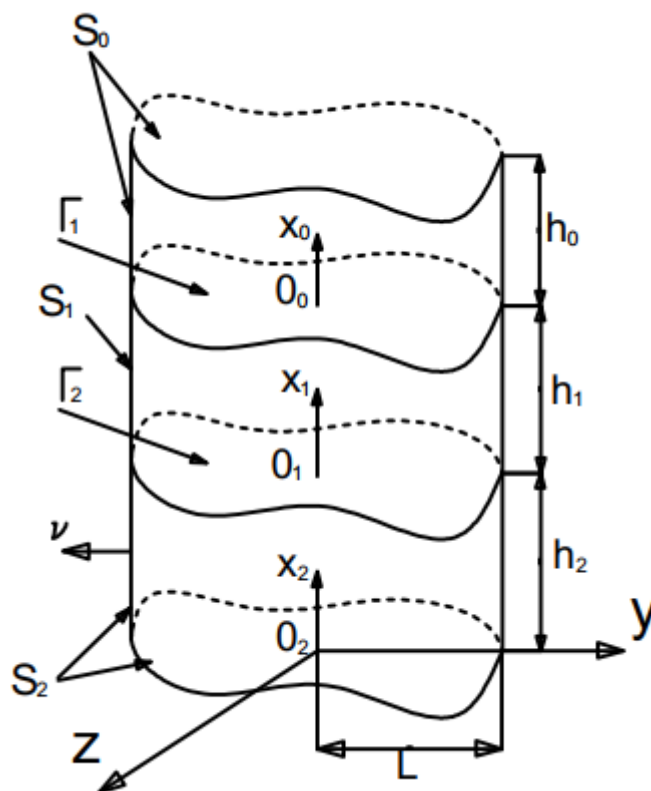


Рис. 2.1. Сосуд произвольной формы со слоистой жидкостью

$$\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_i^2} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (2.1)$$

здесь $\chi_i(x_i, y, z, t)$, $(i = 0, 1, 2, \dots, N-1)$ – потенциалы смещений частиц жидкостей, связанные с соответствующими потенциалами скоростей $\Phi_i(x_i, y, z, t)$, формулами

$\Phi_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial t}$, а поле смещений частиц жидкостей запишется в виде-

$\vec{w}^{(i)}(x_i, y, z, t) = \nabla \chi_i$, где ∇ - оператор Гамильтона.

Потенциалы $\chi_i(x_i, y, z, t)$, $(i = 0, 1, 2, \dots, N-1)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

а) условиям непротекания на смачиваемых поверхностях

$$\left. \frac{\partial \chi_i}{\partial \nu} \right| = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (2.2)$$

б) кинематическим условиям на поверхностях разделов

$$\left. \frac{\partial \chi_i}{\partial x_i} \right|_{x_i=0} = \left. \frac{\partial \chi_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \right|_{x_{i+1}=h_{i+1}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad (2.3)$$

в) динамическим условиям на поверхностях разделов

$$\left(\rho_i \left. \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial t^2} \right|_{x_i=0} - \rho_{i+1} \left. \frac{\partial^2 \chi_{i+1}}{\partial t^2} \right|_{x_{i+1}=h_{i+1}} \right) = \{(\rho_{i+1} - \rho_i)g\} \left. \frac{\partial \chi_i}{\partial x_i} \right|_{x_i=0}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.4)$$

Начальные условия для рассматриваемой задачи не являются необходимыми.

2.1.2. Постановка вспомогательных краевых задач и их решения

Для решения задачи представим потенциалы χ_0 , χ_i и χ_{N-1} в виде:

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \varphi_0(x_0, y, z) \cdot \sigma_1(t); \quad \chi_{N-1} = \varphi_{N-1}(x_{N-1}, y, z) \cdot \sigma_{N-1}(t); \\ \chi_i &= \varphi_{ii}(x_i, y, z) \sigma_i(t) + \varphi_{ii+1}(x_i, y, z) \sigma_{i+1}(t); \quad i = 1, 2, \dots, N-2; \end{aligned} \quad (2.5)$$

где: $\sigma_i(t)$ и $\sigma_{i+1}(t)$ - функции времени, описывающие волновые движения поверхностей разделов. Потенциалы $\varphi_0, \varphi_{ii+1}, \varphi_{N-1}$ являются решениями следующих краевых задач,

$$\Delta \varphi_0 = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} \right| = 0 \text{ на } S_0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} \right|_{x_0=0} = \left. \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_1} \right|_{x_1=h_1}; \quad (2.6)$$

$$\Delta \varphi_{ij} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial \nu} \right| = 0 \text{ на } S_i, \quad j = i, i+1, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{ii+1}}{\partial x_i} \right|_{x_i=0} = \left. \frac{\partial \varphi_{i+1i+1}}{\partial x_{i+1}} \right|_{x_{i+1}=h_{i+1}}; \quad (2.7)$$

$$\Delta \varphi_{N-1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{N-1}}{\partial \nu} \right| = 0 \text{ на } S_{N-1}, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{N-1}}{\partial x_{N-1}} \right|_{x_{N-1}=h_{N-1}} = \left. \frac{\partial \varphi_{N-2, N-1}}{\partial x_{N-2}} \right|_{x_{N-2}=0}. \quad (2.8)$$

Применяя метод разделения переменных, будем искать решение краевых задач в виде

$$\varphi(z, y, x_i) = Y(z, y)Z(x_i). \quad (2.9)$$

Разделяя переменные, находим, что функция $Y(y, z)$ является решением задачи Неймана:

$$\Delta_2 Y(y, z) + k^2 Y(y, z) = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial n_0} = 0, \quad (2.10)$$

причём нетривиальным решениям задачи (2.10) отвечает дискретный положительный спектр $\{k_n^2\}$, $n=1, 2, \dots, \infty$, с единственной предельной точкой на бесконечности и собственные функции $Y_n(y, z)$ [93]. Значения чисел k_n^2 и вид собственных функций $Y_n(y, z)$ определяются формой областей поперечного сечения полости и для некоторых областей будут получены ниже.

Определив функции $Y_n(y, z)$, запишем потенциалы φ_{ij} в виде

$$\varphi_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y, z) Z_n(x_i), \quad j = i, i+1, \quad (2.11)$$

где функции $Z_n(x_i)$ являются решениями задач

$$\frac{d^2 Z_n}{dx_i^2} - k^2 Z_n = 0; \quad (0 \leq x_i \leq h_i), \quad \frac{dZ_n}{dx_i} = 0, x_i = 0, (i = j); \quad \frac{dZ_n}{dx_i} = 0, x_i = h_i, (i \neq j) \quad (2.12)$$

Чтобы удовлетворить динамическим условиям на поверхностях раздела жидкостей подставим найденные потенциалы χ_0 , χ_i ($i=1, 2, \dots, N-2$) и χ_{N-1} в (2.4). В результате для каждого номера n получим систему дифференциальных уравнений. Если $N=5$ система дифференциальных уравнений для обобщённых координат σ_{in} приобретает вид

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{\sigma}_{1n} + a_{12} \ddot{\sigma}_{2n} + c_{11} \sigma_{1n} &= 0; \\ a_{21} \ddot{\sigma}_{1n} + a_{22} \ddot{\sigma}_{2n} + a_{23} \ddot{\sigma}_{3n} + c_{22} \sigma_{2n} &= 0; \\ a_{32} \ddot{\sigma}_{2n} + a_{33} \ddot{\sigma}_{3n} + a_{34} \ddot{\sigma}_{4n} + c_{33} \sigma_{3n} &= 0; \\ a_{43} \ddot{\sigma}_{3n} + a_{44} \ddot{\sigma}_{4n} + c_{44} \sigma_{4n} &= 0; \quad (n = 1, 2, 3 \dots). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Положив $\sigma_{k_n} = A_K \sin(pt + \alpha)$, получим определитель относительно неизвестных амплитуд A_K . Равенство нулю определителя приводит к частотному уравнению, которое для произвольного числа N слоёв жидкости имеет вид

$$a_0 \lambda^M + a_1 \lambda^{M-1} k_n + a_2 \lambda^{M-2} k_n^2 + \dots + a_M k_n^M = 0; \quad (2.14)$$

где M -число поверхностей раздела жидкостей. ($M=N-1$), $\lambda = p^2 L / g$, L -характерный размер полости, $a_0, a_1, a_2, a_i, a_{N-1}$ - действительные коэффициенты.

Утверждение. Если плотности жидкостей удовлетворяют неравенству $\rho_0 < \rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_{N-1}$, то спектр колебаний многослойной идеальной жидкости – дискретный, расположен на положительной полуоси и имеет в качестве предельной точки - точку $\lambda = +\infty$.

Доказательство утверждения следует из свойств коэффициентов a_i , чисел k_n и теоремы Виета.

2.1.3. Колебания несмешивающихся жидкостей в круговом цилиндрическом баке

В случае полости, имеющей вид кругового цилиндра, решения краевых задач (2.9)-(2.11) для трёх жидкостей ($N=3$) в цилиндрической системе координат

$O_i r \eta x_i (i=0,1,2)$ (см. рис.2.2) могут быть записаны в виде [16]

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_m(k_{nm} r)}{J_m(\xi_{nm})} thk_{nm} h_1 \frac{chk_{nm} (x_0 - h_0)}{shk_{nm} h_0} \sin m\eta; \\ \varphi_{11} &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_m(k_{nm} r)}{J_m(\xi_{nm})} thk_{nm} h_1 \frac{chk_{nm} x_1}{shk_{nm} h_1} \sin m\eta; \\ \varphi_{12} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_m(k_{nm} r)}{J_m(\xi_{nm})} \frac{chk_{nm} (x_1 - h_1)}{chk_{nm} h_1} \sin m\eta; \\ \varphi_2 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_m(k_{nm} r)}{J_m(\xi_{nm})} thk_{nm} h_1 \frac{chk_{nm} x_2}{shk_{nm} h_2} \sin m\eta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

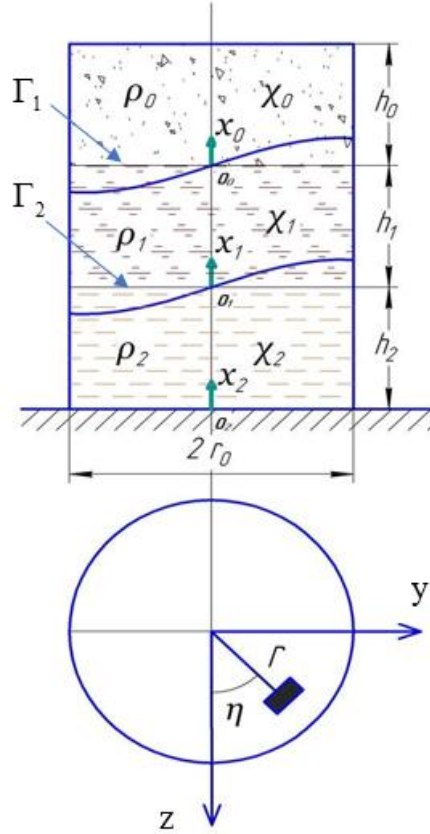


Рис. 2.2. Круглый цилиндрический сосуд со слоистой жидкостью

В уравнении (2.15)- $J_1(k_n r)$ -функция Бесселя первого рода, первого порядка, $k_{nm} = \xi_{nm} / r_0$, ($n = 1, 2, 3, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$). Дифференциальные уравнения (2.13) для обобщенных координат $\sigma_{1n}(t)$ и $\sigma_{2n}(t)$, отвечающие колебаниям трёх жидкостей приобретают конкретный вид

$$\begin{aligned} (\rho_1 + \bar{f}_{0nm}\rho_0) \left(\sigma_{1nm}'' + \beta_{1nm}^2 \sigma_{1nm} \right) + \frac{\rho_1 \sigma_{2nm}''}{ch k_{nm} h_1} &= 0; \\ (\rho_2 \bar{f}_{1nm} + \rho_1) \left(\sigma_{2nm}'' + \beta_{2nm}^2 \sigma_{2nm} \right) + \frac{\rho_1 \sigma_{1nm}''}{ch k_{nm} h_1} &= 0; \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\beta_{1nm}^2 = \frac{\omega_{nm}^2 (\rho_1 - \rho_0)}{(\rho_1 + \bar{f}_{0nm}\rho_0)}$, $\beta_{2nm}^2 = \frac{\omega_{nm}^2 (\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2 \bar{f}_{1nm} + \rho_1)}$, $\omega_{nm}^2 = g k_{nm} t h k_{nm} h_1$ -парциальные частоты колебаний соответственно верхней, нижней поверхностей раздела и свободной поверхности среднего слоя жидкостей, если $\rho_0 = 0$.

$$\bar{f}_{0nm} = t h k_{nm} h_1 c t h k_{nm} h_0; \quad \bar{f}_{1nm} = t h k_{nm} h_1 c t h k_{nm} h_2.$$

Умножим уравнение (2.16) на величину $v_{nm} = \frac{\pi r_0^3 2th(k_{nm}h_1)}{\xi_{nm}(\xi_{nm}^2 - 1)}$. Получим другую

запись дифференциальных уравнения для обобщённых координат σ_{1nm} и σ_{2nm}

$$\begin{aligned} (m'_{1nm} + \bar{f}_{0nm}m'_{0nm})\ddot{\sigma}_{1nm} + (m'_{1nm} - m'_{0nm})\omega_{nm}^2\sigma_{1nm} + \frac{m'_{1nm}\ddot{\sigma}_{2nm}}{chk_{nm}h_1} &= 0; \\ (m'_{2nm}\bar{f}_{1nm} + m'_{1nm})\ddot{\sigma}_{2nm} + (m'_{2nm} - m'_{1nm})\omega_{nm}^2\sigma_{2nm} + \frac{m'_{1nm}\ddot{\sigma}_{1nm}}{chk_{nm}h_1} &= 0; \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $m'_{0nm} = \rho_0 v_{nm}$; $m'_{1nm} = \rho_1 v_{nm}$; $m'_{2nm} = \rho_2 v_{nm}$; m'_{0nm}, m'_{1nm} и m'_{2nm} - приведенные массы колеблющихся жидкостей.

В случае отсутствия верхней жидкости плотностью ρ_0 уравнения (2.16) упрощаются и принимают вид,

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{1nm} + \omega_{nm}^2\sigma_{1nm} + \frac{\ddot{\sigma}_{2nm}}{chk_{nm}h_1} &= 0, \\ \ddot{\sigma}_{2nm} + \beta_{2nm}^2\sigma_{2nm} + \frac{\rho_1\ddot{\sigma}_{1nm}}{chk_{nm}h_1(\rho_2\bar{f}_{1nm} + \rho_1)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Уравнения (2.16) также можно рассматривать как уравнения собственных колебаний двух парциальных гидродинамических систем, одна из которых состоит из верхней и средней жидкостей, имеющих плотности ρ_0, ρ_1 , а дифференциальное уравнение колебаний жидкостей на поверхностях раздела имеет вид

$$\ddot{\sigma}_{1nm} + \beta_{1nm}^2\sigma_{1nm} = 0, \quad \beta_{1nm}^2 = \frac{\omega_{nm}^2(\rho_1 - \rho_0)}{(\rho_1 + \bar{f}_{0nm}\rho_0)}, \quad (2.19a)$$

а другая парциальная система, из средней и нижней жидкостей, колебания поверхности раздела которых, определяется дифференциальным уравнением

$$\ddot{\sigma}_{2nm} + \beta_{2nm}^2\sigma_{2nm} = 0, \quad \beta_{2nm}^2 = \frac{\omega_{nm}^2(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_2\bar{f}_{1nm} + \rho_1)}, \quad (2.19b)$$

2.1.4. Результаты численных расчетов динамических характеристик колебаний трёхслойной жидкости в круглом цилиндрическом баке

Для трёх жидкостей частотное уравнение (2.11) может быть записано в виде

$$p^4 + bp^2 + c = 0; \quad (2.20)$$

$$b = -\frac{(\beta_{1nm}^2 + \beta_{2nm}^2)(\rho_1 + \rho_0 \bar{f}_{0nm})(\rho_2 \bar{f}_{1nm} + \rho_1)chk_{nm}h_1^2}{(\rho_1 + \bar{f}_{0nm}\rho_0)(\rho_2 \bar{f}_{1nm} + \rho_1)chk_{nm}h_1^2 - \rho_1^2} \quad (2.21)$$

где

$$c = \frac{\beta_{1nm}^2 \beta_{2nm}^2 (\rho_1 + \bar{f}_{0nm} \rho_0) (\rho_2 \bar{f}_{1nm} + \rho_1) chk_{nm} h_1^2}{(\rho_1 + \bar{f}_{0nm} \rho_0) (\rho_2 \bar{f}_{1nm} + \rho_1) chk_{nm} h_1^2 - \rho_1^2}.$$

На рисунках (2.3)-(2.16) представлены результаты расчетов главных частот ($p_{1,2}^2 = g\bar{p}_{1,2}^2 / r_0$) в зависимости об изменения относительных плотностей жидкостей ($\rho_{0-} = \rho_0 / \rho_2, \bar{\rho}_1 = \rho_1 / \rho_2$) и относительной глубины среднего слоя жидкости ($\bar{h}_1 = h_1 / r_0$) при постоянных значениях ($\bar{h}_0 = h_0 / r_0$) и ($\bar{h}_2 = h_2 / r_0$).

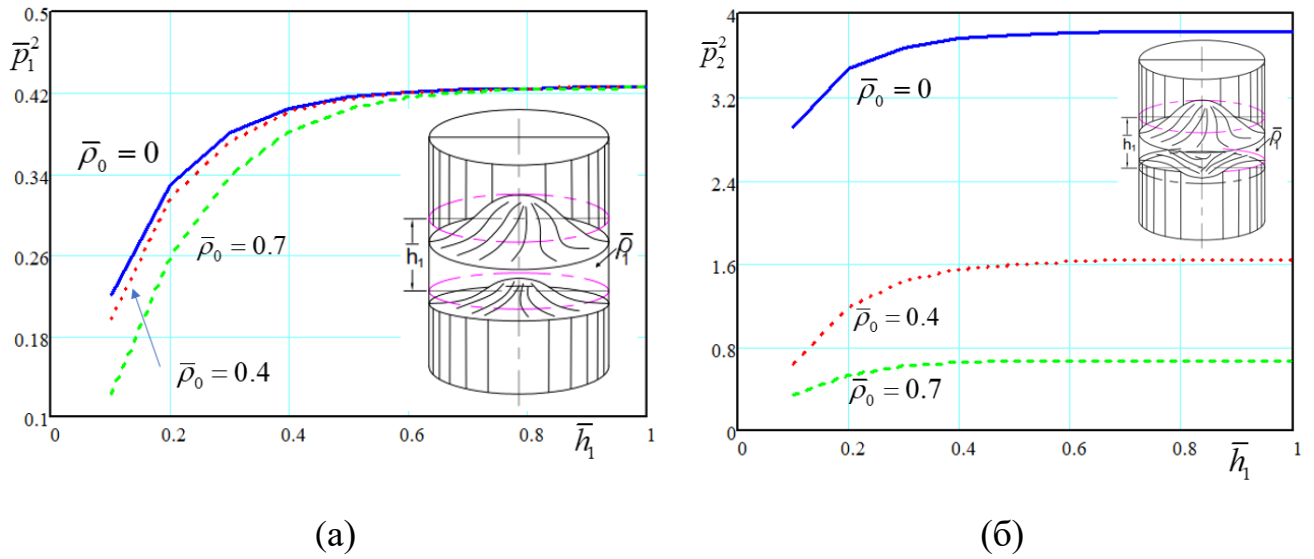


Рис. 2.3. Зависимость первой (а) и второй (б) главных частот $\bar{p}_{1,2}^2$

($n = 1, m = 0$), ($\xi_{10} = 3.832$), от изменения глубины средней жидкости при $\bar{\rho}_1 = 0.8$,

$$\bar{h}_0 = \bar{h}_2 = 1.$$

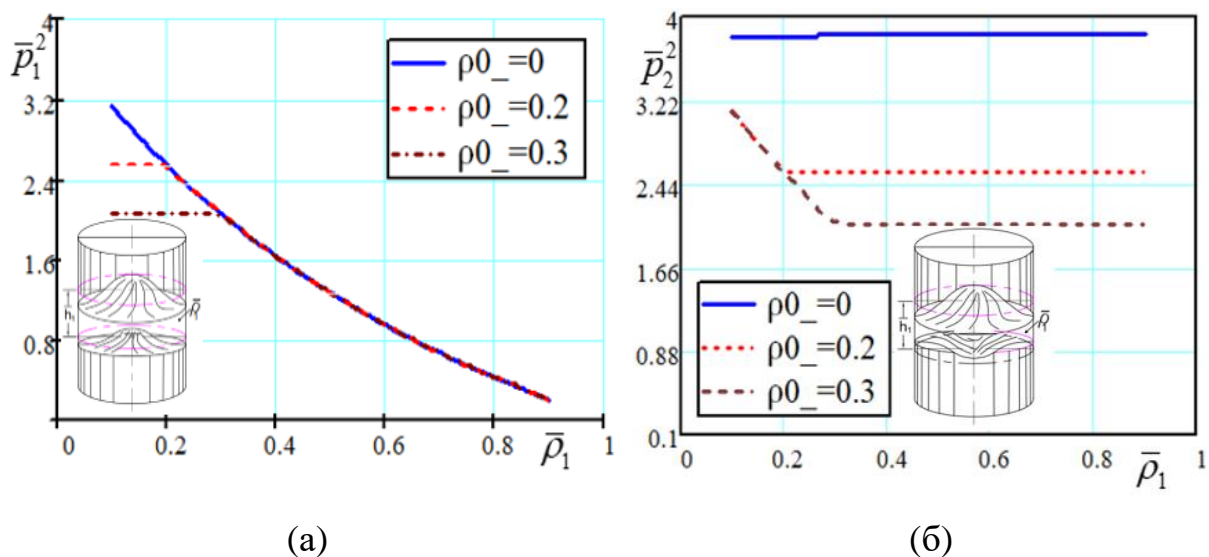


Рис. 2.4. Зависимость первой (а) и второй (б) главных частот $\bar{P}_{1,2}^2$ ($n=1, m=0$), ($\xi_{10} = 3.832$), от изменения плотности средней жидкости при $\bar{h}_0 = 1, \bar{h}_1 = 1, \bar{h}_2 = 1.3$.

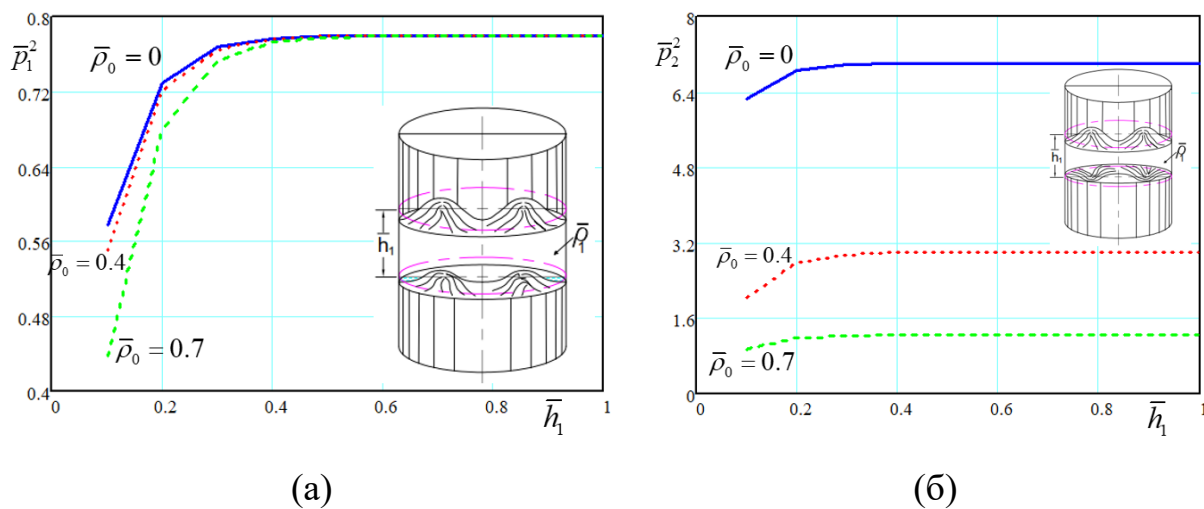
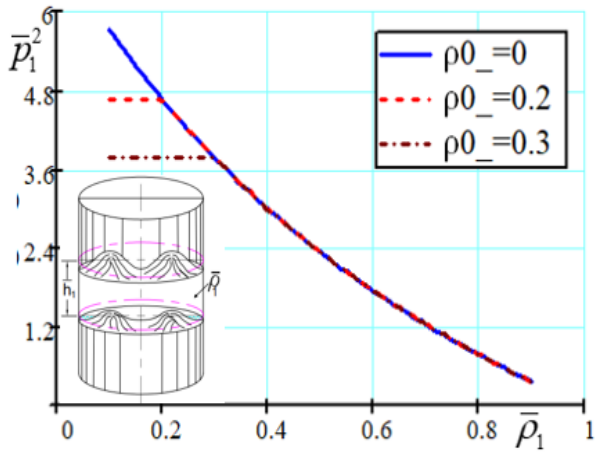
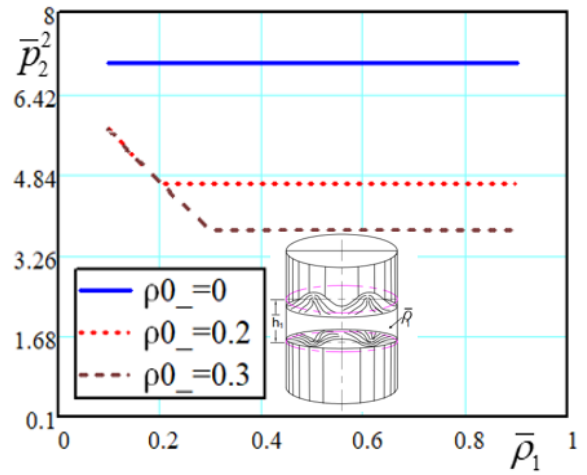


Рис. 2.5. Зависимость первой (а) и второй (б) главных частот $\bar{P}_{1,2}^2$ ($n=2, m=0$), ($\xi_{20} = 7.016$), от изменения глубины средней жидкости при $\bar{\rho}_1 = 0.8, \bar{h}_0 = \bar{h}_2 = 1$.

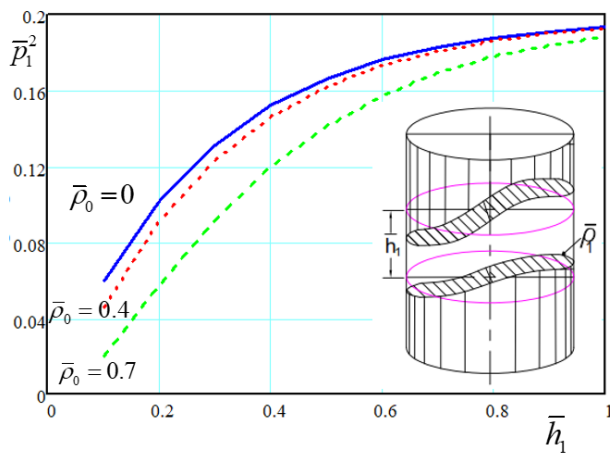


(a)

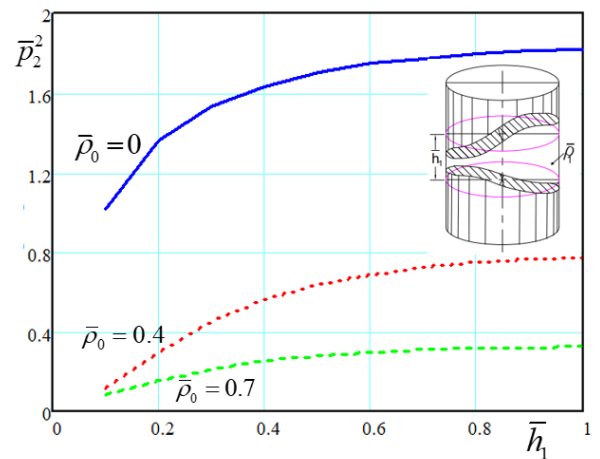


(б)

Рис. 2.6. Зависимость первой (а) и второй (б) главных частот $\bar{p}_{1,2}^2$ ($n=2, m=0$), ($\xi_{20} = 7.016$) от изменения плотности средней жидкости при $\bar{h}_0 = 1, \bar{h}_1 = 1, \bar{h}_2 = 1.3$.

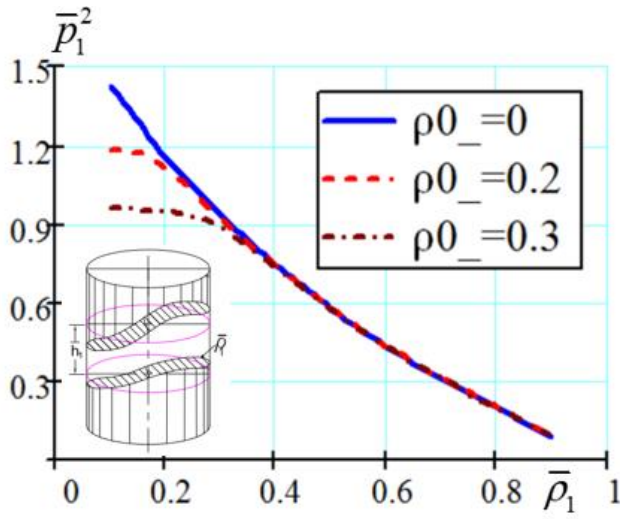


(a)

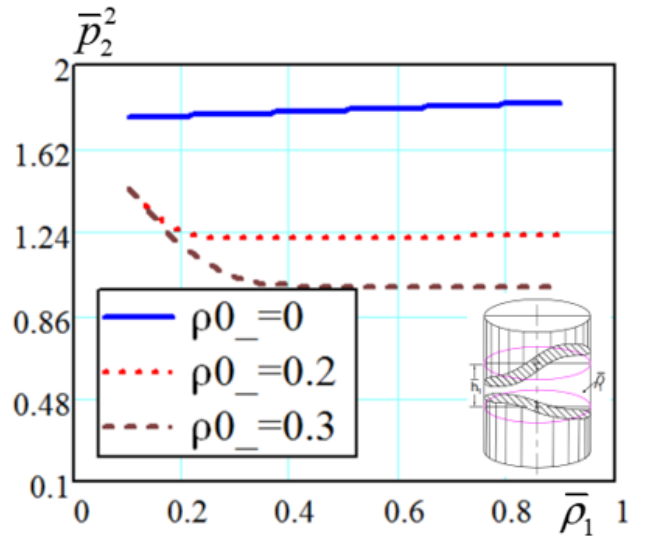


(б)

Рис. 2.7. Зависимость первой (а) и второй (б) главных частот $\bar{p}_{1,2}^2$ ($n=1, m=1$), ($\xi_{11} = 1.8412$), от изменения глубины средней жидкости при $\bar{\rho}_1 = 0.8, \bar{h}_0 = \bar{h}_2 = 1$.

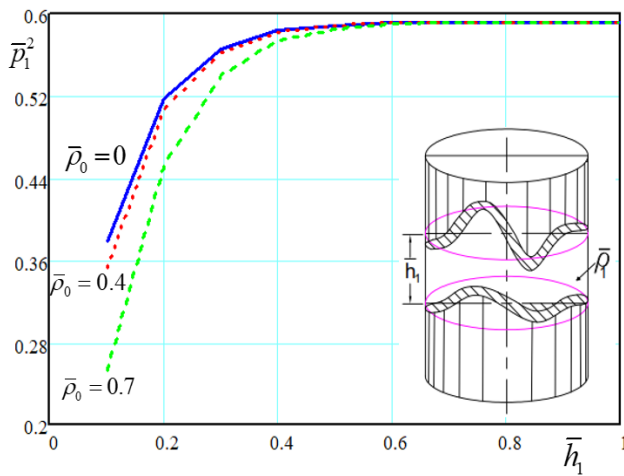


(a)

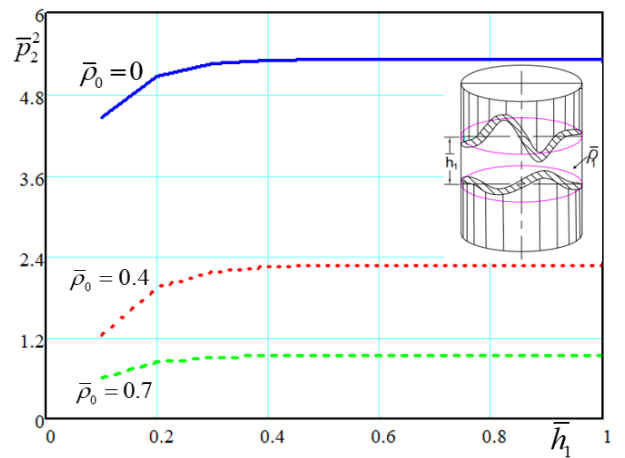


(б)

Рис. 2.8. Зависимость первой (а) и второй (б) главных частот $\bar{p}_{1,2}^2$ ($n=1, m=1$), ($\xi_{11}=1.8412$), от изменения плотности средней жидкости при $\bar{h}_0=1, \bar{h}_1=1, \bar{h}_2=1.3$.



(a)



(б)

Рис. 2.9. Зависимость первой (а) и второй (б) главных частот $\bar{p}_{1,2}^2$ ($n=2, m=1$), ($\xi_{21}=5.3315$), от изменения глубины средней жидкости при $\bar{\rho}_1=0.8, \bar{h}_0=\bar{h}_2=1$.

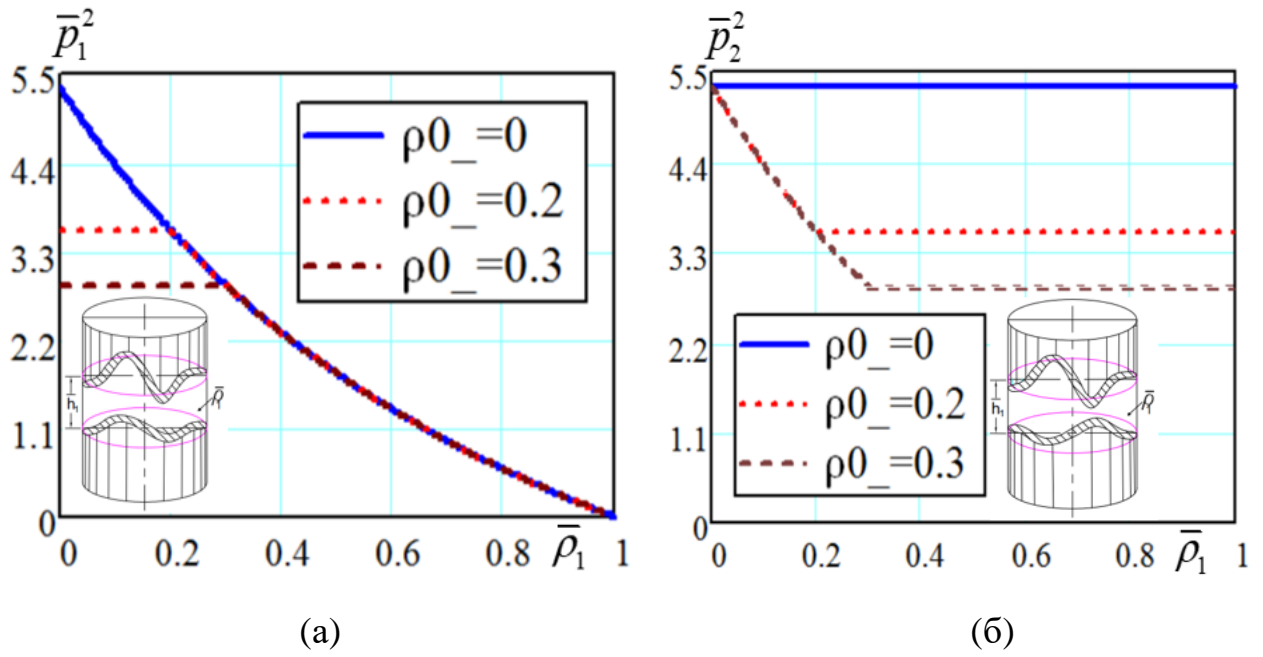


Рис. 2.10. Зависимость первой (а) и второй (б) главных частот $\bar{p}_{1,2}^2$ ($n = 2, m = 1$), ($\xi_{21} = 5.3315$) от изменения плотности средней жидкости при $\bar{h}_0 = 1, \bar{h}_1 = 1, \bar{h}_2 = 1.3$.

Таблица 2.1. Собственные частоты численных расчетов при различных параметрах круглого цилиндрического бака

r_0 -характерный размер. $\bar{h}_0 = 1, \bar{h}_2 = 1.3, \bar{\rho}_1 = 0.8$ $\bar{\rho}_1 = \rho_1 / \rho_2, \bar{\rho}_0 = \rho_0 / \rho_2$								
n	$\bar{\rho}_0$	\bar{h}_1	$m = 0$			$m = 1$		
			ξ_{0n}	\bar{p}_1^2	\bar{p}_2^2	ξ_{1n}	\bar{p}_1^2	\bar{p}_2^2
1	0	0.2	3.832	0.329	3.466	1.8431	0.103	1.374
		0.4	3.832	0.405	3.759	1.8431	0.154	1.650
		0.6	3.832	0.421	3.817	1.8431	0.180	1.755
		0.8	3.832	0.425	3.829	1.8431	0.192	1.802
		1	3.832	0.426	3.831	1.8431	0.198	1.824
	0.3	0.2	3.832	0.321	1.529	1.8431	0.096	0.400
		0.4	3.832	0.403	1.957	1.8431	0.151	0.730
		0.6	3.832	0.421	2.041	1.8431	0.177	0.879
		0.8	3.832	0.425	2.059	1.8431	0.191	0.946
		1	3.832	0.426	2.063	1.8431	0.197	0.976
	0.5	0.2	3.832	0.307	0.909	1.8431	0.085	0.231
		0.4	3.832	0.399	1.202	1.8431	0.144	0.435
		0.6	3.832	0.420	1.262	1.8431	0.174	0.537
		0.8	3.832	0.424	1.274	1.8431	0.189	0.583
		1	3.832	0.425	1.277	1.8431	0.196	0.605
2	0	0.2	7.016	0.729	6.842	5.3315	0.518	5.065
		0.4	7.016	0.777	7.006	5.3315	0.584	5.301
		0.6	7.016	0.779	7.015	5.3315	0.591	5.329
		0.8	7.016	0.780	7.016	5.3315	0.592	5.331
		1	7.016	0.780	7.016	5.3315	0.592	5.331
	0.3	0.2	7.016	0.725	3.522	5.3315	0.511	2.479
		0.4	7.016	0.776	3.763	5.3315	0.583	2.827
		0.6	7.016	0.779	3.777	5.3315	0.591	2.866
		0.8	7.016	0.780	3.778	5.3315	0.592	2.870
		1	7.016	0.780	3.778	5.3315	0.592	2.871
	0.5	0.2	7.016	0.716	2.158	5.3315	0.499	1.502
		0.4	7.016	0.776	2.328	5.3315	0.581	1.746
		0.6	7.016	0.779	2.338	5.3315	0.591	1.774
		0.8	7.016	0.780	2.339	5.3315	0.592	1.777
		1	7.016	0.780	2.339	5.3315	0.592	1.777

2.1.5. Колебания трёхслойной жидкости в соосных круглых цилиндрах со сплошными радиальными перегородками

Рассмотрим решения задачи Неймана (2.11) для некоторых конкретных областей поперечного сечения цилиндрической ёмкости и определим собственные частоты колебаний трёхслойной жидкости в цилиндрической ёмкости, поперечное сечение которой образовано коаксиальными цилиндрами, связанных Q сплошными равноотстоящими радиальными перегородками ($Q > 2$) (см. рис. 2.11, где $Q = 4$) и введём угол между двумя соседними перегородками - 2γ , таким образом, что

$$2\gamma = 2\pi\alpha; \quad \alpha = \frac{1}{Q}; \quad (2.22)$$

Обозначим через r_0 радиус внешнего цилиндра, а внутреннего через e , причём $e = r_0\bar{e}$. За характерный размер примем r_0 и положим $r_0 = 1$, $\bar{e} = e$, $\bar{H} = H/r_0$. Введем систему координат: Ox_1x_2z , ориентированную вполне определенным образом относительно полости, т. е. осью Ox_1 , параллельной оси симметрии одного из секторов (см. рис. 2.11). Начало координат поместим, как обычно, в центре нижнего днаща.

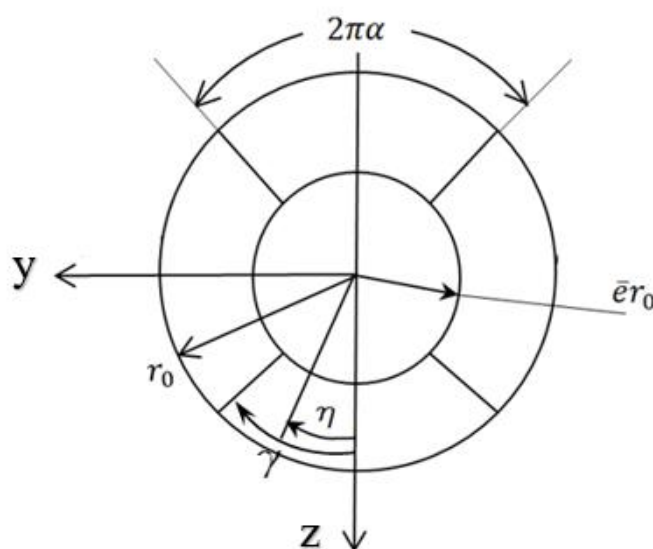


Рис. 2.11. Геометрические характеристики поперечного сечения соосных цилиндров с радиальными перегородками

Будем далее рассматривать один из секторов.

Введем полярные координаты r, η ,

$$x_1 = r \cos \eta, \quad x_2 = r \sin \eta$$

и воспользуемся методом разделения переменных, положив

$$Y_n(x_1, x_2) = R(r)H(\eta). \quad (2.23)$$

При этом уравнение (2.11), записанное в полярных координатах распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения, первое из которых представляет собой уравнение Бесселя:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_n^2 - \frac{v_m^2}{r^2} \right) R = 0; \quad (2.24)$$

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + v_m^2 H = 0, \quad (2.25)$$

где v_m - некоторый не определенный пока параметр. Граничное условие и условие нормировки принимают теперь форму

$$\left. \frac{dR}{dr} \right|_{r=e; r=1} = 0; \quad \left. \frac{dH}{d\eta} \right|_{\eta=\pm\gamma} = 0. \quad (2.26)$$

$$R|_{r=1} = 1; \quad H|_{\eta=-\gamma} = 1. \quad (2.27)$$

Функции R и H , являющиеся собственными функциями краевых задач (2.24) - (2.26), имеют следующий вид:

$$H = H_{v_m}(\eta) = \cos v_m(\eta + \gamma). \quad (2.28)$$

$$R = R_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)} r) = \frac{J_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)} r) N'_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)}) - N_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)} r) J'_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)})}{J_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)}) N'_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)}) - N_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)}) J'_{v_m}(\xi_{\mu}^{(v_m)})}, \quad (2.29)$$

где

$$v_m = \frac{km}{2} (m = 0, 1, 2, \dots); \quad (2.30)$$

а $\xi_{\mu}^{(v_m)}$ - корни уравнения:

$$J'_{v_m}(e\xi) N'_{v_m}(\xi) - J'_{v_m}(\xi) N'_{v_m}(e\xi) = 0. \quad (2.31)$$

Функции Y_{np} - четные относительно аргумента η и Y_{ns} - нечетные относительно η определяются формулами

$$\begin{aligned} Y_{np} &= Y_{np}^{(v_m)} = R_{v_m} \left(\xi_{\mu}^{(v_m)} r \right) \cos v_m (\eta + \gamma), \quad (m = 0, 2, 4, \dots); \\ Y_{ns} &= Y_{ns}^{(v_m)} = R_{v_m} \left(\xi_{\mu}^{(v_m)} r \right) \sin v_m (\eta + \gamma), \quad (m = 1, 3, 5, \dots). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Для норм функций Y_{np} и Y_{ns} имеем выражение [68]

$$N_n^2 = \int_{\Sigma} Y_n^2 dS = \frac{\pi \sigma_0^m \left[\xi_{\mu}^{(v_m)^2} - v_m^2 - \left(e^{2\xi_{\mu}^{(v_m)}} - v_m^2 \right) Z_{v_m}^2 \left(e^{\xi_{\mu}^{(v_m)}} \right) \right]}{2k \xi_{\mu}^{(v_m)^2}}. \quad (2.33)$$

$$\text{где } N_n = \begin{cases} N_{\mu p}^{(v_m)} & (m = 0, 2, 4, \dots) \\ N_{\mu s}^{(v_m)} & (m = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}; \quad \sigma_0^{(m)} = \begin{cases} 1 & (m \neq 0) \\ 2 & (m = 0) \end{cases};$$

В частном случае отсутствия внутреннего цилиндра, т.е. для цилиндра со сплошными радиальными перегородками ($\bar{e} = 0$), имеем следующие формулы для определения чисел $\xi_{\mu}^{(v_m)}$ и функций $R_{v_m} \left(\xi_{\mu}^{(v_m)} r \right)$

$$\begin{aligned} R_{v_m} \left(\xi_{\mu}^{(v_m)} r \right) &= \frac{J_{v_m} \left(\xi_{\mu}^{(v_m)} r \right)}{J_{v_m} \left(\xi_{\mu}^{(v_m)} \right)}; \\ N_n^2 &= \frac{\pi \sigma_0^{(m)} \left(\xi_{\mu}^{(v_m)^2} - v^2 \right)}{2k \xi_{\mu}^{(v_m)^2}} = \begin{cases} N_{\mu p}^{(v_m)^2} & (m = 0, 2, 4, \dots); \\ N_{\mu s}^{(v_m)^2} & (m = 1, 3, 5, \dots); \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $\xi_{\mu}^{(v_m)}$ ($\mu = 1, 2, \dots$) - корни уравнения:

$$J'_{v_m} (\xi) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.35)$$

Используя решения трансцендентных уравнений (2.31), (2.35) и асимптотические формулы определим собственные частоты колебаний волновых движений на поверхностях раздела. Результаты расчётов приведены на рисунках (2.12)-(2.14) и в таблице 2.2.

2.1.6. Результаты численных расчетов динамических характеристик колебаний трёхслойной жидкости в круглом цилиндрическом баке с радиальными перегородками

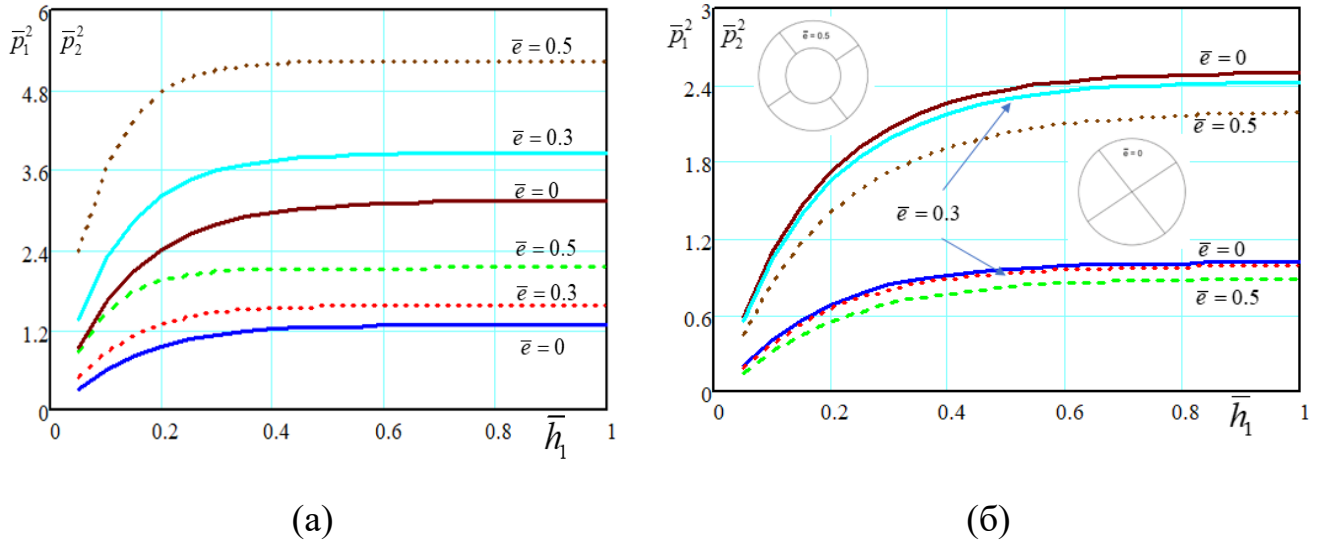


Рис. 2.12. Зависимость первой и второй главных частот $\bar{p}_{1,2}^2$ ($n=1, m=0$) (а), ($n=1, m=1$), (б) от изменения глубины средней жидкости при $\bar{h}_0=1, \bar{h}_2=1, \bar{\rho}_0=0.1, \bar{\rho}_1=0.5$.

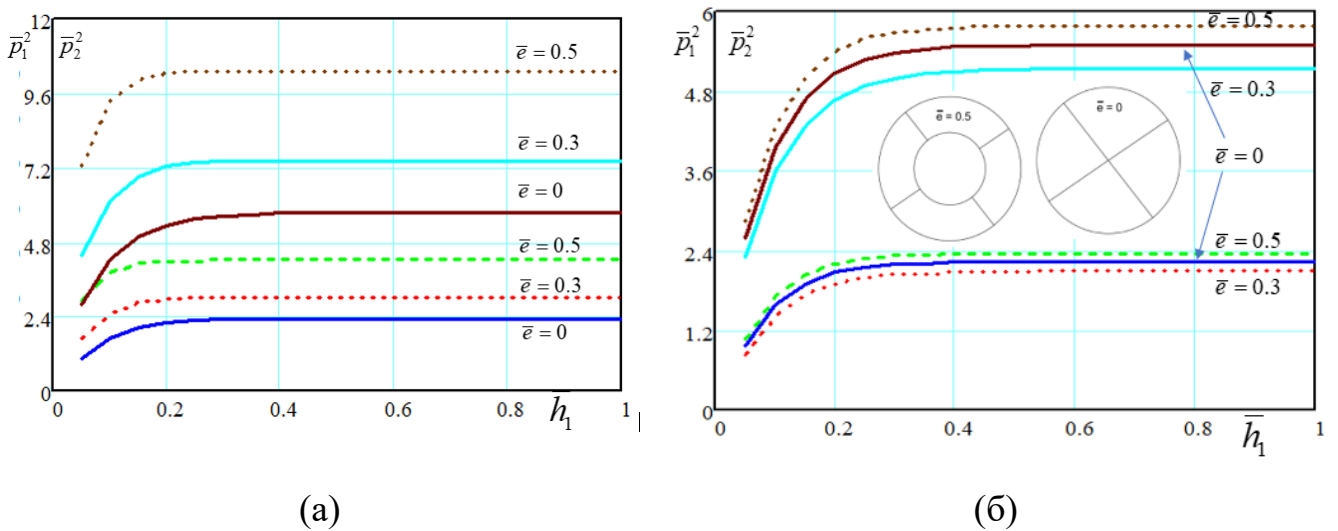
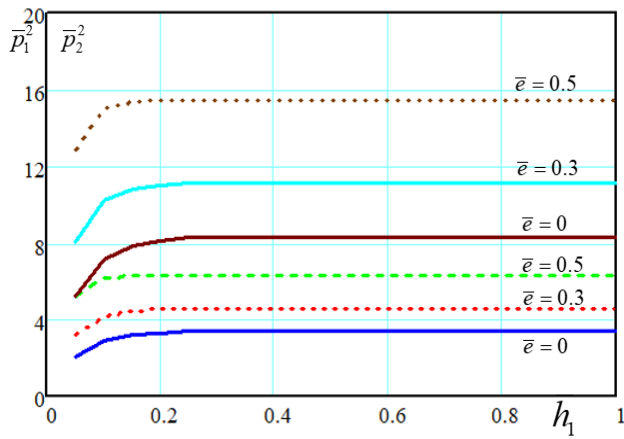
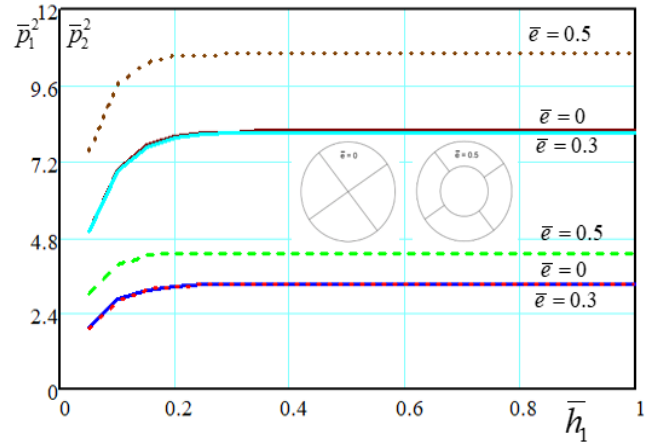


Рис. 2.13. Зависимость первой и второй главных частот $\bar{p}_{1,2}^2$ ($n=2, m=0$) (а), ($n=2, m=1$), (б) от изменения глубины средней жидкости при $\bar{h}_0=1, \bar{h}_2=1, \bar{\rho}_0=0.1, \bar{\rho}_1=0.5$.



(a)



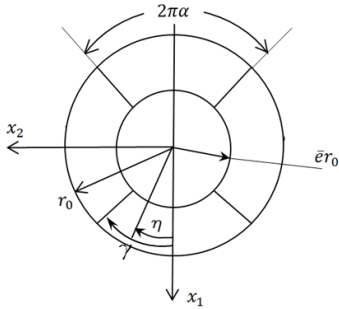
(б)

Рис. 2.14. Зависимость первой и второй главных частот $\bar{p}_{1,2}^2$ ($n=3, m=0$) (а), ($n=3, m=1$), (б) от изменения глубины средней жидкости при

$$\bar{h}_0 = 1, \bar{h}_2 = 1, \bar{\rho}_0 = 0.1, \bar{\rho}_1 = 0.5.$$

Таблица 2.2. Собственные частоты численных расчетов при различных параметрах цилиндрического бака с радиальными перегородками ($\alpha = 1/4$)

r_0 -характерный размер.
 $\bar{h}_0 = 1, \bar{h}_1 = 1, \bar{h}_2 = 1, \bar{\rho}_1 = 0.8,$
 $\bar{\rho}_1 = \rho_1 / \rho_2, \bar{\rho}_0 = \rho_0 / \rho_2$



n	$\bar{\rho}_0$	\bar{e}	$\nu=0$			$\nu=1$			$\nu=2$		
			$\xi_{\nu n}$	\bar{p}_1^2	\bar{p}_2^2	$\xi_{\nu n}$	\bar{p}_1^2	\bar{p}_2^2	$\xi_{\nu n}$	\bar{p}_1^2	\bar{p}_2^2
1	0.1	0	3.832	0.1595	3.0804	3.054	0.1267	2.454	5.317	0.2215	4.274
		0.3	4.706	0.196	3.7832	2.968	0.123	2.385	5.313	0.2214	4.271
		0.5	6.393	0.2664	5.1395	2.681	0.1106	2.153	5.175	0.2156	4.160
	0.5	0	3.832	0.1595	1.1331	3.054	0.1266	0.902	5.317	0.2215	1.573
		0.3	4.706	0.196	1.3919	2.968	0.1229	0.876	5.313	0.2214	1.571
		0.5	6.393	0.2664	1.8909	2.681	0.1106	0.791	5.175	0.2156	1.530
	0.8	0	3.832	0.1594	0.2674	3.054	0.1263	0.213	5.317	0.2215	0.371
		0.3	4.706	0.196	0.3283	2.968	0.1225	0.207	5.313	0.2214	0.371
		0.5	6.393	0.2664	0.446	2.681	0.1099	0.187	5.175	0.2156	0.361
2	0.1	0	7.016	0.2923	5.6403	6.706	0.279	5.391	9.282	0.3867	7.462
		0.3	9.104	0.3793	7.3189	6.274	0.261	5.044	9.152	0.3813	7.357
		0.5	12.62	0.5258	10.145	7.063	0.294	5.678	8.836	0.3682	7.103
	0.5	0	7.016	0.2923	2.0752	6.706	0.279	1.983	9.282	0.3867	2.745
		0.3	9.104	0.3793	2.6927	6.274	0.2614	1.856	9.152	0.3813	2.707
		0.5	12.62	0.5258	3.7327	7.063	0.2943	2.09	8.836	0.3682	2.613
	0.8	0	7.016	0.2923	0.4895	6.706	0.2794	0.468	9.282	0.3867	0.647
		0.3	9.104	0.3793	0.6352	6.274	0.2614	0.438	9.152	0.3813	0.638
		0.5	12.62	0.5258	0.8805	7.063	0.2943	0.493	8.836	0.3682	0.616
3	0.1	0	10.17	0.4237	8.1759	9.969	0.4154	8.014	12.68	0.5283	10.19
		0.3	13.55	0.5646	10.893	9.918	0.4132	7.973	12.24	0.51	9.84
		0.5	18.89	0.7871	15.186	12.95	0.5396	10.41	13.89	0.5787	11.17
	0.5	0	10.17	0.4237	3.008	9.969	0.4154	2.948	12.68	0.5283	3.75
		0.3	13.55	0.5646	4.0077	9.918	0.4132	2.933	12.24	0.51	3.620
		0.5	18.89	0.7871	5.5872	12.95	0.5396	3.830	13.89	0.5787	4.11
	0.8	0	10.17	0.4237	0.7095	9.969	0.4154	0.695	12.68	0.5283	0.885
		0.3	13.55	0.5646	0.9453	9.918	0.4132	0.692	12.24	0.51	0.854
		0.5	18.89	0.7871	1.3179	12.95	0.5396	0.903	13.89	0.5787	0.969

2.2. Колебания слоистой жидкости в коническом баке

2.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим круговой конус, полностью заполненный слоистой жидкостью. Введем сферическую систему координат \bar{R}, ϑ, η с центром в вершине конуса (см. рис. 2.15). Угол ϑ отсчитывается от положительного направления оси OX , угол η измеряется в плоскости OYZ от оси OZ , сторону оси OY . Из рис. 2.18. следует, что $x = \bar{R} \cos \vartheta$, $y = \bar{R} \sin \vartheta \sin \eta$, $z = \bar{R} \sin \vartheta \cdot \cos \eta$. Если ограничиться малым углом конусности, то оказывается правомерным граничное условие на крышке рассматривать на части сферической поверхности $\bar{R} = R_0$. Очевидно, можно также считать, что уравнение для конической полости $\bar{R} = R_3$, боковой поверхности - $\vartheta = \vartheta_0$. Условием применимости полученных формул является следующее ограничение, накладываемое на угол конусности $\sin \vartheta_0 \gg 1 - \cos \vartheta_0$.

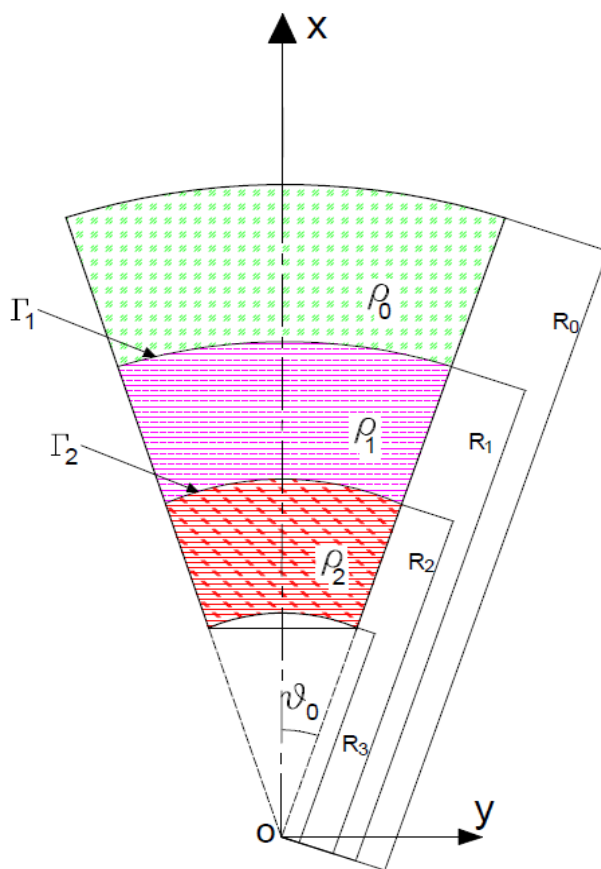


Рис. 2.15. Конический бак

Примем за характерный размер – радиус дна конической полости R_3 и обозначим безразмерный радиус $r = \bar{r} / R_3, q_0 = R_0 / R_3, q_1 = R_1 / R_3, q_2 = R_2 / R_3, q_3 = 1$. Допустим далее, что жидкость либо достигает вершины конуса, либо конус усеченный и имеет дно $\bar{R} = R_3$ (см. рис. 2.15).

Краевая задача о свободных колебаниях жидкостей в конической полости имеет вид:

$$\Delta \chi_i = 0, \quad (i = 0, 1, 2), \quad (2.36)$$

Δ - лапласиан, записываемый в сферических координатах в виде,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2} \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad (2.37)$$

здесь $\chi_i(r, \vartheta, \eta, t), (i = 0, 1, 2)$ – потенциалы смещений частиц жидкостей, связанные с соответствующими потенциалами скоростей $\Phi_i(r, \vartheta, \eta, t), (i = 0, 1, 2)$, формулами

$\Phi_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial t}$, а поле смещений частиц жидкостей запишется в виде -

$\bar{w}^{(i)}(r, \vartheta, \eta, t) = \nabla \chi_i$, где ∇ - оператор Гамильтона.

Потенциалы смещений $\chi_i(r, \vartheta, \eta, t), (i = 0, 1, 2)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

а) условиям непротекания на смачиваемых поверхностях, крышке и дно

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial \vartheta} = 0; \vartheta = \vartheta_0, \quad \frac{\partial \chi_i}{\partial r} = 0; r = q_0, \quad \frac{\partial \chi_i}{\partial r} = 0; r = q_3; \quad (2.38)$$

б) кинематическим условиям на поверхностях разделов

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial r} = \frac{\partial \chi_1}{\partial r}; r = q_1; \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial r} = \frac{\partial \chi_2}{\partial r}; r = q_2; \quad (2.39)$$

в) динамическим условиям на поверхностях разделов

$$\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial t^2} - \rho_1 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} \right) = (\rho_1 - \rho_0) \cdot \frac{g}{R_3} \cdot \frac{\partial \chi_0}{\partial r}; r = q_1; \quad (2.40)$$

$$\left(\rho_1 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} \right) = (\rho_2 - \rho_1) \cdot \frac{g}{R_3} \cdot \frac{\partial \chi_1}{\partial r}; r = q_2.$$

Используя метод разделения переменных, находим представления решений поставленных краевых задач,

$$\chi_0(r, \vartheta, \eta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(\vartheta) e^{im\eta} R_{mn}^{(0)}(r) \sigma_{mn}^{(1)}(t), \quad (2.41)$$

$$\chi_1(r, \vartheta, \eta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(\vartheta) e^{im\eta} R_{mn}^{(11)}(r) \sigma_{mn}^{(1)}(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(\vartheta) e^{im\eta} R_{mn}^{(12)}(r) \sigma_{mn}^{(2)}(t), \quad (2.42)$$

$$\chi_2(r, \vartheta, \eta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn}(\vartheta) e^{im\eta} R_{mn}^{(2)}(r) \sigma_{mn}^{(2)}(t), \quad (2.43)$$

где $Y_{mn}(\vartheta) = \frac{P_{V_{mn}}^m(\cos \vartheta)}{P_{V_{mn}}^m(\cos \vartheta_0)}$, - присоединенные функции Лежандра первого рода, V -

го порядка. V_{mn} - n -ый корень уравнения,

$$\frac{d}{d\vartheta}(P_{V_{mn}}^m(\cos \vartheta_0)) = 0, \text{ при } \vartheta = \vartheta_0, \quad (2.44)$$

а функции $R_{mn}^{(i)}(r)$ имеют вид $R_{mn}^{(i)}(r) = A_i r^{-\nu} + \frac{B_i}{r^{-(\nu+1)}}$ и соответственно равны

$$R_{mn}^{(0)}(r) = \frac{-q_1^{(\nu+2)}}{q_0^{(2\nu+1)} - q_1^{(2\nu+1)}} \left(\frac{(\nu+1)r^\nu + \nu r^{-(\nu+1)} q_0^{(2\nu+1)}}{\nu(\nu+1)} \right); \quad (2.45)$$

$$R_{mn}^{(11)}(r) = \frac{q_1^{(\nu+2)}}{q_1^{(2\nu+1)} - q_2^{(2\nu+1)}} \left(\frac{(\nu+1)r^\nu + \nu r^{-(\nu+1)} q_2^{(2\nu+1)}}{\nu(\nu+1)} \right).$$

$$R_{mn}^{(22)}(r) = \frac{-q_2^{(\nu+2)}}{q_1^{(2\nu+1)} - q_2^{(2\nu+1)}} \left(\frac{(\nu+1)r^\nu + \nu r^{-(\nu+1)} q_1^{(2\nu+1)}}{\nu(\nu+1)} \right); \quad (2.46)$$

$$R_{mn}^{(2)}(r) = \frac{q_2^{(\nu+2)}}{1 - q_2^{(2\nu+1)}} \left(\frac{(\nu+1)r^\nu + \nu r^{-(\nu+1)}}{\nu(\nu+1)} \right).$$

2.2.2. Вывод уравнений колебаний трёхслойной жидкости в коническом баке

Определив потенциалы смещений частиц жидкостей, составим выражения кинетической и потенциальной энергии всей массы жидкостей и, применив уравнения Лагранжа второго рода, получим уравнения жидкостей в обобщенных координатах, $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$.

Так как скорости любой частицы жидкости в направлении координатных осей Ox_i, Oy, Oz равны

$$v_{x_i} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}; v_y = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}; v_z = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}; \Phi_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial t}; (i = 0, 1, 2). \quad (2.47)$$

Кинетическая энергия всей массы жидкостей

$$T_i = \frac{1}{2} \rho_i \iiint_{V_i} \left[\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right)^2 \right] dV_i; \quad (2.48)$$

где V_i - объём, занимаемый жидкостями.

Применяя формулы Гаусса-Остроградского, получим

$$T_i = \frac{1}{2} \rho_i \iint_{S_i} \left[\Phi_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \cos(n, x_i) + \Phi_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \cos(n, y) + \Phi_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \cos(n, z) \right] dS_i, \quad (2.49)$$

здесь S_i - поверхность i -ой жидкости, ограничивающая объём V_i , n - внешняя нормаль к поверхности жидкости.

Суммарная кинетическая энергия всей системы запишется в виде,

$$T_\Sigma = T_0 + T_1 + T_2; \quad (2.50)$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{q_1^{(2v_{mn}+2)}}{q_1^{(2v_{mn}+1)} - q_0^{(2v_{mn}+1)}} \left(\frac{(v_{mn}+1) + v_{mn} q_1^{-(2v_{mn}+1)} q_0^{(2v_{mn}+1)}}{v_{mn} (v_{mn}+1)} \right) (\dot{\sigma}_{mn}^{(1)})^2,$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho_1 \left[\frac{q_2^{(2v_{mn}+2)}}{q_1^{(2v_{mn}+1)} - q_2^{(2v_{mn}+1)}} \left(\frac{(v_{mn}+1) + v_{mn} q_1^{-(2v_{mn}+1)} q_2^{(2v_{mn}+1)}}{v_{mn} (v_{mn}+1)} \right) (\dot{\sigma}_{mn}^{(1)})^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{q_1^{v_{mn}} q_2^{(v_{mn}+2)} + q_2^{v_{mn}} q_1^{(v_{mn}+2)}}{q_1^{(2v_{mn}+1)} - q_2^{(2v_{mn}+1)}} \left(\frac{(v_{mn}+1) + v_{mn}}{v_{mn} (v_{mn}+1)} \right) (\dot{\sigma}_{mn}^{(1)})^2 (\dot{\sigma}_{mn}^{(2)})^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{q_2^{(2v_{mn}+2)}}{q_1^{(2v_{mn}+1)} - q_2^{(2v_{mn}+1)}} \left(\frac{(v_{mn}+1) + v_{mn} q_2^{-(2v_{mn}+1)} q_1^{(2v_{mn}+1)}}{v_{mn} (v_{mn}+1)} \right) (\dot{\sigma}_{mn}^{(2)})^2 \right], \quad (2.51)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \rho_2 \frac{q_2^{(2v_{mn}+2)}}{q_2^{(2v_{mn}+1)} - 1} \left(\frac{(v_{mn}+1) + v_{mn} q_2^{-(2v_{mn}+1)}}{v_{mn} (v_{mn}+1)} \right) (\dot{\sigma}_{mn}^{(2)})^2.$$

Потенциальная энергия элементарного столбика каждой жидкости в возмущенном состоянии будет

$$d\Pi_0 = (q_0 - \chi_{0\sigma_{1n}}) \frac{\chi_{0\sigma_{1n}}}{2} g \rho_0 dS_0, d\Pi_2 = (q_2 + \chi_{2\sigma_{2n}}) \frac{\chi_{1\sigma_{2n}}}{2} g \rho_2 dS_2; \quad (2.52)$$

$$d\Pi_1 = \left[(q_1 + \chi_{1\sigma_{1n}}) \frac{\chi_{0\sigma_{1n}}}{2} + (q_1 - \chi_{1\sigma_{2n}}) \frac{\chi_{1\sigma_{2n}}}{2} \right] g \rho_1 dS_1$$

где, $\chi_{0\sigma_{1n}} = \int_0^t \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \Big|_{r=q_1} dt$, $\chi_{1\sigma_{1n}} = \int_0^t \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=q_1} dt$; $\chi_{1\sigma_{2n}} = \int_0^t \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=q_2} dt$, $\chi_{2\sigma_{2n}} = \int_0^t \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=q_2} dt$.

Суммарная потенциальная энергия всей системы принимает вид,

$$\Pi_\Sigma = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2; \quad (2.53)$$

$$\Pi_0 = \frac{-\rho_0 g (\sigma_{mn}^{(1)})^2}{2R_3}, \Pi_1 = \frac{\rho_1 g}{2R_3} \left((\sigma_{mn}^{(1)})^2 - (\sigma_{mn}^{(2)})^2 \right), \Pi_2 = \frac{\rho_2 g (\sigma_{mn}^{(2)})^2}{2R_3}. \quad (2.54)$$

Применяя уравнения Лагранжа 2-ого рода,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_\Sigma}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_\Sigma}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi_\Sigma}{\partial q_i} = 0, \text{ где } (q_i = \sigma_{mn}^{(1)}, \sigma_{mn}^{(2)}); \quad (2.55)$$

получаем дифференциальные уравнения движения для обобщенных координат.

$$[\rho_1 R_{mn}^{(11)}(v_{mn}) + \rho_0 R_{mn}^{(0)}(v_{mn})] \ddot{\sigma}_{mn}^{(1)} + (\rho_1 - \rho_0) \frac{g}{R_3} \sigma_{mn}^{(1)} - \rho_1 R_{mn}^{(12)}(v_{mn}) \ddot{\sigma}_{mn}^{(2)} = 0; \quad (2.56)$$

$$[\rho_2 R_{mn}^{(2)}(v_{mn}) + \rho_1 R_{mn}^{(22)}(v_{mn})] \ddot{\sigma}_{mn}^{(2)} + (\rho_2 - \rho_1) \frac{g}{R_3} \sigma_{mn}^{(2)} - \rho_1 R_{mn}^{(12)}(v_{mn}) \ddot{\sigma}_{mn}^{(1)} = 0;$$

где

$$R_{mn}^{(11)}(v_{mn}) = \frac{q_2^{(2v_{mn}+2)}}{q_1^{(2v_{mn}+1)} - q_2^{(2v_{mn}+1)}} \left(\frac{(v_{mn}+1) + v_{mn} q_1^{-(2v_{mn}+1)} q_2^{(2v_{mn}+1)}}{v_{mn}(v_{mn}+1)} \right),$$

$$R_{mn}^{(0)}(v_{mn}) = \frac{q_1^{(2v_{mn}+2)}}{q_1^{(2v_{mn}+1)} - q_0^{(2v_{mn}+1)}} \left(\frac{(v_{mn}+1) + v_{mn} q_1^{-(2v_{mn}+1)} q_0^{(2v_{mn}+1)}}{v_{mn}(v_{mn}+1)} \right),$$

$$R_{mn}^{(12)}(v_{mn}) = R_{mn}^{(21)}(v_{mn}) = \frac{q_1^{v_{mn}} q_2^{(v_{mn}+2)} + q_2^{v_{mn}} q_1^{(v_{mn}+2)}}{q_1^{(2v_{mn}+1)} - q_2^{(2v_{mn}+1)}} \left(\frac{(v_{mn}+1) + v_{mn}}{v_{mn}(v_{mn}+1)} \right), \quad (2.57)$$

$$R_{mn}^{(22)}(v_{mn}) = \frac{q_2^{(2v_{mn}+2)}}{q_1^{(2v_{mn}+1)} - q_2^{(2v_{mn}+1)}} \left(\frac{(v_{mn}+1) + v_{mn} q_2^{-(2v_{mn}+1)} q_1^{(2v_{mn}+1)}}{v_{mn}(v_{mn}+1)} \right),$$

$$R_{mn}^{(2)}(v_{mn}) = \frac{q_2^{(2v_{mn}+2)}}{q_2^{(2v_{mn}+1)} - 1} \left(\frac{(v_{mn}+1) + v_{mn} q_2^{-(2v_{mn}+1)}}{v_{mn}(v_{mn}+1)} \right).$$

2.2.3. Определение собственных частот колебаний трёхслойной жидкости в коническом баке

Далее обозначим безразмерный вид для сокращения решения задачи пусть,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \rho_1 R_{mn}^{(11)}(v_{mn}) + \rho_0 R_{mn}^{(0)}(v_{mn}), a_{22} = \rho_2 R_{mn}^{(2)}(v_{mn}) + \rho_1 R_{mn}^{(22)}(v_{mn}); \\ a_{12} &= a_{21} = \rho_1 R_{mn}^{(12)}(v_{mn}) = \rho_1 R_{mn}^{(21)}(v_{mn}), c_{11} = (\rho_1 - \rho_0), c_{22} = (\rho_2 - \rho_1). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Перепишем выражения (2.56) в виде,

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{\sigma}_{mn}^{(1)} + c_{11} \sigma_{mn}^{(1)} - a_{12} \ddot{\sigma}_{mn}^{(2)} &= 0; \\ a_{22} \ddot{\sigma}_{mn}^{(2)} + c_{22} \sigma_{mn}^{(2)} - a_{21} \ddot{\sigma}_{mn}^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Предполагая, что $\sigma_{mn}^{(1)} = A \sin \Omega t$, $\sigma_{mn}^{(2)} = B \sin \Omega t$, получим уравнение для определения собственных значений,

$$\begin{pmatrix} c_{11} - a_{11} \Omega^2 & a_{12} \Omega^2 \\ a_{21} \Omega^2 & c_{22} - a_{22} \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0, \quad (2.60)$$

$$a \cdot \Omega^4 + b \cdot \Omega^2 + c = 0, \quad (2.61)$$

где $a = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$, $b = -(a_{11} a_{22} + a_{22} c_{11})$, $c = c_{11} c_{22}$, (2.62)

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.63)$$

На рисунках 2.19(а, б, в, г) представлены результаты численных расчетов собственных значений в безразмерном виде $[\Omega_{1,2} = \bar{\Omega}_{1,2} \sqrt{g / R_3}]$ в зависимости угла ϑ_0 .

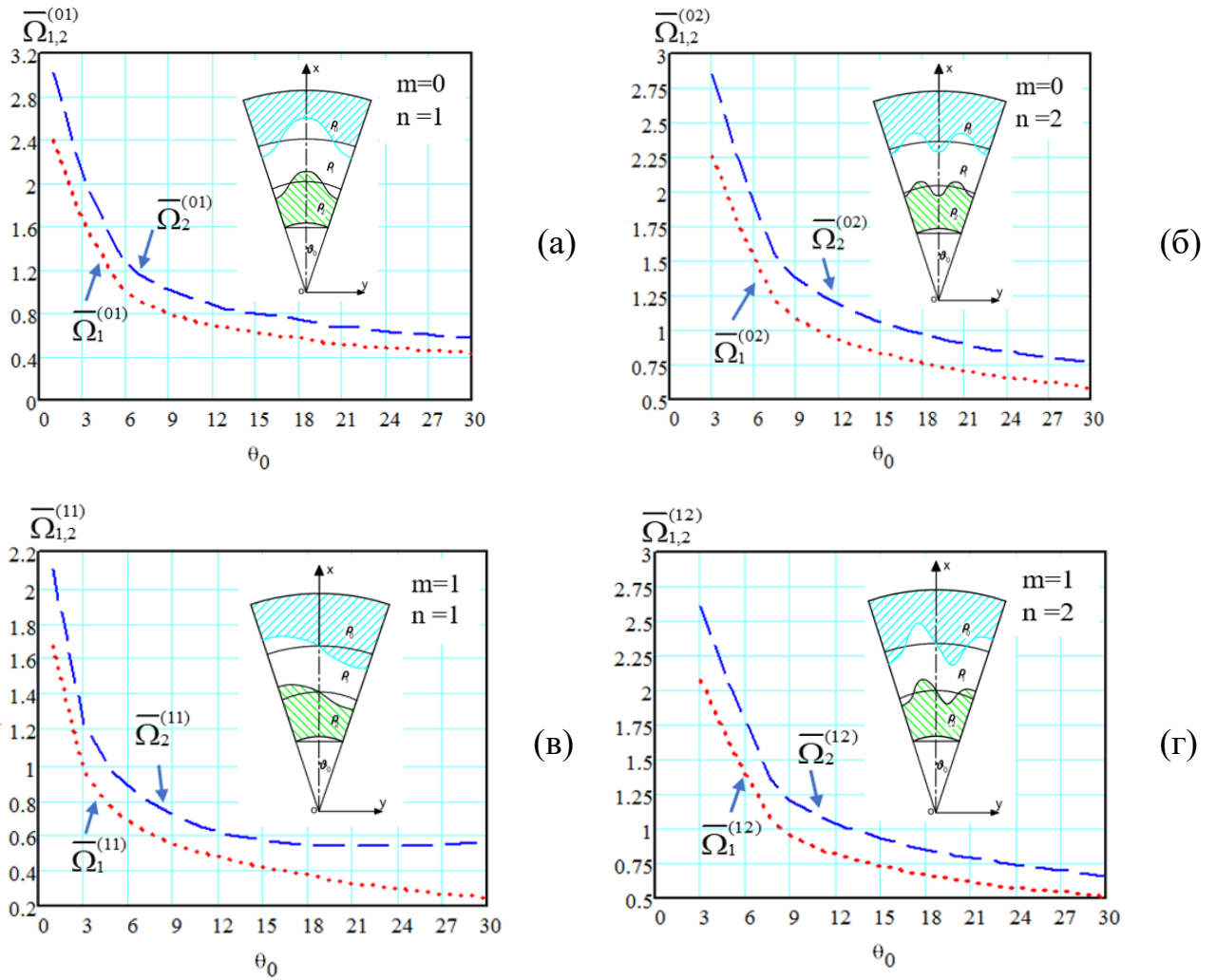


Рис.2.16. Зависимость безразмерных собственных первых и вторых главных частот $\bar{\Omega}_1^{(01)}, \bar{\Omega}_2^{(01)}$ (а), $\bar{\Omega}_1^{(02)}, \bar{\Omega}_2^{(02)}$ (б), $\bar{\Omega}_1^{(11)}, \bar{\Omega}_2^{(11)}$ (в), $\bar{\Omega}_1^{(12)}, \bar{\Omega}_2^{(12)}$ (г) при различных углах \mathcal{G}_0 .

Таблица 2.3. Собственные частоты численных расчетов конического бака при различных корнях ($m=0, n=1,2$)

\mathcal{G}_0	$m=0, n=1$			$m=0, n=2$		
	ν_{01}	$\bar{\Omega}_1^{(01)}$	$\bar{\Omega}_2^{(01)}$	ν_{02}	$\bar{\Omega}_1^{(02)}$	$\bar{\Omega}_2^{(02)}$
1	219.041	2.403	3.028	401.464	2.562	3.058
3	133.489	1.654	2.087	193.799	2.261	2.849
5	43.411	1.075	1.360	116.080	1.751	2.209
7	30.867	0.908	1.152	56.925	1.229	1.554
9	23.898	0.801	1.019	44.165	1.084	1.372
11	19.465	0.724	0.923	36.046	0.980	1.242
13	16.395	0.666	0.851	30.424	0.902	1.144

15	14.145	0.620	0.794	26.302	0.839	1.067
17	12.424	0.582	0.748	23.150	0.788	1.003
20	10.488	0.536	0.692	19.604	0.727	0.927
23	9.058	0.498	0.648	16.984	0.678	0.866
25	8.296	0.477	0.624	15.586	0.65	0.831
27	7.647	0.456	0.604	14.396	0.625	0.801
30	6.835	0.429	0.580	12.908	0.593	0.761

Таблица 2.4. Собственные частоты численных расчетов конического бака при различных корнях ($m=1, n=1,2$)

g_0	$m=1, n=1$			$m=1, n=2$		
	V_{11}	$\bar{\Omega}_1^{(11)}$	$\bar{\Omega}_2^{(11)}$	V_{02}	$\bar{\Omega}_1^{(12)}$	$\bar{\Omega}_2^{(12)}$
1	104.995	1.666	2.102	304.970	2.256	2.753
3	34.674	0.962	1.219	162.533	2.071	2.61
5	20.615	0.745	0.949	97.322	1.604	2.024
7	14.594	0.629	0.806	43.145	1.071	1.356
9	11.252	0.555	0.714	33.45	0.945	1.198
11	9.128	0.500	0.650	27.281	0.854	1.086
13	7.659	0.457	0.605	23.010	0.786	1.000
15	6.584	0.420	0.573	19.979	0.733	0.935
17	5.764	0.383	0.551	17.485	0.687	0.878
20	4.843	0.344	0.538	14.793	0.633	0.811
23	4.165	0.308	0.537	12.804	0.591	0.758
25	3.805	0.288	0.542	11.743	0.566	0.728
27	3.499	0.270	0.553	10.840	0.545	0.702
30	3.119	0.251	0.571	9.712	0.516	0.668

2.3. Исследование колебаний слоистой жидкости в цилиндрическом баке методом конечных элементов

2.3.1. Постановка задачи

Пусть замкнутый неподвижный сосуд полностью заполнен тремя идеальными несжимаемыми жидкостями, занимающимися в состоянии равновесия области Ω_0, Ω_1 и Ω_2 (см. рис. 2.20). Мы предположим, что эти области расположены наподобие слоеного пирога, так что Ω_2 контактирует

(кроме стенки сосуда) только с Ω_1 по некоторой поверхности Γ_2 ; Ω_1 - с Ω_0 и с Ω_2 (по Γ_1); каждая Γ_1 и Γ_2 контактируют с поверхностью сосуда. Обозначим через ρ_i плотность жидкости в Ω_i и примем что на систему действует однородное гравитационное поле с массовой плотностью потенциала gz . Вектор нормали n на Γ_i направим из Ω_i в Ω_{i+1} . Рассмотрим задачу о колебаниях несжимаемых жидкостей в занимаемых объемах, ограниченных поверхностями S_i . Будем считать движение каждой жидкости потенциальным с потенциалом скорости $\Phi_i(x, y, z) \cdot e^{i\omega t}$ ($i = 0, 1, 2$), ω - искомая частота главных колебаний жидкостей.

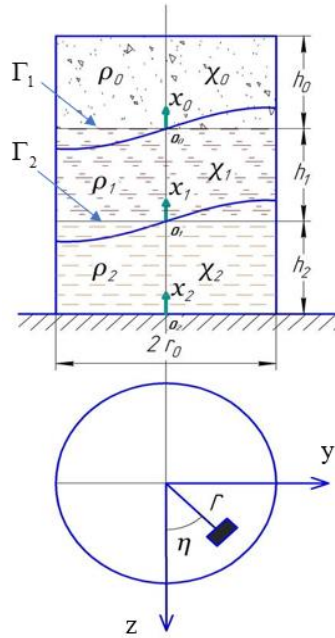


Рис. 2.17. Общий вид цилиндрического сосуда с жидкостями.

Потенциалы Φ_i могут быть определены из решений следующих задач

$$\Delta\Phi_i = 0, (i = 0, 1, 2) \text{ в } \Omega_i, \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} = 0, \text{ на } S_i \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = \frac{\omega^2}{g} \frac{(\rho_0 \cdot \Phi_0 - \rho_1 \cdot \Phi_1)}{(\rho_1 - \rho_0)}; \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\omega^2}{g} \frac{(\rho_0 \cdot \Phi_0 - \rho_1 \cdot \Phi_1)}{(\rho_1 - \rho_0)}; \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial x_0}; \text{ на } \Gamma_1 \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\omega^2}{g} \frac{(\rho_2 \cdot \Phi_2 - \rho_1 \cdot \Phi_1)}{(\rho_2 - \rho_1)}; \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = \frac{\omega^2}{g} \frac{(\rho_2 \cdot \Phi_2 - \rho_1 \cdot \Phi_1)}{(\rho_2 - \rho_1)}; \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}. \text{ на } \Gamma_2 \quad (2.66)$$

2.3.2. Вариационная постановка задачи

Покажем, что исходная задача (2.64)-(2.66) на собственные значения равносильна задаче об отыскании стационарных значений функционала

$$F(\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2) = \frac{\sum_{i=0}^2 \rho_i \int_{\Omega_i} \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_i d\Omega_i}{\sum_{i=0}^1 (\rho_{i+1} - \rho_i)^{-1} \int_{\Gamma_{i+1}} (\rho_{i+1} \Phi_{i+1} - \rho_i \Phi_i)^2 d\Gamma_{i+1}}, (i=0,1,2). \quad (2.67)$$

С этой целью помножим каждое уравнение (2.64) на ρ_i и Φ_i , проинтегрируем по объему Ω_i для каждой жидкости, затем используя теоремы Гаусса-Остроградского, и граничные условия, получим

$$\rho_0 \int_{\Omega_0} \Delta \Phi_0 \cdot \Phi_0 d\Omega_0 = -\rho_0 \int_{\Omega_0} \nabla \Phi_0 \cdot \nabla \Phi_0 d\Omega_0 + \rho_0 \oint_{S_0} \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} dS_0 + \rho_0 \oint_{\Gamma_1} \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} d\Gamma_1, \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_{\Omega_1} \Delta \Phi_1 \cdot \Phi_1 d\Omega_1 = & -\rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla \Phi_1 \cdot \nabla \Phi_1 d\Omega_1 + \rho_1 \oint_{S_1} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} dS_1 - \\ & -\rho_1 \oint_{\Gamma_1} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\Gamma_1 + \rho_1 \oint_{\Gamma_2} \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\Gamma_2 \end{aligned}, \quad (2.69)$$

$$\rho_2 \int_{\Omega_2} \Delta \Phi_2 \cdot \Phi_2 d\Omega_2 = -\rho_2 \int_{\Omega_2} \nabla \Phi_2 \cdot \nabla \Phi_2 d\Omega_2 + \rho_2 \oint_{S_2} \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS_2 - \rho_2 \oint_{\Gamma_2} \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\Gamma_2. \quad (2.70)$$

Приняв во внимание граничные условия (2.65) и (2.66), и сложив полученные результаты, приходим к выражению

$$\begin{aligned} & \rho_0 \int_{\Omega_0} \nabla \Phi_0 \cdot \nabla \Phi_0 d\Omega_0 + \rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla \Phi_1 \cdot \nabla \Phi_1 d\Omega_1 + \rho_2 \int_{\Omega_2} \nabla \Phi_2 \cdot \nabla \Phi_2 d\Omega_2 - \\ & - \lambda \left[\frac{1}{(\rho_1 - \rho_0)} \int_{\Gamma_1} (\rho_1 \Phi_1 - \rho_0 \Phi_0)^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)} \int_{\Gamma_2} (\rho_2 \Phi_2 - \rho_1 \Phi_1)^2 d\Gamma_2 \right] = 0 \end{aligned}; \quad (2.71)$$

откуда и следует выражение (2.67), ($\lambda = \omega^2 r_0 / g$ - собственное число, ω - размерная частота колебаний).

Как отмечено в книге [9], собственные значения и собственные функции задачи (2.64)-(2.66) могут быть получены, если искать стационарные значения функционала (2.67), на множестве всех функций, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} (\rho_i \Phi_i - \rho_{i+1} \Phi_{i+1}) d\Gamma_i = 0, \quad (k = 2). \quad (2.72)$$

Для численной реализации полученного функционала воспользуемся методом конечных элементов.

2.3.3. Метод конечных элементов

Область решения Ω_i разобьем, как это показано на рис. 2.18, на ряд треугольных областей – конечных элементов (КЭ). Разбив область решения на ряд областей, мы получаем возможность переписать интегралы в виде суммы интегралов по отдельным областям.

Треугольная форма КЭ не является, единственно возможной, но обладает по сравнению со остальными рядами преимуществ: она позволяет достаточно плотно покрыть всю площадь решения (в отличие от прямоугольной) и в тоже время такая форма обеспечивает относительную простоту получения основных соотношений конечно-элементного анализа.

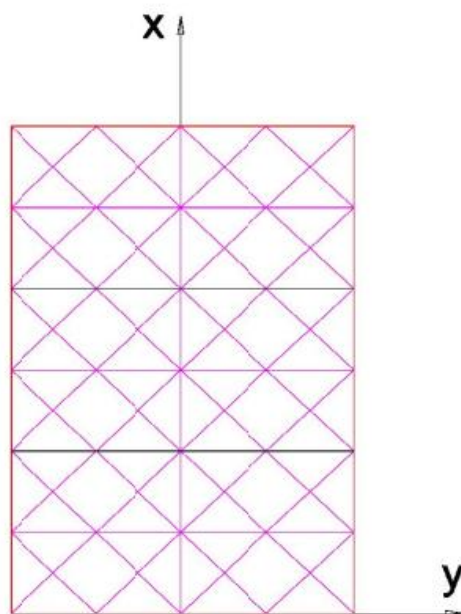


Рис. 2.18. Схема разбиения области решения КЭ

Запишем выражения (2.71) в более компактном виде с использованием цилиндрической системы координат r, η, x_i

$$\sum_{i=0}^2 \rho_i \iiint_{\Omega_i} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \eta} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \right) r dr d\eta dx_i -$$

$$-\lambda \sum_{i=0}^1 \frac{1}{(\rho_{i+1} - \rho_i)} \int_{S_{i+1}} (\rho_{i+1} \Phi_{i+1} - \rho_i \Phi_i)^2 r dr d\eta = 0 \quad (2.73)$$

Решение задачи (2.73) будем искать в виде,

$$\Phi_i(r, \eta, x_i) = \sum_{i=0}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{im}(r, x_i) \cdot N_{im}(\eta), \quad N_{im}(\eta) = \begin{cases} \cos(m\eta) \\ \sin(m\eta) \end{cases} \quad (2.74)$$

Используя формулы перехода от глобальных координат к локальным, значение потенциала скоростей в любой точке КЭ можно вычислить как

$$\psi_i(x, y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^9 u_j^i f_j^i(x_l, y_l) = \sum_{i=1}^k (U)_{(1 \times 9)}^i [C]_{(9 \times 9)}^i \{X(x, y)\}_{(9 \times 1)}^i, \quad (2.75)$$

здесь u_j^i - значения обобщенных координат КЭ, $f_j^i(x_l, y_l)$ - функции формы в точке с локальными координатами (x_l, y_l) , а матрица $[X]_{(9 \times 9)}$ представлена форме,

$$[X]_{(9 \times 9)}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & x_2 & 1 & 0 & x_3 & 1 & 0 \\ y_1 & 0 & 1 & y_2 & 0 & 1 & y_3 & 0 & 1 \\ x_1 y_1 & y_1 & x_1 & x_2 y_2 & y_2 & x_2 & x_3 y_3 & y_3 & x_3 \\ x_1^2 & 2x_1 & 0 & x_2^2 & 2x_2 & 0 & x_3^2 & 2x_3 & 0 \\ y_1^2 & 0 & 2y_1 & y_2^2 & 0 & 2y_2 & y_3^2 & 0 & 2y_3 \\ x_1 y_1^2 & y_1^2 & 2x_1 y_1 & x_2 y_2^2 & y_2^2 & 2x_2 y_2 & x_3 y_3^2 & y_3^2 & 2x_3 y_3 \\ x_1^2 y_1 & 2x_1 y_1 & x_1^2 & x_2^2 y_2 & 2x_2 y_2 & x_2^2 & x_3^2 y_3 & 2x_3 y_3 & x_3^2 \\ x_1^2 y_1^2 & 2x_1 y_1^2 & 2x_1^2 y_1 & x_2^2 y_2^2 & 2x_2 y_2^2 & 2x_2^2 y_2 & x_3^2 y_3^2 & 2x_3 y_3^2 & 2x_3^2 y_3 \end{bmatrix}; \quad (2.76)$$

с учетом (2.76) можно определить значения C_{ij} для каждого конкретного КЭ.

Отметим, что от координат точки зависит только столбец $\{X(x, y)\}_{(9 \times 1)}^i$, а от значений обобщенных координат только $(U)_{(1 \times 9)}^i$.

Теперь можно записать каждый из элементов сумм в уравнении (2.73) с учетом соотношений (2.75) и произвести некоторые операции над матрицами и интегрирование. Получаем выражения матриц жесткости и масс в виде,

$$[K_{KЭ}] = [C]^i \left[\iint_{S_{KЭ}} \rho_i \left(\frac{\partial \{X\}^i}{\partial r} \frac{\partial \{X\}^{Ti}}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} \{X\}^i \{X\}^{Ti} + \frac{\partial \{X\}^i}{\partial x_i} \frac{\partial \{X\}^{Ti}}{\partial x_i} \right) r dr dx_i \right] [C]^{Ti} \quad (2.77)$$

- матрица «жесткости» КЭ, а

$$[M_{KЭ}^{(\Gamma)}] = [C]^i \int_{L_{KЭ}} \frac{1}{(\rho_{i+1} - \rho_i)} (\rho_{i+1} \{X\}^{i+1} - \rho_i \{X\}^i) \cdot (\rho_{i+1} \{X\}^{i+1} - \rho_i \{X\}^i)^T r dr [C]^{Ti} \quad (2.78)$$

- матрица «массы» КЭ.

Замечание: Вычисление матрицы $[M_{KЭ}^{(\Gamma)}]$ в формуле (2.78), очевидно, необходимо только для элементов, имеющих общую грань с поверхностями разделов Γ_1 и Γ_2 .

Поставим полученные выражения матриц жесткости и масс (2.77) и (2.78) в уравнение (2.73), получим характеристическое уравнение в виде,

$$(V)_{(1 \times N_{op})} [K_{KЭ}]_{(N_{op} \times N_{op})} \{V\}_{(N_{op} \times 1)} - \lambda (V)_{(1 \times N_{op})} [M_{KЭ}^{(\Gamma)}]_{(N_{op} \times N_{op})} \{V\}_{(N_{op} \times 1)} = 0. \quad (2.79)$$

Необходимые условия стационарности функционала (2.79) приводят к системе линейных уравнений, относительно вектора (V) ,

$$\left([K_{KЭ}]_{(N_{op} \times N_{op})} - \lambda \cdot [M_{KЭ}^{(\Gamma)}]_{(N_{op} \times N_{op})} \right) \{V\}_{(N_{op} \times 1)} = 0. \quad (2.80)$$

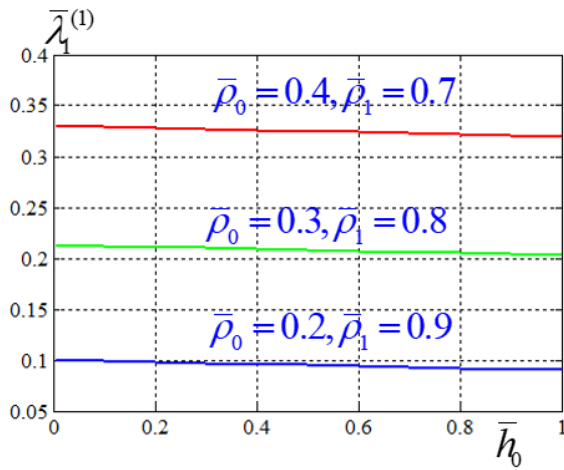
Характеристическое уравнение системы (2.80) имеет вид

$$\left| [K_{KЭ}]_{(N_{op} \times N_{op})} - \lambda \cdot [M_{KЭ}^{(\Gamma)}]_{(N_{op} \times N_{op})} \right| = 0. \quad (2.81)$$

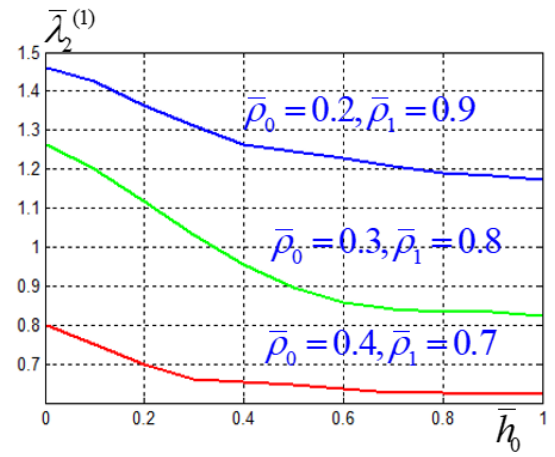
Решая уравнение (2.81) численным методом, получим спектр дискретных собственных значений λ_{mn} и соответственные им собственные векторы $\{V\}_{mn}$.

2.3.4. Результаты численных расчетов и сравнение с точным решением

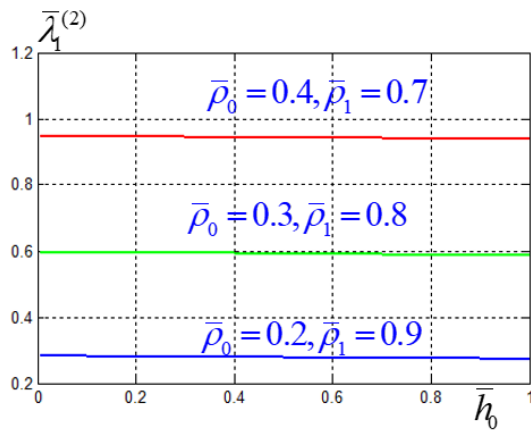
Результаты вычислений приведены на рисунках (2.19) и (2.20).



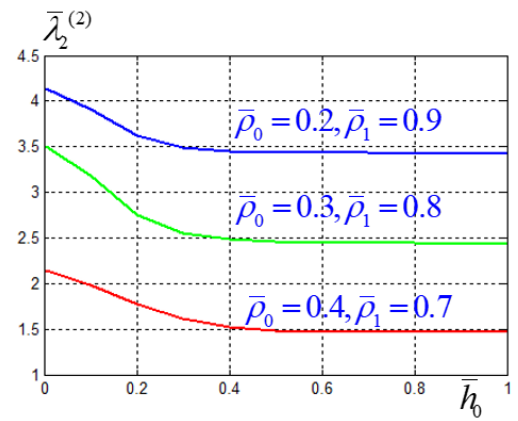
(a)



(б)

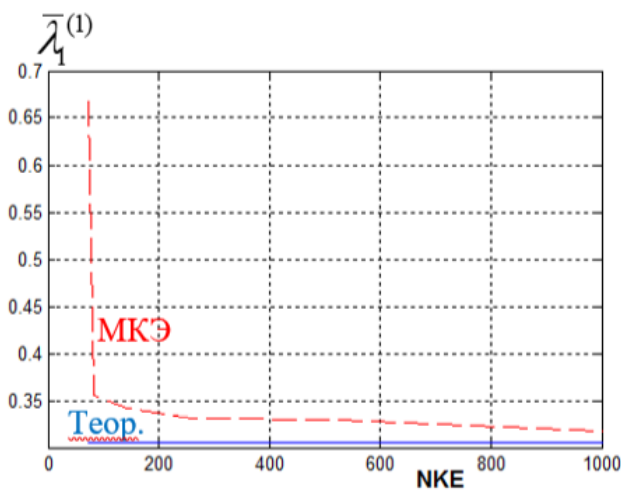


(в)

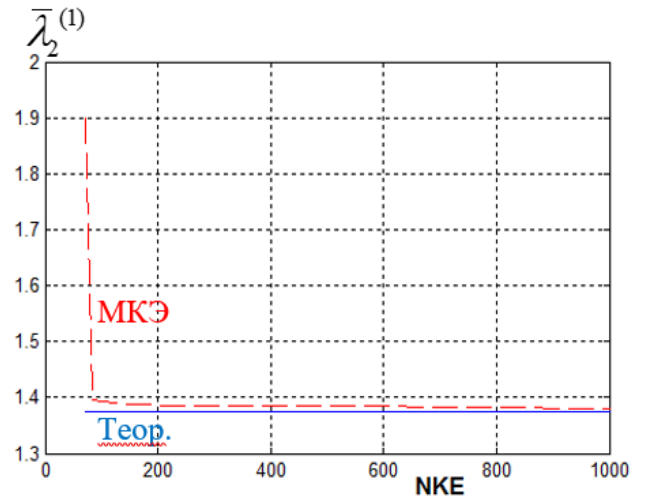


(г)

Рис. 2.19. Зависимости главных частот $\bar{\lambda}_{1,2}^{(1)}$ ($n=1$) (а, б) и $\bar{\lambda}_{1,2}^{(2)}$ ($n=2$) (в, г) от глубины верхней жидкости \bar{h}_0 при разных плотностях и глубинах $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 1$.



(a)



(б)

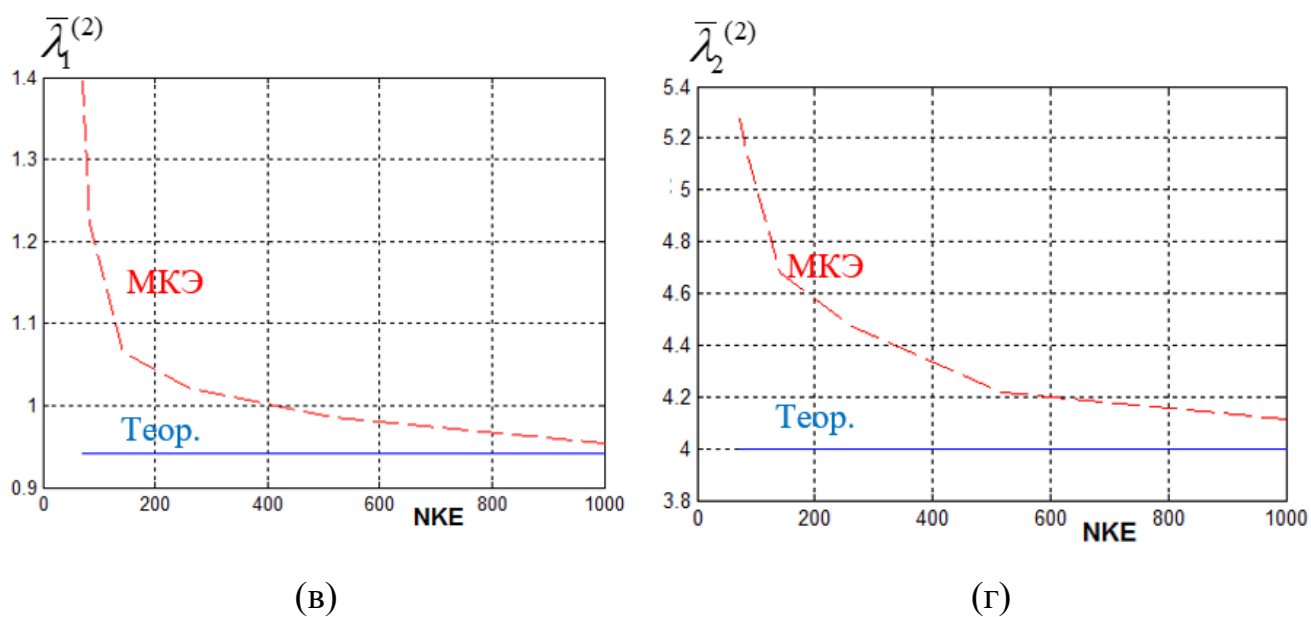
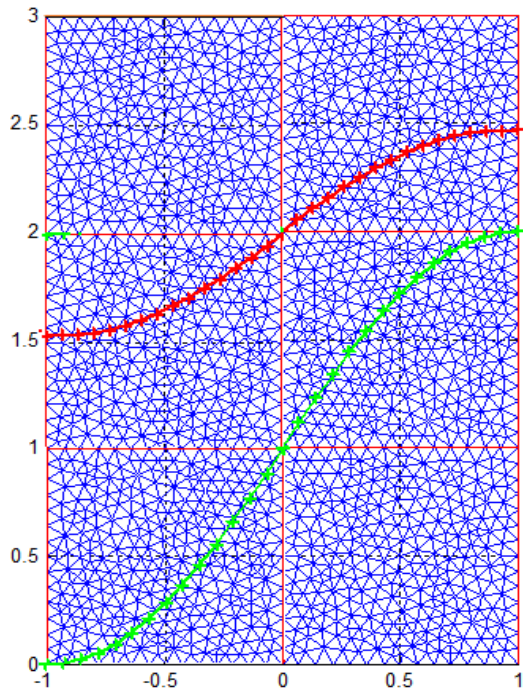


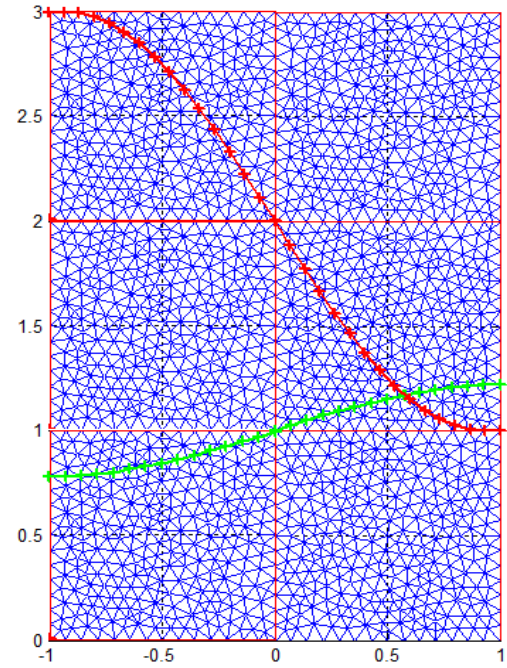
Рис. 2.20. Зависимости главных частот $\bar{\lambda}_{1,2}^{(1)}$ ($n=1$) (а, б) и $\bar{\lambda}_{1,2}^{(2)}$ ($n=2$) (в, г) от числа конечных элементов $N_{КЭ}$ при $\bar{\rho}_1=0.7, \bar{\rho}_0=0.1$ и $\bar{h}_0=\bar{h}_1=\bar{h}_2=1$.

2.3.5. Определение формы колебаний

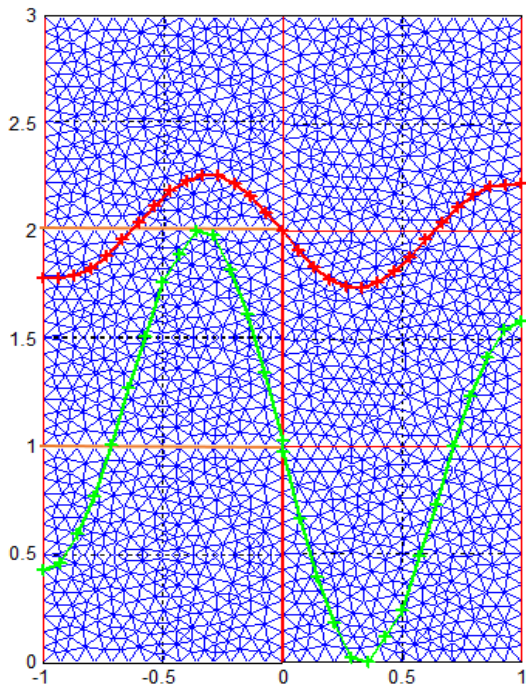
Из полученного вектора обобщенных координат $\{V\}_{mn}$, зная номера обобщенных переменных, отвечающих конкретному КЭ, можно воспользовавшись формулой (2.75) определить значение потенциала в любой точке КЭ, имея ранее вычисленную матрицу $[C]_{(9 \times 1)}$ этого КЭ и вычислить вектор $\{X(x, y)\}_{(9 \times 1)}$ для заданной точки.



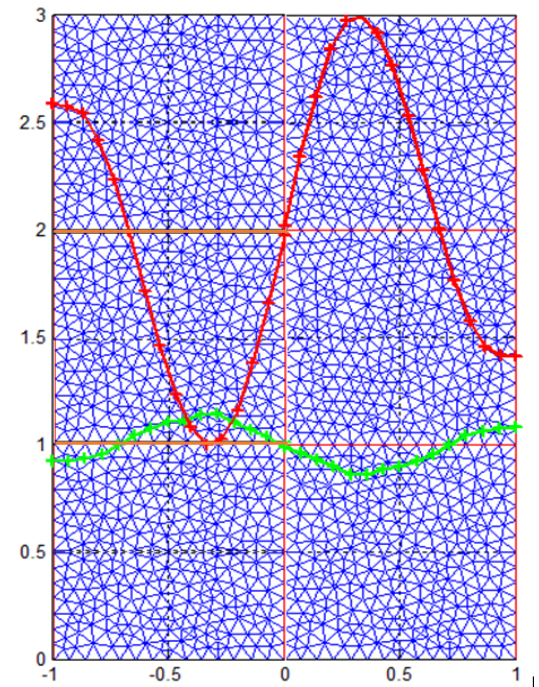
(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 2.21. Формы синфазных колебаний ($n = 1$) (а, б) и противофазных колебаний ($n = 2$) (в, г) поверхностей раздела жидкостей в цилиндрическом сосуде.

2.4. Механический аналог колебаний слоистой жидкости в неподвижном баке

При проведении инженерных расчетов динамики твердых тел, имеющих полости с однородной жидкостью, часто используют механические аналоги движений изучаемой гидродинамической системы [30,45,69,84]. Опыт теоретического и экспериментального исследования проблем колебаний твёрдых тел, имеющих полости, частично наполненные однородной жидкостью, показал, что не все тона колебаний жидкости учувствуют в создании гидродинамических поперечных сил и моментов, влияющих на движение твёрдого тела. Оказалось, что только асимметричные колебания жидкости при ($m=1$) могут создавать силы и моменты, способные повлиять на движение твёрдого тела. Поэтому будем далее рассматривать маятниковый аналог, отвечающий колебаниям слоёв жидкости с числом $m=1$, ($n=1,2,\dots$).

Рассмотрим механическую систему в виде невесомых стержней АВ и АС, соединенных в точке А цилиндрическим шарниром и закреплёнными на них точечными массами как показано на (рис. 2.22). Положения невесомых стержней, при которых точки подвеса маятников находятся на одной вертикальной прямой, примем за невозмущённое состояние, отвечающее горизонтальному положению поверхностей раздела жидкостей при отсутствии их возмущений.

Введём обозначения: m_1 и m_2 – массы маятников, l – длина невесомого стержня АВ, b и δ – расстояния OB_0 и OC_0 , отвечающие 'n'-ому тону колебаний жидкостей.

Как показывает анализ дифференциальных уравнений для обобщенных координат волновых движений на поверхностях разделов трёх жидкостей по каждому индексу 'n' отвечают два главных колебаний, частоты которых могут быть определены по формуле (2.19)-(2.21). Следовательно, каждому индексу 'n' механической модели должны отвечать два главных колебания, то есть эквивалентный механический аналог колебаний поверхностей разделов жидкостей должен иметь две степени свободы. Один из возможных аналогов представлен на рисунке (2.22). Покажем, что уравнения движения для

предлагаемого механического аналога будут одинаковыми с уравнениями для обобщенных координат $\sigma_{1n}(t)$ и $\sigma_{2n}(t)$.

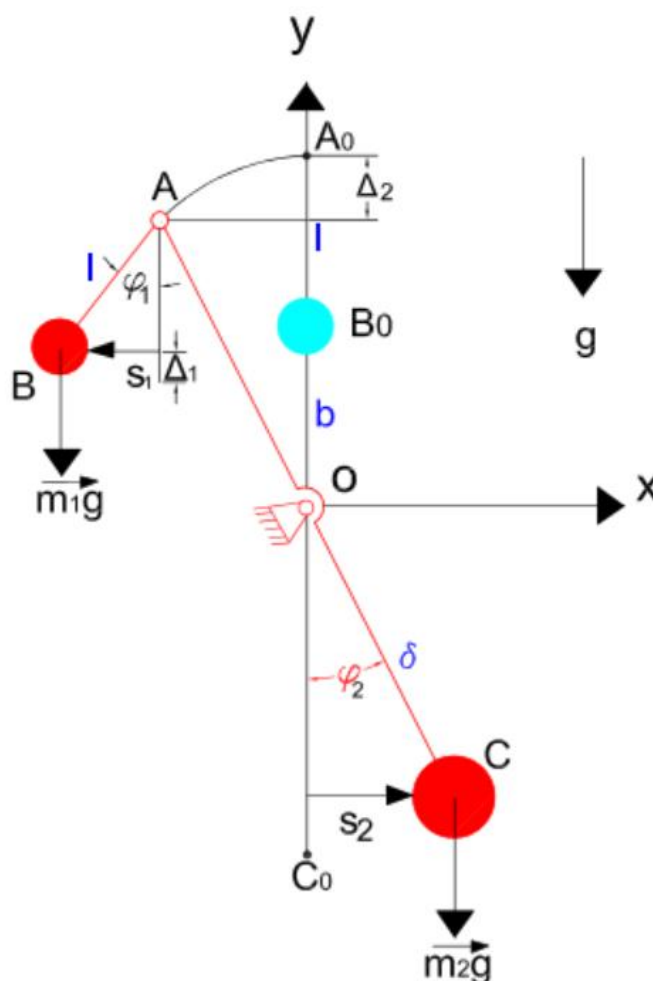


Рис. 2.22. Схема маятниковой системы с 2-мя степенями свободами

2.4.1. Вывод уравнений движения колебаний маятниковой системы

Составим выражения для кинетической и потенциальной энергий предлагаемой механической системы. За обобщенные координаты примем расстояния s_1, s_2 , определяющие положение маятника массой m_2 (т.С) и положение маятника массой m_1 (т.В) (см. рис. 2.22).

Координаты точек С и В в системе координат Оху будут

$$x_c = \delta \cdot \sin \varphi_2; \quad y_c = -\delta \cdot \cos \varphi_2; \quad (2.82)$$

$$x_b = -(l+b) \cdot \sin \varphi_2 - l \cdot \sin \varphi_1; \quad y_b = (l+b) \cos \varphi_2 - l \cdot \cos \varphi_1. \quad (2.83)$$

Кинетическая и потенциальная энергия данной механической системы будет состоять из кинетической и потенциальной энергий маятников с точностью до величин второго порядка малости

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{s}_2^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[\frac{(l+b)^2}{\delta^2} \dot{s}_2^2 + \dot{s}_1^2 + 2 \frac{(l+b)}{\delta} \dot{s}_1 \dot{s}_2 \right]; \quad (2.84)$$

$$\Pi = m_1 g \frac{s_1^2}{2l} - m_1 g \frac{(l+b)s_2^2}{2\delta^2} + m_2 g \frac{s_2^2}{2\delta}. \quad (2.85)$$

Воспользуемся далее уравнениями Лагранжа 2-ого рода и получим уравнения колебаний системы маятников;

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_1 + m_1 \frac{g}{l} s_1 + m_1 \frac{(l+b)}{\delta} \ddot{s}_2 &= 0; \\ \left(m_2 + m_1 \frac{(l+b)^2}{\delta^2} \right) \ddot{s}_2 + \frac{g}{\delta} \left(m_2 - m_1 \frac{(l+b)}{\delta} \right) s_2 + m_1 \frac{(l+b)}{\delta} \ddot{s}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Из сопоставления уравнения колебаний жидкости (2.17) и уравнения колебания механического аналога (2.86) определим параметры предлагаемой маятниковой системы. Из сравнения уравнений движения следует, что рассматриваемые механические системы будут эквивалентны при условии равенства обобщённых координат σ_{in} и s_k ($i, k = 1, 2$), если параметры механического аналога будут определены по следующим формулам,

$$m_1 = (m'_{1n} + \bar{f}_{0n} m'_{0n}); b = \frac{\delta m'_n}{m_1 ch k_n h_1} - l; \delta = g \frac{m_2 - \frac{m'_n}{ch k_n h_1}}{(m'_{2n} - m'_{1n}) \omega_{1n}^2}; \quad (2.87)$$

$$m_2 = (m'_{2n} \bar{f}_{1n} + m'_{1n}) - \frac{m'^2_{1n}}{m_1 (ch k_n h_1)^2}; l = \frac{m_1}{(m'_{1n} - m'_{0n}) k_n th k_n h_1}. \quad (2.88)$$

Изменение параметра b отвечающего колебаниям жидкостей по первому тону ($\zeta_1 = 1.8431$), в зависимости от относительных плотностей жидкостей показано на рисунке. 2.23.

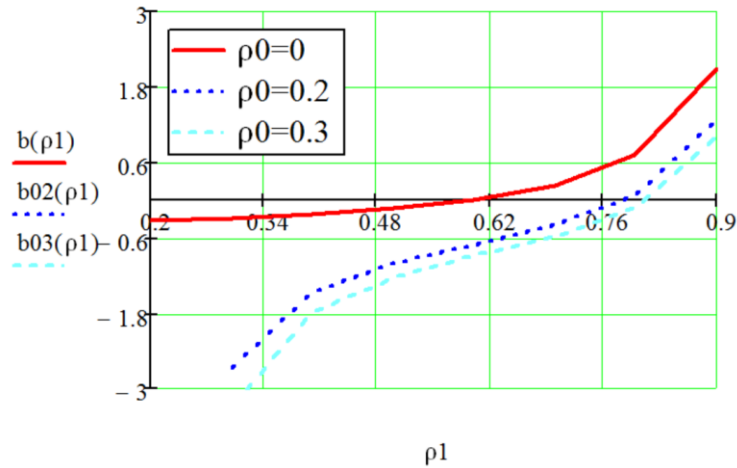


Рис. 2.23. Зависимость расстояния b от плотности ρ_1 .

2.4.2. Возможные маятниковые аналоги колебаний жидкостей

На рис. 2.24, 2.25 представлены маятниковые аналоги колебаний жидкостей, отвечающие случаям ($b > 0$), и ($b < 0$), соответственно. На рис. 2.26 показан маятниковый аналог колебаний двух жидкостей, целиком заполняющих цилиндрический бак.

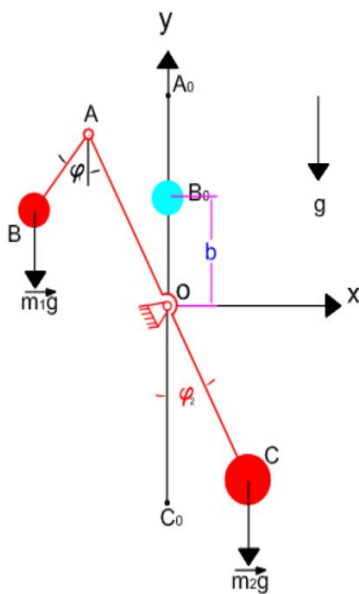


Рис.2.24. Маятниковый аналог в случае ($b > 0$)

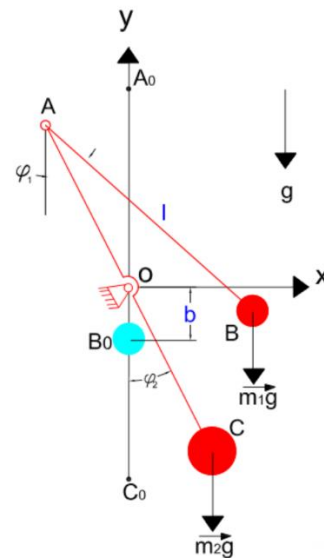


Рис.2.25. Маятниковый аналог в случае ($b < 0$)

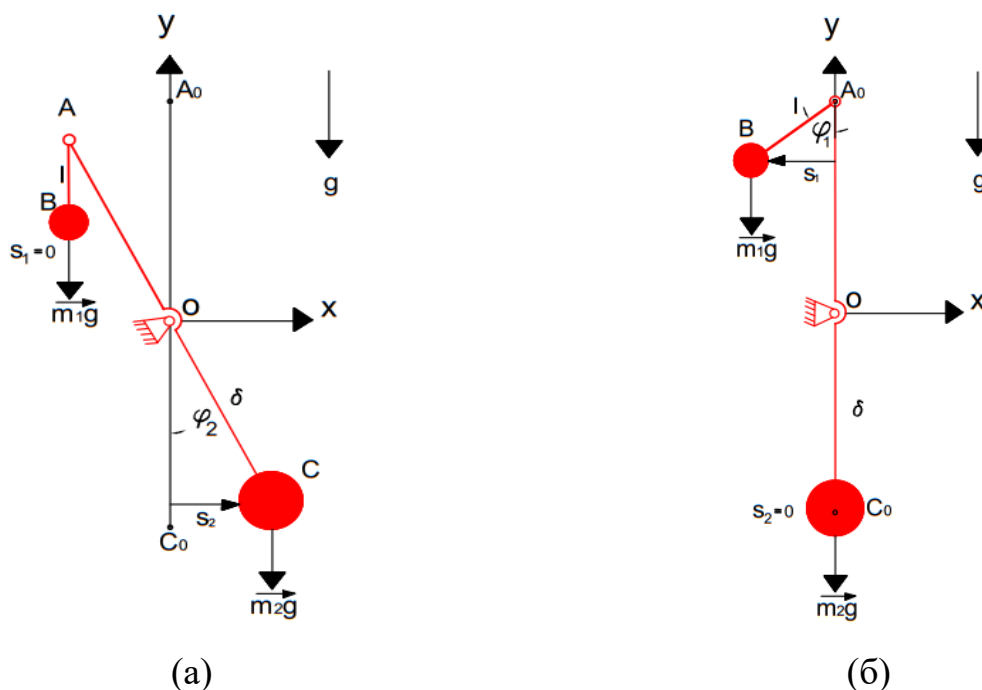


Рис.2.26. Маятниковой аналог двух жидкостей, целиком заполняющих цилиндрический бак.

Вывод по главе 2

- В многослойной идеальной жидкости, полностью заполняющей, ограниченную область существуют волны на поверхностях раздела жидкостей, которые родственными волнам на свободной поверхности однородной жидкости в том смысле, что если $n \rightarrow \infty$ (n -номер тона колебаний) главные частоты колебаний $p_n^k \rightarrow \infty$ ($k = 1, 2, \dots, N - 1$, N -число слоёв жидкостей).
- Существенным отличием колебаний многослойной жидкости от колебания свободной поверхности однородной жидкости является наличие для каждого числа n конечного множества главных частот многослойной жидкости.
- В трёхслойной идеальной жидкости для каждого числа n низким частотам главных колебаний отвечают синфазные формы движений поверхностей раздела жидкостей, а второй главной частоте – противофазные движения.

ГЛАВА 3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЁХСЛОЙНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В главе 3 рассматриваются колебания трёхслойной вязкой жидкости и определены собственные частоты колебаний с использованием метода пограничного слоя. Разработан механический аналог асимметричных колебаний трёхслойной вязкой жидкости, целиком заполняющей полость неподвижного твердого тела. Используется приближенный метод для вычисления корней характеристического уравнения и приведены графики численных расчётов собственных частот и коэффициентов затухания асимметричных колебаний поверхностей раздела жидкостей, заполняющих полностью цилиндрический бак с круглым поперечным сечением. В конце главы 3 приведен сравнительный анализ полученных результатов.

3.1. Постановка задачи о колебаниях трёхслойной вязкой жидкости

Рассмотрим малые волновые движения вязкой несжимаемой жидкости, состоящей из трёх слоёв несмешивающихся жидкостей, имеющих плотности ρ_0, ρ_1, ρ_2 , коэффициенты кинематических вязкостей ν_0, ν_1, ν_2 , и полностью заполняющие неподвижный сосуд произвольной формы рис.3.1.

Введем неподвижные системы координат $O_i, x_i, y_i, z_i (i = 0, 1, 2)$ (см. рис.3.1). И обозначим через Γ_1, Γ_2 невозмущённые поверхности раздела жидкостей, а через $S_i, (i = 0, 1, 2)$ смачиваемые поверхности жидкостей. Постановка рассматриваемой задачи может быть описана следующими уравнениями:

уравнениями движения жидкостей [65]

$$\frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial t} = -\frac{\nabla p^{(i)}}{\rho_i} - g\vec{k} + \nu_i \Delta \vec{u}^{(i)}; \quad \text{div} \vec{u}^{(i)} = 0; \quad (i = 0, 1, 2) \quad (3.1)$$

равенствами нормальных и касательных напряжений на поверхностях раздела жидкостей

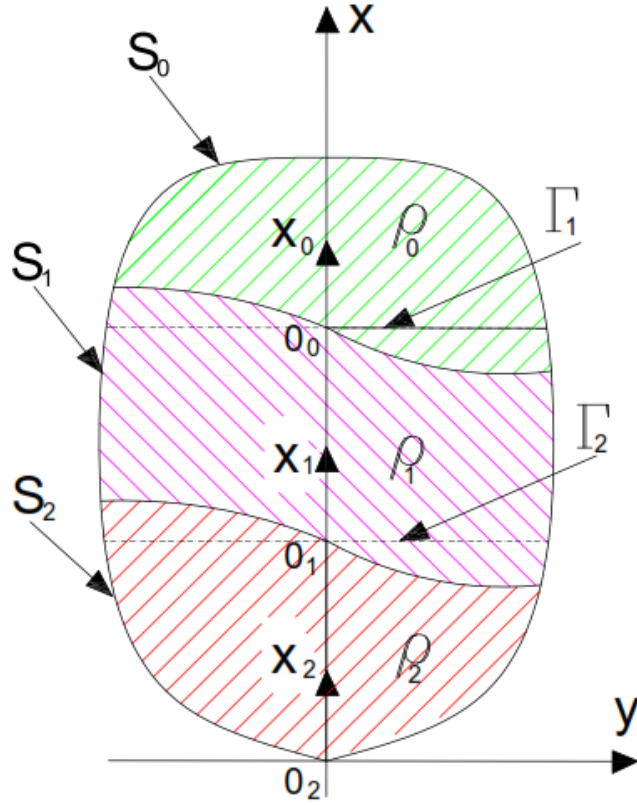


Рис. 3.1. Общий вид осесимметричного сосуда произвольной формы с вязкой трёхслойной жидкостью

$$\frac{\partial}{\partial t}(p^{(0)} - p^{(1)}) + u_x g(\rho_0 - \rho_1) = 2(v_1 \rho_1 \frac{\partial^2 u_{x_1}^{(1)}}{\partial x_1 \partial t} - v_0 \rho_0 \frac{\partial^2 u_{x_0}^{(0)}}{\partial x_0 \partial t}) \text{ на } \Gamma_1, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(p^{(1)} - p^{(2)}) + u_x g(\rho_1 - \rho_2) = 2(v_2 \rho_2 \frac{\partial^2 u_{x_2}^{(2)}}{\partial x_2 \partial t} - v_1 \rho_1 \frac{\partial^2 u_{x_1}^{(1)}}{\partial x_1 \partial t}) \text{ на } \Gamma_2, \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{2} v_1 \rho_1 \left(\frac{\partial u_{x_1}^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} v_0 \rho_0 \left(\frac{\partial u_{x_0}^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial x_0} \right); \text{ на } \Gamma_1, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{2} v_1 \rho_1 \left(\frac{\partial u_{x_1}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} v_0 \rho_0 \left(\frac{\partial u_{x_2}^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(0)}}{\partial x_0} \right); \text{ на } \Gamma_1, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{2} v_1 \rho_1 \left(\frac{\partial u_{x_1}^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} v_2 \rho_2 \left(\frac{\partial u_{x_2}^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial x_2} \right); \text{ на } \Gamma_2, \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{2} \nu_1 \rho_1 \left(\frac{\partial u_{x_1}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \nu_2 \rho_2 \left(\frac{\partial u_{x_2}^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial x_2} \right); \text{ на } \Gamma_2, \quad (3.7)$$

а также кинематическими соотношениями

$$\vec{u}^{(0)} = \vec{u}^{(1)} \text{ на } \Gamma_1 \quad \text{и} \quad \vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(2)} \text{ на } \Gamma_2, \quad (3.8)$$

и условиями прилипания на смачиваемых поверхностях

$$\vec{u}^{(i)} = \vec{0}, \quad \text{на } S_i \quad (i = 0, 1, 2). \quad (3.9)$$

Решение задачи о свободных колебаниях трех вязких жидкостей будем искать в виде

$$\vec{u}^{(i)} = e^{\lambda t} \vec{U}^{(i)}(x_i, y, z), \quad p^{(i)} = e^{\lambda t} P^{(i)}(x_i, y, z), \quad (i = 0, 1, 2). \quad (3.10)$$

где λ - собственное число задачи, $\vec{U}^{(i)}$ и $P^{(i)}$ - собственные функции задачи.

3.2. Определение собственных колебаний двухслойной жидкости с использованием метода пограничного слоя

Для исследования поставленной задачи воспользуемся следующим приемом. Будем рассматривать колебания трёхслойной вязкой жидкости как совместные колебания двух парциальных механических систем, одна из которых соответствует колебаниям верхней и средней вязких жидкостей, а другая колебаниям средней и нижней жидкостей. Для каждой парциальной гидродинамической системы определим коэффициенты затухания колебаний - $\gamma_{In}, \gamma_{IIn}$ воспользовавшись методом пограничного слоя. Используя механический аналог колебаний двух жидкостей (рис. 2.29) для парциальных гидродинамических подсистем (2.18), (2.19), составим дифференциальные уравнения для обобщенных координат s_I, s_{II} парциальных механических систем с учетом действия диссипативных сил, учитываемых законом вязкого сопротивления

$$\vec{R}_k = -\mu_k \vec{V}_k, (k=1,2), \quad (3.11)$$

(μ_k - коэффициенты вязкого сопротивления, \vec{V}_k - векторы скоростей точек, где приложены силы \vec{R}_k). Затем, сравнивая уравнения колебаний парциальных гидродинамических и механических систем, определим коэффициенты сопротивления μ_k , и воспользуемся механическим аналогом колебаний трёхслойной жидкости (рис.3.3). Составив характеристическое уравнение, определим собственные частоты рассматриваемого механического аналога, которые и примем за собственные частоты колебаний трёхслойной вязкой жидкости.

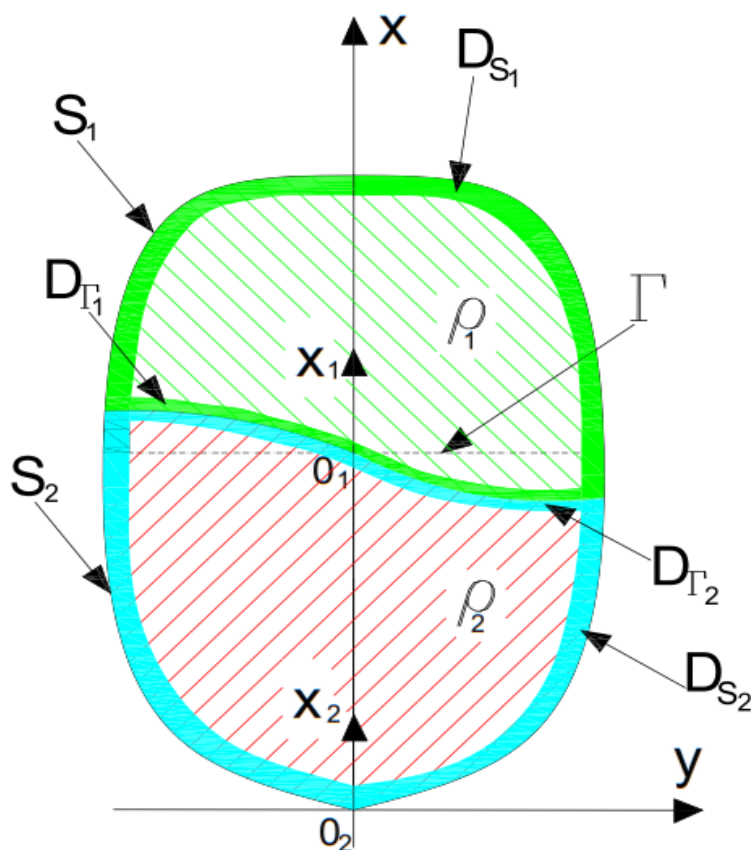


Рис. 3.2. Схема вязкой двухслойной жидкости в неподвижном сосуде произвольной формы

Для определения коэффициента вязкого сопротивления в парциальных механических системах, эквивалентных парциальным гидродинамическим системам рассмотрим движение двух вязких несжимаемых жидкостей плотности

ρ_1, ρ_2 и кинематических вязкостей ν_1, ν_2 в неподвижном произвольном сосуде (см. рис.3.2).

Постановка этой задачи в безразмерном виде будет

$$\bar{\lambda}\bar{U}^{(1)} = -\frac{1}{\bar{\rho}_1}\nabla'\bar{P}^{(1)} - \varepsilon^2\bar{\nu}_1\Delta'\bar{U}^{(1)} - \bar{k}; \quad (3.12)$$

$$\bar{\lambda}\bar{U}^{(2)} = -\frac{1}{\bar{\rho}_2}\nabla'\bar{P}^{(2)} - \varepsilon^2\bar{\nu}_2\Delta'\bar{U}^{(2)} - \bar{k}; \quad (3.13)$$

$$\bar{\lambda}(\bar{P}^{(1)} - \bar{P}^{(2)}) + \bar{U}_x(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2) = \varepsilon^2(\bar{\nu}_2\bar{\rho}_2\frac{\partial\bar{U}^{(2)}}{\partial x_2} - \bar{\nu}_1\bar{\rho}_1\frac{\partial\bar{U}^{(1)}}{\partial x_1})\bar{\lambda}; \quad (3.14)$$

$$\varepsilon^2\bar{\nu}_1\bar{\rho}_1(\frac{\partial\bar{U}^{(1)}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial\bar{U}^{(1)}}{\partial \bar{x}_1}) = \varepsilon^2\bar{\nu}_2\bar{\rho}_2(\frac{\partial\bar{U}^{(2)}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial\bar{U}^{(2)}}{\partial \bar{x}_2}); \text{ на } \Gamma, \quad (3.15)$$

$$\varepsilon^2\bar{\nu}_1\bar{\rho}_1(\frac{\partial\bar{U}^{(1)}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial\bar{U}^{(1)}}{\partial \bar{x}_1}) = \varepsilon^2\bar{\nu}_2\bar{\rho}_2(\frac{\partial\bar{U}^{(2)}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial\bar{U}^{(2)}}{\partial \bar{x}_2}); \text{ на } \Gamma, \quad (3.16)$$

$$\bar{U}^{(1)} = \bar{U}^{(2)} \text{ на } \Gamma \quad (3.17)$$

$$\bar{U}^{(1)} = 0, \text{ на } S_1, \bar{U}^{(2)} = 0 \text{ на } S_2 \quad (3.18)$$

$$\text{где } \varepsilon^2 = \frac{(\nu_1 + \nu_2)}{r_0\sqrt{g r_0}}, \bar{\lambda} = \frac{\lambda r_0}{\sqrt{g r_0}}, \bar{U}^{(1)} = \frac{\bar{U}^{(1)}}{\sqrt{g r_0}}, \bar{U}^{(2)} = \frac{\bar{U}^{(2)}}{\sqrt{g r_0}}, \bar{P}^{(1)} = \frac{P^{(1)}}{g r_0}, \bar{P}^{(2)} = \frac{P^{(2)}}{g r_0},$$

$$\bar{\nu}_1 = \frac{\nu_1}{(\nu_1 + \nu_2)}, \bar{\nu}_2 = \frac{\nu_2}{(\nu_1 + \nu_2)}. \quad (3.19)$$

Решение задачи (3.12)-(3.19) ищем методом пограничного слоя, ограничиваясь нулевым и первым приближениями, положим

$$\bar{U}^{(1)} = \nabla'\bar{\varphi}^{(1)} + \varepsilon\nabla'\bar{\kappa}^{(1)} + \bar{w}^{(1)}, \bar{U}^{(2)} = \nabla'\bar{\varphi}^{(2)} + \varepsilon\nabla'\bar{\kappa}^{(2)} + \bar{w}^{(2)}, \quad (3.20)$$

$$\bar{P}^{(1)} = -\bar{\rho}_1\bar{\lambda}_0\bar{\varphi}^{(1)} - \varepsilon\bar{\rho}_1(\bar{\lambda}_0\bar{\kappa}^{(1)} + \bar{\lambda}_1\bar{\varphi}^{(1)}) + s^{(1)}, \quad (3.21)$$

$$\bar{P}^{(2)} = -\bar{\rho}_2\bar{\lambda}_0\bar{\varphi}^{(2)} - \varepsilon\bar{\rho}_2(\bar{\lambda}_0\bar{\kappa}^{(2)} + \bar{\lambda}_1\bar{\varphi}^{(2)}) + s^{(2)}, \quad (3.22)$$

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0 + \varepsilon \bar{\lambda}_1, \quad (3.23)$$

где $\bar{w}^{(1)}$, $\bar{w}^{(2)}$, $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$ - функции типа пограничного слоя. Эти функции могут быть разложены в ряды по степеням ε , причем все коэффициенты их разложений $\bar{w}^{(1)}$, $\bar{w}^{(2)}$, $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$ быстро (экспоненциально) убывают с ростом расстояния от границ области D . Обозначим через D_{S_1} , D_{S_2} , D_{Γ_1} , D_{Γ_2} области пограничного слоя, примыкающие изнутри к поверхностям S_1 , S_2 и Γ соответственно, и имеющие толщину порядка ε . Тогда можно принять $\bar{w}^{(1)} = 0$, $\bar{w}^{(2)} = 0$, $s^{(1)} = 0$ и $s^{(2)} = 0$ вне D_{S_1} , D_{S_2} , D_{Γ_1} , D_{Γ_2} .

Ограничимся далее рассмотрением первого приближения, для которого функции $\bar{\varphi}^{(1)}$, $\bar{\varphi}^{(2)}$ являются решениями для идеальной жидкости, а функции $\bar{\kappa}^{(1)}$, $\bar{\kappa}^{(2)}$, $\bar{w}^{(1)}$, $\bar{w}^{(2)}$, $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$ учитывают влияние вязкости жидкостей в первом приближении.

Для функции $\bar{\varphi}^{(1)}$ и $\bar{\varphi}^{(2)}$ имеем следующую краевую задачу,

$$\Delta' \bar{\varphi}^{(1)} = 0 \text{ в } \tau_1, \quad \Delta' \bar{\varphi}^{(2)} = 0 \text{ в } \tau_2, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S_1, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}^{(2)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S_2, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\varphi}^{(2)}}{\partial n} \text{ на } \Gamma, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\varphi}^{(2)}}{\partial n} = -\frac{(\bar{\lambda}_0)^2}{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)} (\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}^{(2)}) \text{ на } \Gamma. \quad (3.27)$$

Задача (3.34) - (3.37) есть задача на собственные значения для двух идеальных жидкостей, и описывает собственные колебания поверхности раздела, и имеет следующие свойства [54-60]:

Множество собственных значений является дискретным спектром чисто мнимых собственных чисел, $\bar{\lambda}_0 = \pm i\bar{\beta}_j, \bar{\beta}_j > 0, j=1,2,\dots$, а собственные функции $\bar{\varphi}_j^{(1)}, \bar{\varphi}_j^{(2)}$, отвечающие частоте β_j являются решениями краевой задачи,

$$\Delta \bar{\varphi}_j^{(i)} = 0 \text{ в } \tau_i, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_j^{(i)}}{\partial n} = 0 \text{ на } S_i, \quad (i=1,2), \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_j^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\varphi}_j^{(2)}}{\partial n} \text{ на } \Gamma, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_j^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\varphi}_j^{(2)}}{\partial n} = \frac{\bar{\beta}_j^2}{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)} (\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}_j^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}_j^{(2)}). \quad (3.30)$$

Определим собственные моды колебаний поверхности раздела двух вязких жидкостей, которые при $\nu \rightarrow 0$ переходят в j -ую моду колебаний идеальных жидкостей, т.е. $\bar{\lambda}_0 = \pm i\bar{\beta}_j, \bar{\varphi}^{(i)} = \bar{\varphi}_j^{(i)}$.

Для функций $\bar{w}^{(1)}, \bar{w}^{(2)}, s^{(1)}, s^{(2)}$ в соответствии с первым приближением [112] имеем краевую задачу

$$\bar{\lambda}_0 \bar{w}^{(1)} = -\nabla' s^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{v}_1 \Delta' \bar{w}^{(1)}; \quad \text{div} \bar{w}^{(1)} = 0 \text{ в } D_{S_1}, D_{\Gamma_1}; \quad (3.31)$$

$$\bar{\lambda}_0 \bar{w}^{(2)} = -\nabla' s^{(2)} + \varepsilon^2 \bar{v}_2 \Delta' \bar{w}^{(2)}; \quad \text{div} \bar{w}^{(2)} = 0 \text{ в } D_{S_2}, D_{\Gamma_2}; \quad (3.32)$$

$$\bar{w}_T^{(1)} = -\bar{V}_0^{(1)} = -\nabla' \bar{\varphi}^{(1)} \text{ на } S_1; \quad \bar{w}^{(1)} \rightarrow 0; \quad s^{(1)} \rightarrow 0 \text{ вне } D_{S_1}, D_{\Gamma_1}; \quad (3.33)$$

$$\bar{w}_T^{(2)} = -\bar{V}_0^{(2)} = -\nabla' \bar{\varphi}^{(2)} \text{ на } S_2; \quad \bar{w}^{(2)} \rightarrow 0; \quad s^{(2)} \rightarrow 0 \text{ вне } D_{S_2}, D_{\Gamma_2}; \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \bar{v}_1 \bar{\rho}_1 \left(\frac{\partial (\bar{w}_x^{(1)} + \partial \bar{\varphi}^{(1)} / \partial \bar{x}_1)}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial (\bar{w}_z^{(1)} + \partial \bar{\varphi}^{(1)} / \partial \bar{z})}{\partial \bar{x}_1} \right) = \\ & = \varepsilon^2 \bar{v}_2 \bar{\rho}_2 \left(\frac{\partial (\bar{w}_x^{(2)} + \partial \bar{\varphi}^{(2)} / \partial \bar{x}_2)}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial (\bar{w}_z^{(2)} + \partial \bar{\varphi}^{(2)} / \partial \bar{z})}{\partial \bar{x}_2} \right) \text{ на } \Gamma, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \bar{\nu}_1 \bar{\rho}_1 \left(\frac{\partial(\bar{w}_x^{(1)} + \partial\bar{\varphi}^{(1)} / \partial\bar{x}_1)}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial(\bar{w}_y^{(1)} + \partial\bar{\varphi}^{(1)} / \partial\bar{y})}{\partial\bar{x}_1} \right) = \\ & = \varepsilon^2 \bar{\nu}_2 \bar{\rho}_2 \left(\frac{\partial(\bar{w}_x^{(2)} + \partial\bar{\varphi}^{(2)} / \partial\bar{x}_2)}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial(\bar{w}_y^{(2)} + \partial\bar{\varphi}^{(2)} / \partial\bar{y})}{\partial\bar{x}_2} \right) \end{aligned} \quad \text{на } \Gamma, \quad (3.36)$$

здесь $\bar{w}_T^{(1)}$ и $\bar{w}_T^{(2)}$ - проекции вектора $\bar{w}^{(1)}$ и $\bar{w}^{(2)}$ на плоскость, касательную к S_1 и S_2 ; вектора $\bar{V}_0^{(1)}$ и $\bar{V}_0^{(2)}$ также лежат в этой плоскости в силу условия $\bar{V}_0^{(1)} \cdot \bar{n} = \bar{0}$ и $\bar{V}_0^{(2)} \cdot \bar{n} = \bar{0}$. Следуя [112] найдем асимптотическое решение задачи (3.31)-(3.36) при $\nu_1 \rightarrow 0$ и $\nu_2 \rightarrow 0$ отдельно в областях D_{S_1} , D_{S_2} , D_{Γ_1} , D_{Γ_2} прилегающих к поверхности S_1 , S_2 , Γ и имеющих толщину порядка ε .

В областях D_{S_1} , D_{S_2} введем криволинейные ортогональные координаты ξ_1, η_1, ζ_1 и ξ_2, η_2, ζ_2 так, чтобы поверхность $\zeta_1 = 0$ совпадала с поверхностью S_1 , поверхность $\zeta_2 = 0$ совпадала с поверхностью S_2 , и чтобы в областях D_{S_1} , D_{S_2} было $\zeta_1 > 0$, $\zeta_2 > 0$. Обозначим через $H_{\xi_i}, H_{\eta_i}, H_{\zeta_i}$ ($i=1,2$) соответствующие коэффициенты Ламе, через $H_{\xi_i}^0, H_{\eta_i}^0, H_{\zeta_i}^0$ ($i=1,2$) их значения при $\zeta_i = 0$, а через $\bar{w}_{\xi_i}, \bar{w}_{\eta_i}, \bar{w}_{\zeta_i}$ - компоненты вектора \bar{w} в этих координатах. Примем, не нарушая общности, $H_{\zeta_i}^0 = 1$. Тогда ζ_i есть точностью до малых высшего порядка расстояние по внутренней нормали от поверхности S_1 , S_2 , а \bar{w}_{ζ_i} - проекция \bar{w} на нормаль \bar{n} . Положим также

$$\zeta_i = \varepsilon \alpha_i; \quad \bar{w}_{\zeta_i} = \varepsilon \bar{w}_{\alpha_i} \quad (i=1,2); \quad (3.37)$$

и перейдем в уравнениях (3.31) - (3.36) к переменным ξ_i, η_i, α_i . Учитывая, что $\zeta_i \sim \varepsilon, \alpha_i \sim 1$ в D_{S_1} , D_{S_2} , и опуская в уравнениях движения (3.31)-(3.36) малые порядка ε и выше, приведем эти уравнения к виду

$$\frac{\partial \bar{s}^{(i)}}{\partial \alpha_i} = 0; \quad \bar{\lambda}_0 \bar{w}_{\xi_i}^{(i)} = -\frac{\partial \bar{s}^{(i)}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial^2 \bar{w}_{\xi_i}^{(i)}}{\partial \alpha_i^2}; \quad \bar{\lambda}_0 \bar{w}_{\eta_i}^{(i)} = -\frac{\partial \bar{s}^{(i)}}{\partial \eta_i} + \frac{\partial^2 \bar{w}_{\eta_i}^{(i)}}{\partial \alpha_i^2}; \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} (H_{\eta_i}^0 \bar{w}_\xi^{(i)}) + \frac{\partial}{\partial \eta_i} (H_{\xi_i}^0 \bar{w}_\eta^{(i)}) + H_{\xi_i}^0 H_{\eta_i}^0 \frac{\partial \bar{w}_\xi^{(i)}}{\partial \alpha_i} = 0; \quad (i=1,2), \quad (3.39)$$

так как $\bar{s}^{(i)} \rightarrow 0$ вне области D_{S_1}, D_{S_2} , т.е. при $\alpha_i \rightarrow \infty$, то из (3.38)-(3.39) следует $\bar{s}^{(i)} \equiv 0$. Тогда для $\bar{w}^{(1)}, \bar{w}^{(2)}$ получим, учитывая условие (3.31) - (3.36) на S_1, S_2 , краевые задачи

$$\bar{\lambda}_0 \bar{w}_T^{(i)} = \frac{\partial^2 \bar{w}_T^{(i)}}{\partial \alpha_i^2}; \quad \nabla' \cdot \bar{w}_T^{(i)} + \frac{\partial \bar{w}_\alpha^{(i)}}{\partial \alpha_i} = 0; \quad (i=1,2), \quad (3.40)$$

здесь $\bar{w}_T^{(i)}$ - векторы с компонентами $\bar{w}_\xi^{(i)}, \bar{w}_\eta^{(i)}$, а $\nabla \cdot (\cdot)$ обозначают операцию дивергенции по отношению к двумерным векторам на поверхностях S_1, S_2 .

Из последних уравнений определим векторы $\bar{w}_T^{(i)}$,

$$\bar{w}_T^{(i)} = -\bar{V}_0^{(i)} \exp(\sqrt{\bar{\lambda}_0} \alpha_i); \quad (i=1,2), \quad (3.41)$$

здесь выбрана ветвь $\sqrt{\bar{\lambda}_0}$, для которой $\text{Re} \sqrt{\bar{\lambda}_0} < 0$. Возвращаясь к переменным ζ_i , \bar{w}_{ζ_i} согласно (3.37) и учитывая равенство $\bar{V}_0^{(i)} = \nabla \bar{\varphi}^{(i)}$, получим окончательно в D_{S_1}, D_{S_2} .

$$\bar{w}_T^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) = -\nabla' \bar{\varphi}^{(1)}(\xi, \eta, 0) \exp\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}_0}}{\varepsilon} \zeta\right); \quad (3.42)$$

$$\bar{w}_T^{(2)}(\xi, \eta, \zeta) = -\nabla' \bar{\varphi}^{(2)}(\xi, \eta, 0) \exp\left(\frac{\sqrt{\bar{\lambda}_0}}{\varepsilon} \zeta\right); \quad (3.43)$$

$$s^{(1)} \equiv 0, s^{(2)} \equiv 0. \quad (3.44)$$

Во внутренних областях $D_{\Gamma_1}, D_{\Gamma_2}$ положим аналогично

$$x^{(i)} = \varepsilon \beta^{(i)}; \quad \bar{w}_x^{(i)} = \varepsilon \bar{w}_\beta^{(i)}, \quad (i=1,2), \quad (3.45)$$

где $x^{(i)}$ в областях $D_{\Gamma_1}, D_{\Gamma_2}$ имеют противоположные направления.

Далее, действуя аналогично случаю, проведенному для областей D_{S_1}, D_{S_2} , можно получить краевые задачи для функции $\bar{w}_\beta^{(i)}, \bar{w}_y^{(i)}, \bar{w}_z^{(i)}$.

Однако постановку краевых задач и их решения приводить не будем, так как касательные и нормальные компоненты вектора \bar{w} на границе Γ в прилегающих областях $D_{\Gamma_1}, D_{\Gamma_2}$ имеют порядок малости больший по отношению к соответствующим компонентам в областях D_{S_1}, D_{S_2} . По этой же причине кинематические условия (3.33) - (3.34) выполняются с точностью до порядка ε .

Функции $\bar{k}^{(1)}, \bar{k}^{(2)}$ должны компенсировать невязку в выполнении условий $\bar{U}^{(1)} \cdot \bar{n} = 0, \bar{U}^{(2)} \cdot \bar{n} = 0$ на S_1, S_2 и динамического условия на Γ , вызванную решениями в пограничных слоях $\bar{w}^{(1)}, \bar{w}^{(2)}, s^{(1)}, s^{(2)}$. Краевые условия для $\bar{\varphi}^{(1)}$ и $\bar{\varphi}^{(2)}$ получим, если запишем два указанных условия, подставляя в них $\bar{U}^{(1)}, \bar{U}^{(2)}, \bar{P}^{(1)}, \bar{P}^{(2)}, \bar{\lambda}$ из (3.31)-(3.36) и учитывая также краевые условия (3.24)-(3.27) для $\bar{\varphi}^{(1)}, \bar{\varphi}^{(2)}$

$$\frac{\partial \bar{k}^{(1)}}{\partial n} = -\frac{\bar{w}^{(1)} \cdot \bar{n}}{\varepsilon} \text{ на } S_1, \quad \frac{\partial \bar{k}^{(2)}}{\partial n} = -\frac{\bar{w}^{(2)} \cdot \bar{n}}{\varepsilon} \text{ на } S_2, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \bar{k}^{(1)}}{\partial \bar{x}_1} = \frac{\bar{\lambda}_0^2}{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)} (\bar{\rho}_1 \bar{k}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{k}^{(2)}) + \frac{2\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_1 (\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}^{(2)})}{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)} - \frac{\bar{w}_{x_1}^{(1)}}{\varepsilon} \text{ на } \Gamma; \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \bar{k}^{(2)}}{\partial \bar{x}_2} = \frac{\bar{\lambda}_0^2}{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)} (\bar{\rho}_1 \bar{k}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{k}^{(2)}) + \frac{2\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_1 (\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}^{(2)})}{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)} - \frac{\bar{w}_{x_2}^{(2)}}{\varepsilon} \text{ на } \Gamma. \quad (3.48)$$

Так как потенциалы $\bar{\varphi}^{(1)}, \bar{\varphi}^{(2)}$ и функции $\bar{k}^{(1)}, \bar{k}^{(2)}$ удовлетворяют уравнениям Лапласа, воспользуемся формулами Грина, которые для первой и второй жидкостей запишутся в виде

для верхней жидкости

$$\int_{S_1} \left(\bar{\varphi}^{(1)} \frac{\partial \bar{k}^{(1)}}{\partial n} - \bar{k}^{(1)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial n} \right) dS_1 - \int_{\Gamma} \left(\bar{\varphi}^{(1)} \frac{\partial \bar{k}^{(1)}}{\partial \bar{x}_1} - \bar{k}^{(1)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial \bar{x}_1} \right) d\Gamma = 0; \quad (3.49)$$

аналогично для нижней жидкости

$$\int_{S_2} \left(\bar{\varphi}^{(2)} \frac{\partial \bar{\kappa}^{(2)}}{\partial n} - \bar{\kappa}^{(2)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(2)}}{\partial n} \right) dS_2 + \int_{\Gamma} \left(\bar{\varphi}^{(2)} \frac{\partial \bar{\kappa}^{(2)}}{\partial \bar{x}_2} - \bar{\kappa}^{(2)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(2)}}{\partial \bar{x}_2} \right) d\Gamma = 0; \quad (3.50)$$

суммируя интегралы для двух жидкостей, получим

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}_1 \int_{S_1} \left(\bar{\varphi}^{(1)} \frac{\partial \bar{\kappa}^{(1)}}{\partial n} - \bar{\kappa}^{(1)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial n} \right) dS_1 - \bar{\rho}_1 \int_{\Gamma} \left(\bar{\varphi}^{(1)} \frac{\partial \bar{\kappa}^{(1)}}{\partial \bar{x}_1} - \bar{\kappa}^{(1)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial \bar{x}_1} \right) d\Gamma + \\ & + \bar{\rho}_2 \int_{S_2} \left(\bar{\varphi}^{(2)} \frac{\partial \bar{\kappa}^{(2)}}{\partial n} - \bar{\kappa}^{(2)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(2)}}{\partial n} \right) dS_2 + \bar{\rho}_2 \int_{\Gamma} \left(\bar{\varphi}^{(2)} \frac{\partial \bar{\kappa}^{(2)}}{\partial \bar{x}_2} - \bar{\kappa}^{(2)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(2)}}{\partial \bar{x}_2} \right) d\Gamma = 0; \end{aligned} \quad (3.51)$$

где $\frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\varphi}^{(2)}}{\partial n} = 0$ на S_1, S_2 , поэтому можно переписать выражения (3.51) в

виде

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}_1 \int_{S_1} \left(\bar{\varphi}^{(1)} \frac{\partial \bar{\kappa}^{(1)}}{\partial n} \right) dS_1 - \bar{\rho}_1 \int_{\Gamma} \left(\bar{\varphi}^{(1)} \frac{\partial \bar{\kappa}^{(1)}}{\partial \bar{x}_1} \right) d\Gamma + \bar{\rho}_2 \int_{S_2} \left(\bar{\varphi}^{(2)} \frac{\partial \bar{\kappa}^{(2)}}{\partial n} \right) dS_2 + \\ & + \bar{\rho}_2 \int_{\Gamma} \left(\bar{\varphi}^{(2)} \frac{\partial \bar{\kappa}^{(2)}}{\partial \bar{x}_2} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} \left(\bar{\rho}_1 \bar{\kappa}^{(1)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial \bar{x}_1} - \bar{\rho}_2 \bar{\kappa}^{(2)} \frac{\partial \bar{\varphi}^{(2)}}{\partial \bar{x}_2} \right) d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

В написанных формулах заменим нормальные производные функций $\frac{\partial \bar{\kappa}^{(1)}}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{\kappa}^{(2)}}{\partial x_2}$

и $\frac{\partial \bar{\varphi}^{(1)}}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{\varphi}^{(2)}}{\partial x_2}$, их выражениями (3.47), (3.48), (3.30). В результате получим

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}_1 \int_{S_1} \left(\bar{\varphi}^{(1)} \frac{\bar{w}_{x_1}^{(1)}}{\varepsilon} \right) dS_1 - \bar{\rho}_1 \int_{\Gamma} \left(\bar{\varphi}^{(1)} \frac{\bar{w}_{x_1}^{(1)}}{\varepsilon} \right) d\Gamma + \bar{\rho}_2 \int_{S_2} \left(\bar{\varphi}^{(2)} \frac{\bar{w}_{x_2}^{(2)}}{\varepsilon} \right) dS_2 + \\ & + \bar{\rho}_2 \int_{\Gamma} \left(\bar{\varphi}^{(2)} \frac{\bar{w}_{x_2}^{(2)}}{\varepsilon} \right) d\Gamma - 2 \bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_1 \int_{\Gamma} \frac{(\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}^{(2)})^2 d\Gamma}{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)} = 0 \end{aligned} \quad \text{на } \Gamma. \quad (3.53)$$

Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского и запишем (3.53) в виде

$$\bar{\rho}_1 \int_{\tau_1} \left(\nabla \bar{\varphi}^{(1)} \frac{\bar{w}_{x_1}^{(1)}}{\varepsilon} \right) d\tau_1 + \bar{\rho}_2 \int_{\tau_2} \left(\nabla \bar{\varphi}^{(2)} \frac{\bar{w}_{x_2}^{(2)}}{\varepsilon} \right) d\tau_2 = 2\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_1 \frac{\int_{\Gamma} (\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}^{(2)})^2 d\Gamma}{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)}. \quad (3.54)$$

Далее поскольку $\bar{w}_T^{(i)}$ быстро затухает с ростом ζ_i в областях D_{S_i} , то интегрирование по D_{S_i} можно свести к интегрированию сначала по ζ_i от 0 до ∞ , а затем по поверхностям S_i . Тогда формула (3.54) преобразуется к виду

$$\bar{\rho}_1 \int_{S_1} \left(\frac{(\nabla \bar{\varphi}^{(1)})^2}{\sqrt{\bar{\lambda}_0}} \right) dS_1 + \bar{\rho}_2 \int_{S_2} \left(\frac{(\nabla \bar{\varphi}^{(2)})^2}{\sqrt{\bar{\lambda}_0}} \right) dS_2 = 2\bar{\lambda}_0 \bar{\lambda}_1 \frac{\int_{\Gamma} (\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}^{(2)})^2 d\Gamma}{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)}. \quad (3.55)$$

Подставим в выражение (3.55) формулы для $\bar{\lambda}_0$, $\sqrt{\bar{\lambda}_0}$ и $\bar{\varphi}^{(i)} = \bar{\varphi}_j^{(i)}$, разрешим его относительно $\bar{\lambda}_1$, в результате получим

$$\bar{\lambda}_1 = -\frac{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)(1 \pm i)}{2\sqrt{2}(\bar{\beta}_j)^{3/2}} (\bar{\rho}_2 A_{2j} + \bar{\rho}_1 A_{12j}); \quad (3.56)$$

а затем, подставив $\bar{\lambda}_1$ в формулу (3.23), получим окончательное выражение для собственного значения $\bar{\lambda}_j$,

$$\bar{\lambda}_j = \bar{\lambda}_0 + \varepsilon \bar{\lambda}_1 = \pm i \bar{\beta}_{2j} - \frac{(1 \pm i)(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)\varepsilon}{2\sqrt{2}(\bar{\beta}_{2j})^{3/2}} (\bar{\rho}_2 A_{2j} + \bar{\rho}_1 A_{12j}); \quad (3.57)$$

или

$$\bar{\lambda}_j^{(2)} = -\bar{\gamma}_{2j} + i\bar{\beta}_{2j}^*, \quad \bar{\gamma}_{2j} = \frac{(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)\varepsilon_{\text{II}}}{2\sqrt{2}(\bar{\beta}_{2j})^{3/2}} (\bar{\rho}_2 A_{2j} + \bar{\rho}_1 A_{12j}), \quad \bar{\beta}_{2j}^* = \sqrt{\bar{\beta}_{2j}^2 - \bar{\gamma}_{2j}^2}, \quad (3.58)$$

$$\text{где } A_{12j} = \frac{\int_{S_1} (\nabla' \bar{\varphi}^{(1)})^2 dS_1}{\int_{\Gamma} (\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}^{(2)})^2 d\Gamma}, \quad A_{2j} = \frac{\int_{S_2} (\nabla' \bar{\varphi}^{(2)})^2 dS_2}{\int_{\Gamma} (\bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)} - \bar{\rho}_2 \bar{\varphi}^{(2)})^2 d\Gamma}, \quad \varepsilon_{\text{II}}^2 = \frac{(v_1 + v_2)}{r_0 \sqrt{g r_0}}. \quad (3.59)$$

(В формулах (3.58), (3.59) индекс II относится к поверхности Γ_2 раздела средней и нижней жидкостей.)

Решив подобную задачу для средней и верхней жидкостей, аналогично получим

$$\bar{\lambda}_j^{(1)} = -\bar{\gamma}_{1j} + i\bar{\beta}_{1j}^*, \quad \bar{\gamma}_{1j} = \frac{(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_0)\varepsilon_1}{2\sqrt{2}(\bar{\beta}_{1j})^{3/2}}(\bar{\rho}_0 A_{0j} + \bar{\rho}_1 A_{11j}), \quad \bar{\beta}_{1j}^* = \sqrt{\bar{\beta}_{1j}^2 - \bar{\gamma}_{1j}^2}, \quad (3.60)$$

$$\text{где } A_{11j} = \frac{\int_{S_1} (\nabla' \bar{\varphi}^{(1)})^2 dS_1}{\int_{\Gamma_1} (\bar{\rho}_0 \bar{\varphi}^{(0)} - \bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)})^2 d\Gamma_1}, \quad A_{0j} = \frac{\int_{S_0} (\nabla' \bar{\varphi}^{(0)})^2 dS_0}{\int_{\Gamma_1} (\bar{\rho}_0 \bar{\varphi}^{(0)} - \bar{\rho}_1 \bar{\varphi}^{(1)})^2 d\Gamma_1}, \quad \varepsilon_1^2 = \frac{(v_1 + v_0)}{r_0 \sqrt{g r_0}}. \quad (3.61)$$

Определив коэффициента затухания для каждой пары жидкостей, запишем приближённые дифференциальные уравнения парциальных гидродинамических систем в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{1j} + 2\gamma_{1j} \dot{\sigma}_{1j} + \beta_{1j}^2 \sigma_{1j} &= 0; \\ \ddot{\sigma}_{2j} + 2\gamma_{2j} \dot{\sigma}_{2j} + \beta_{2j}^2 \sigma_{2j} &= 0; \end{aligned} \quad , \quad j = 1, 2, 3... \quad (3.62)$$

3.3. Механический аналог колебаний трёх вязких жидкостей, целиком заполняющих полость неподвижного твердого тела

Воспользуемся упрощённым вариантом механического аналога колебаний двух идеальных средней и нижней жидкостей, целиком заполняющих неподвижную полость (см. гл. II).

Уравнение движения в этом случае

$$\ddot{s}_{II n} + \beta_{II M n}^2 s_{II n} = 0, \quad (3.63)$$

где $\beta_{\text{II}Mn}^2 = \frac{g}{\delta_n} \frac{(M_{\text{II}Mn} - M_{\text{IM}n} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n})}{(M_{\text{II}Mn} + M_{\text{IM}n} \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2})}$, δ_n - длина нити математического маятника,

отвечающая n -ому тону свободных колебаний поверхности раздела. При действии сил вязкого сопротивления на массу математического маятника

$$\vec{R}_k = -\mu_k \vec{V}_k, (k = 1, 2), \quad (3.64)$$

уравнение колебаний маятника (рис. 3.3а), имитирующего колебания нижней поверхности раздела двух жидкостей запишется в виде

$$\ddot{s}_{\text{II}n} + 2\eta_{\text{II}n} \dot{s}_{\text{II}n} + \beta_{\text{II}Mn}^2 s_{\text{II}n} = 0, \quad (3.65)$$

$$\text{где } \eta_{\text{II}n} = \frac{\mu_{\text{II}n}}{2(M_{\text{II}Mn} + M_{\text{IM}n} \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2})}, \quad (3.66)$$

$$M_{\text{II}Mn} = V_n [(\rho_2 f_{1n} + \rho_1) - (\rho_0 f_{0n} + \rho_1) \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2}]. \quad (3.67)$$

Аналогично может быть составлены уравнения колебаний маятника (рис. 3.3б), имитирующего колебания поверхности раздела верхней и средней жидкостей,

$$\ddot{s}_{\text{I}n} + 2\eta_{\text{I}n} \dot{s}_{\text{I}n} + \beta_{\text{IM}n}^2 s_{\text{I}n} = 0, \quad (3.68)$$

$$\eta_{\text{I}n} = \frac{\mu_{\text{I}n}}{2M_{\text{IM}n}}, M_{\text{IM}n} = V_n (\rho_0 f_{0n} + \rho_1). \quad (3.69)$$

Определим из уравнений механического аналога двух вязких жидкостей коэффициенты вязкого демпфирования $\mu_{\text{I}n}, \mu_{\text{II}n}$. Сравнения уравнения парциальных гидродинамических систем (3.63) и уравнения парциальных систем механического аналога (3.65), (3.68), получим

$$\begin{aligned} \gamma_{1j} &= \eta_{In}, \gamma_{2j} = \eta_{IIn}, (n = j), \\ \mu_1 &= 2\gamma_{1n} M_{IMn}, \mu_{IIn} = 2\gamma_{2n} \left(M_{IIn} + M_{IMn} \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2} \right). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Далее воспользуемся механическим аналогом колебания трёх идеальных несжимаемых жидкостей, полностью заполняющих полость неподвижного твердого тела (см. гл. II). Чтобы получить механический аналог колебаний трёх вязких жидкостей составим выражения диссипативной функции Рэлея

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma &= \frac{1}{2} \mu_{II} \dot{v}_c^2 + \frac{1}{2} \mu_I \dot{v}_b^2, \text{ где } v_c = \delta \dot{\varphi}_2, v_b = -(l_n + b_n) \dot{\varphi}_2 + l_n \dot{\varphi}_1, \\ \Phi_\Sigma &= \frac{1}{2} \mu_{IIn} \dot{s}_{IIn}^2 + \frac{1}{2} \mu_{In} \left[\frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2} \dot{s}_{IIn}^2 + \dot{s}_{In}^2 - 2 \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n} \dot{s}_{In} \dot{s}_{IIn} \right]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Используя уравнения Лагранжа 2-ого рода, получим уравнения колебаний механического аналога трёх вязких жидкостей

$$M_{IMn} \ddot{s}_{In} + \mu_{In} \dot{s}_{In} + M_{IMn} \frac{g}{l_n} s_{In} - M_{IMn} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n} \ddot{s}_{IIn} - \mu_{In} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n} \dot{s}_{IIn} = 0; \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} & \left(M_{IIn} + M_{IMn} \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2} \right) \ddot{s}_{IIn} + \left(\mu_{IIn} + \mu_{In} \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2} \right) \dot{s}_{IIn} + \\ & + \frac{g}{\delta_n} \left(M_{IIn} - M_{IMn} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n} \right) s_{IIn} - M_{IMn} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n} \ddot{s}_{In} - \mu_{In} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n} \dot{s}_{In} = 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Для удобства дальнейшего исследования запишем уравнения (3.72)-(3.73) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{s}_{In} \\ \ddot{s}_{IIn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{s}_{In} \\ \dot{s}_{IIn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_{11} \\ c_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{In} \\ s_{IIn} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.74)$$

Положим в уравнение (3.74) $s_{In} = A_1 e^{\lambda t}$, $s_{IIn} = A_2 e^{\lambda t}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \lambda^2 + b_{11} \lambda + c_{11} & a_{12} \lambda^2 + b_{12} \lambda \\ a_{21} \lambda^2 + b_{21} \lambda & a_{22} \lambda^2 + b_{22} \lambda + c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.75)$$

и получаем характеристическое уравнение механической системы,

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (3.76)$$

$$\text{где } a_0 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), a_1 = (a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21}), \quad (3.77)$$

$$a_2 = (a_{11}c_{22} + b_{11}b_{22} + a_{22}c_{11} - b_{12}b_{21}), a_3 = (b_{11}c_{22} + b_{22}c_{11}), a_4 = c_{11}c_{22}. \quad (3.78)$$

$$a_{11} = M_{IMn}, a_{22} = \left(M_{IMn} + M_{IMn} \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2} \right), a_{12} = a_{21} = M_{IMn} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n}, \quad (3.79)$$

$$b_{11} = \mu_{In}, b_{22} = \left(\mu_{In} + \mu_{In} \frac{(l_n + b_n)^2}{\delta_n^2} \right), b_{12} = b_{21} = \mu_{In} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n}, c_{11} = M_{IMn} \frac{g}{l_n}, \quad (3.80)$$

$$c_{22} = \frac{g}{\delta_n} \left(M_{IMn} - M_{IMn} \frac{(l_n + b_n)}{\delta_n} \right). \quad (3.81)$$

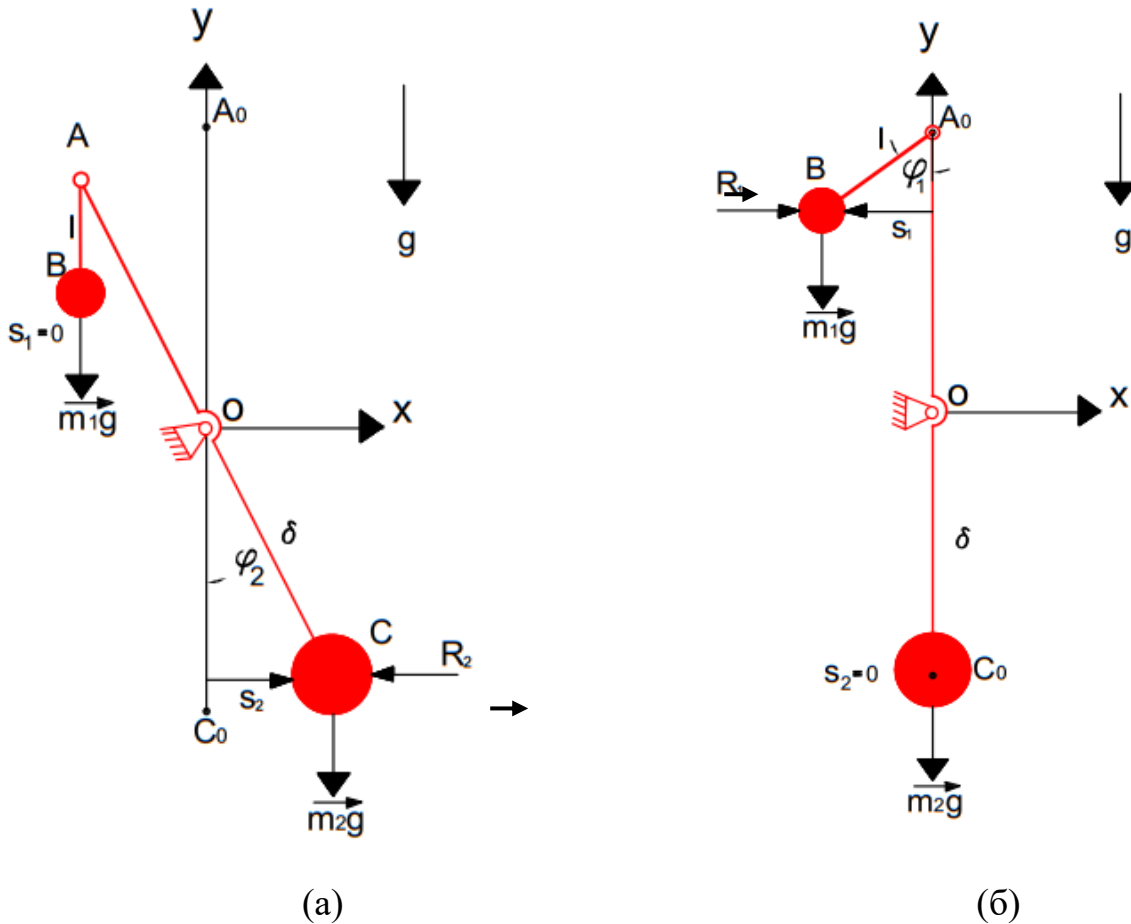


Рис.3.3. Механические аналоги, имитирующие колебания двухслойной вязкой жидкости

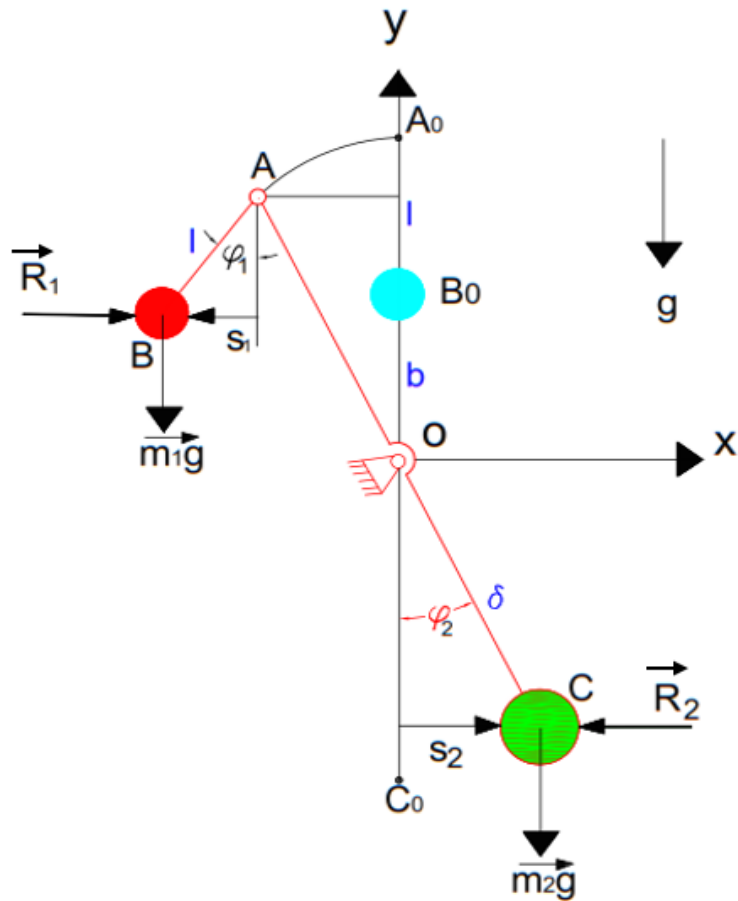


Рис.3.4. Механический аналог, имитирующий колебания трёхслойной вязкой жидкости

Можно доказать, что вещественные части корней этого характеристического уравнения (3.76) отрицательны либо равны нулю. Таким образом, корни этого уравнения могут иметь вид

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2j} &= -\alpha_{1j} \pm \omega_{1j}i, \quad \lambda_{3,4j} = -\alpha_{2j} \pm \omega_{2j}i \\ \lambda_{mj} &= -\alpha_{mj}, \quad (m = 1, 2, 3, 4) \\ \lambda_{1,2j} &= -\alpha_{1j} \pm \omega_{1j}i, \quad \lambda_{3,4j} = -\alpha_{3,4j} \end{aligned} \quad , \quad (3.82)$$

где α_{mj}, ω_{mj} - вещественные положительные числа.

В рассматриваемом случае силы сопротивления достаточно малы, функция Рэлея определённо положительна. Поэтому корни характеристического уравнения будут комплексно сопряженными с отрицательными вещественными частями:

$$-\alpha_{1mj} \pm \omega_{1mj}i, -\alpha_{2mj} \pm \omega_{2mj}i. \quad (3.83)$$

Комплексно сопряженным корням отвечают затухающие главные колебания,

$$s_{mj} = Ae^{-\alpha_{mj}t} \sin(\omega_{mj}t + \varepsilon_{mj}). \quad (3.84)$$

Каждой паре комплексно сопряженных корней отвечает свое главное затухающее колебание. Общее решение уравнений (3.84) при этих условиях имеет вид:

$$\begin{aligned} s_{j1} &= A_{j1}^{(1)} e^{-\alpha_{j1}t} \sin(\omega_{j1}t + \varepsilon_{j1}) + A_{j1}^{(2)} e^{-\alpha_{j2}t} \sin(\omega_{j2}t + \varepsilon_{j2}), \\ s_{j2} &= A_{j2}^{(1)} e^{-\alpha_{j1}t} \sin(\omega_{j1}t + \varepsilon_{j1}) + A_{j2}^{(2)} e^{-\alpha_{j2}t} \sin(\omega_{j2}t + \varepsilon_{j2}). \end{aligned} \quad (3.85)$$

В этом решении их четырех чисел $A_1^{(1)}$ произвольных только два, остальные определяются из уравнений (3.75) подобно тому, как это было сделано при определении форм главных колебаний идеальной жидкости.

3.4. Приближенный метод для вычисления корней характеристического уравнения

Покажем, что при небольших по модулю силах сопротивления, вычисление корней характеристического уравнения значительно упрощается, так как их мнимые и вещественные части приближенно могут быть вычислены независимо друг от друга. Действительно, при небольших силах сопротивления можно считать, что они зависят от малого параметра ε

$$b = \varepsilon\beta, \quad (3.86)$$

где β - некоторые конечные числа.

Характеристическое уравнение (3.76) в развернутой форме будет иметь вид (с точностью до членов первого порядка относительно ε)

$$a_0\lambda^4 + \varepsilon a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + \varepsilon a_3\lambda + a_4 = 0. \quad (3.87)$$

Положим $\varepsilon = 0$ и $\lambda = \pm ki$, тогда характеристическое уравнение (3.87) переходит в уравнение частот колебаний для идеальных жидкостей (см. гл.2)

$$a_0\lambda^4 + a_2\lambda^2 + a_4 = 0. \quad (3.88)$$

Разложим вещественную и мнимую части корня λ уравнения (3.87) в ряды по степеням ε , ограничиваясь членами первого порядка относительно ε :

$$\lambda = \alpha\varepsilon + (\beta + \varepsilon\gamma)i, \quad (3.89)$$

где α, β, γ - вещественные числа.

Заметим, что вещественная часть λ не имеет свободного от ε члена, так как все корни уравнения (3.88) относительно k^2 вещественны и положительны, а следовательно, при $\varepsilon = 0$ корни уравнения (3.87)-чисто мнимые числа.

Вычислим $\lambda^2, \lambda^3, \lambda^4$, придерживаясь все время принятой точности. Имеем

$$\lambda^2 = -\beta^2 + 2\varepsilon\beta\gamma + 2\varepsilon\alpha\beta i, \lambda^3 = -3\varepsilon\alpha\beta^2 - (\beta^3 + 3\varepsilon\beta^2\gamma)i, \quad (3.90)$$

$$\lambda^4 = \beta^4 + 4\varepsilon\beta^3\gamma - 4\varepsilon\alpha\beta^3 i. \quad (3.91)$$

Внесем выражения в уравнение (3.87), отделим вещественную и мнимую части и сгруппируем члены по степеням ε , сохраняя члены не выше первого порядка

$$\begin{aligned} & [(a_0\beta^4 - a_2\beta^2 + a_4) + 2\beta\gamma(2a_0\beta^2 - a_2)\varepsilon] - \\ & - \beta\varepsilon i[(4a_0\beta^2 - 2a_2)\alpha + (a_1\beta^2 - a_3)] = 0, \end{aligned} \quad (3.92)$$

это равенство может выполняться при всех ε только в этом случае, если

$$(a_0\beta^4 - a_2\beta^2 + a_4) = 0, \gamma = 0, (4a_0\beta^2 - 2a_2)\alpha + (a_1\beta^2 - a_3) = 0, \quad (3.93)$$

так как $\gamma = 0$, то мнимая часть корня характеристического уравнения с точностью выше первого порядка относительно ε равна корню уравнения (3.88). Иначе говоря, частоты затухающих колебаний с указанной точностью совпадают с частотами колебаний идеальных жидкостей.

Пусть $\beta_j = k_j$ - одна из частот колебаний идеальных жидкостей. Тогда из последнего равенства получим

$$\alpha_{mj} = \frac{1}{2} \frac{a_1 k_{mj}^2 - a_3}{2a_0 k_{mj}^2 - a_2}, (m = 1, 2). \quad (3.94)$$

3.5. Свободные колебания вязкой трёхслойной жидкости в сосуде конкретной формы

Рассмотрим сосуд, имеющий форму прямого круглого цилиндра радиуса r_0 , глубины каждой жидкости h_0, h_1, h_2 (см. рис.3.5). Решение задачи имеет вид (3.1)-(3.10).

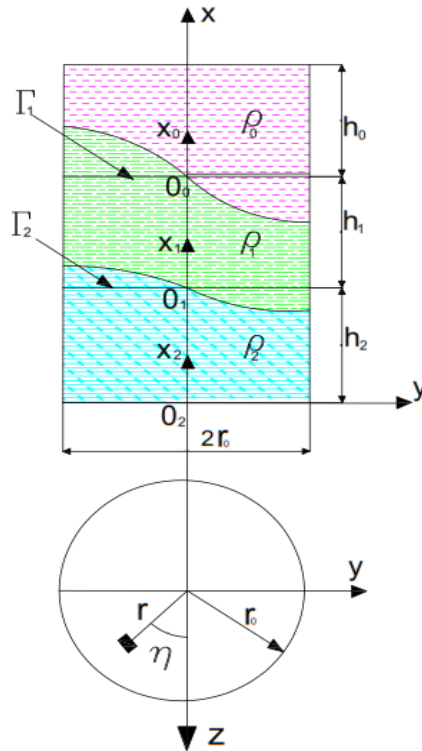


Рис. 3.5. Схема круглого цилиндра с вязкой трёхслойной жидкостью

Пусть потенциалы смещений каждой жидкости имеют вид

$$\varphi_j^{(0)} = -\frac{J_1(k_j r)}{J_1(\xi_j)} \cdot th(k_j h_1) \cdot \frac{ch(k_j(x_0 - h_0))}{sh(k_j h_0)} \cdot sin \eta, \quad (3.95)$$

$$\varphi_j^{(11)} = \frac{J_1(k_j r)}{J_1(\xi_j)} \cdot th(k_j h_1) \cdot \frac{ch(k_j x_1)}{sh(k_j h_1)} \cdot sin \eta; \quad (3.96)$$

$$\varphi_j^{(12)} = -\frac{J_1(k_j r)}{J_1(\xi_j)} \cdot \frac{ch(k_j(x_1 - h_1))}{ch(k_j h_1)} \cdot sin \eta; \quad (3.97)$$

$$\varphi_j^{(2)} = \frac{J_1(k_j r)}{J_1(\xi_j)} \cdot th(k_j h_1) \cdot \frac{ch(k_j x_2)}{sh(k_j h_2)} \cdot sin \eta. \quad (3.98)$$

здесь r, η -полярные координаты в плоскости yz с центром на оси цилиндра, $k_j = \xi_j / r_0$, ξ_j - положительные корни произвольных функций Бесселя первого рода и первого порядка

$$\left(\frac{J_1(k_j r)}{J_1(\xi_j)} \right)' = 0, (j = 1, 2, \dots). \quad (3.99)$$

Находим интегралы для получения коэффициентов $A_{0j}, A_{11j}, A_{12j}, A_{2j}$,

$$\int_{S_0} (\nabla \varphi^{(0)})^2 dS_0 = \int_{S_{\text{бок}}} (\nabla \varphi^{(0)})^2 dS_{\text{бок}} + \int_{S_{\text{кр}}} (\nabla \varphi^{(0)})^2 dS_{\text{кр}}; \quad (3.100)$$

$$\int_{S_1} (\nabla \varphi^{(1)})^2 dS_1 = \int_{S_{\text{бок}}} (\nabla \varphi^{(1)})^2 dS_{\text{бок}}; \quad (3.101)$$

$$\int_{S_2} (\nabla \varphi^{(2)})^2 dS_2 = \int_{S_{\text{бок}}} (\nabla \varphi^{(2)})^2 dS_{\text{бок}} + \int_{S_{\text{дно}}} (\nabla \varphi^{(2)})^2 dS_{\text{дно}}; \quad (3.102)$$

$$\int_{S_{\text{бок}}} (\nabla \varphi^{(0)})^2 dS_{\text{бок}} = \frac{\pi}{2} \bar{f}_{0j}^2 \left(\frac{(\xi_j^2 + 1)}{\xi_j} th(k_j h_0) + \frac{h_0(1 - \xi_j^2)}{r_0(ch(k_j h_0))^2} \right); \quad (3.103)$$

$$\int_{S_{\text{кр}}} (\nabla \varphi^{(0)})^2 dS_{\text{кр}} = \frac{\pi}{2} \bar{f}_{0j}^2 \frac{(\xi_j^2 - 1)}{(ch(k_j h_0))^2}; \quad (3.104)$$

$$\int_{S_{\text{бок}}} (\nabla \varphi^{(1)})^2 dS_{\text{бок}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{(\xi_j^2 + 1)}{\xi_j} th(k_j h_1) + \frac{h_1(1 - \xi_j^2)}{r_0(ch(k_j h_1))^2} \right); \quad (3.105)$$

$$\int_{S_{\text{дно}}} (\nabla \varphi^{(1)})^2 dS_{\text{дно}} = \frac{\pi}{2} \frac{(\xi_j^2 - 1)}{(ch(k_j h_1))^2}; \quad (3.106)$$

$$\int_{S_{\text{бок}}} (\nabla \varphi^{(2)})^2 dS_{\text{бок}} = \frac{\pi}{2} \bar{f}_{1j}^2 \left(\frac{(\xi_j^2 + 1)}{\xi_j} th(k_j h_2) + \frac{h_2(1 - \xi_j^2)}{r_0(ch(k_j h_2))^2} \right); \quad (3.107)$$

$$\int_{S_{\text{дно}}} (\nabla \varphi^{(2)})^2 dS_{\text{дно}} = \frac{\pi \bar{f}_{1j}^2}{2} \frac{(\xi_j^2 - 1)}{(\text{ch}(k_j h_2))^2}; \quad (3.108)$$

$$\int_{\Gamma_1} (\rho_0 \varphi^{(0)} - \rho_1 \varphi^{(11)})^2 d\Gamma_1 = \frac{\pi}{2} (\rho_1 + \bar{f}_{0j} \rho_0)^2 \frac{(\xi_j^2 - 1) r_0^2}{\xi_j^2}; \quad (3.109)$$

$$\int_{\Gamma_2} (\rho_1 \varphi^{(12)} - \rho_2 \varphi^{(2)})^2 d\Gamma_2 = \frac{\pi}{2} (\rho_1 + \bar{f}_{1j} \rho_2)^2 \frac{(\xi_j^2 - 1) r_0^2}{\xi_j^2}; \quad (3.110)$$

$$\int_{\Gamma_1} (\varphi^{(11)})^2 d\Gamma_1 = \frac{\pi}{2} \frac{(\xi_j^2 - 1) r_0^2}{\xi_j^2}, \quad \int_{\Gamma_2} (\varphi^{(12)})^2 d\Gamma_2 = \frac{\pi}{2} \frac{(\xi_j^2 - 1) r_0^2}{\xi_j^2}. \quad (3.111)$$

Подставляя полученные выражения (3.103)-(3.111) в уравнения (3.100)-(3.102) и окончательно получаем коэффициенты $A_{0j}, A_{11j}, A_{12j}, A_{2j}$,

$$A_{0j} = \frac{\xi_j^2 \cdot \bar{f}_{0j}^2}{r_0^2 (\rho_1 + \bar{f}_{0j} \rho_0)^2} \left[\frac{(\xi_j^2 + 1)}{\xi_j (\xi_j^2 - 1)} \text{th}(k_j h_0) + \frac{(1 - h_0 / r_0)}{(\text{ch}(k_j h_0))^2} \right]; \quad (3.112)$$

$$A_{11j} = \frac{\xi_j^2}{r_0^2 (\rho_1 + \bar{f}_{0j} \rho_0)^2} \left[\frac{(\xi_j^2 + 1)}{\xi_j (\xi_j^2 - 1)} \text{th}(k_j h_1) + \frac{(1 - h_1 / r_0)}{(\text{ch}(k_j h_1))^2} \right]; \quad (3.113)$$

$$A_{12j} = \frac{\xi_j^2}{r_0^2 (\rho_1 + \bar{f}_{1j} \rho_2)^2} \left[\frac{(\xi_j^2 + 1)}{\xi_j (\xi_j^2 - 1)} \text{th}(k_j h_1) + \frac{(1 - h_1 / r_0)}{(\text{ch}(k_j h_1))^2} \right]; \quad (3.114)$$

$$A_{2j} = \frac{\xi_j^2 \cdot \bar{f}_{1j}^2}{r_0^2 (\rho_1 + \bar{f}_{1j} \rho_2)^2} \left[\frac{(\xi_j^2 + 1)}{\xi_j (\xi_j^2 - 1)} \text{th}(k_j h_2) + \frac{(1 - h_2 / r_0)}{(\text{ch}(k_j h_2))^2} \right]; \quad (3.115)$$

$$\gamma_{1j} = \frac{(\rho_1 - \rho_0) g}{2\sqrt{2}(\beta_{1j})^{3/2}} (\sqrt{v_0} \rho_0 A_{0j} + \sqrt{v_1} \rho_1 A_{11j}), \quad (3.116)$$

$$\gamma_{2j} = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{2\sqrt{2}(\beta_{2j})^{3/2}} (\sqrt{v_2} \rho_2 A_{2j} + \sqrt{v_1} \rho_1 A_{11j}). \quad (3.117)$$

Определив коэффициенты затухания γ_{1j}, γ_{2j} для каждой пары жидкости составим характеристического уравнения механического аналога

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0, \quad (3.118)$$

$$\text{где } a_0 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), a_1 = (a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21}), \quad (3.119)$$

$$a_2 = (a_{11}c_{22} + b_{11}b_{22} + a_{22}c_{11} - b_{12}b_{21}), a_3 = (b_{11}c_{22} + b_{22}c_{11}), a_4 = c_{11}c_{22}. \quad (3.120)$$

Далее выразим параметры механической системы через параметры гидродинамической системы,

$$M_{IMn} = V_n (\rho_0 f_{0n} + \rho_1), \quad (3.121)$$

$$M_{IMn} = \frac{V_n [(\rho_2 f_{1n} + \rho_1)(\rho_0 f_{0n} + \rho_1) \cosh(k_n h_1)^2 - \rho_1^2]}{(\rho_0 f_{0n} + \rho_1) \cosh(k_n h_1)^2}, \quad (3.122)$$

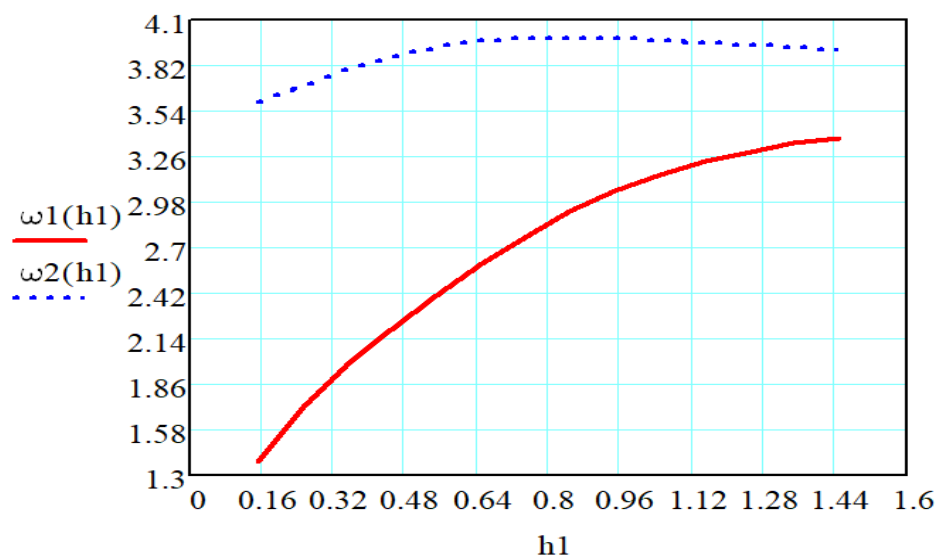
$$\mu_{In} = 2\gamma_{In} V_n (\rho_0 f_{0n} + \rho_1), \quad \mu_{Im} = 2\gamma_{Im} V_n (\rho_2 f_{1n} + \rho_1), \quad (3.123)$$

$$\delta_n = \frac{r_0 \{(\rho_2 f_{1n} + \rho_1) - \rho_1^2 / [(\rho_0 f_{0n} + \rho_1) \cosh(k_n h_1)^2] - \rho_1 / \cosh(k_n h_1)\}}{(\rho_2 - \rho_1) \xi_n \operatorname{th}(k_n h_1)}, \quad (3.124)$$

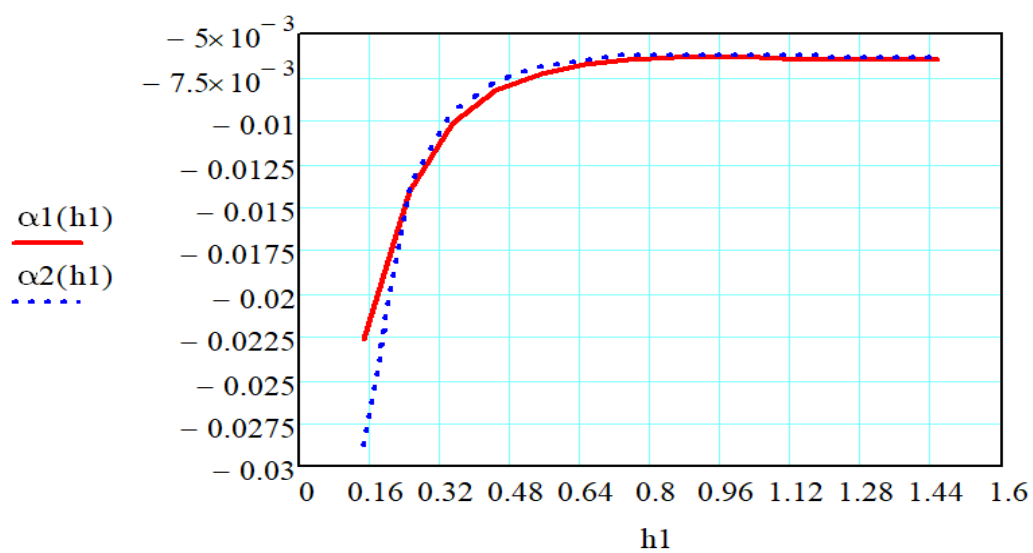
$$l_n = \frac{r_0 (\rho_0 f_{0n} + \rho_1)}{(\rho_1 - \rho_0) \xi_n \operatorname{th}(k_n h_1)}, b_n = \frac{\delta_n \rho_1 - l_n (\rho_0 f_{0n} + \rho_1) \cosh(k_n h_1)}{(\rho_0 f_{0n} + \rho_1) \cosh(k_n h_1)}, \quad (3.125)$$

$$f_{0n} = \operatorname{th}(k_n h_1) \operatorname{cth}(k_n h_0), f_{1n} = \operatorname{th}(k_n h_1) \operatorname{cth}(k_n h_2), V_n = \frac{2\pi r_0^3 \operatorname{th}(k_n h_1)}{\xi_n (\xi_n^2 - 1)}. \quad (3.126)$$

На рисунках (3.6)-(3.9) приведены результаты численных расчетов при различных параметрах задачи по формуле (3.83) (сплошные линии – синфазные колебания, пунктирные - противофазные).

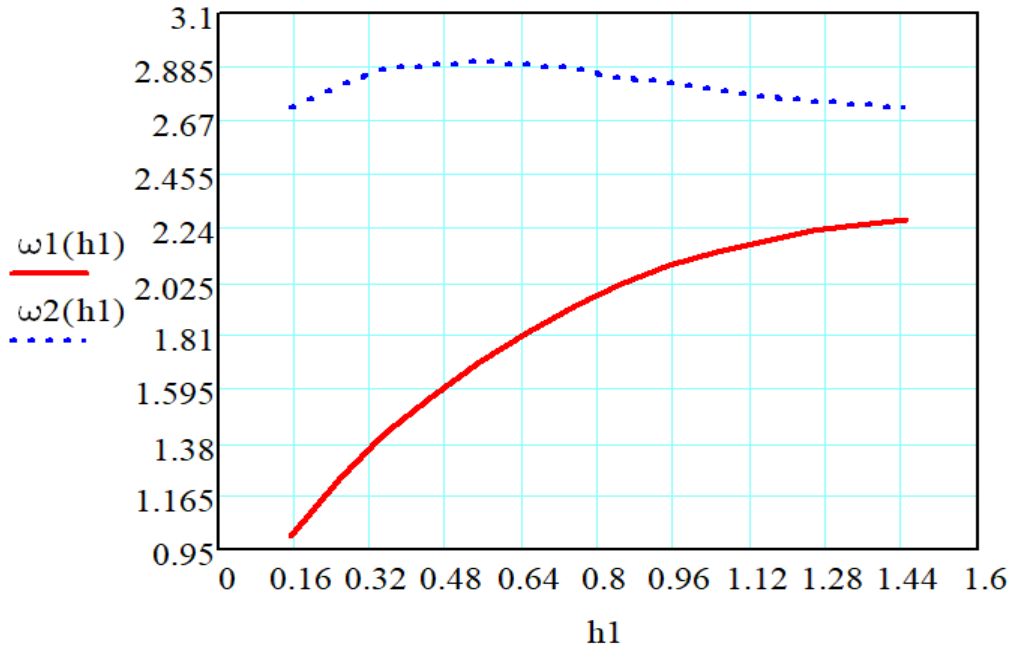


(a)

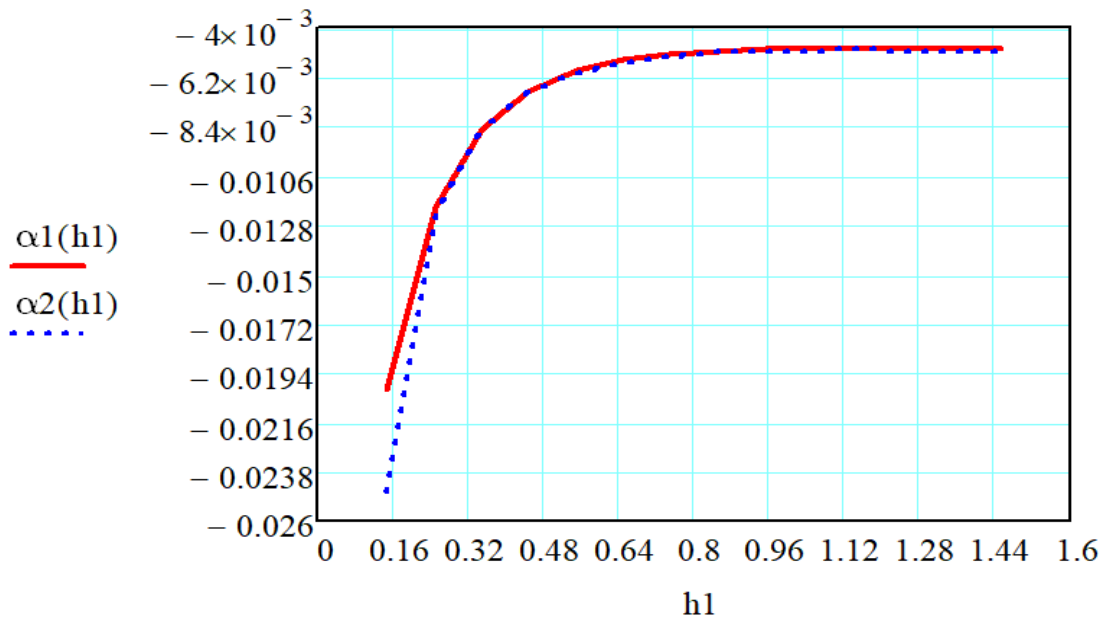


(б)

Рис.3.6. Зависимость собственных частот (а), коэффициентов затухания (б) трёхслойной вязкой жидкости от глубины средней жидкости h_1 при $h_0 = h_2 = 1.5$ и $\rho_0 = 0.1, \rho_1 = 0.5$.

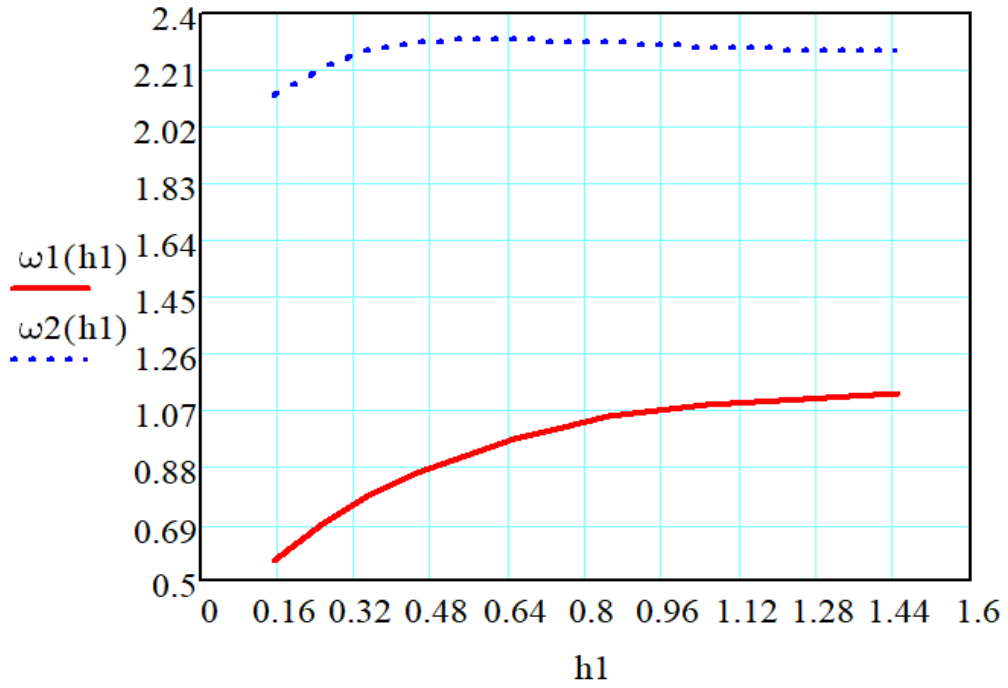


(a)

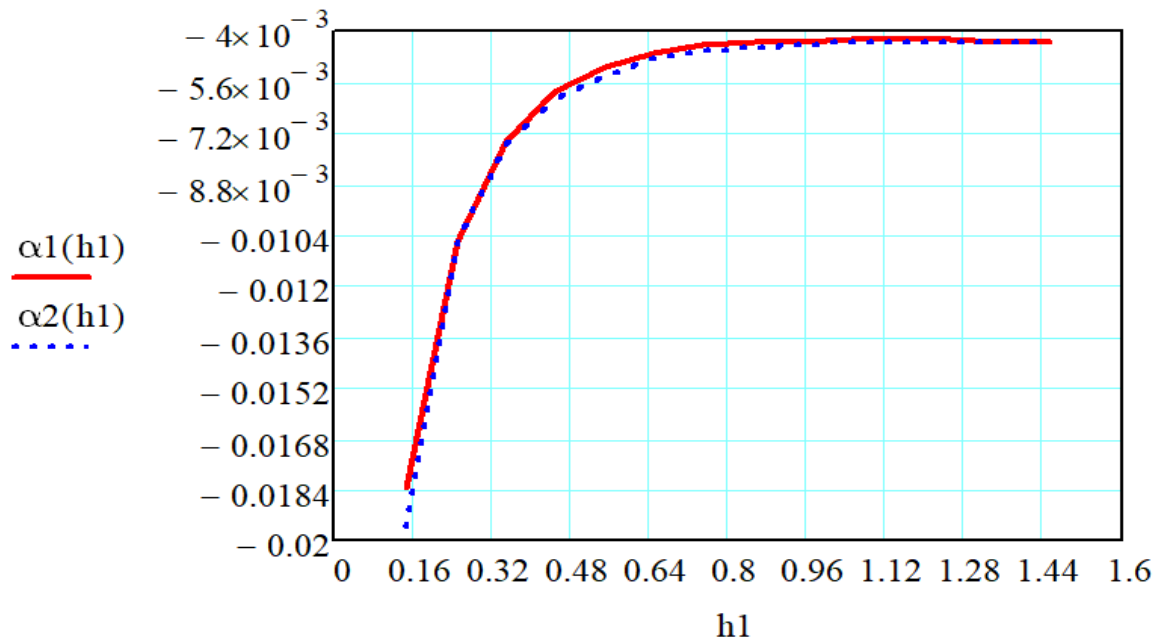


(б)

Рис.3.7. Зависимость собственных частот (а), коэффициентов затухания (б) трёхслойной вязкой жидкости от глубины средней жидкости h_1 при $h_0 = h_2 = 1.5$ и $\rho_0 = 0.3, \rho_1 = 0.7$.



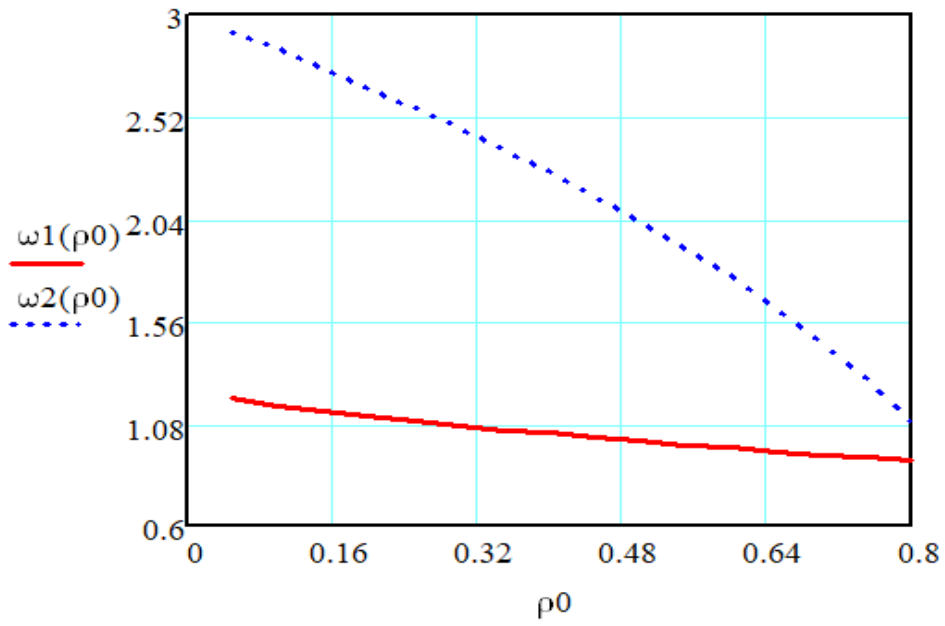
(a)



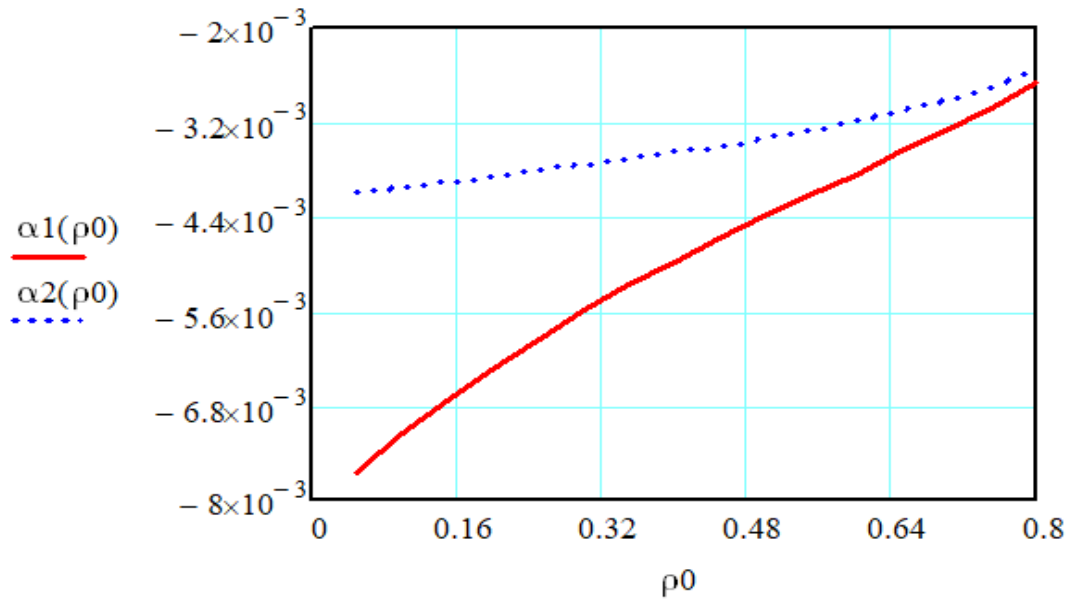
(б)

Рис.3.8. Зависимость собственных частот (а), коэффициентов затухания (б) трёхслойной вязкой жидкости от глубины средней жидкости h_1 при $h_0 = h_2 = 1.5$

и $\rho_0 = 0.5, \rho_1 = 0.9$.



(a)



(б)

Рис.3.9. Зависимость собственных частот (а), коэффициентов затухания (б) трёхслойной вязкой жидкости от плотности верхней жидкости ρ_0 при

$$h_0 = h_1 = h_2 = 1.5 \text{ и } \rho_1 = 0.92.$$

Таблица 3.1. Численные расчёты собственных частот $\bar{\omega}_{1,2}$, коэффициентов затухания $\bar{\alpha}_{1,2}$ при различных глубинах средней жидкости \bar{h}_1 в безразмерном виде.

r_0 и ρ_2 -характерные размеры.							
$\bar{h}_0 = \bar{h}_2 = 1.5,$							
$\bar{\rho}_0$	$\bar{\rho}_1$	\bar{h}_1	$n = 1, m = 1$				
			ξ_{1n}	$\bar{\alpha}_{1n}$	$\bar{\alpha}_{2n}$	$\bar{\omega}_{1n}$	$\bar{\omega}_{2n}$
0.1	0.5	0.2	1.8412	-0.005548	-0.005921	0.498	1.164
		0.4	1.8412	-0.002903	-0.002714	0.667	1.227
		0.6	1.8412	-0.002223	-0.002118	0.802	1.263
		0.8	1.8412	-0.002057	-0.001978	0.911	1.274
		1	1.8412	-0.002041	-0.001976	0.99	1.27
		1.2	1.8412	-0.002057	-0.002009	1.041	1.260
		1.4	1.8412	-0.002074	-0.002043	1.072	1.252
0.3	0.7	0.2	1.8412	-0.004834	-0.005214	0.359	0.885
		0.4	1.8412	-0.002422	-0.002409	0.477	0.922
		0.6	1.8412	-0.001802	-0.001727	0.564	0.927
		0.8	1.8412	-0.001624	-0.001655	0.63	0.913
		1	1.8412	-0.001583	-0.001608	0.676	0.896
		1.2	1.8412	-0.001584	-0.001601	0.705	0.881
		1.4	1.8412	-0.001594	-0.001604	0.722	0.870
0.5	0.9	0.2	1.8412	-0.004300	-0.004345	0.203	0.696
		0.4	1.8412	-0.002093	-0.002153	0.262	0.733
		0.6	1.8412	-0.001557	-0.001629	0.303	0.740
		0.8	1.8412	-0.001406	-0.001457	0.329	0.736
		1	1.8412	-0.001372	-0.001402	0.345	0.731
		1.2	1.8412	-0.001372	-0.001388	0.354	0.728
		1.4	1.8412	-0.001379	0.001387	0.358	0.726

3.6. Сравнительный анализ полученных результатов с результатами других авторов

Для достоверности полученных результатов, приведём несколько значений коэффициентов затухания, полученных другими авторами.

В работе [112] Черноусько Ф.Л. приведена формула для коэффициента затухания колебаний свободной поверхности жидкости, частично заполняющей цилиндрический сосуд,

$$\operatorname{Re} \lambda_{11} = -\frac{\sqrt{v_2} g A_{11j}}{2\sqrt{2}(\omega_{11})^{3/2}}, \quad (3.127)$$

$$\text{где } A_{11} = \frac{\xi_{11}^2}{r_0^2} \left[\frac{(\xi_{11}^2 + 1)}{\xi_{11}(\xi_{11}^2 - 1)} \operatorname{th}(k_1 H) + \frac{(1 - H/r_0)}{(ch(k_1 H))^2} \right], \quad \omega_{11}^2 = g \frac{\xi_{11}}{r_0} \operatorname{th}(k_1 H). \quad (3.128)$$

В работе [85] Секержа-Зеньковича С.Я. была получена формула для коэффициента затухания поверхности раздела двух жидкостей, полностью заполняющих цилиндрический сосуд,

$$\alpha_{11} = -\frac{(2^{-3} v_2 \omega_{11}^5)^{1/2} I}{g(1 - \rho)}, \quad (3.129)$$

$$\text{где } \rho = \rho_1 / \rho_2, \quad v = v_1 / v_2, \quad I = (\rho \sqrt{v} I_1 + I_2 + \frac{\rho \sqrt{v}}{1 + \rho \sqrt{v}} I_4) I_3^{-1}, \quad k_1 = \xi_{11} / r_0, \quad (3.130)$$

$$I_1 = \frac{\pi (J_{11}(\xi_{11}))^2}{2(\operatorname{sh}(k_1 h_1))^2} \left[\frac{(\xi_{11}^2 + 1)}{2\xi_{11}} (\operatorname{sh} 2(k_1 h_1)) + (\xi_{11}^2 - 1)(1 - h_1 / r_0) \right], \quad (3.131)$$

$$I_2 = \frac{\pi (J_{11}(\xi_{11}))^2}{2(\operatorname{sh}(k_1 h_2))^2} \left[\frac{(\xi_{11}^2 + 1)}{2\xi_{11}} (\operatorname{sh} 2(k_1 h_2)) + (\xi_{11}^2 - 1)(1 - h_2 / r_0) \right], \quad (3.132)$$

$$I_3 = \pi (J_{11}(\xi_{11}))^2 (\xi_{11}^2 - 1) / 2, \quad I_4 = I_3 [(\operatorname{cth} 2(k_1 h_1)) + (\operatorname{cth} 2(k_1 h_2))]^2, \quad (3.133)$$

$$\omega_{11}^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g \xi_n / r_0}{[(\operatorname{cth}(k_1 h_1)) + (\operatorname{cth}(k_1 h_2))]^{-1}}. \quad (3.134)$$

Формула коэффициента затухания для двух жидкостей в цилиндрическом сосуде настоящей работы

$$\gamma_{11} = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g}{2\sqrt{2}(\beta_{21})^{3/2}} (\sqrt{v_2} \rho_2 A_{21} + \sqrt{v_1} \rho_1 A_{11}), \quad (3.135)$$

$$\beta_{21}^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1) g \xi_{11} \operatorname{th}(k_1 h_1)}{(\rho_2 f_{11} + \rho_1) r_0}, \quad f_{1n} = \operatorname{th}(k_n h_1) \operatorname{cth}(k_n h_2), \quad k_1 = \xi_{11} / r_0, \quad (3.136)$$

$$A_{11} = \frac{\xi_{11}^2}{r_0^2 (\rho_1 + f_{11} \rho_2)^2} \left[\frac{(\xi_{11}^2 + 1)}{\xi_{11}(\xi_{11}^2 - 1)} \operatorname{th}(k_1 h_1) + \frac{(1 - h_1 / r_0)}{(ch(k_1 h_1))^2} \right]; \quad (3.137)$$

$$A_{21} = \frac{\xi_j^2 \cdot f_{11}^2}{r_0^2 (\rho_1 + f_{11} \rho_2)^2} \left[\frac{(\xi_{11}^2 + 1)}{\xi_{11} (\xi_{11}^2 - 1)} th(k_1 h_2) + \frac{(1 - h_2 / r_0)}{(ch(k_1 h_2))^2} \right]. \quad (3.138)$$

Harrison W.J. в работе [122] для бесконечного канала, заполненного двумя жидкостями, нижняя из которых имела бесконечную глубину, а другая - конечную глубину h_1 , получил формулу для коэффициента затухания.

$$H_{11} = -k_1^2 \frac{v_1 \rho_1 \cosh(k_1 h_1) + 2(v_2 \rho_2 - v_1 \rho_1) \sinh(k_1 h_1)}{\rho_1 \cosh(k_1 h_1) + (2\rho_2 - \rho_1) \sinh(k_1 h_1)}. \quad (3.139)$$

Для двух вязких жидкостей, имеющих значения плотности и кинематической вязкости $\rho_1 = 1.185 [\text{кг} / \text{м}^3]$, $\nu_2 = 1,51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}$ (воздух), $\rho_2 = 1000 [\text{кг} / \text{м}^3]$, ($\nu_2 = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$) (вода) на рис. (3.10), представлены результаты расчётов коэффициентов затухания, определённых по формулам (3.127), (3.129), (3.139), а также по формуле (3.135), полученной в данной работе, для цилиндрического сосуда радиусом $r_0 = 1 [\text{м}]$.

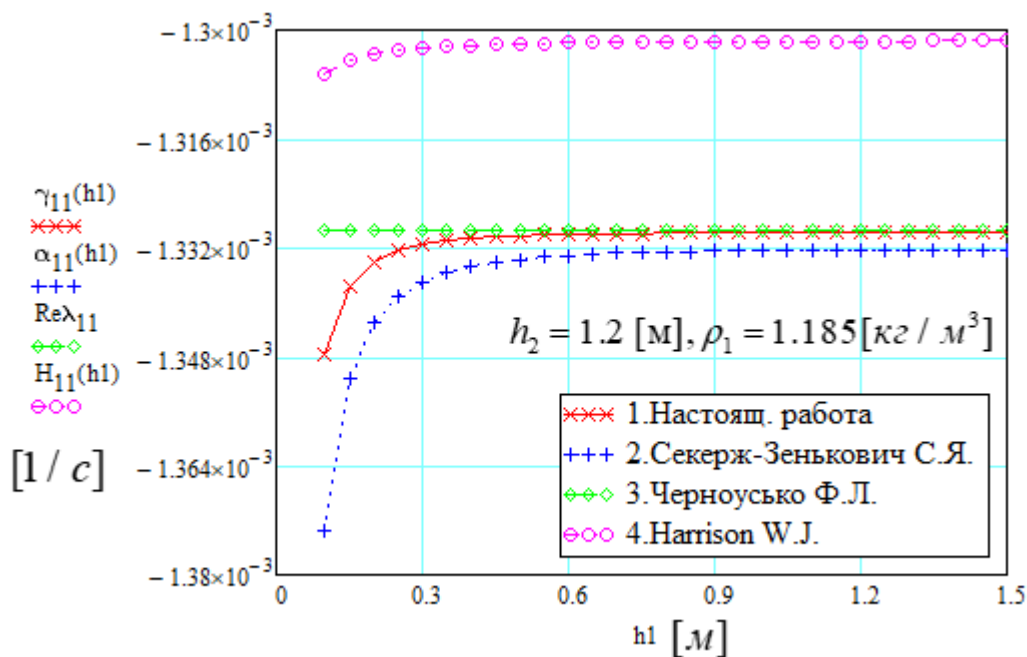


Рис.3.10. Зависимость коэффициентов затухания от глубины верхней жидкости

h_1 при $n = m = 1$.

Для этого же сосуда на рис. (3.11) приведены результаты расчётов

коэффициентов затухания, определённых по вышеуказанным формулам в зависимости плотности верхней жидкости.

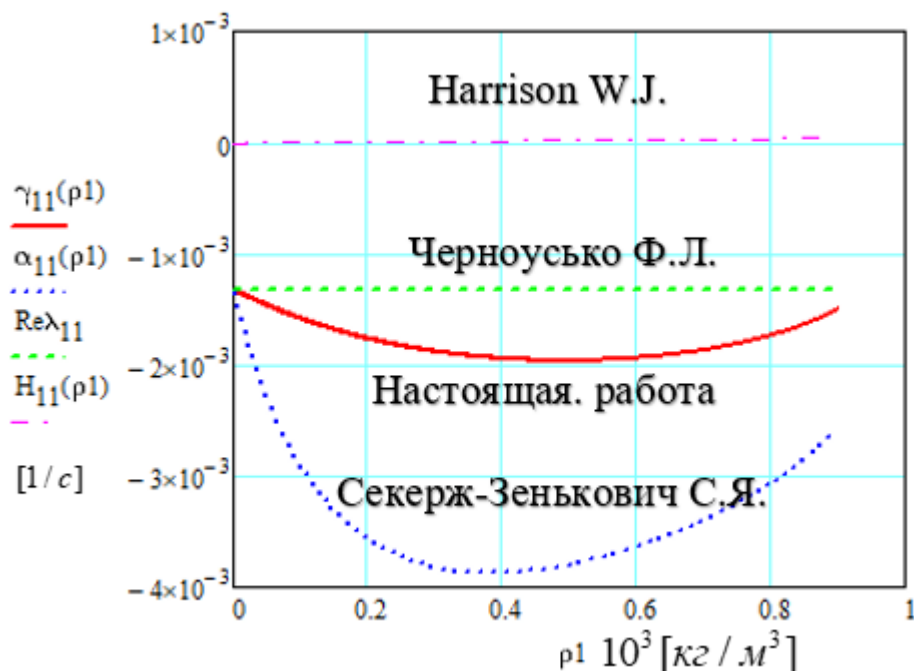


Рис.3.11. Зависимость коэффициентов затухания от плотности верхней жидкости ρ_1 при $n = m = 1, h_1 = h_2 = 1.2$ [м].

Вывод по главе 3

- Разработан метод определения собственных частот асимметричных колебаний на поверхностях раздела вязкой трёхслойной жидкости с использованием механических аналогов колебаний и метода пограничного слоя.
- Коэффициент затухания волновых движений многослойной жидкости всегда больше при прочих равных условиях коэффициента затухания свободной поверхности однородной жидкости.
- Полученные результаты показывают, что при наличии двух поверхностей раздела синфазные колебания имеют меньшие значения коэффициентов затухания, чем колебания, происходящих в противофазе.

ГЛАВА 4. ДИНАМИКА СЛОИСТЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОДВИЖНЫХ ЁМКОСТЯХ

В главе 4 получены уравнения движения твердого тела с полостью, содержащего три несмешивающиеся несжимаемые идеальные жидкости. Приводится постановка задачи о малых колебаниях и устойчивости движения твердого тела, имеющего полость наполненной подобной слоистой жидкостью. Дано решение задачи о собственных и вынужденных колебаниях твердого тела с жидкостями. Исследованы колебания параметрического возбуждения слоистой жидкости в цилиндрическом баке. Для цилиндрической полости с круговым поперечным сечением получены формулы и численные значения для масс и моментов инерции эквивалентного твердого тела, а также приведены результаты численных расчетов областей устойчивости.

4.1. О движении жидкостей в полости подвижного твёрдого тела

4.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим малые движения твёрдого тела, имеющего полость, содержащую три невязкие несмешивающиеся жидкости, полностью заполняющие полость. Введем системы координат $O_i x_i y_i z_i (i=0,1,2)$ с началами координат, расположенных на поверхностях разделов жидкостей и на дне, и систему координат $Oxyz$ с началом в полюсе O (см. рис. 4.1). Обозначим через $\rho_i (i=0,1,2)$ - плотности слоев жидкостей, через $h_i (i=0,1,2)$ – глубины слоев жидкостей. При решении задачи примем допущения о движениях жидкостей, сформулированные в главе II.

Вследствие сделанных допущений малые движения трёх жидкостей могут быть описаны уравнениями Лапласа для потенциалов смещений частиц жидкостей [16].

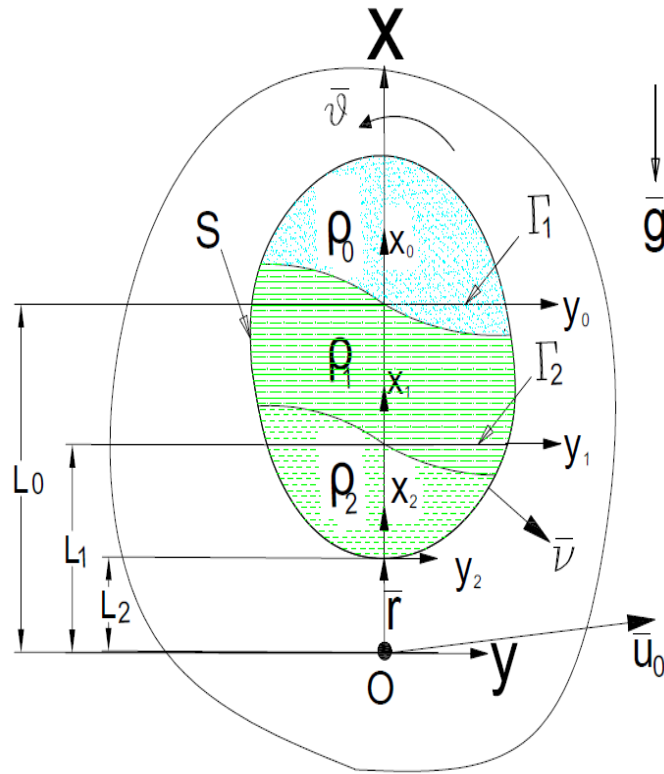


Рис. 4.1. Трёхслойная жидкость, заполняющая сосуд произвольной формы

$$\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial z_i^2} = 0 \text{ на } \Omega_i, (i = 0, 1, 2) \quad (4.1)$$

здесь $\chi_i(x_i, y_i, z_i, t), (i = 0, 1, 2)$ – потенциалы смещений частиц жидкостей, связанные с соответствующими потенциалами скоростей $\Phi_i(x_i, y_i, z_i, t)$, формулами $\Phi_i = \partial \chi_i / \partial t$, поле смещений частиц жидкостей запишется в виде $\vec{w}^{(i)}(x_i, y_i, z_i, t) = \nabla \chi_i$, где ∇ – оператор Гамильтона.

Потенциалы $\chi_i(x_i, y_i, z_i, t), (i = 0, 1, 2)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

а) условиям непротекания на смачиваемых поверхностях

$$\left. \frac{\partial \chi_i}{\partial \nu_i} \right|_{S_i} = \vec{u}_e \cdot \vec{\nu}_i; \text{ на } S_i, \quad (4.2)$$

где $\vec{u}_e = \vec{u}_0 + \vec{\theta} \times \vec{r}$, $\vec{u}_0 = (0, u, 0)$, $\vec{\theta} = (0, 0, \vartheta)$,

б) кинематическим условиям на поверхностях разделов

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial v_0} = \frac{\partial \chi_1}{\partial v_1}; \text{ на } \Gamma_1 \text{ и } \frac{\partial \chi_1}{\partial v_1} = \frac{\partial \chi_2}{\partial v_2}; \Gamma_2, \quad (4.3)$$

в) динамическим условиям на поверхностях разделов

$$\left(\rho_0 \cdot \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial t^2} - \rho_1 \cdot \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} \right) = (\rho_1 - \rho_0) \cdot g \cdot \frac{\partial \chi_0}{\partial v_0}; \text{ на } \Gamma_1, \quad (4.4)$$

$$\left(\rho_1 \cdot \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} - \rho_2 \cdot \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} \right) = (\rho_2 - \rho_1) \cdot g \cdot \frac{\partial \chi_1}{\partial v_1}; \text{ на } \Gamma_2. \quad (4.5)$$

Начальные условия для рассматриваемой задачи не являются необходимыми.

4.1.2. Постановка вспомогательных краевых задач и их решения

Для решения задачи представим потенциалы χ_0 , χ_1 и χ_2 в виде:

$$\chi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{0n}(x_0, y_0, z_0) \sigma_{1n}(t) + \psi_0(x_0, y_0, z_0) \mathcal{G}(t) + \bar{u}_0(t) \cdot \bar{r}_0; \quad (4.6)$$

$$\chi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{11n}(x_1, y_1, z_1) \sigma_{1n}(t) + \varphi_{12n}(x_1, y_1, z_1) \sigma_{2n}(t) + \psi_1(x_1, y_1, z_1) \mathcal{G}(t) + \bar{u}_0(t) \cdot \bar{r}_1; \quad (4.7)$$

$$\chi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{2n}(x_2, y_2, z_2) \sigma_{2n}(t) + \psi_2(x_2, y_2, z_2) \mathcal{G}(t) + \bar{u}_0(t) \cdot \bar{r}_2; \quad (4.8)$$

где $\sigma_{1n}(t)$ и $\sigma_{2n}(t)$ - функции, описывающие волновые движения поверхностей разделов и $\mathcal{G}(t)$ - обобщенная координата, описывающая вращательное движение твёрдого тела относительно полюса O. $\bar{u}_0(t) = (\bar{u}_x, \bar{u}_y)$ - обобщенные координаты, соответствующие поступательному движению твёрдого тела.

Потенциалы $\varphi_{0n}, \varphi_{11n}, \varphi_{12n}, \varphi_{2n}$ являются решениями краевых задач о колебаниях жидкостей в неподвижном баке и удовлетворяющие граничным условиям на смачиваемых поверхностях S_{ii} ,

$$\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_i} \right|_{S_i} = 0, \text{ на } S_i, (i=0,1,2), \quad (4.9)$$

потенциалы $\varphi_{0n}, \varphi_{11n}, \varphi_{12n}, \varphi_{2n}$ были определены ранее и приведены в гл. II.

Потенциалы ψ_0, ψ_1, ψ_2 являются решениями следующих краевых задач,

$$\Delta \psi_i = 0 \text{ на } \Omega_i, \left. \frac{\partial \psi_i}{\partial v_i} \right|_{S_i} = (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \cdot \vec{e}_{i3}; \text{ на } S_i, (i=0,1,2), \quad (4.10)$$

и определяются, как было предложено Н. Е. Жуковским, а векторы \vec{r}_i имеют начало в точке О, $\vec{r}_i = (L_i + x_i)\vec{e}_{i1} + y_i\vec{e}_{i2} + z_i\vec{e}_{i3}$, \vec{e}_{i3} - единичные векторы, перпендикулярные к плоскости движения.

Выполняя все граничные условия на смачиваемых поверхностях и поверхностях разделов, получаем выражения для потенциалов Н. Е. Жуковского ψ_0 , ψ_1 и ψ_2 , которые подставим в выражения (4.6), (4.7) и (4.8). Полученные решения для потенциалов χ_0 , χ_1 и χ_2 подставим в граничные условия (4.4) и (4.5), помножим полученное выражение на функцию $\partial \varphi_m / \partial v_i$ и проинтегрируем по площадям поверхностей разделов Γ_1 и Γ_2 . В результате получим уравнения движения для обобщенных координат $\sigma_{1n}(t)$ и $\sigma_{2n}(t)$ колебаний на поверхностях разделов.

$$\mu_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} + C_{1n} \sigma_{1n} + \lambda_{1n\vartheta} \ddot{\vartheta} + \lambda_{1n\sigma_2} \ddot{\sigma}_{2n} + \lambda_{1n\varrho} \ddot{\varrho} + \lambda_{1nu} \ddot{u} = 0, (n=1,2,3,...); \quad (4.11)$$

$$\mu_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} + C_{2n} \sigma_{2n} + \lambda_{2n\vartheta} \ddot{\vartheta} + \lambda_{2n\sigma_1} \ddot{\sigma}_{1n} + \lambda_{2n\varrho} \ddot{\varrho} + \lambda_{2nu} \ddot{u} = 0, (n=1,2,3,...); \quad (4.12)$$

где μ_{1n} , μ_{2n} , C_{1n} , C_{2n} , $\lambda_{1n\vartheta}$, $\lambda_{2n\vartheta}$, $\lambda_{1n\sigma_2}$, $\lambda_{2n\sigma_1}$, $\lambda_{1n\varrho}$, $\lambda_{2n\varrho}$, λ_{1nu} , λ_{2nu} - гидродинамические коэффициенты, определяемые формулами,

$$\mu_{1n} = \int_{\Gamma_1} \left. \frac{\partial \varphi_{0n}(x_0, y, z)}{\partial v_0} \right|_{x_0=0} \left(\rho_0 \varphi_{0n}(x_0, y, z) \Big|_{x_0=0} + \rho_1 \varphi_{11n}(x_1, y, z) \Big|_{x_1=h_1} \right) d\Gamma_1, \quad (4.13)$$

$$\mu_{2n} = \int_{\Gamma_2} \left. \frac{\partial \varphi_{11n}(x_1, y, z)}{\partial v_1} \right|_{x_1=0} \left(\rho_1 \varphi_{12n}(x_1, y, z) \Big|_{x_1=0} + \rho_2 \varphi_{2n}(x_2, y, z) \Big|_{x_2=h_2} \right) d\Gamma_2, \quad (4.14)$$

$$C_{1n} = \int_{\Gamma_1} (\rho_0 - \rho_1) g \left(\left. \frac{\partial \varphi_{0n}(x_0, y, z)}{\partial v_1} \right|_{x_0=0} \right)^2 d\Gamma_1, \quad (4.15)$$

$$C_{2n} = \int_{\Gamma_2} (\rho_1 - \rho_2) g \left. \frac{\partial \varphi_{12n}(x_1, y, z)}{\partial v_2} \right|_{x_1=0} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_{11n}(x_1, y, z)}{\partial v_1} \right|_{x_1=0} d\Gamma_2, \quad (4.16)$$

$$\lambda_{1n\ddot{g}} = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \varphi_{0n}(x_0, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_0=0} \left(\rho_0 \psi_0(x_0, y, z) \Big|_{x_0=0} + \rho_1 \psi_1(x_1, y, z) \Big|_{x_1=h_1} \right) d\Gamma_1, \quad (4.17)$$

$$\lambda_{2n\ddot{g}} = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \varphi_{11n}(x_1, y, z)}{\partial v_1} \Big|_{x_1=0} \left(\rho_1 \psi_1(x_1, y, z) \Big|_{x_1=0} + \rho_2 \psi_2(x_2, y, z) \Big|_{x_2=h_2} \right) d\Gamma_2, \quad (4.18)$$

$$\lambda_{1n\ddot{\sigma}_2} = \int_{\Gamma_1} \rho_1 \varphi_{12n}(x_1, y, z) \Big|_{x_1=h_1} \frac{\partial \varphi_{0n}(x_0, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_0=0} d\Gamma_1, \quad (4.19)$$

$$\lambda_{2n\ddot{\sigma}_1} = \int_{\Gamma_2} \rho_1 \varphi_{11n}(x_1, y, z) \Big|_{x_1=0} \frac{\partial \varphi_{11n}(x_1, y, z)}{\partial v_1} \Big|_{x_1=0} d\Gamma_2,$$

$$\lambda_{1n\ddot{u}} = \int_{\Gamma_1} (\rho_0 - \rho_1) r_{\Gamma_1} \frac{\partial \varphi_{0n}(x_0, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_0=0} d\Gamma_1, \lambda_{2n\ddot{u}} = \int_{\Gamma_2} (\rho_1 - \rho_2) r_{\Gamma_2} \frac{\partial \varphi_{11n}(x_1, y, z)}{\partial v_1} \Big|_{x_1=0} d\Gamma_2, \quad (4.20)$$

где \vec{r}_{Γ_1} и \vec{r}_{Γ_2} - радиус – векторы, принимающие значения на поверхностях Γ_1 и Γ_2 .

$$\lambda_{1n\dot{g}} = \int_{\Gamma_1} (\rho_0 - \rho_1) g \frac{\partial \psi_0(x_0, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_0=0} \frac{\partial \varphi_{0n}(x_0, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_0=0} d\Gamma_1, \quad (4.21)$$

$$\lambda_{2n\dot{g}} = \int_{\Gamma_2} (\rho_1 - \rho_2) g \frac{\partial \psi_0(x_0, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_0=0} \frac{\partial \varphi_{11n}(x_1, y, z)}{\partial v_0} \Big|_{x_1=0} d\Gamma_2. \quad (4.22)$$

4.1.3. Вывод уравнения движения твердого тела с полостью, содержащей три жидкости

Для составления уравнений движения твердого тела с жидкостями воспользуемся теоремами об изменении количества движения и об изменении момента количества относительного движения материальной системы твёрдое тело – жидкость, записанными в виде,

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{(e)}, \quad (4.23)$$

$$\frac{d\vec{K}_o}{dt} = \vec{M}_o^{(e)} + \vec{r}_{кц} \times m_{кц} \delta \vec{g} + \vec{M}_o (-M\ddot{u}) + \delta(\vec{r}_{0c} \times m_0 \vec{g}) + \delta(\vec{r}_{1c} \times m_1 \vec{g}) + \delta(\vec{r}_{2c} \times m_2 \vec{g})$$

где \vec{Q} - количество движения рассматриваемой механической системы в локально неподвижной системе отсчёта

$$\vec{Q} = M \dot{\vec{u}} + M \dot{\vec{r}}_c + m_0 \delta \dot{\vec{r}}_{c0} + m_1 \delta \dot{\vec{r}}_{c1} + m_2 \delta \dot{\vec{r}}_{c2}, \quad (4.24)$$

\vec{K}_o -момент количеств относительного движения тела с жидкостью в связанной системе отсчёта $Oxyz$.

$$\vec{K}_o = J_k \cdot \dot{\vec{\theta}} + \rho_0 \int_{\tau_0} \vec{r}_0 \times \nabla \frac{\partial \chi_0}{\partial t} d\tau_0 + \rho_1 \int_{\tau_1} \vec{r}_1 \times \nabla \frac{\partial \chi_1}{\partial t} d\tau_1 + \rho_2 \int_{\tau_2} \vec{r}_2 \times \nabla \frac{\partial \chi_2}{\partial t} d\tau_2, \quad (4.25)$$

где $M = m_k + m_0 + m_1 + m_2$ - масса твёрдого тела и жидкостей соответственно, $\vec{S} = M \cdot \vec{x}_c$ - вектор статического момента всей гидромеханической системы, $\vec{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$ - радиус вектор центра масс твёрдого тела и затвердевших жидкостей, \vec{r}_{ki} - радиус вектор центра масс твёрдого тела, $\vec{F}^{(e)}$ - главный вектор всех внешних сил приложенных к телу, $M_o^{(e)}$ - главный момент всех внешних сил относительно полюса O , $\vec{M}_o(-M\ddot{\vec{u}})$ - момент сил инерции относительно полюса, J_k - тензор моментов инерции твёрдого тела относительно полюса O .

В уравнении (4.24) $\delta \vec{r}_{Ci}$ - изменения положения центра масс каждой жидкости в возмущённом движении, определяемые формулами ($i = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_{Ci} &= \frac{\rho_i \int_{\tau_i} \delta \vec{r}_i d\tau_i}{m_i} = \frac{\rho_i \int_{\tau_i} \vec{w}_i^{(r)} d\tau_i}{m_i} = \frac{\rho_i \int_{\tau_i} \vec{w}_i^{(r)} \cdot \nabla \vec{r}_i d\tau_i}{m_i} = \frac{\rho_i \int_{\tau_i} \nabla \cdot (\vec{r}_i \vec{w}_i^{(r)}) d\tau_i}{m_i} = \\ &= \frac{\rho_i \oint_{S_i \cup \Gamma_{1,2}} \vec{r}_i w_v^{(r)} dS_i}{m_i} = \frac{\rho_i \int_{\Gamma_{1,2}} \vec{r}_i w_v^{(r)} d\Gamma_{1,2}}{m_i}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$\vec{w}_i^{(r)}$ - вектор относительного смещения частиц i -ой жидкости

$$\vec{w}_i^{(r)} = \nabla \chi_i - \vec{\theta} \times \vec{r}_i = \nabla (\vec{\theta} \cdot \vec{\psi}_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{1,2n} \nabla \varphi_{in}^{(k)}(x_i, y, z) - \vec{\theta} \times \vec{r}_i. \quad (4.27)$$

Подставив $\vec{w}_i^{(r)}$ в выражение для $\delta \vec{r}_{Ci}$, и принимая во внимание условия жёсткой крышки и малость колебаний, получим выражение для вектора количества движения рассматриваемой гидромеханической системы.

$$\begin{aligned} \vec{Q} = & M \dot{\vec{u}} + M \dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_c + \rho_0 \int \sum_{\Gamma_1}^{\infty} \vec{r}_0 \dot{\sigma}_{1n}(t) \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial v_0} d\Gamma_1 + \rho_1 \int \sum_{\Gamma_1}^{\infty} \vec{r}_1 \dot{\sigma}_{1n}(t) \frac{\partial \varphi_{11n}}{\partial v_1} d\Gamma_1 \\ & + \rho_1 \int \sum_{\Gamma_2}^{\infty} \vec{r}_1 \dot{\sigma}_{2n}(t) \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial v_1} d\Gamma_2 + \rho_2 \int \sum_{\Gamma_2}^{\infty} \vec{r}_2 \dot{\sigma}_{2n}(t) \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Используя теорему об изменении количества движения, окончательно получим

$$M \ddot{\vec{u}} + \ddot{\vec{\theta}} \times \vec{S} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\lambda}_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} = \vec{F}^{(e)}, \vec{S} = M \vec{r}_c, \quad (4.29)$$

$$\vec{\lambda}_{1n} = \rho_0 \int_{\Gamma_1} \vec{r}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial v_0} d\Gamma_1 - \rho_1 \int_{\Gamma_1} \vec{r}_1 \frac{\partial \varphi_{11n}}{\partial v_1} d\Gamma_1 = \vec{\lambda}_{1ni}, \quad (4.30)$$

$$\vec{\lambda}_{2n} = \rho_1 \int_{\Gamma_2} \vec{r}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial v_1} d\Gamma_2 - \rho_2 \int_{\Gamma_2} \vec{r}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 = \vec{\lambda}_{2ni}, \quad (4.31)$$

так как на поверхностях разделов Γ_1, Γ_2 векторы \vec{r}_0, \vec{r}_1 и \vec{r}_2 принимают значения \vec{r}_{Γ_1} и \vec{r}_{Γ_2} соответственно и выполняются кинематические соотношения в работе [16].

В уравнении (4.29) принято, что в условиях малых колебаний,

$$\dot{\vec{r}}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{r}_c}{dt} + \dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_c = \dot{\vec{\theta}} \times \vec{r}_c, \text{ т.к. } \frac{\tilde{d}\vec{r}_c}{dt} = 0. \quad (4.32)$$

Преобразуем выражение для кинетического момента. Используя представление для потенциалов $\chi_i(x_i, y, z, t)$, формулы Грина и принимая во внимание граничные условия (4.4) и (4.5), получим

$$\begin{aligned} \rho_0 \int_{\tau_0} \vec{r}_0 \times \nabla \frac{\partial \chi_0}{\partial t} d\tau_0 &= \rho_0 \oint_{S_0} \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 \frac{\partial \chi_0}{\partial t} dS_0 = \rho_0 \oint_{S_0} \frac{\partial \vec{\psi}_0}{\partial v_0} \frac{\partial \chi_0}{\partial t} dS_0 = \\ &= \rho_0 \int_{S_0} \frac{\partial \vec{\psi}_0}{\partial v_0} (\vec{\psi}_0 \cdot \dot{\vec{\theta}}) dS_0 + \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_0} \dot{\sigma}_{1n} \vec{\psi}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial v_0} d\Gamma_1 = J_0 \cdot \dot{\vec{\theta}} + \rho_0 \dot{\sigma}_{1n} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_0} \vec{\psi}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial v_0} d\Gamma_1, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_{\tau_1} \vec{r}_1 \times \nabla \frac{\partial \chi_1}{\partial t} d\tau_1 &= \rho_1 \oint_{S_1} \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial t} dS_1 = \rho_1 \oint_{S_1} \frac{\partial \vec{\psi}_1}{\partial v_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial t} dS_1 = \\ &= \rho_1 \int_{S_1} \frac{\partial \vec{\psi}_1}{\partial v_1} (\vec{\psi}_1 \cdot \dot{\vec{\theta}}) dS_1 + \rho_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_1} \dot{\sigma}_{1n} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{11n}}{\partial v_1} d\Gamma_1 + \rho_1 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_2} \dot{\sigma}_{2n} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 = \\ &= J_1 \cdot \dot{\vec{\theta}} + \rho_1 \dot{\sigma}_{1n} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_1} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{11n}}{\partial v_1} d\Gamma_1 + \rho_1 \dot{\sigma}_{2n} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_2} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial v_2} d\Gamma_2, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
\rho_2 \int_{\tau_2} \vec{r}_2 \times \nabla \frac{\partial \chi_2}{\partial t} d\tau_2 &= \rho_2 \oint_{S_2} \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial t} dS_2 = \rho_2 \oint_{S_2} \frac{\partial \vec{\psi}_2}{\partial v_2} \frac{\partial \chi_2}{\partial t} dS_2 = \\
&= \rho_2 \int_{S_0} \frac{\partial \vec{\psi}_2}{\partial v_2} (\vec{\psi}_2 \cdot \dot{\vec{\theta}}) dS_2 + \rho_2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_2} \dot{\sigma}_{2n} \vec{\psi}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 = J_2 \cdot \dot{\vec{\theta}} + \rho_2 \dot{\sigma}_{2n} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_2} \vec{\psi}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial v_2} d\Gamma_2,
\end{aligned} \quad (4.35)$$

где J_i ($i=0,1,2$) - тензоры присоединённых моментов инерции i -ой жидкости относительно полюса O , которые с учётом граничного условия “жесткой” крышки совпадают с тензорами моментов инерции эквивалентного тела. Для получения момента сил инерции и момента сил давления со стороны жидкости преобразуем выражение в правой части (4.23).

Используя выражения (4.25), (4.27), (4.33), (4.34) и (4.35) преобразуем уравнение изменения момента количества движения. В результате уравнение вращательного движения твердого с полостью, наполненной тремя жидкостями, принимает вид

$$\begin{aligned}
\left(J_k + \sum_{i=0}^2 (J_i + \sum_{n=1}^{\infty} J_{in}) \right) \cdot \ddot{\vec{\theta}} + g(\vec{S} \times \vec{\theta}) + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\gamma}_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} + g \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\gamma}_{1n}^* \sigma_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\gamma}_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} + \\
+ g \sum_{n=1}^{\infty} \vec{\gamma}_{2n}^* \sigma_{2n} + \vec{S} \times \ddot{\vec{u}} = \vec{M}_o^{(e)};
\end{aligned} \quad (4.36)$$

где

$$\vec{\gamma}_{1n} = \rho_0 \int_{\Gamma_0} \vec{\psi}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial v_0} d\Gamma_1 + \rho_1 \int_{\Gamma_1} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{11n}}{\partial v_1} d\Gamma_1, \vec{\gamma}_{2n} = \rho_1 \int_{\Gamma_2} \vec{\psi}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 + \rho_2 \int_{\Gamma_2} \vec{\psi}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial v_2} d\Gamma_2, \quad (4.37)$$

$$\vec{\gamma}_{1n}^* = \rho_0 \int_{\Gamma_1} \vec{r}_0 \frac{\partial \varphi_{0n}}{\partial v_0} d\Gamma_1 + \rho_1 \int_{\Gamma_1} \vec{r}_1 \frac{\partial \varphi_{11n}}{\partial v_1} d\Gamma_1, \vec{\gamma}_{2n}^* = \rho_2 \int_{\Gamma_2} \vec{r}_2 \frac{\partial \varphi_{2n}}{\partial v_2} d\Gamma_2 + \rho_1 \int_{\Gamma_2} \vec{r}_1 \frac{\partial \varphi_{12n}}{\partial v_2} d\Gamma_2. \quad (4.38)$$

4.2. Параметрические колебания слоистых жидкостей в цилиндрическом баке

4.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим малые колебания слоев несжимаемых идеальных жидкостей, заполняющих полностью объём подвижного цилиндрического сосуда. Пусть сосуд совершает гармонические колебания по закону $s = s_0 \cos pt$ в направлении, параллельном вектору ускорения свободного падения \vec{g} . Введём подвижные

цилиндрические системы координат $O_i x_i r \eta (i = 0, 1, 2)$ с началами координат, расположенных на поверхностях разделов жидкостей и на дне (см. рис. 4.2). Воспользуемся принципом Даламбера и мысленно остановим цилиндрический сосуд, приложив к каждой частице жидкости силы инерции $\rho_i \ddot{s} (i = 0, 1, 2)$. Тогда на каждую частицу будет действовать объёмные силы $\rho_i g(t)$, $g(t) = g + \ddot{s}(t)$, $(i = 0, 1, 2)$. Обозначим через $h_i (i = 0, 1, 2)$ глубину каждого слоя жидкости.

Исследование колебаний трёх жидкостей может быть описано уравнениями Лапласа для потенциалов смещений частиц жидкостей в цилиндрической системе координат [83].

$$\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_i^2} = 0, \quad (4.39)$$

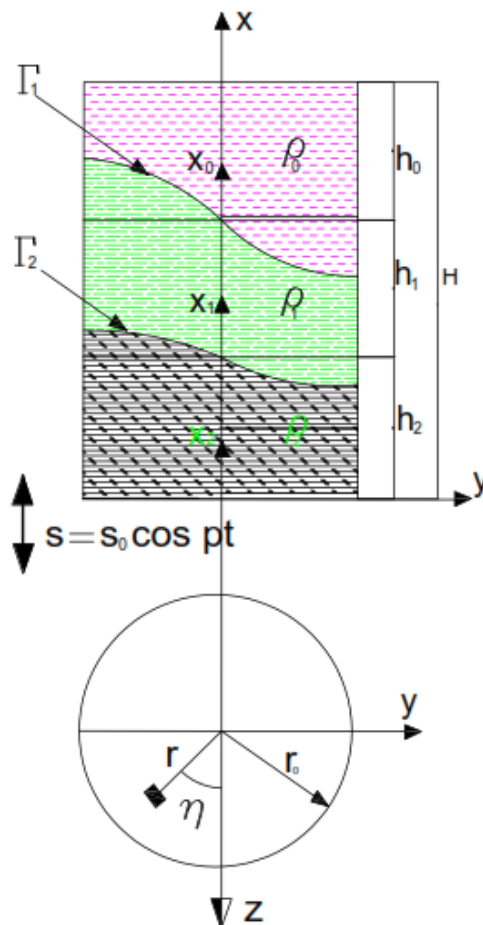


Рис. 4.2. Общий вид цилиндрического сосуда

здесь $\chi_i(x_i, r, \eta, t), (i = 0, 1, 2)$ – потенциалы смещений частиц жидкостей, связанные с соответствующими потенциалами скоростей $\Phi_i(x_i, r, \eta, t)$, формулами $\Phi_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial t}$, а поле смещений частиц жидкостей запишется в виде $\bar{w}^{(i)}(x_i, r, \eta, t) = \nabla \chi_i$,

где ∇ - оператор Гамильтона.

Потенциалы $\chi_i(x_i, r, \eta, t), (i = 0, 1, 2)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

а) условиям непротекания на смачиваемых поверхностях,

$$\left. \frac{\partial \chi_0}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \chi_1}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \chi_2}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \chi_0}{\partial x_0} \right|_{x_0=h_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0; \quad (4.40)$$

б) кинематическим условиям на поверхностях разделов,

$$\left. \frac{\partial \chi_0}{\partial x_0} \right|_{x_0=0} = \left. \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=h_1}; \quad \left. \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = \left. \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=h_2}; \quad (4.41)$$

в) динамическим условиям на поверхностях разделов с учетом поверхностного натяжения жидкостей,

$$\left(\rho_0 \left. \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial t^2} \right|_{x_0=0} - \rho_1 \left. \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} \right|_{x_1=h_1} \right) = \left\{ \begin{array}{l} (\rho_1 - \rho_0) g(t) - \\ -\alpha_1 \left(\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \eta^2} \right) \end{array} \right\} \left. \frac{\partial \chi_0}{\partial x_0} \right|_{x_0=0}, \quad (4.42)$$

$$\left(\rho_1 \left. \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} \right|_{x_1=0} - \rho_2 \left. \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} \right|_{x_2=h_2} \right) = \left\{ \begin{array}{l} (\rho_2 - \rho_1) g(t) - \\ -\alpha_2 \left(\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \eta^2} \right) \end{array} \right\} \left. \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} \right|_{x_1=0}, \quad (4.43)$$

где $g(t) = g + \ddot{s}$, $s = s_0 \cos pt$, s_0 - амплитуда колебаний бака, p - частота колебаний бака, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$.

4.2.2. Постановка вспомогательных краевых задач и их решения

Для решения задачи представим потенциалы χ_0 , χ_1 и χ_2 в виде:

$$\chi_0 = \varphi_0(x_0, r, \eta) \sigma_1(t); \quad \chi_2 = \varphi_2(x_2, r, \eta) \sigma_2(t); \quad (4.44)$$

$$\chi_1 = \varphi_{11}(x_1, r, \eta) \sigma_1(t) + \varphi_{12}(x_1, r, \eta) \sigma_2(t); \quad (4.45)$$

где $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ - функции времени, описывающие волновые движения поверхностей разделов. Потенциалы $\varphi_0, \varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_2$ были определены в главе II, и могут быть записаны в виде [67]

$$\varphi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_m(k_{nm}r)}{J_m(\xi_{nm})} thk_{nm}h_1 \frac{chk_{nm}(x_0 - h_0)}{shk_{nm}h_0} \sin m\eta; \quad (4.46)$$

$$\varphi_{11} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_m(k_{nm}r)}{J_m(\xi_{nm})} thk_{nm}h_1 \frac{chk_{nm}x_1}{shk_{nm}h_1} \sin m\eta; \quad (4.47)$$

$$\varphi_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_m(k_{nm}r)}{J_m(\xi_{nm})} \frac{chk_{nm}(x_1 - h_1)}{chk_{nm}h_1} \sin m\eta; \quad (4.48)$$

$$\varphi_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_m(k_{nm}r)}{J_m(\xi_{nm})} thk_{nm}h_1 \frac{chk_{nm}x_2}{shk_{nm}h_2} \sin m\eta. \quad (4.49)$$

В уравнениях (4.46)-(4.49) - $J_m(k_{nm}r)$ - функция Бесселя первого рода, порядка m , $k_{nm} = \xi_{nm} / r_0$ ($n = 1, 2, 3, \dots, m = 0, 1, 2, 3, \dots$), ξ_{nm} - n -ый корень производной функции Бесселя порядка m , $dJ_n(\xi) / d\xi = 0$.

Воспользовавшись уравнением Лапласа (4.39), находим оператор Δ_2

$$\Delta_2 = \left[\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial \eta^2} \right] = - \frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_i^2}. \quad (4.50)$$

Чтобы удовлетворять граничным условиям на поверхностях раздела Γ_1 и Γ_2 подставим выражения (4.44) - (4.49) в уравнения (4.42) и (4.43). После несложных преобразований получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{1nm} (\rho_1 + \bar{f}_{0nm} \rho_0) + (1 + \ddot{s}_1 / g) \omega_{1nm}^2 (\rho_1 - \rho_0) \sigma_{1nm} - \frac{\rho_1 \ddot{\sigma}_{2nm}}{chk_{nm}h_1} &= 0; \\ \ddot{\sigma}_{2nm} (\rho_2 \bar{f}_{1nm} + \rho_1) + (1 + \ddot{s}_2 / g) \omega_{2nm}^2 (\rho_2 - \rho_1) \sigma_{2nm} - \frac{\rho_1 \ddot{\sigma}_{1n}}{chk_{nm}h_1} &= 0; \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.51)$$

', $m = 0, 1, 2, \dots$)'

далее при исследовании уравнений (4.51) числа n и m будем считать заданными, и обозначим,

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (\rho_1 + \bar{f}_{0nm}\rho_0), a_{22} = (\rho_2\bar{f}_{1nm} + \rho_1), c_{11} = \omega_{1nm}^2 (\rho_1 - \rho_0), c_{22} = \omega_{2nm}^2 (\rho_2 - \rho_1) \\
a_{12} &= a_{21} = \frac{\rho_1}{chk_{nm}h_1}, \omega_{1nm}^2 = \nu_1 g k_{nm} thk_{nm} h_1, \omega_{2n}^2 = \nu_2 g k_{nm} thk_{nm} h_2, s_1 = s_0 \cos pt / \nu_1 \\
B_1 &= \frac{(\rho_1 - \rho_0)gr_0^2}{\alpha_1}, B_2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1)gr_0^2}{\alpha_2}, \nu_1 = \left(\frac{\xi_{nm}^2}{B_1} + 1\right), \nu_2 = \left(\frac{\xi_{nm}^2}{B_2} + 1\right), s_2 = s_0 \cos pt / \nu_2
\end{aligned} \quad (4.52)$$

где B_1 и B_2 - числа Бонда, α_1 и α_2 - коэффициенты поверхностного натяжения на Γ_1 и Γ_2 .

$$\begin{aligned}
a_{11}\ddot{\sigma}_{1nm} - a_{12}\ddot{\sigma}_{2nm} + (1 + \ddot{s}_1/g)c_{11}\sigma_{1nm} &= 0; \quad (n=1,2,3,\dots, \\
a_{22}\ddot{\sigma}_{2nm} - a_{21}\ddot{\sigma}_{1nm} + (1 + \ddot{s}_2/g)c_{22}\sigma_{2nm} &= 0; \quad m=0,1,2,\dots)
\end{aligned} \quad (4.53)$$

В уравнении (4.53) положим $\ddot{s}_{1,2} = 0$, а $\sigma_{1nm} = A_1 \cdot \sin(\Omega t)$, $\sigma_{2nm} = B_1 \cdot \sin(\Omega t)$ и подставив $\sigma_{1nm}, \sigma_{2nm}$ в уравнения (4.53), получим определитель относительно неизвестных амплитуд A_1 и B_1 . Равенство нулю определителя приводит к частотному уравнению, аналогично полученному в главе II,

$$a \cdot \Omega^4 + b \cdot \Omega^2 + c = 0; \quad (4.54)$$

где
$$a = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \quad b = -(a_{11}a_{22} + a_{22}c_{11}), \quad c = c_{11}c_{22}, \quad (4.55)$$

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (4.56)$$

$\Omega_{1,2}$ - собственные частоты колебаний поверхностей раздела Γ_1, Γ_2 трёхслойной жидкости при заданных числах n и m ($n=1,2,3,\dots, m=0,1,2,3,\dots$). Для определения собственных векторов находим коэффициенты распределения μ_1, μ_2 , характеризующих отношения амплитуд главных колебаний,

$$\frac{B_1}{A_1} = \mu_1 = \frac{(c_{11} - a_{11}\Omega_1^2)}{a_{12}\Omega_1^2}; \quad \frac{B_2}{A_2} = \mu_2 = \frac{(c_{11} - a_{11}\Omega_2^2)}{a_{12}\Omega_2^2}. \quad (4.57)$$

Составим матрицу H , столбцами которой являются собственные векторы

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix}; \quad H^T = \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 \\ 1 & \mu_2 \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Далее делаем замену $(\sigma_1 \ \sigma_2)^T = H \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$; где λ_1 и λ_2 - главные координаты системы для заданных чисел n и m . Помножив слева уравнения (4.53) на транспортированную матрицу H , запишем систему уравнений с учетом параметрического возмущения в виде,

$$H^T A N \ddot{\lambda} + (1 + \ddot{s}_{1,2}/g) H^T C N \lambda = 0; \text{ где } \lambda = (\lambda_1 \ \lambda_2)^T; \quad (4.59)$$

$$\text{где} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.60)$$

В результате получим уравнения параметрических колебаний поверхностей раздела Γ_1, Γ_2 в главных координатах

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\lambda}_1 \\ \ddot{\lambda}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1 + \ddot{s}_1/g)c_1 & 0 \\ 0 & (1 + \ddot{s}_2/g)c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.61)$$

где $(a_1 = a_{11} - \mu_1 a_{21} - \mu_1 a_{12} + \mu_1^2 a_{22}, a_2 = a_{11} - \mu_2 a_{12} - \mu_1 a_{21} + \mu_2^2 a_{22}, c_1 = c_{11} + \mu_1^2 c_{22}, c_2 = c_{11} + \mu_2^2 c_{22})$.

Раскрыв систему уравнений (4.61) для каждой главной координаты при заданных числах n и m получим уравнения

$$\begin{aligned} \lambda_{1nm}'' + \Omega_{1nm}^2 (1 + \ddot{s}_1/g) \lambda_{1nm} &= 0, \Omega_{1nm}^2 = c_{1nm} / a_{1nm}, \\ \lambda_{2nm}'' + \Omega_{2nm}^2 (1 + \ddot{s}_2/g) \lambda_{2nm} &= 0, \Omega_{2nm}^2 = c_{2nm} / a_{2nm}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

каждое уравнение из (4.62) можно рассматривать независимое друг от друга.

Подставив (4.62) $\ddot{s}_1 = -p^2 s_0 \cos pt / \nu_1$ и $\ddot{s}_2 = -p^2 s_0 \cos pt / \nu_2$, и сделав замену переменных, приходим к двум уравнениям Матье,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda_{1nm}}{\partial \tau^2} + (l_{1nm} - 2q_{1nm} \cos(2\tau)) \lambda_{1nm} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \lambda_{2nm}}{\partial \tau^2} + (l_{2nm} - 2q_{2nm} \cos(2\tau)) \lambda_{2nm} &= 0; \end{aligned} \quad (4.63)$$

где

$$l_{1nm} = \frac{4\Omega_{1nm}^2}{p^2}, 2q_{1nm} = \frac{4s_0\Omega_{1nm}^2}{v_1g} = -\frac{4\ddot{s}_1\Omega_{1nm}^2}{gp^2}, \tau = \frac{pt}{2} \quad (4.64)$$

$$l_{2nm} = \frac{4\Omega_{2nm}^2}{p^2}, 2q_{2nm} = \frac{4s_0\Omega_{2nm}^2}{v_2g} = -\frac{4\ddot{s}_2\Omega_{2nm}^2}{gp^2}$$

Положив в уравнение (4.63)

$$\lambda_{1nm} = A_1 \sin \tau + B_1 \cos \tau, \lambda_{2nm} = A_2 \sin \tau + B_2 \cos \tau, \quad (4.65)$$

и приравняв нулю, коэффициенты при $\sin \tau$ и $\cos \tau$, получаем следующие соотношения

$$q_{1nm} = \pm(l_{1nm} - 1), q_{2nm} = \pm(l_{2nm} - 1), \quad (4.66)$$

Подставив в уравнения (4.66) выражения для $q_{1nm}, q_{2nm}, l_{1nm}, l_{2nm}$ (4.64), получаем зависимости

$$s_{01} = \pm \frac{v_1g}{2\Omega_{1nm}^2} \left(4 \frac{\Omega_{1nm}^2}{p^2} - 1 \right) \text{ или } s_{01} = \pm \frac{v_1g}{8\pi^2 f_{1nm}^2} \left(4 \frac{f_{1nm}^2}{f^2} - 1 \right), \quad (4.67)$$

$$s_{02} = \pm \frac{v_2g}{2\Omega_{2nm}^2} \left(4 \frac{\Omega_{2nm}^2}{p^2} - 1 \right) \text{ или } s_{02} = \pm \frac{v_2g}{8\pi^2 f_{2n}^2} \left(4 \frac{f_{2n}^2}{f^2} - 1 \right), \quad (4.68)$$

где $f_{1nm} = \frac{\Omega_{1nm}}{2\pi}, f_{2nm} = \frac{\Omega_{2nm}}{2\pi}, f = \frac{p}{2\pi}$ - частоты, измеряемые в герцах.

4.2.3. Параметрические колебания вязкой слоистой жидкости

Для оценки влияния вязкости на параметрические колебания слоистой жидкости воспользуемся уравнениями колебаний трёх жидкостей (3.74) и запишем приближенные уравнения параметрических колебаний вязких слоев в виде.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\sigma}_{1nm} \\ \ddot{\sigma}_{2nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{1nm} \\ \dot{\sigma}_{2nm} \end{pmatrix} + (1 + \ddot{s}/g) \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{1nm} \\ \sigma_{2nm} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.69)$$

Далее делаем замену $(\sigma_1 \ \sigma_2)^T = H \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$; где λ_1 и λ_2 - главные координаты системы для заданных чисел n и m . Помножив слева уравнения (4.69) на

транспортированную матрицу H , запишем систему уравнений с учетом параметрического возмущения и вязкости в виде,

$$H^T A H \ddot{\lambda} + H^T B H \dot{\lambda} + H^T C H \lambda = 0; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\lambda}_1 \\ \ddot{\lambda}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1 + \ddot{s}_1/g)c_1 & 0 \\ 0 & (1 + \ddot{s}_2/g)c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0; \quad (4.71)$$

($b_1 = b_{11} - \mu_1 b_{21} - \mu_1 b_{12} + \mu_1^2 b_{22}$, $b_2 = b_{11} - \mu_2 b_{12} - \mu_1 b_{21} + \mu_2^2 b_{22}$), коэффициенты μ_1 и μ_2 были определены в гл. III.

$$\begin{aligned} \lambda_{1nm}'' + 2\eta_{1nm} \lambda_{1nm}' + \Omega_{1nm}^2 (1 + \ddot{s}_1/g) \lambda_{1nm} &= 0, \quad \eta_{1nm} = b_{1nm} / 2a_{1nm}, \\ \lambda_{2nm}'' + 2\eta_{2nm} \lambda_{2nm}' + \Omega_{2nm}^2 (1 + \ddot{s}_2/g) \lambda_{2nm} &= 0, \quad \eta_{2nm} = b_{2nm} / 2a_{2nm}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Уравнения (4.72) можно рассматривать независимо друг от друга, и после некоторых преобразований приходим к двум уравнениям Матье,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda_{1nm}}{\partial \tau^2} + \alpha_{1nm} \frac{\partial \lambda_{1nm}}{\partial \tau} + (l_{1nm} - 2q_{1nm} \cos(2\tau)) \lambda_{1nm} &= 0; \alpha_{1nm} = 2\eta_{1nm} / \Omega_{1nm}, \\ \frac{\partial^2 \lambda_{2nm}}{\partial \tau^2} + \alpha_{2nm} \frac{\partial \lambda_{2nm}}{\partial \tau} + (l_{2nm} - 2q_{2nm} \cos(2\tau)) \lambda_{2nm} &= 0; \alpha_{2nm} = 2\eta_{2nm} / \Omega_{2nm} \end{aligned}, \quad (4.73)$$

Для приближенного определения границ между областями устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров q_{nm}, l_{nm} воспользуемся методом гармонического баланса. Так как период изменения параметра в уравнении (4.73) равен π , а рассматриваемое движение имеет период 2π , представим решения уравнения (4.73) в виде ряда

$$\begin{aligned} \lambda_{1nm} &= A_1 \sin \tau + B_1 \cos \tau + A_3 \sin 3\tau + B_3 \cos 3\tau \dots, \\ \lambda_{2nm} &= A_2 \sin \tau + B_2 \cos \tau + A_4 \sin 3\tau + B_4 \cos 3\tau \dots \end{aligned} \quad (4.74a)$$

Ограничиваясь первыми двумя членами и приравняв нулю, коэффициенты при $\sin \tau$ и $\cos \tau$, получаем уравнения для построения границ областей неустойчивости

$$q_{1nm} = \pm(l_{1nm} - 1) + \alpha_{1nm}, \quad q_{2nm} = \pm(l_{2nm} - 1) + \alpha_{2nm}. \quad (4.74)$$

Подставив в уравнения (4.73) выражения для $q_{1nm}, q_{2nm}, l_{1nm}, l_{2nm}$ (4.64), получаем формулы для построения областей неустойчивости

$$s_{01} = \frac{\nu_1 g}{2\Omega_{1nm}^2} \left(\pm \left(4 \frac{\Omega_{1nm}^2}{p^2} - 1 \right) + 2\eta_{1nm} / \Omega_{1nm} \right), s_{02} = \frac{\nu_2 g}{2\Omega_{2nm}^2} \left(\pm \left(4 \frac{\Omega_{2nm}^2}{p^2} - 1 \right) + 2\eta_{2nm} / \Omega_{2nm} \right). \quad (4.75)$$

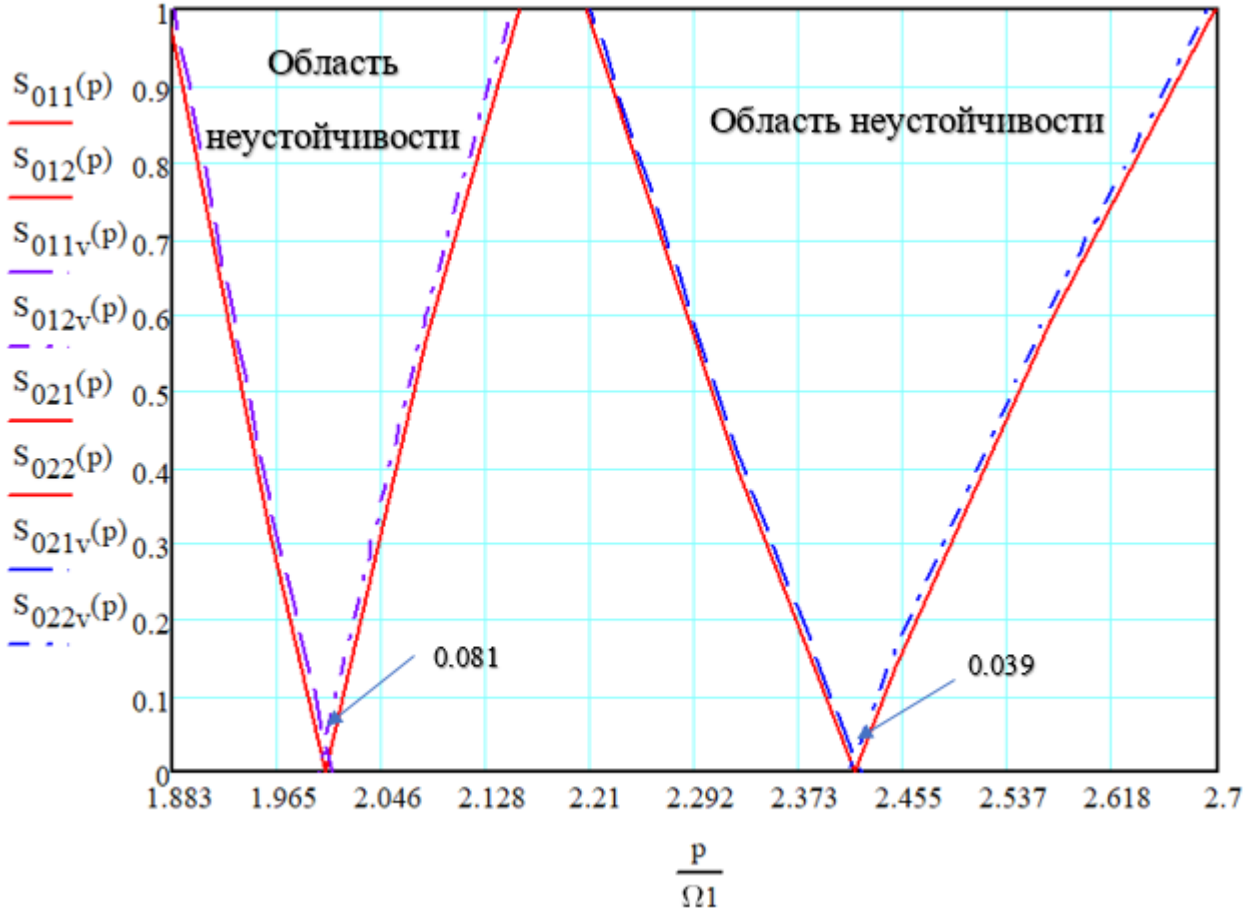


Рис. 4.3. Области неустойчивости трёхслойной жидкости в зависимости амплитуды от частоты возбуждения в безразмерном виде (сплошная линия - идеальная жидкость, пунктирная-вязкая жидкость) для случая ($m = 1$)

Далее рассматриваются области неустойчивости для второго случая ($m = 2$), для идеальной жидкости

$$\begin{aligned} q_{1nm}^{np} &= \sqrt{(l_{1nm} - 4)12/5}, & q_{1nm}^{леб} &= \sqrt{(-l_{1nm} + 4)12}, \\ q_{2nm}^{np} &= \sqrt{(l_{2nm} - 4)12/5}, & q_{2nm}^{леб} &= \sqrt{(-l_{2nm} + 4)12}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

аналогично с учетом вязкости

$$q_{1nm}^{np} = \sqrt{(l_{1nm} - 4)12/5 + \alpha_{1nm}}, \quad q_{1nm}^{леб} = \sqrt{(-l_{1nm} + 4)12 + \alpha_{1nm}}$$

$$q_{2nm}^{np} = \sqrt{(l_{2nm} - 4)12/5 + \alpha_{2nm}}, \quad q_{2nm}^{леб} = \sqrt{(-l_{2nm} + 4)12 + \alpha_{2nm}}. \quad (4.77)$$

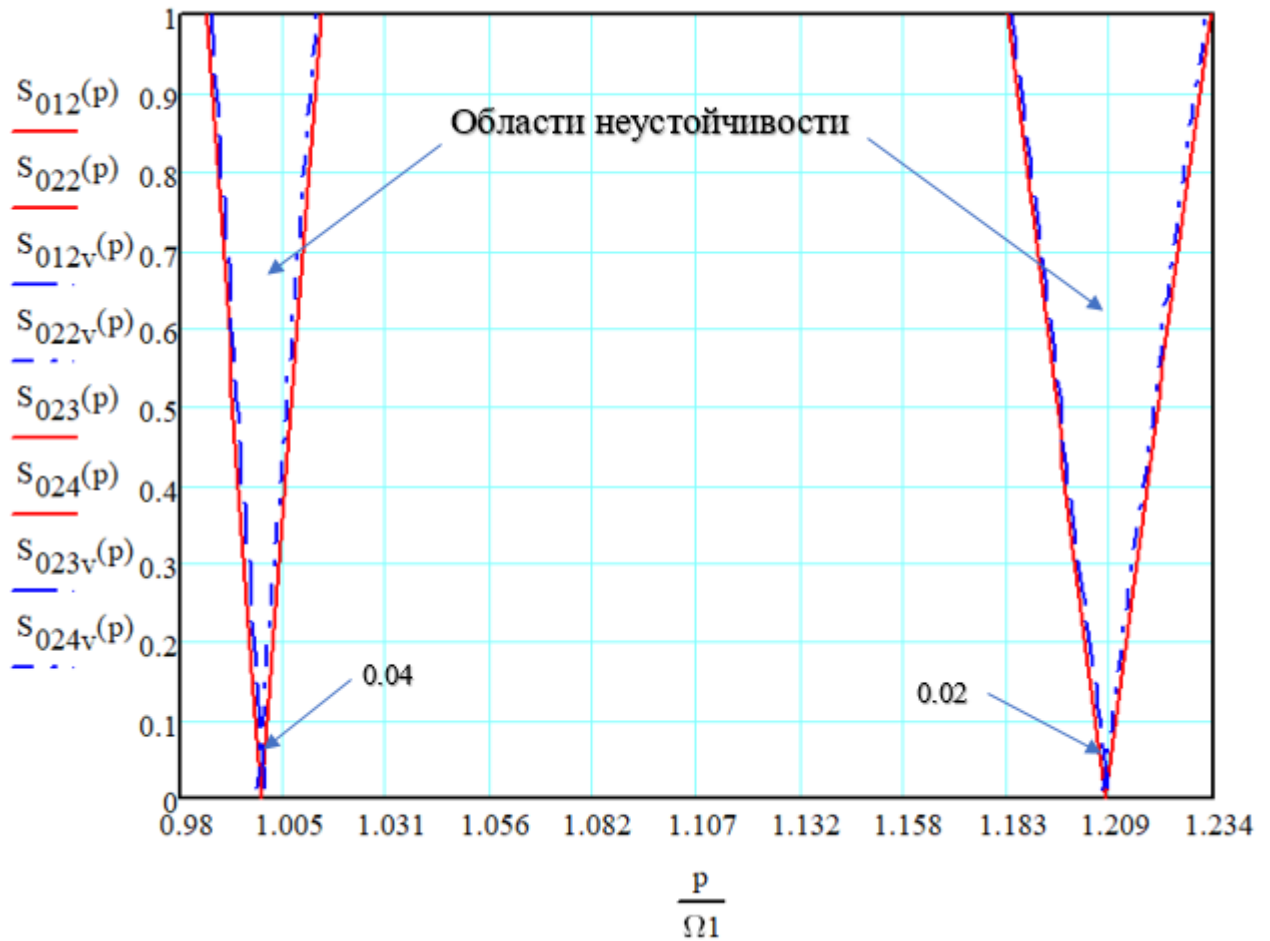


Рис. 4.4. Области неустойчивости трёхслойной жидкости при зависимости амплитуды от частоты возбуждения в безразмерном виде (сплошная линия - идеальная жидкость, пунктирная-вязкая жидкость) для случая ($m = 2$)

4.3. Уравнения движения твердого тела, имеющего цилиндрическую полость, целиком заполненную слоистой жидкостью

4.3.1. Постановка задачи

Рассмотрим твердое тело, совершающее плоское движение, и имеющее цилиндрическую полость. Используя в цилиндрические системы координат $O_i x_i r \eta$ ($i = 0, 1, 2$), получим следующие выражения для потенциалов ψ_i ($i = 0, 1, 2$).

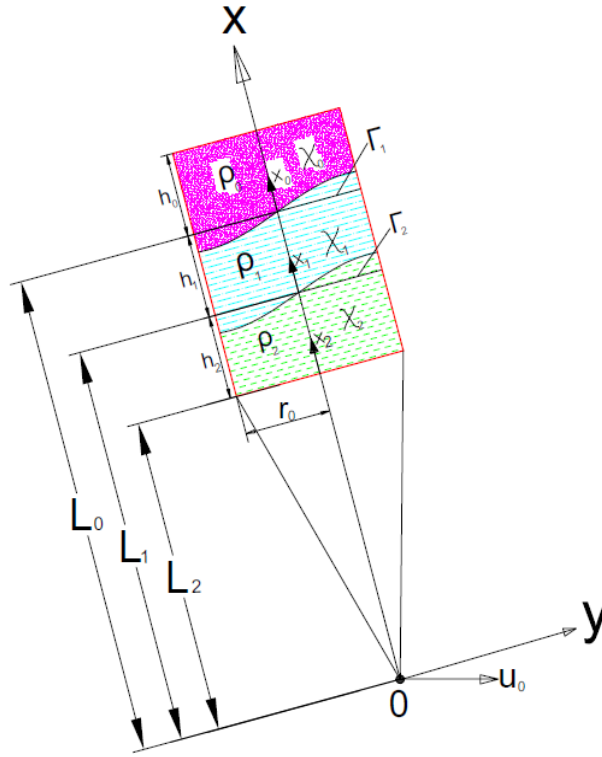


Рис. 4.5. Цилиндрический сосуд, совершающий плоское движение

$$\psi_0 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left[\frac{2}{k_n} \frac{shk_n \left(x_0 - \frac{h_0}{2} \right)}{chk_n \left(\frac{h_0}{2} \right)} - (L_0 + x_0) \right]; \quad (4.78)$$

$$\psi_1 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left[\frac{2}{k_n} \frac{shk_n \left(x_1 - \frac{h_1}{2} \right)}{chk_n \left(\frac{h_1}{2} \right)} - (L_1 + x_1) \right]; \quad (4.79)$$

$$\psi_2 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left[\frac{2}{k_n} \frac{shk_n \left(x_2 - \frac{h_2}{2} \right)}{chk_n \left(\frac{h_2}{2} \right)} - (L_2 + x_2) \right]. \quad (4.80)$$

Подставляя результаты (4.79)-(4.80) в выражения для потенциалов $\chi_i (i = 0, 1, 2)$,

$$\chi_0 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{2}{k_n} \frac{shk_n \left(x_0 - \frac{h_0}{2} \right)}{chk_n \left(\frac{h_0}{2} \right)} - (L_0 + x_0) \right] g(t) + u(t) + \\ + thk_n h_1 \cdot \frac{chk_n (x_0 - h_0)}{shk_n h_0} \sigma_{1n}(t) \end{array} \right\}, \quad (4.81)$$

$$\chi_1 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{2}{k_n} \frac{shk_n \left(x_1 - \frac{h_1}{2} \right)}{chk_n \left(\frac{h_1}{2} \right)} - (L_1 + x_1) \right] \mathcal{G}(t) + u(t) - \\ - thk_n h_1 \cdot \frac{chk_n x_1}{shk_n h_1} \sigma_{1n}(t) + \frac{chk_n (x_1 - h_1)}{chk_n h_1} \sigma_{2n}(t) \end{array} \right\}, \quad (4.82)$$

$$\chi_2 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{2}{k_n} \frac{shk_n \left(x_2 - \frac{h_2}{2} \right)}{chk_n \left(\frac{h_2}{2} \right)} - (L_2 + x_2) \right] \mathcal{G}(t) + \\ + u(t) - thk_n h_1 \cdot \frac{chk_n x_2}{shk_n h_2} \sigma_{2n}(t) \end{array} \right\}. \quad (4.83)$$

Для получения уравнений движения в обобщенных координатах $(u, \mathcal{G}, \sigma_{1n}, \sigma_{2n})$ твердого тела с цилиндрической полостью подставим потенциалы ψ_i и функцию φ_{in} ($i=0,1,2$) в формулы для гидродинамических коэффициентов (4.13)-(4.22), (4.30)-(4.31) и (4.37)-(4.38). После интегрирования получим

$$\mu_{1n} = (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}), \mu_{2n} = (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}), C_{1n} = (m'_{1n} - m'_{0n}) \omega_n^2, \quad (4.84)$$

$$C_{2n} = (m'_{2n} - m'_{1n}) \omega_n^2, \lambda_{1n\ddot{\mathcal{G}}} = L'_{1n}, \lambda_{2n\ddot{\mathcal{G}}} = L'_{2n}, \lambda_{1n\ddot{\sigma}_2} = -\frac{m'_{1n}}{chk_n h_1}, \lambda_{2n\ddot{\sigma}_1} = -\frac{m'_{1n}}{chk_n h_1}, \quad (4.85)$$

$$\lambda_{1n\ddot{u}} = (m'_{1n} - m'_{0n}), \lambda_{2n\ddot{u}} = (m'_{2n} - m'_{1n}), \lambda_{1n\mathcal{G}} = -(m'_{1n} - m'_{0n})g, \lambda_{2n\mathcal{G}} = -(m'_{2n} - m'_{1n})g, \quad (4.86)$$

$$\lambda_{1n} = (m'_{1n} - m'_{0n}), \lambda_{2n} = (m'_{2n} - m'_{1n}), \quad (4.87)$$

$$\gamma_{1n} = (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}) L_{1n}, \gamma_{2n} = (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}) L_{2n}, \quad (4.88)$$

$$\gamma_{1n}^* = -g(m'_{1n} - m'_{0n}), \gamma_{2n}^* = -g(m'_{2n} - m'_{1n}), \quad (4.89)$$

где $m'_{0n} = \rho_0 V, m'_{1n} = \rho_1 V, m'_{2n} = \rho_2 V$ - приведенные массы колеблющихся жидкостей

$$V = \frac{2\pi r_0^3}{\xi_n(\xi_n^2 - 1)} thk_n h_1, \overline{f_{0n}} = thk_n h_1 cthk_n h_0, \overline{f_{1n}} = thk_n h_1 cthk_n h_2, \omega_n^2 = gk_n thk_n h_1, \quad (4.90)$$

$$L'_{1n} = \frac{m'_{1n}(L_0 - \frac{2r_0}{\xi_n} thk_n \frac{h_1}{2}) - m'_{0n}(L_0 + \frac{2r_0}{\xi_n} thk_n \frac{h_0}{2})}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})} \quad (4.91)$$

$$L'_{2n} = \frac{m'_{2n}(L_1 - \frac{2r_0}{\xi_n} thk_n \frac{h_2}{2}) - m'_{1n}(L_1 + \frac{2r_0}{\xi_n} thk_n \frac{h_1}{2})}{(m'_{2n} + m'_{1n} \overline{f_{1n}})}$$

Подставив полученные гидродинамические коэффициенты (4.84)-(4.89), в уравнения движения (4.11), (4.12), и (4.11), (4.12), получим дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела с цилиндрической полостью, заполненной тремя жидкостями,

$$\left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right) \ddot{\mathcal{G}} - Sg \mathcal{G} + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}) L_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} - g \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \sigma_{1n} + \quad (4.92)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}) L_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} - g \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \sigma_{2n} - S \ddot{u} = M_o^{(e)}$$

$$M \ddot{u} - Mx_c \ddot{\mathcal{G}} + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \ddot{\sigma}_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \ddot{\sigma}_{2n} = F_y^{(e)}, \quad (4.93)$$

$$\ddot{\sigma}_{1n} + \frac{(m'_{1n} - m'_{0n}) \omega_n^2 \sigma_{1n}}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})} + L'_{1n} \ddot{\mathcal{G}} - \frac{m'_{1n} \ddot{\sigma}_{2n}}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}) chk_n h_1} - \frac{(m'_{1n} - m'_{0n})}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})} g \mathcal{G} - \quad (4.94)$$

$$- \frac{(m'_{1n} - m'_{0n}) \ddot{u}}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})} = 0$$

$$\ddot{\sigma}_{2n} + \frac{(m'_{2n} - m'_{1n}) \omega_n^2 \sigma_{2n}}{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n})} + L'_{2n} \ddot{\mathcal{G}} - \frac{m'_{1n} \ddot{\sigma}_{1n}}{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}) chk_n h_1} - \frac{(m'_{2n} - m'_{1n})}{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n})} g \mathcal{G} - \quad (4.95)$$

$$- \frac{(m'_{2n} - m'_{1n}) \ddot{u}}{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n})} = 0$$

где

$$I_0 = m_0(L_0^2 + L_0 h_0 + \frac{h_0^2}{3} + \frac{r_0^2}{4}) + m_1(L_1^2 + L_1 h_1 + \frac{h_1^2}{3} + \frac{r_0^2}{4}) + \quad (4.96)$$

$$+ m_2(L_2^2 + L_2 h_2 + \frac{h_2^2}{3} + \frac{r_0^2}{4}) + m_k l_u^2;$$

I_0 - момент инерции затвердевших жидкостей относительно оси, проходящей через точку O , l_u - радиус инерции твердого тела,

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n = \pi r_0^5 \rho_0 \left(-\frac{h_0}{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} thk_n \frac{h_0}{2} \right) + \pi r_0^5 \rho_1 \left(-\frac{h_1}{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} thk_n \frac{h_1}{2} \right) + \pi r_0^5 \rho_2 \left(-\frac{h_2}{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} thk_n \frac{h_2}{2} \right), \quad (4.97)$$

$m_0 = \pi r_0^2 \rho_0 h_0$, $m_1 = \pi r_0^2 \rho_1 h_1$, $m_2 = \pi r_0^2 \rho_2 h_2$ - массы каждой жидкости,

$S = m_0 \left(L_0 + \frac{h_0}{2} \right) + m_1 \left(L_1 + \frac{h_1}{2} \right) + m_2 \left(L_2 + \frac{h_2}{2} \right) + m_k l_u$; - статический момент всей системы,

$M = m_0 + m_1 + m_2 + m_k$; - суммарная масса всей системы.

4.3.2. Вычисление динамических характеристик

Запишем величины J_n , μ_{1n} , μ_{2n} , L'_{1n} и L'_{2n} в безразмерном виде,

$$J_n = \frac{\left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right)}{I_0}, \mu_{1n} = \frac{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})}{M}, \mu_{2n} = \frac{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n})}{M}, L'_{1n} = \frac{L'_{1n}}{r_0}, L'_{2n} = \frac{L'_{2n}}{r_0}, \quad (4.98)$$

J_n - момент инерции эквивалентного тела-тела, состоящего из трех жидкостей, разделенных двумя жесткими перегородками Γ_1 и Γ_2 .

μ_{1n} и μ_{2n} - обобщенные массы жидкостей при колебаниях по n -ому тону и отвечающих верхней и нижней поверхностям разделов жидкостей.

L'_{1n} и L'_{2n} - плеча гидродинамических сил, возникающих при колебаниях верхней и нижней поверхностей разделов жидкостей.

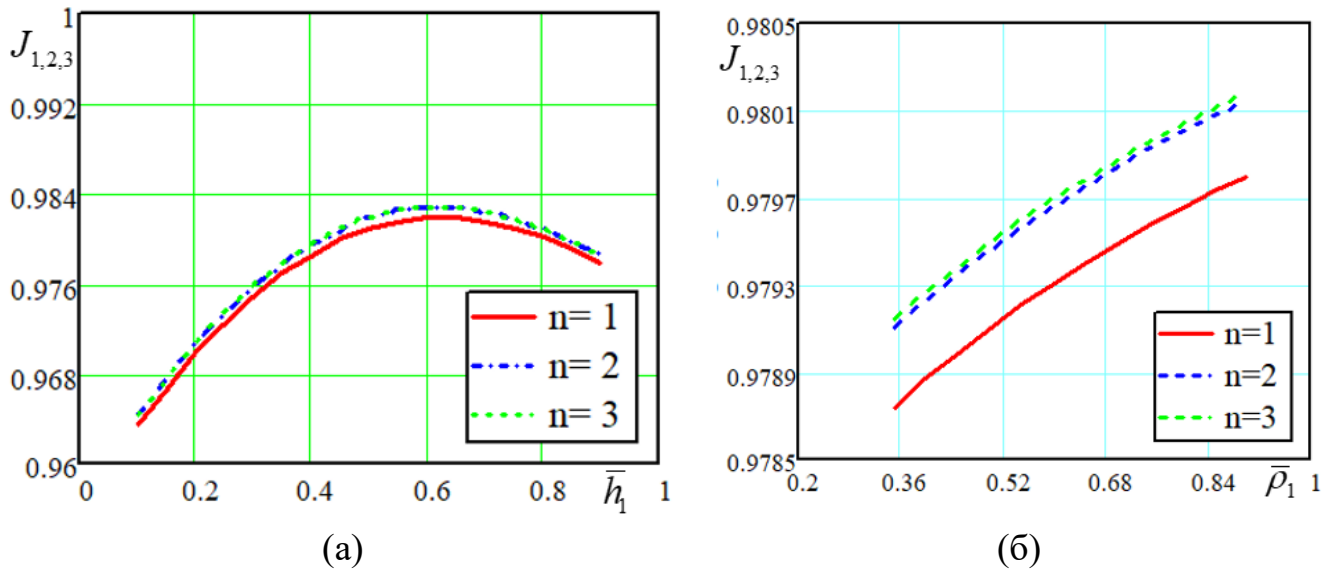


Рис. 4.6. Зависимость моментов инерции эквивалентного тела (а) от глубины средней жидкости для $n=1, 2, 3$, $\bar{\rho}_0 = 0.3, \bar{\rho}_1 = 0.5, \bar{h}_0 = 1, \bar{h}_2 = 1 - \bar{h}_1$, (б) от плотности средней жидкости $\bar{\rho}_2 = 1, \bar{h}_0 = 1, \bar{h}_1 = 1, \bar{h}_2 = 1$.

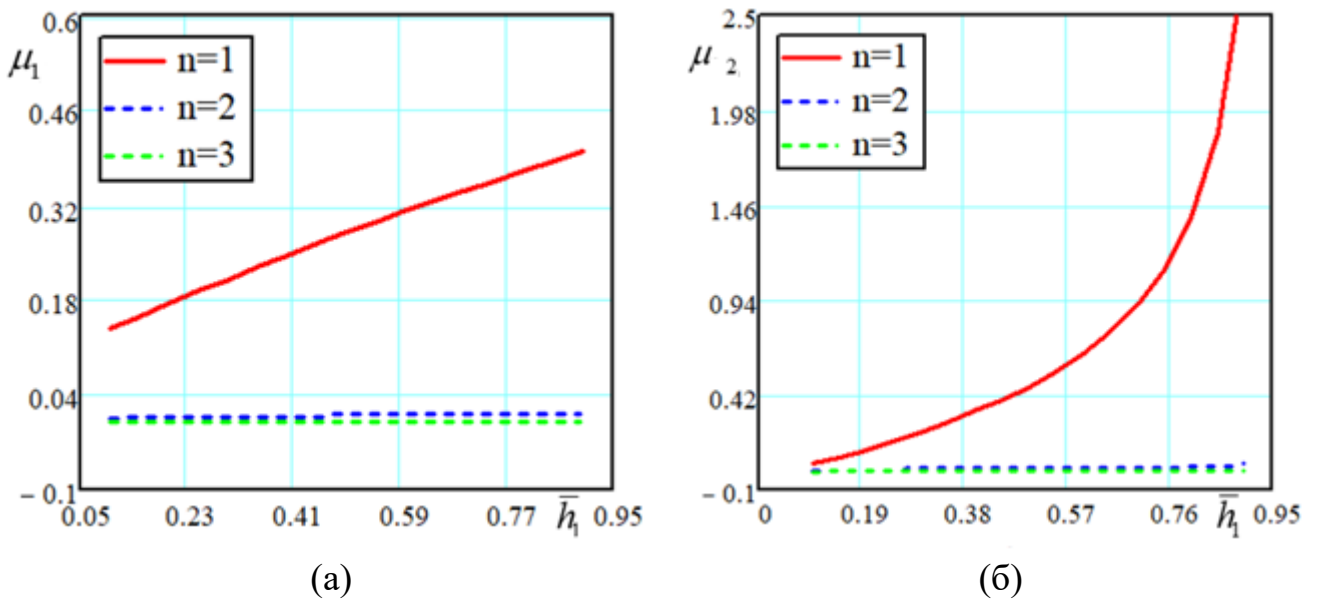


Рис. 4.7. Зависимость обобщенных масс жидкостей Γ_1 (а), Γ_2 (б) от глубины средней жидкости для $n=1, 2, 3$, $\bar{\rho}_0 = 0.3, \bar{\rho}_1 = 0.5, \bar{h}_0 = 1, \bar{h}_2 = 1 - \bar{h}_1$.

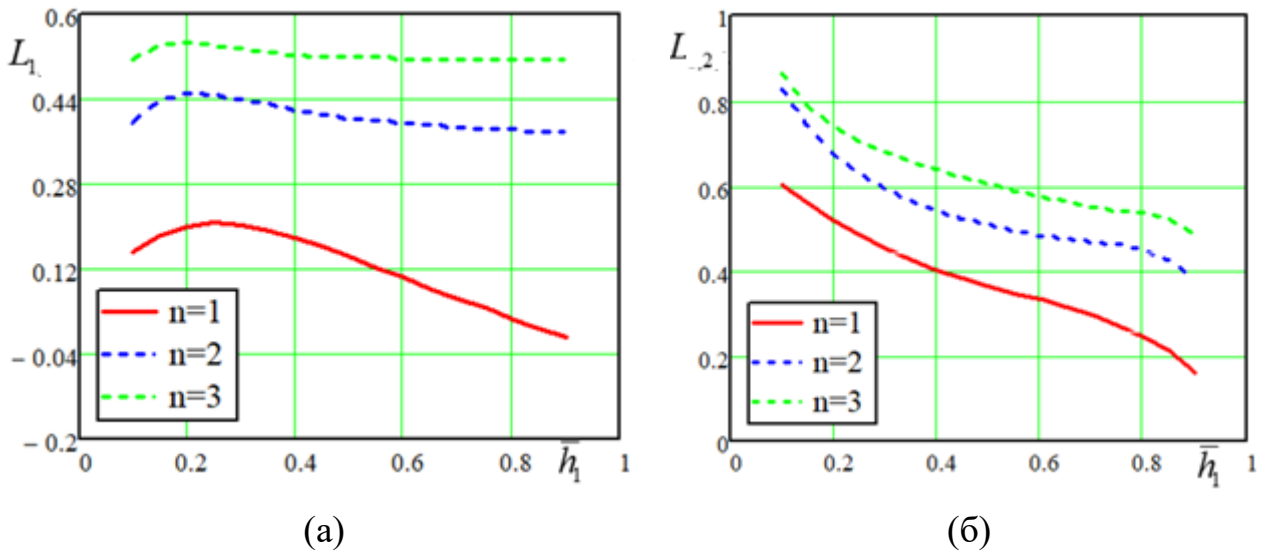


Рис. 4.8. Зависимость плеч гидродинамических сил, возникающих при колебаниях верхней поверхности раздела Γ_1 (а), при колебаниях нижней поверхности раздела Γ_2 (б) от глубины средней жидкости для $n=1, 2, 3$,

$$\bar{\rho}_0 = 0.3, \bar{\rho}_1 = 0.5, \bar{h}_0 = 1, \bar{h}_2 = 1 - \bar{h}_1.$$

4.4. Малые движения твердого тела, имеющего круговую цилиндрическую полость, целиком заполненную слоистой жидкостью

4.4.1. Постановка задачи

Пусть круговой цилиндр радиусом r_0 , полностью наполнен тремя несжимаемыми идеальными жидкостями, имеющими плотности ρ_0, ρ_1, ρ_2 , ($\rho_0 < \rho_1 < \rho_2$) (см. рис. 4.9). Цилиндр закреплен на подвижной платформе общей массой M , способной совершать поступательное движение по горизонтальному гладкому основанию. Предположив, что жидкости, находящиеся в цилиндре, совершают малые смещения, определим основные характеристики движения жидкостей в круговом цилиндре.

Для составления уравнения движения рассматриваемой механической системы воспользуемся уравнениями движения Лагранжа 2-ого рода.

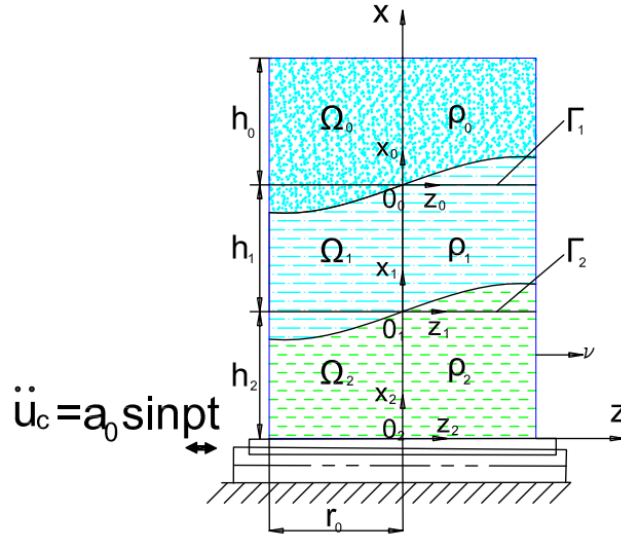


Рис. 4.9. Цилиндрический сосуд слоистой жидкостью, совершающий поступательное движение

Кинетическая энергия рассматриваемой системы может быть записана в виде,

$$T_i = \frac{1}{2} M \dot{u}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \rho_i \iiint_{V_i} (\nabla \Phi_i)^2 dV_i, \quad (4.99)$$

где V_i , Φ_i ($i = 0, 1, 2$) - объёмы и потенциалы абсолютных скоростей жидкостей. При малых движения жидкостей потенциалы скоростей Φ_i могут быть выражены через потенциалы смещения частиц жидкостей.

$$\Phi_i = \frac{\partial \chi_i(x_i, y_i, z_i, t)}{\partial t}, \quad (i = 0, 1, 2). \quad (4.100)$$

Потенциалы смещения χ_i являются решениями краевых задач, удовлетворяющих уравнению Лапласа и граничным условиям:

$$\Delta \chi_i = 0, \quad (i = 0, 1, 2), \quad (4.101)$$

а) условиям непротекания на смачиваемых поверхностях

$$\left. \frac{\partial \chi_i}{\partial \nu_i} \right|_{S_i} = u_c \cdot \sin(\eta); \quad \left. \frac{\partial \chi_0}{\partial x_0} \right|_{x_0=h_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0, \quad (4.102)$$

(ν_i - внешняя нормаль к смачиваемой поверхности S_i ($i = 0, 1, 2$))

б) кинематическим условиям на поверхностях разделов

$$\frac{\partial \chi_0}{\partial x_0} = \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}; \quad \text{на } \Gamma_1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2}; \quad \Gamma_2, \quad (4.103)$$

в) динамическим условиям на поверхностях разделов

$$\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial t^2} - \rho_1 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} \right) = (\rho_1 - \rho_0) g \frac{\partial \chi_0}{\partial x_0}; \text{ на } \Gamma_1, \quad (4.104)$$

$$\left(\rho_1 \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2} - \rho_2 \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2} \right) = (\rho_2 - \rho_1) g \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}; \text{ на } \Gamma_2. \quad (4.105)$$

В результате решения краевых задач (4.100) - (4.105) в цилиндрических системах координат $x_i, r, \eta (i = 0, 1, 2)$ потенциалы смещений запишутся в виде,

$$\chi_0 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left\{ u(t) - thk_n h_1 \frac{chk_n(x_0 - h_0)}{shk_n h_0} \sigma_{1n}(t) \right\}, \quad (4.106)$$

$$\chi_1 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left\{ u(t) + thk_n h_1 \frac{chk_n x_1 \sigma_{1n}(t)}{shk_n h_1} - \frac{chk_n(x_1 - h_1) \sigma_{2n}(t)}{chk_n h_1} \right\}, \quad (4.107)$$

$$\chi_2 = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)(\xi_n^2 - 1)} \left\{ u(t) + thk_n h_1 \frac{chk_n x_2}{shk_n h_2} \sigma_{2n}(t) \right\}. \quad (4.108)$$

Потенциальная энергия для рассматриваемого случая запишется следующим образом,

$$\Pi_{\Sigma} = \frac{1}{2} g (\rho_1 - \rho_0) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} \right)^2 r \sin \eta dr + \frac{1}{2} g (\rho_2 - \rho_1) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} \right)^2 r \sin \eta dr. \quad (4.109)$$

Поставив решения (4.106)-(4.108) для потенциалов смещений χ_i в формулы (4.99), (4.109) получим окончательные выражения для кинетической и потенциальной энергии,

$$T_{\Sigma} = \frac{1}{2} M^* \dot{u}_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (m'_{1n} - m'_{0n}) \dot{u}_c \dot{\sigma}_{1n} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (m'_{2n} - m'_{1n}) \dot{u}_c \dot{\sigma}_{2n} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}) \dot{\sigma}_{1n}^2 \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}) \dot{\sigma}_{2n}^2 \right\}, \quad (4.110)$$

$$\Pi_{\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \omega_n^2 \sigma_{1n}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \omega_n^2 \sigma_{2n}^2. \quad (4.111)$$

В формулах (4.110), (4.111) приняты обозначения: σ_{1n}, σ_{2n} - обобщенные координаты волновых движения поверхностей разделов жидкостей,

$m_0 = \pi r_0^2 \rho_0 h_0, m_1 = \pi r_0^2 \rho_1 h_1, m_2 = \pi r_0^2 \rho_2 h_2$ - массы каждой жидкости,

$m'_{0n} = \rho_0 V_n, m'_{1n} = \rho_1 V_n, m'_{2n} = \rho_2 V_n$ - массы колеблющихся жидкостей,

$M^* = m_0 + m_1 + m_2 + M$ - суммарная масса всей гидромеханической системы,

$$V_n = \frac{2\pi r_0^3}{\xi_n (\xi_n^2 - 1)} thk_n h_1, \overline{f_{0n}} = thk_n h_1 cthk_n h_0, \overline{f_{1n}} = thk_n h_1 cthk_n h_2, \omega_n^2 = gk_n thk_n h_1,$$

где ξ_n - n -ый корень уравнения $dJ_1(\xi) / d(\xi) = 0$.

4.4.2. Вывод уравнений движения

Воспользовавшись уравнениями Лагранжа 2-ого рода, получим систему уравнений движения в виде,

$$M^* \ddot{u}_c + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \ddot{\sigma}_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \ddot{\sigma}_{2n} = 0, \quad (4.112)$$

$$\ddot{\sigma}_{1n} + \frac{(m'_{1n} - m'_{0n}) \omega_n^2 \overline{f_{0n}}}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})} - \frac{m'_{1n} \ddot{\sigma}_{2n}}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}) chk_n h_1} + \frac{(m'_{1n} - m'_{0n}) \ddot{u}_c}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})} = 0, (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.113)$$

$$\ddot{\sigma}_{2n} + \frac{(m'_{2n} - m'_{1n}) \omega_n^2 \overline{f_{1n}}}{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n})} - \frac{m'_{1n} \ddot{\sigma}_{1n}}{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}) chk_n h_1} + \frac{(m'_{2n} - m'_{1n}) \ddot{u}_c}{(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n})} = 0, (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.114)$$

Для удобства дальнейшего исследования введем новые обозначения:

$$m_{1n}^* = (m'_{1n} - m'_{0n}), \quad m_{2n}^* = (m'_{2n} - m'_{1n}), \quad \alpha_{1n} = (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}), \quad \alpha_{2n} = (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}),$$

$$a_{12n} = \frac{m'_{1n}}{chk_n h_1 \cdot \alpha_{1n}}, \quad a_{21n} = \frac{m'_{1n}}{chk_n h_1 \cdot \alpha_{2n}}, \quad b_{1n} = \frac{m_{1n}^*}{\alpha_{1n}}, \quad b_{2n} = \frac{m_{2n}^*}{\alpha_{2n}}, \quad \beta_{1n}^2 = b_{1n} \omega_n^2, \quad \beta_{2n}^2 = b_{2n} \omega_n^2.$$

Пусть бак, полностью заполненный жидкостью, и закрепленный на подвижной пластине может перемещаться поступательно только в горизонтальной плоскости.

Примем, что на пластину действует в горизонтальной плоскости внешняя силы

$$F_u = F_0 \sin pt, \text{ линия действия которой проходит через плоскость симметрии}$$

бака. Учитывая только первый тон колебаний жидкости ($n=1$), определим

амплитуду колебаний внешней силы F_0 , если подвижная пластина совершает движение с ускорением $\ddot{u}_c = a_0 \sin pt$, a_0 - амплитудное значение ускорения.

Уравнения движения пластины с жидкостью при $n = 1$ будут иметь вид,

$$M^* \ddot{u}_c + m_1^* \ddot{\sigma}_1 + m_2^* \ddot{\sigma}_2 = F_0 \sin pt, \quad (4.115)$$

$$\ddot{\sigma}_1 + \beta_1^2 \sigma_1 - a_{12} \ddot{\sigma}_2 + b_1 \ddot{u}_c = 0, \quad (4.116)$$

$$\ddot{\sigma}_2 + \beta_2^2 \sigma_2 - a_{21} \ddot{\sigma}_1 + b_2 \ddot{u}_c = 0. \quad (4.117)$$

Рассматривая вынужденные колебания жидкости, примем, что обобщенные координаты $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ изменяются по закону $\sigma_1 = \sigma_1^0 \sin pt$, $\sigma_2 = \sigma_2^0 \sin pt$ и $u_c = u_c^0 \sin pt$, и перепишем уравнения (4.115)-(4.117) в виде,

$$-p^2(M^* u_c^0 + m_1^* \sigma_1^0 + m_2^* \sigma_2^0) = F_0, \quad (4.118)$$

$$(-p^2 + \beta_1^2) \sigma_1^0 - a_{12} p^2 \sigma_2^0 = b_1 p^2 u_c^0, \quad (4.119)$$

$$-a_{21} p^2 \sigma_1^0 + (-p^2 + \beta_2^2) \sigma_2^0 = b_2 p^2 u_c^0, \quad (4.120)$$

из уравнений (4.119), (4.120) определим значения σ_1^0 и σ_2^0 ,

$$\sigma_1^0 = \frac{b_1(-p^2 + \beta_2^2) + b_2 p^2 a_{12}}{(\Omega_1^2 - p^2)(\Omega_2^2 - p^2)} p^2 u_c^0, \quad \sigma_2^0 = \frac{b_2(-p^2 + \beta_1^2) + b_1 p^2 a_{21}}{(\Omega_1^2 - p^2)(\Omega_2^2 - p^2)} p^2 u_c^0, \quad (4.121)$$

где Ω_1 и Ω_2 - собственные частоты колебаний трех жидкостей в неподвижном баке.

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad (4.122)$$

$$a = (1 - a_{21} a_{12}), \quad b = -(\beta_1^2 + \beta_2^2), \quad c = (\beta_1^2 \cdot \beta_2^2). \quad (4.123)$$

Подставим полученные выражения (4.121) в уравнение (4.118). В результате уравнения движения твердого тела преобразуются к виду,

$$F_0 = a_0 M_{np}, \quad (4.124)$$

где M_{np} - масса преобразованного твердого тела,

$$M_{np} = M^* \left[1 + \frac{m_1^* \left[b_1(-p^2 + \beta_2^2) + b_2 p^2 a_{12} \right] p^2}{M^* (\Omega_1^2 - p^2)(\Omega_2^2 - p^2)} + \frac{m_2^* \left[b_2(-p^2 + \beta_1^2) + b_1 p^2 a_{21} \right] p^2}{M^* (\Omega_1^2 - p^2)(\Omega_2^2 - p^2)} \right]. \quad (4.125)$$

4.4.3. Результаты численных расчетов

Одним из результатов исследований движения твердого тела с полостью целиком наполненной однородной капельной жидкостью является, что масса преобразованного твердого тела равна сумме масс твердого тела и затвердевшей жидкости [34]. В рассматриваемом случае, как показывает формула (4.125) при движении твердого тела со слоистой жидкостью масса преобразованного твердого тела зависит от частоты колебаний.

График отношения M_{np} / M^* приведен на рис. (4.10). При построении графика были приняты следующие обозначения,

$$f(\bar{p}) = M_{np} / M^*, \bar{p}^2 = \frac{p^2}{\Omega_1^2}, \bar{\Omega}_2 = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2}, \bar{\beta}_1^2 = \frac{\beta_1^2}{\Omega_1^2}, \bar{\beta}_2^2 = \frac{\beta_2^2}{\Omega_1^2}, \bar{h}_1 = \frac{h_1}{r_0}, \quad (4.126)$$

$$\Delta_1 = (\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_0), \Delta_2 = (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1), \quad (4.127)$$

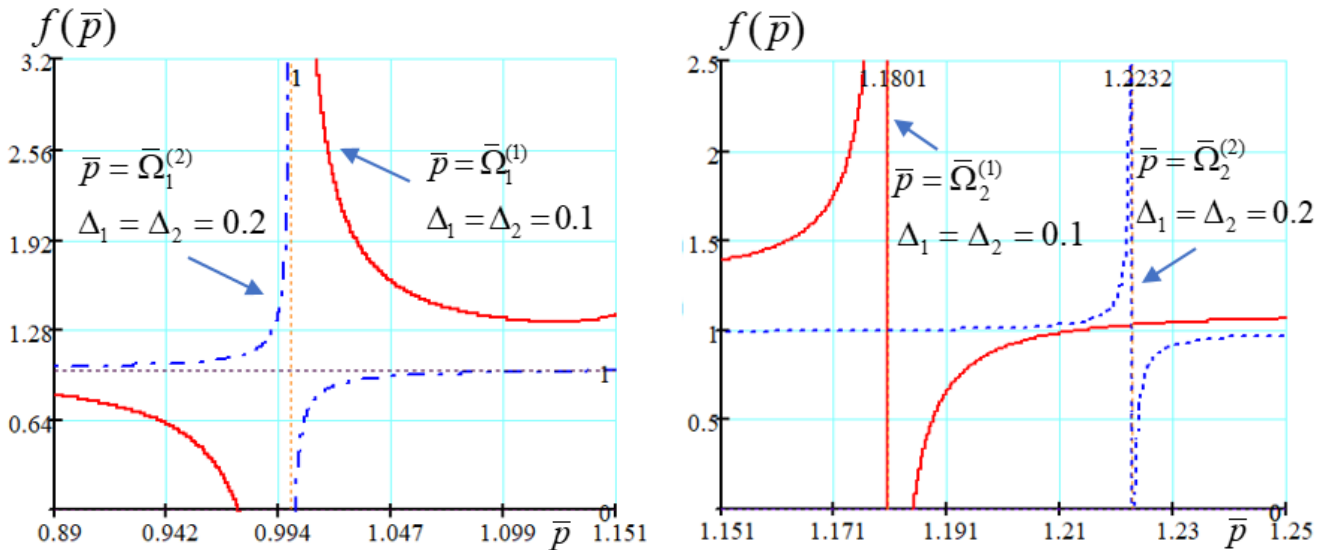


Рис. 4.10. Зависимость безразмерной массы преобразованного твердого тела $f(\bar{p}) = M_{np} / M^*$ от безразмерной частоты возбуждения колебаний, ($n = 1$) $(\bar{\Omega}_1^{(1)}, \bar{\Omega}_1^{(2)})$, $\bar{\Omega}_2^{(1)}, \bar{\Omega}_2^{(2)}$ - первые и вторые главные частоты.

4.5. Исследование устойчивости движения твердого тела, имеющего цилиндрическую полость, наполненной тремя несмешивающимися жидкостями

4.5.1. Постановка задачи

Пусть однородное тело массы m_m , имеющее форму полуцилиндра радиуса R , с закрепленным на нем круглым цилиндром, полностью наполненным тремя несмешивающимися жидкостями, расположено на горизонтальной плоскости, и выведено из состояния покоя (см. рис. 4.11.а). Рассмотрим малые колебания такой механической системы в предположении, что проскальзывание по плоскости и трение качения отсутствуют.

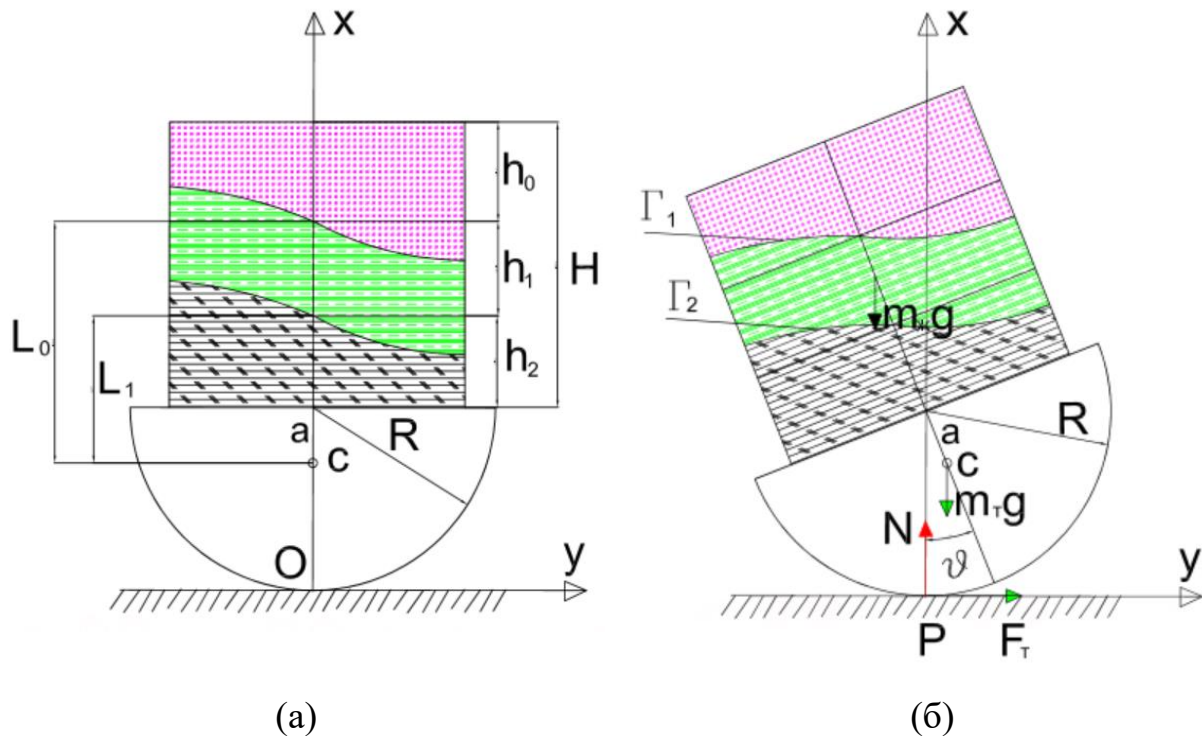


Рис.4.11. Схема полуцилиндра, с закрепленным на нем круглым цилиндром, наполненным трёхслойной жидкостью

4.5.2. Вывод уравнений движения

Составим дифференциальные уравнения движения рассматриваемой гидродинамической системы, используя результаты работы [17]. На твердое тело, освобожденное от внешних связей, действуют следующие силы: силы тяжести

твердого тела и жидкостей, сила трения F_m и нормальная составляющая реакция N в точке касания полуцилиндра плоскостью, а также гидродинамические силы и гидродинамические моменты. Выбрав начало координат в точке O касания тела в момент равновесного состояния, а в качестве полюса, точку C - центр масс твердого тела, запишем дифференциальные уравнения движения твердого тела с жидкостями,

$$m_m \ddot{y}_c = F_m - F_{z0}; \quad (4.127)$$

$$m_m \ddot{x}_c = N - (m_m + m_{жс})g; \quad (4.128)$$

$$J_c \ddot{\vartheta} = Na \sin \vartheta - F_m (R - a) - M_{z0}; \quad (4.129)$$

где J_c - момент инерции твердого тела относительно точки C , a - расстояние DC , F_{z0} - проекция гидродинамических сил на ось y и M_{z0} - момент гидродинамических сил жидкостей относительно точки C , выражения для которых получено в работе [17].

$$F_{z0} = M \ddot{u} - S \ddot{\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \ddot{\sigma}_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \ddot{\sigma}_{2n}, \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned} M_{z0} = & \left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right) \ddot{\vartheta} - Sg\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}) L_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} - g \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \sigma_{1n} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}) L_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} - g \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \sigma_{2n} + S \ddot{u} \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$\text{где } u = y_c = (R - a)\vartheta, \quad S = m_0 \left(L_0 + \frac{h_0}{2} \right) + m_1 \left(L_1 + \frac{h_1}{2} \right) + m_2 \left(L_2 + \frac{h_2}{2} \right), \quad (4.132)$$

$$\begin{aligned} L'_{1n} = & \frac{m'_{1n} \left(L_0 - \frac{2r_0}{\xi_n} \text{th} k_n \frac{h_1}{2} \right) - m'_{0n} \left(L_0 + \frac{2r_0}{\xi_n} \text{th} k_n \frac{h_0}{2} \right)}{(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}})}, \\ L'_{2n} = & \frac{m'_{2n} \left(L_1 - \frac{2r_0}{\xi_n} \text{th} k_n \frac{h_2}{2} \right) - m'_{1n} \left(L_1 + \frac{2r_0}{\xi_n} \text{th} k_n \frac{h_1}{2} \right)}{(m'_{2n} + m'_{1n} \overline{f_{1n}})}, \end{aligned} \quad (4.133)$$

L'_{1n} и L'_{2n} - плечи гидродинамических сил давлений жидкостей.

Исключив, F_m и N из третьего уравнения (4.129), получим

$$J_c \ddot{\mathcal{G}} = \left[m_m \ddot{x}_c + (m_m + m_{жс})g \right] a \sin \mathcal{G} - (m_m \ddot{y}_c + F_{z\partial})(R-a) - M_{z\partial}. \quad (4.134)$$

Предположив, что полуцилиндр движется без скольжения, имеем уравнения связи,

$$y_c = R\mathcal{G} - a \sin \mathcal{G}, \quad x_c = R - a \cos \mathcal{G}. \quad (4.135)$$

Для случая малых колебаний, ($\sin \mathcal{G} \approx \mathcal{G}, \cos \mathcal{G} \approx 1$), находим \ddot{y}_c, \ddot{x}_c и подставим полученные выражения в уравнение (4.134), в котором также полагаем $F_{z\partial}$ и $M_{z\partial}$, вычисленными с точностью до первого порядка малости, в результате получим следующие дифференциальные уравнения движения полуцилиндра с жидкостями,

$$J_p \ddot{\mathcal{G}} + S^* g \mathcal{G} - g \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \sigma_{1n} - g \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \sigma_{2n} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [m'_{2n} (l_1 - A_{2n}) - m'_{1n} (l_1 + A_{1n})] \ddot{\sigma}_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} [m'_{1n} (l_0 - A_{1n}) - m'_{0n} (l_0 + A_{0n})] \ddot{\sigma}_{1n} = 0; \quad (4.136)$$

где J_p - момент инерции приведенного твердого тела [76], $J_p = J_{pm} + J_p^{\circ}$ - момент инерции твердого тела и момент инерции эквивалентного тела [45] относительно оси, проходящей через точку P,

$$J_p^{\circ} = I_0 + m_{жс} (R-a)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n, \quad m_{жс} = m_0 + m_1 + m_2, \quad (4.137)$$

$$J_{pm} = m_m R \left(\frac{3R}{2} - 2a \right), \quad a = \frac{4R}{3\pi}, \quad m_0 = \pi r_0^2 \rho_0 h_0, \quad m_1 = \pi r_0^2 \rho_1 h_1, \quad m_2 = \pi r_0^2 \rho_2 h_2 \quad - \text{массы}$$

каждой жидкости,

$$I_0 = m_0 \left(\frac{h_0^2}{12} + \left(l_0 + \frac{h_0}{2} \right)^2 + \frac{r_0^2}{4} \right) + m_1 \left(\frac{h_1^2}{12} + \left(l_1 + \frac{h_1}{2} \right)^2 + \frac{r_0^2}{4} \right) + \\ + m_2 \left(\frac{h_2^2}{12} + \left(R + \frac{h_2}{2} \right)^2 + \frac{r_0^2}{4} \right); \quad (4.138)$$

I_0 - момент инерции затвердевших жидкостей относительно оси, проходящей через точку O,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} I_n &= m_0 r_0^2 \left(-1 + \frac{r_0}{h_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} th \xi_n \frac{h_0}{2r_0} \right) + \\
&+ m_1 r_0^2 \left(-1 + \frac{r_0}{h_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} th \xi_n \frac{h_1}{2r_0} \right) + \\
&+ m_2 r_0^2 \left(-1 + \frac{r_0}{h_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} th \xi_n \frac{h_2}{2r_0} \right),
\end{aligned} \tag{4.139}$$

$S^* g \mathcal{G} = (m_m a - m_{жс} \frac{H}{2}) g \mathcal{G}$ - статический момент твердого тела и затвердевших

жидкостей относительно оси, проходящей через точку O , σ_{1n} и σ_{2n} - обобщенные координаты волновых движений на поверхностях разделов жидкостей, $m'_{0n} = \rho_0 V, m'_{1n} = \rho_1 V, m'_{2n} = \rho_2 V$ - приведенные массы колеблющихся жидкостей,

$$V = \frac{2\pi r_0^3}{\xi_n (\xi_n^2 - 1)} th \xi_n \frac{h_1}{r_0}, \quad l_0 = L_0 + (R - a), l_1 = L_1 + (R - a); \quad A_{0n} = \frac{2r_0}{\xi_n} th \xi_n \frac{h_0}{2},$$

$$A_{1n} = \frac{2r_0}{\xi_n} th \xi_n \frac{h_1}{2}, \quad A_{2n} = \frac{2r_0}{\xi_n} th \xi_n \frac{h_2}{2};$$

$$B_{1n} = [m'_{1n} (l_0 - A_{1n}) - m'_{0n} (l_0 + A_{0n})], \quad B_{2n} = [m'_{2n} (l_1 - A_{2n}) - m'_{1n} (l_1 + A_{1n})];$$

$$\frac{dJ_1(\xi)}{d\xi} = 0, \quad J_1(\xi) \text{- функция Бесселя первого рода и первого порядка [67].}$$

Учитывая волновые движения жидкостей, отвечающих n -ому тону колебаний поверхностей раздела, запишем полную систему уравнений движения твердого тела с жидкостями, которая имеет вид

$$\begin{aligned}
J_p \ddot{\mathcal{G}} + S^* g \mathcal{G} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{1n} \ddot{\sigma}_{1n} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \ddot{\sigma}_{2n} - g \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{1n} - m'_{0n}) \sigma_{1n} - \\
- g \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{2n} - m'_{1n}) \sigma_{2n} = 0
\end{aligned} \tag{4.140}$$

$$(m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}) \ddot{\sigma}_{1n} + (m'_{1n} - m'_{0n}) \omega_n^2 \sigma_{1n} + B_{1n} \ddot{\mathcal{G}} - \frac{m'_{1n}}{ch \xi_n \frac{h_1}{r_0}} \ddot{\sigma}_{2n} - \tag{4.141}$$

$$-(m'_{1n} - m'_{0n}) g \mathcal{G} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}) \ddot{\sigma}_{2n} + (m'_{2n} - m'_{1n}) \omega_n^2 \sigma_{2n} + B_{2n} \ddot{\mathcal{G}} - \frac{m'_{1n}}{ch \xi_n \frac{h_1}{r_0}} \ddot{\sigma}_{1n} - \quad (4.142)$$

$$-(m'_{2n} - m'_{1n}) g \mathcal{G} = 0, n = 1, 2, 3 \dots$$

4.5.3. Исследование устойчивости колебания твердого тела

Для дальнейшего исследования колебаний твердого с жидкостями введем обозначения,

$$a_1 = (m'_{1n} - m'_{0n}) \omega_n^2, a_2 = (m'_{2n} - m'_{1n}) \omega_n^2, b_1 = (m'_{1n} + m'_{0n} \overline{f_{0n}}), \quad (4.143)$$

$$b_2 = (m'_{2n} \overline{f_{1n}} + m'_{1n}), c_1 = (m'_{1n} - m'_{0n}) g, c_2 = (m'_{2n} - m'_{1n}) g, \quad (4.144)$$

$$\overline{f_{0n}} = th \xi_n \frac{h_1}{r_0} cth \xi_n \frac{h_0}{r_0}, \overline{f_{1n}} = th \xi_n \frac{h_1}{r_0} cth \xi_n \frac{h_2}{r_0}, \omega_n^2 = g \frac{\xi_n}{r_0} th \xi_n \frac{h_1}{r_0}, d_n = \frac{1}{ch \xi_n \frac{h_1}{r_0}}. \quad (4.145)$$

Положив, в уравнения (4.140) - (4.142),

$$\sigma_{1n} = A_1 \cdot e^{pt}, \sigma_{2n} = A_2 \cdot e^{pt}, \mathcal{G} = C \cdot e^{pt}, \quad (4.146)$$

$$\ddot{\sigma}_{1n} = p^2 A_1 \cdot e^{pt}, \ddot{\sigma}_{2n} = p^2 A_2 \cdot e^{pt}, \ddot{\mathcal{G}} = p^2 C \cdot e^{pt}, \quad (4.147)$$

получим систему однородных уравнений, записанную в матричном виде,

$$\begin{bmatrix} (a_1 + b_1 p^2) & -d_1 m'_{11} p^2 & (B_{11} p^2 - c_1) \\ -d_1 m'_{21} p^2 & (a_2 + b_2 p^2) & (B_{22} p^2 - c_2) \\ (B_{11} p^2 - c_1) & (B_{22} p^2 - c_2) & J_p p^2 + S^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ C \end{bmatrix} = 0; \quad (4.148)$$

Обозначив $\lambda = p^2$, из системы уравнений (4.148) получим характеристическое уравнение 3-ого порядка,

$$\alpha \cdot \lambda^3 + \beta \cdot \lambda^2 + \gamma \cdot \lambda + \delta = 0; \quad (4.149)$$

где коэффициенты равны

$$\alpha = b_1 b_2 J_p - b_1 B_{22}^2 - m'_{11} m'_{21} d_1^2 J_p - B_{11} B_{22} d_1 (m'_{11} + m'_{21}) - b_2 B_{11}^2; \quad (4.150)$$

$$\beta = (a_1 b_2 + a_2 b_1) J_p + b_1 b_2 S^* g - (a_1 B_{22}^2 - 2b_1 B_{22} c_2) - m'_{11} m'_{21} d_1^2 S^* g + \quad (4.151)$$

$$+ (B_{11} c_2 + B_{22} c_2) d_1 (m'_{11} + m'_{21}) - (a_2 B_{11}^2 - 2b_2 B_{11} c_1)$$

$$\gamma = a_1 a_2 J_p + (a_1 b_2 + a_2 b_1) S^* g - (c_2^2 b_1 - 2a_1 B_{22} c_2) - c_1 c_2 d_1 (m'_{11} + m'_{21}) - ; \quad (4.152)$$

$$-(c_1^2 b_2 - 2a_2 B_{11} c_1)$$

$$\delta = a_1 a_2 S^* g - (c_2^2 a_1 + c_1^2 a_2). \quad (4.153)$$

Рассматриваемая динамическая система является консервативной, не может быть асимптотически устойчивой, и поэтому для устойчивости рассматриваемой динамической системы достаточно поставить требование, чтобы все корни характеристического уравнения были чисто мнимые или квадраты соответствующих корней были действительными числами меньше нуля. В результате исследования получены области устойчивости в параметрах, характеризующих инерционные свойства твердого тела и жидкости.

Области устойчивости колебаний твердого тела, имеющего полость, наполненную тремя жидкостями, представлены на рисунках (4.12)-(4.21), на этих же рисунках показано расположение корней характеристического уравнения, принадлежащих верхней и нижней границам области устойчивости,

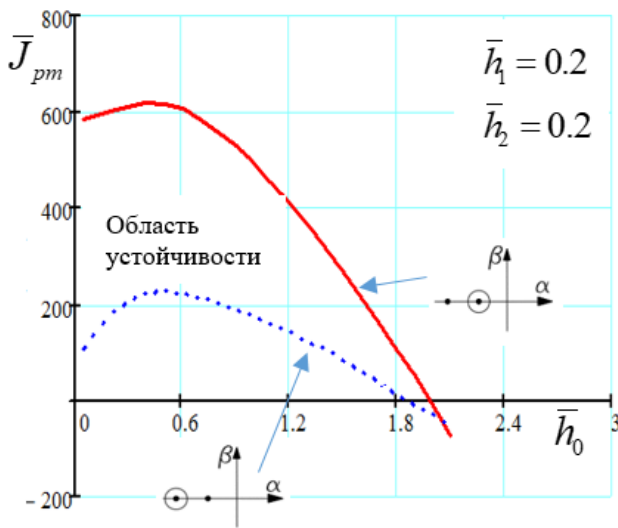


Рис. 4.12

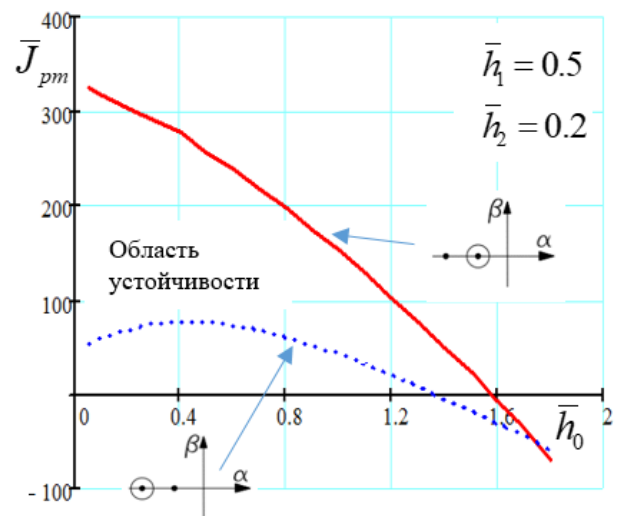


Рис. 4.13

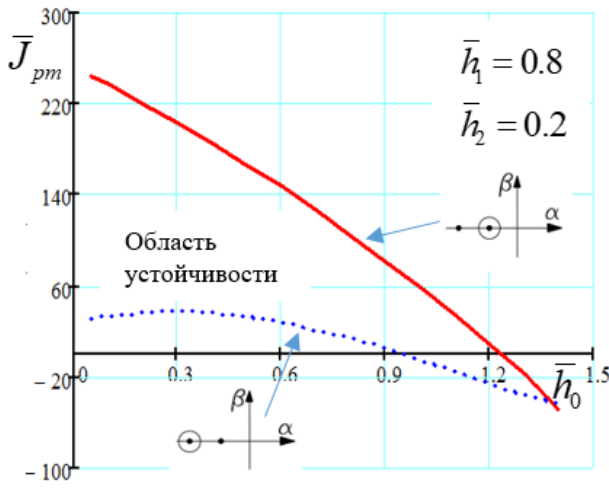


Рис. 4.14

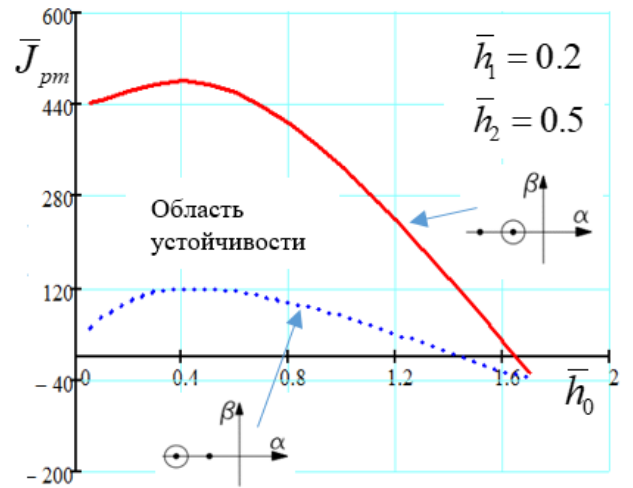


Рис. 4.15

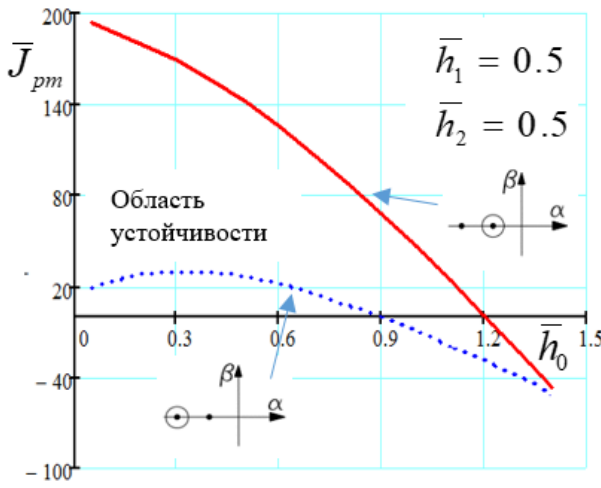


Рис. 4.16

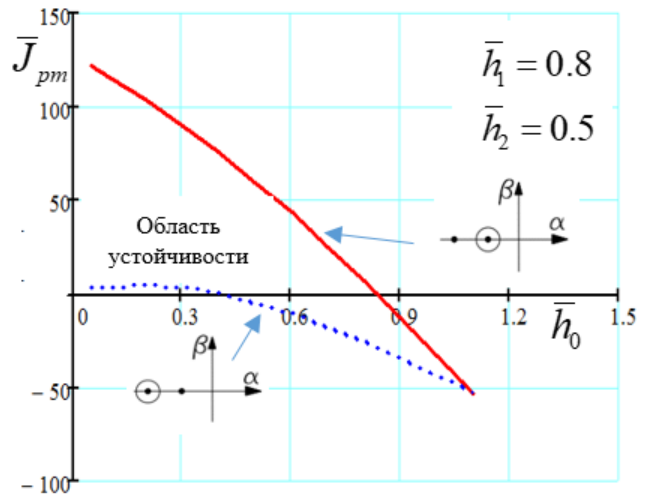


Рис. 4.17

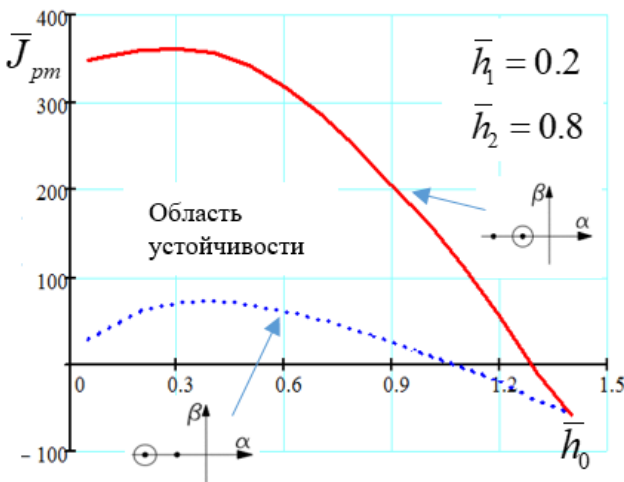


Рис. 4.18

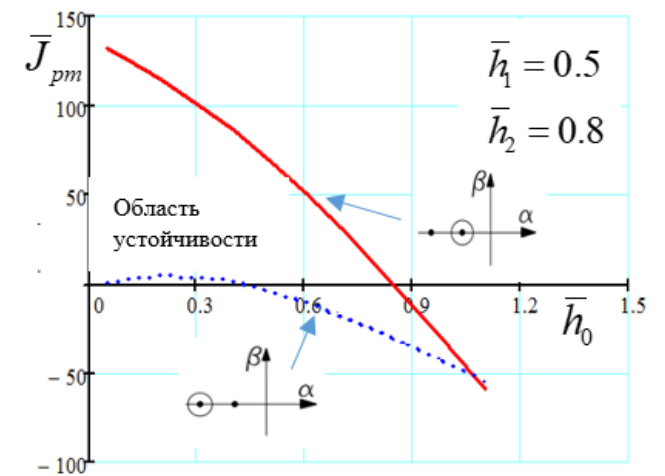


Рис. 4.19

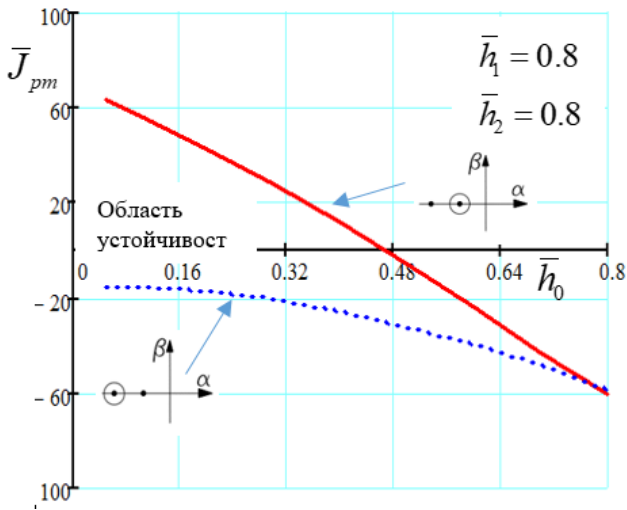


Рис. 4.20

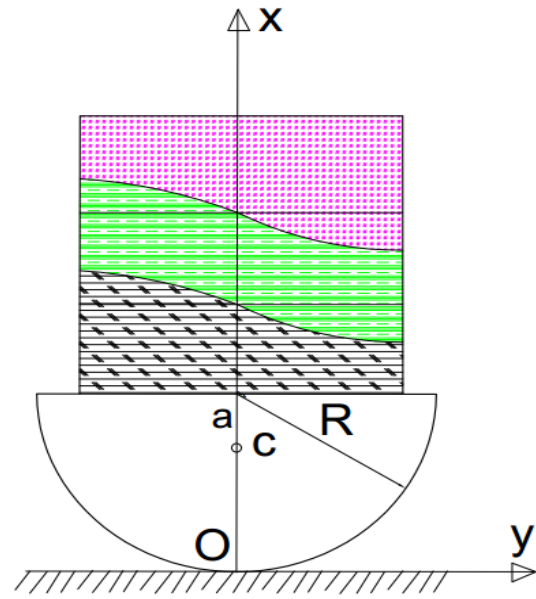


Рис. 4.21

Области устойчивости колебаний твердого тела, имеющего полость частично наполненной двумя жидкостями, показаны на рисунках (4.22)-(4.24).

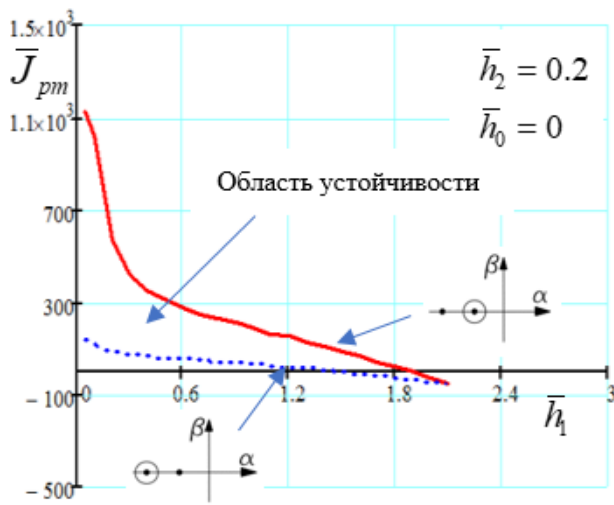


Рис. 4.22

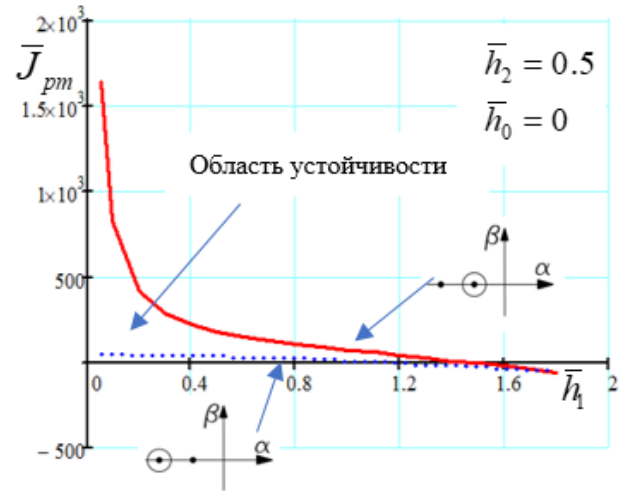


Рис. 4.23

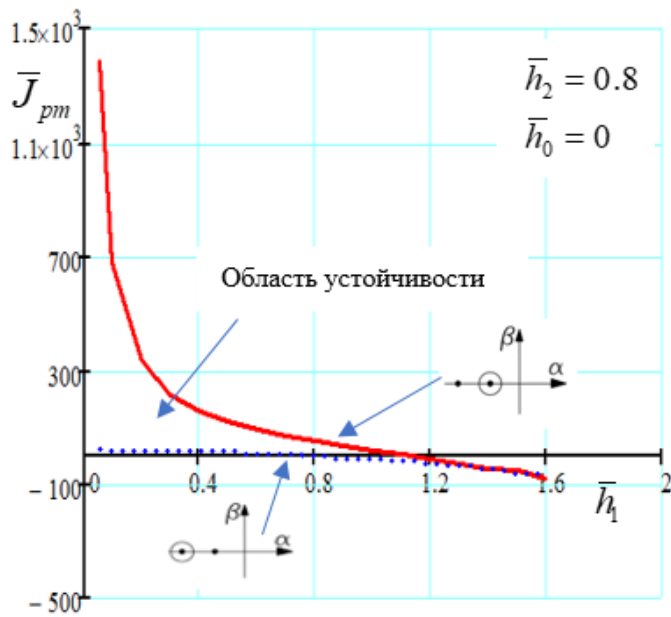


Рис. 4.24

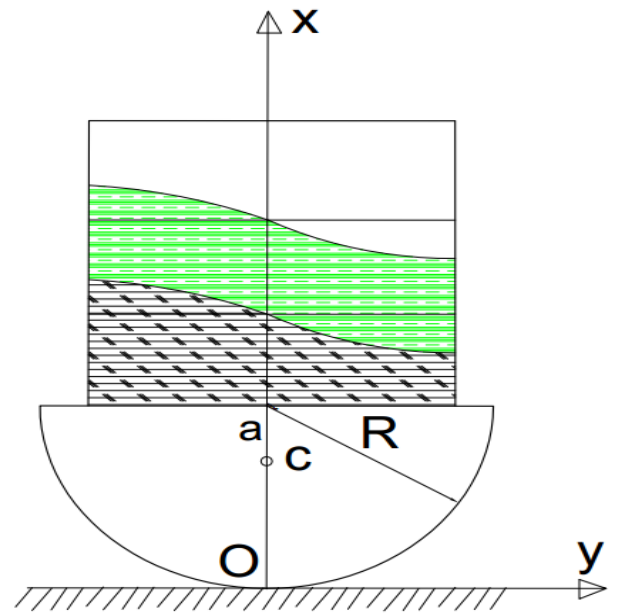


Рис. 4.25

Выводы по главе 4

- При прочих равных условиях, возникновение параметрических колебаний трёхслойной жидкости происходит на больших амплитудах возбуждения сосуда, по сравнению с однородной жидкостью.
- Разработан метод исследований устойчивости колебаний твердого тела, имеющего полость, наполненной трёхслойной жидкостью.
- Движение твердого тела, имеющего полость, полностью заполненную трёхслойной жидкостью, качественно отличается от случая движения твердого тела, имеющего полость целиком заполненной однородной несжимаемой жидкостью.

ГЛАВА 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТОЙ ЖИДКОСТИ В НЕПОДВИЖНОМ И ПОДВИЖНОМ БАКАХ

В главе 5 рассматривается экспериментальное исследование колебаний слоистой жидкости в неподвижном и подвижном баках. Дано описание экспериментальной установки и определены в эксперименте основные динамические характеристики колебаний слоистой жидкостью, а также приведено сравнение полученных экспериментальных результатов с теоретическими.

5.1. Экспериментальное исследование колебаний слоистой жидкости

В качестве испытуемых жидкостей были выбраны вода $\rho_2 = 1000 \text{ кг} / \text{м}^3$, подсолнечное масло плотностью ($\rho_1 = 920 \text{ кг} / \text{м}^3$) и муравьиный спирт ($\rho_0 = 830 \text{ кг} / \text{м}^3$), с коэффициентами поверхностного натяжения вода - подсолнечное масло ($\sigma_1 = 0.013 \text{ Н} / \text{м}$) и подсолнечное масло - муравьиного спирта ($\sigma_2 = 0.02 \text{ Н} / \text{м}$), значение кинематической вязкости воды ($\nu_2 = 1,006 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$), подсолнечное масло ($\nu_1 = 39,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$) и муравьиного спирта ($\nu_0 = 1,54 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$).

5.2. Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка рис. (5.1) состояла из основания -1, подвижной пластины -2, прозрачного бака -3, электромеханического возбудителя колебаний -4 и контрольно-измерительного комплекса. Основание представляло собой неподвижную пластину из текстолита, на которой были закреплены электромеханический возбудитель и металлические направляющие, обеспечивающие плавное движение без баковых вибраций подвижной пластины.

Контрольно-измерительный комплекс состоял из тензостанции ВИ6-6ТН -5, датчиков давления -6 и перемещения -7, Цифрового USB-осциллографа Nantek 6022BE -8 и ноутбук -9 и блока питания НУ5003-2 -10, которые размещались на лабораторном столе, вблизи неподвижного основания. Блок питания НУ5003-2

предназначен для питания тензостанции и электродвигателя. Управление и отображение данных осциллографа Hantek 6022BE осуществлялось персональным компьютером/ноутбуком/нетбуком/планшетом под управлением операционной системы Windows через USB интерфейс.

Общий вид экспериментальной установки показан на рис. (5.1).

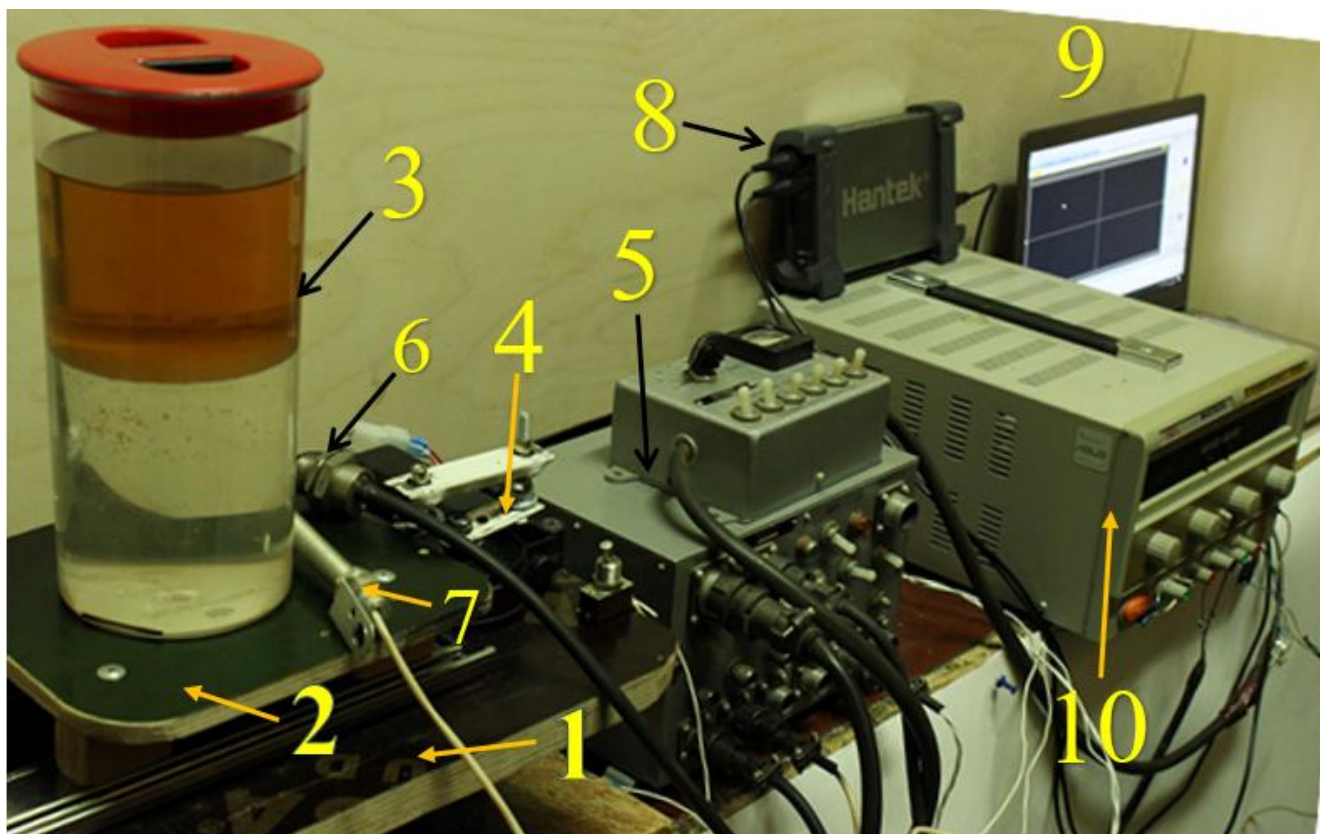


Рис. 5.1. Общий вид экспериментальной установки: 1-основание, 2-подвижная пластина, 3-цилиндрический сосуд, 4- электромеханический возбудитель, 5- тензостанция ВИ6-6ТН, 6- датчик давления, 7- датчик перемещения, 8- Цифровой USB-осциллограф Hantek 6022BE, 9- ноутбук ASUS, 10- Блок питания NY5003-2.

5.3. Кинематическая схема установки

Электромеханический возбудитель колебаний состоял из электродвигателя постоянного тока и кривошипно-шатунного механизма, осуществляющего возвратно-поступательное движение подвижной пластины.

В качестве виброизмерительной аппаратуры использовалась индуктивная шестиканальная малогабаритная аппаратура ВИ6-6ТН, с полупроводниковым блоком питания. Установка ВИ6-6ТН предназначена для измерения вибрации,

ускорений, давлений и перемещений. В основе работы аппаратуры лежит принцип амплитудной модуляции частоты индуктивными датчиками, включёнными по дифференциально-трансформаторной схеме.

Измерение давлений

Датчик давлений ДД-6С предназначен для измерения давлений жидкостей и газов. Его внешний вид и конструкция предназначены на рис. 5.2(а,б). На корпус, в котором размещаются два Ш-образных сердечников с обмотками, навинчивается оправка с мембраной. В случае необходимости на оправку навинчивается штуцер. Чувствительным элементом датчика является мембрана. При действии давления изменяется зазор между мембраной и сердечником, вызывая тем самым изменение индуктивного сопротивления одного плеча. Второй сердечник замкнут стальной пластиной и является компенсационным.



Рис. 5.2.(а) Внешний вид датчика давления ДД-6С

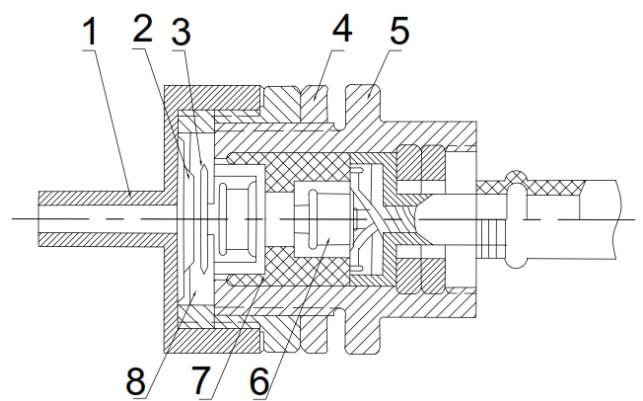


Рис. 5.2.(б) Конструкция датчика давления ДД-6С: 1-штуцер; 2-мембрана; 3-ярмо; 4-гайка; 5-корпус; 6-катушка; 7-сердечник; 8-катушка

Датчик ДД-6С имеют различный амплитудный диапазон от 0,01 до 20 кг/см². Это обеспечивается применением мембран различной толщины, так что в принципе, один датчик может иметь съёмные оправки с мембранами различной жесткости. Естественно, что с изменением жесткости изменяется и собственная частота датчика. Если измерение давления производится датчиками ДД-6С с

амплитудным диапазоном от 1 кг/см^2 и выше, то собственная частота датчика срезается фильтром 0-200 Гц, установленным в аппаратуре.

Если же при измерении динамических давлений используются датчики с амплитудным диапазоном менее 1 кг/см^2 , то применяется фильтр 0-30 Гц, входящий в комплект аппаратуры.

Изменение перемещений

Для измерения относительного перемещения двух деталей применяются датчики перемещений ДП-3СМ. Внешний вид и конструкция датчика перемещений представлены на рисунке 5.3(а, б).

В цилиндрическом корпусе размещается катушка с обмотками. Корпус датчика обычно закрепляется на подвижной детали (или на одной из них). Стержень с помощью резьбы на начальной части закрепляется на другой детали и устанавливается так, чтобы кольцо из мягкой стали в начальном положении стояло симметрично относительно обмоток. При смещениях стержня меняется индуктивное сопротивление обмоток, что приводит к нарушению баланса входного моста.

В отличие от предыдущих датчиков, датчик перемещений не имеет собственной частоты чувствительных элементов, поэтому его частотная характеристика определяется характеристикой фильтров аппаратуры.



Рис. 5.3.(а) Внешний вид датчика перемещений

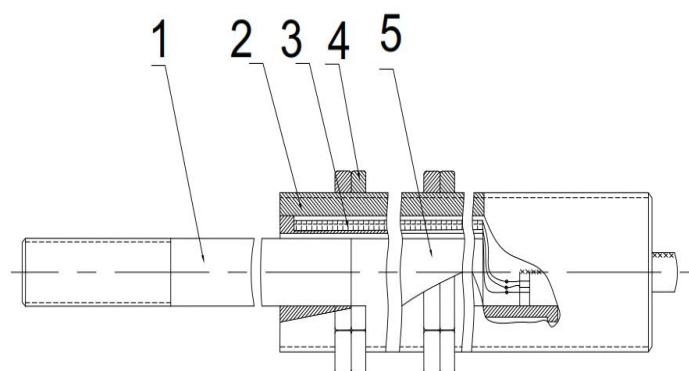


Рис. 5.3.(б) Конструкция датчика перемещений ДП-3СМ: 1-стержень; 2-корпус; 3-катушка; 4-гайка; 5-оболочка.

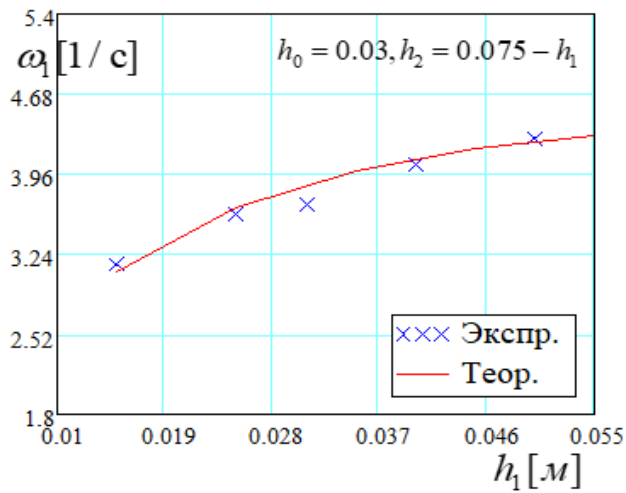
5.4. Экспериментальное определение основных характеристик колебаний слоистой жидкости

Для нахождения собственных частот колебаний слоистой жидкости использовался метод свободных колебаний. Для создания начальных условий свободных колебаний жидкостей подвижной платформе с баком задавались колебания посредством возвратно-поступательного движения, вблизи резонансной частоты колебаний жидкостей. После некоторого времени совместных колебаний бака с жидкостями платформа мгновенно останавливалась, а жидкости совершали свободные колебания в неподвижном баке. При проведении эксперимента на ноутбуке регистрировались вынужденные и свободные колебания жидкостей, а также перемещения самого бака.

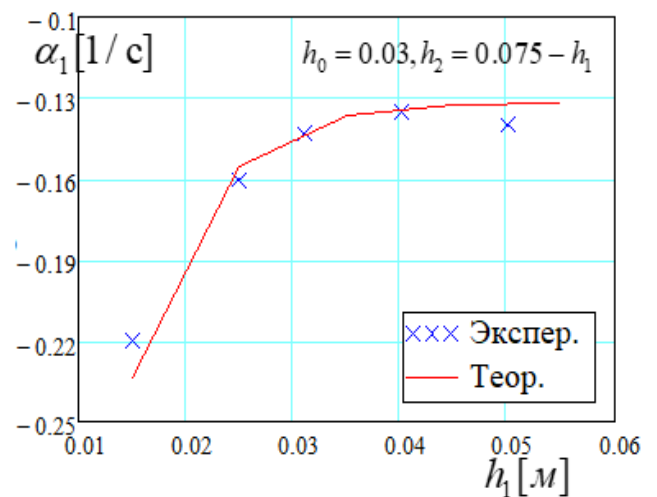
При проведении эксперимента можно выделить следующие этапы:

- (1) Перед началом эксперимента определялось теоретическое значение частоты колебаний жидкостей в неподвижном баке по формуле (3.118).
- (2) Проводилась тарировка датчиков перемещения и давления, тарировка датчиков давления осуществлялась путем добавлений жидкости (воды) на определенную глубину.
- (3) Испытуемый цилиндр освобождался от некоторой части воды и затем заполнялся слоями жидкостей разной толщины для проведения эксперимента.
- (4) Эксперимент повторялся снова при другой глубине средней жидкости.
- (5) По результатам записей экспериментов на ноутбуке определялись собственные частоты колебаний жидкостей и коэффициенты затухания.

Значения частот, определенных по формуле (3.118) и полученных из эксперимента приведены на рис. 5.4.



(a)



(б)

Рис. 5.4. Зависимости первой главной частоты (а) и коэффициента затухания (б) от толщины средней жидкости, определенные по формуле (3.118) и определенные в эксперименте

На рис. (5.5), (5.6) приведены типичные графики процессов, записанных при проведении экспериментов.

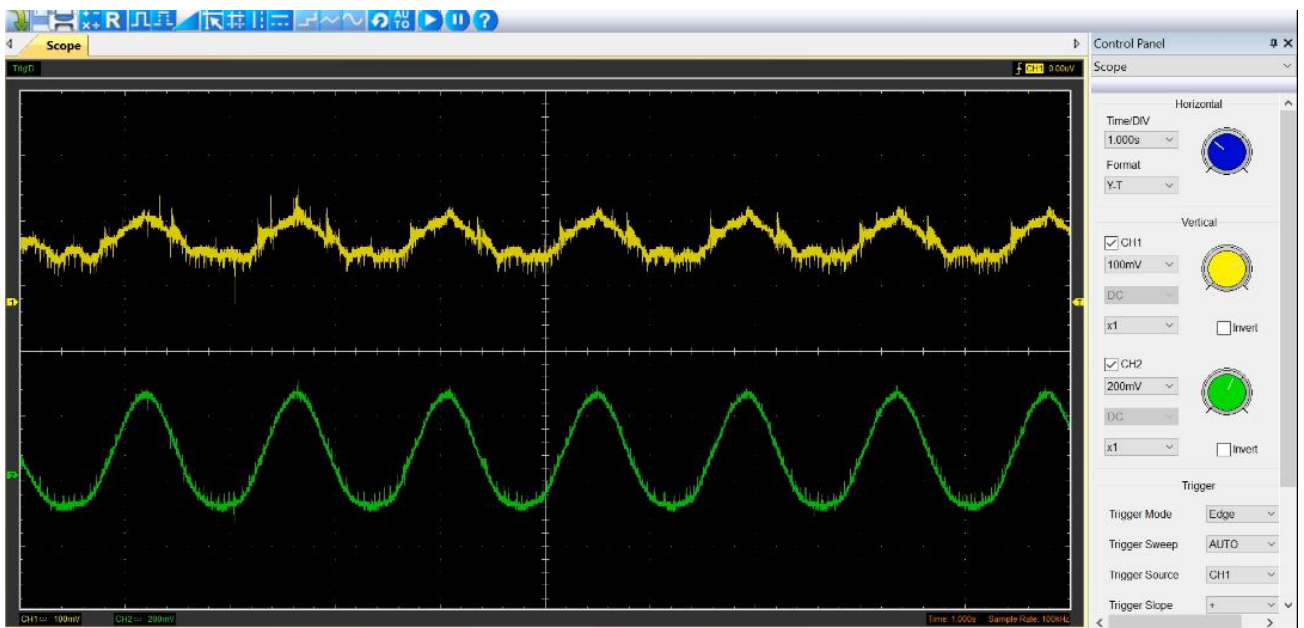


Рис. 5.5. Пример записи колебания подвижной платформы и вынужденных колебаний жидкостей

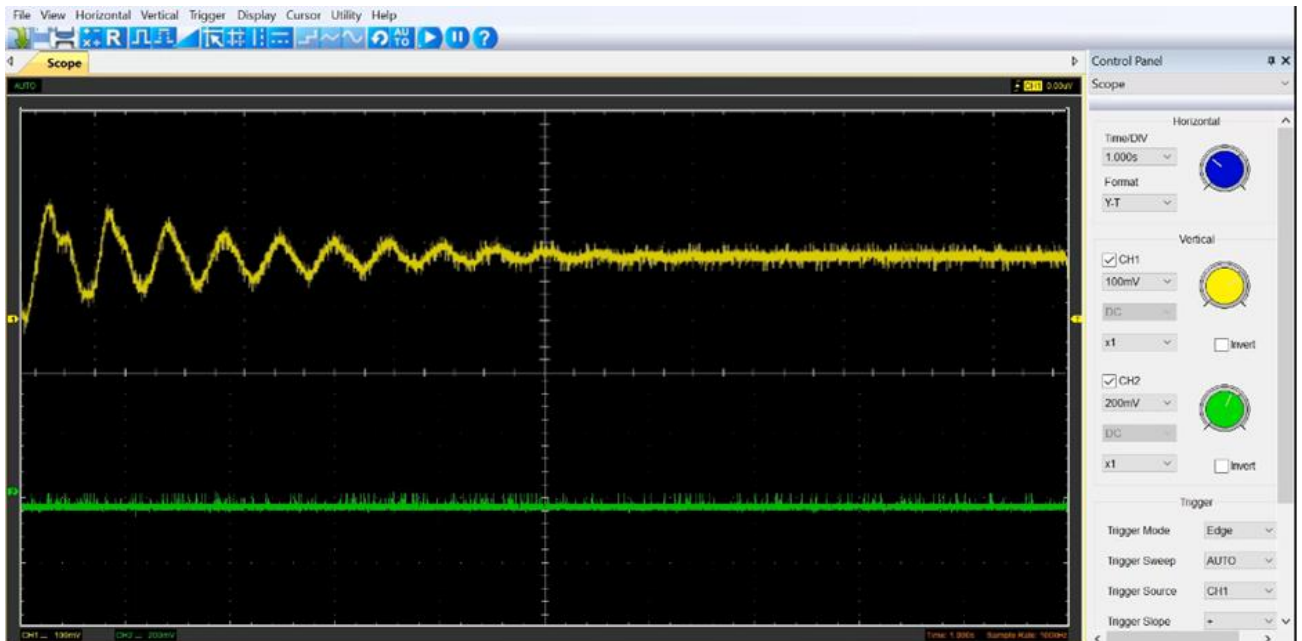


Рис. 5.6. Пример записи свободных колебаний жидкостей

5.5. Экспериментальное исследование колебаний полуцилиндра с двумя несмешивающимися жидкостями

Для подтверждения достоверности теоретических результатов, относящихся к колебаниям твёрдого тела, имеющего полость частично наполненной идеальной слоистой жидкостью, было проведено экспериментальное исследование. Рассматривались колебания свободного твёрдого тела в виде стального полуцилиндра с закрепленной прозрачной цилиндрической ёмкостью, частично заполненной двумя несмешивающимися жидкостями. Начало движения системы задавалось посредством наклона полуцилиндра, в каком либо направлении. После получения начального отклонения полуцилиндра, вся гидромеханическая система затем совершала свободные колебания. Весь процесс колебаний регистрировался на видеокамеру Айфон 5С (I phone 5s) и затем анализировался на персональном компьютере Samsung. Эксперимент проводился при следующих значениях параметров: радиус полуцилиндра $R = 0.05$ [м], жидкости – вода и подсолнечное масло, заполняли цилиндрическую ёмкость радиусом $r_0 = 0.035$ [м], высоты слоёв жидкостей составляли соответственно $h_2 = 0.025$ [м] и $h_1 = 0.05$ [м].

В эксперименте был зафиксирован период колебаний полуцилиндра с двумя жидкостями $T^{экс}$, что отвечало 2-ой главной собственной частоте колебаний $\omega_2^{мер} = 4.153$ [1/с]. На данной частоте были зарегистрированы колебания жидкостей, отвечающие 2-ой главной частоте колебаний, при которой поверхности раздела совершали колебания в противофазе.

Было проведено четыре эксперимента по определению периода колебаний твёрдого полуцилиндра и твёрдого полуцилиндра с жидкостями. В процессе обработки результатов проведенного эксперимента были определены:

- а) среднее арифметическое значение периода - \bar{T}
- б) отклонение измеренных периодов колебаний T_i от среднего значения \bar{T} , то есть $(T_i - \bar{T})$ и квадраты полученных отклонений $(T_i - \bar{T})^2$
- в) и полуширина доверительного интервала - $\Delta\bar{T}$

$$\Delta\bar{T} = t_{p.f} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\infty} (T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}}, \quad t_{p.f} \text{ - множитель, отвечающий доверительной вероятности}$$

$P = 0.95$ при числе измерений $n = 4$

$$\bar{T} = \frac{1}{i} \sum_{i=1}^{\infty} T_i \text{ - среднее из } i \text{ измерений.}$$

Результаты обработки эксперимента приведены в таблицах (5.1) и (5.2).

Таблица (5.1)

i	$T_i, [c]$	$(T_i - \bar{T}), [c]$	$(T_i - \bar{T})^2, [c^2]$	$\Delta\bar{T}$	Результаты измерения периода твёрдого полуцилиндра $T_y^{\text{ЭК}} = \bar{T} \pm \Delta\bar{T}, [c]$
1	0.555	0.002	0.000004	0.131	$T_y^{\text{ЭК}} = 0.553 \pm 0.131 [c]$
2	0.650	0.097	0.009409	0.131	$\omega_y^{\text{ЭК}} = 11.35 [1/c]$
3	0.450	-0.103	0.011	0.131	
4	0.560	0.007	0.00005	0.131	

Таблица (5.2)

i	$T_i, [c]$	$(T_i - \bar{T}), [c]$	$(T_i - \bar{T})^2, [c^2]$	$\Delta\bar{T}$	Результаты измерения периода твёрдого полуцилиндра с 2-мя жидкостями $T_y^{\text{ЭК}} = \bar{T} \pm \Delta\bar{T}, [c]$
1	1.514	-0.044	0.001936	0.117	$T_y^{\text{ЭК}} = 1.558 \pm 0.117 [c]$
2	1.651	0.093	0.008649	0.117	$\omega_y^{\text{ЭК}} = 4.033 [1/c]$
3	1.485	-0.073	0.005329	0.117	
4	1.581	0.023	0.000529	0.117	

Ниже приведена фотография, проведённого эксперимента, и результаты теоретических расчетов.

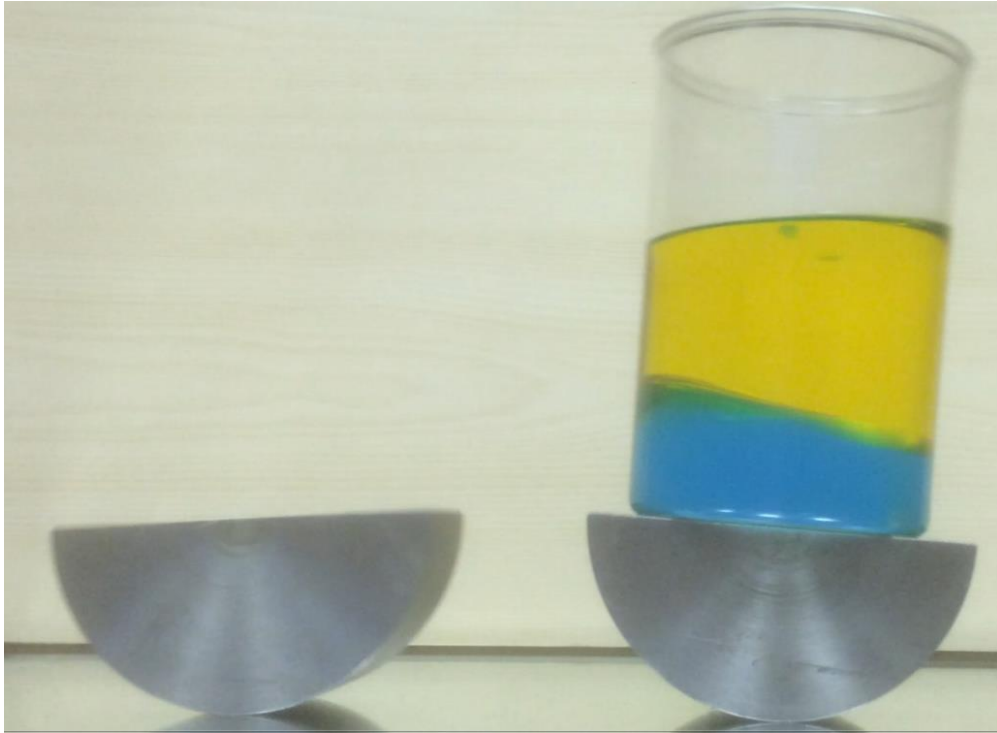


Рис. 5.7. Колебания полуцилиндра без жидкостей и с двумя жидкостями

Частота колебания полуцилиндра без жидкостей определяется по формуле

$$\omega_u^{теор} = 1 / \sqrt{\frac{R}{g}(9\pi/8 - 2)} = 11.51 [1/c], \quad T_u^{теор} = 0.546 [c], \quad (5.1)$$

Частота колебания полуцилиндра с двумя жидкостями определялась по формуле (4.149) гл. IV

$$\omega_u^{теор} = 4.445 [1/c], \quad T_u^{теор} = 1.414 [c], \quad (5.2)$$

Вывод по главе 5

Приведенные результаты экспериментального исследования динамических характеристик колебаний жидкостей и твёрдого полуцилиндра с жидкостями дают удовлетворительные совпадения с расчетами, полученными из теоретических формул. Результаты могут быть использованы при проектировании транспортных систем с криогенными жидкостями или сжиженными газами. Проведенное экспериментальное исследование подтвердило правильность полученных теоретических результатов.

ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Разработаны методы определения собственных частот колебаний идеальной многослойной жидкости: метод конечных элементов, метод маятниковых аналогов.
- Частоты совместных колебаний многослойной жидкости в ограниченном объёме всегда меньше при прочих равных условиях, соответствующих частот колебаний свободной поверхности однородной жидкости.
- В диссертации теоретически и экспериментально исследованы колебания многослойной идеальной и вязкой жидкостей в неподвижных и подвижных баках различных формы, а также рассмотрены движения слоистой жидкости полностью или частично заполняющей полость подвижного твёрдого тела.
- Исследовано влияние движения слоистой жидкости на устойчивость колебаний твёрдого тела, совершающего плоское движение без скольжения на горизонтальной плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авраменко О. В., Наратовый В. В., Селезов И. Т. Условия прохождения волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2014. –57, № 1. – С. 105–114.
2. Ай Мин Вин. Колебания криогенной жидкости в неподвижном баке. // Наука и образование, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., № 9, 2014. Режим доступа: <http://technomag.bmstu.ru/doc/726215.html> (дата обращения 15.02.2015)
3. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Определение собственных частот внутренних волн в существенно неоднородной жидкости. // Известия АН. Физика атмосферы и океана. № 6. 1997. С. 112-119.
4. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость. // Механика твердого тела. №1. 1986. С. 27-36.
5. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость. // Механика твердого тела. №2. 1987. С. 52-58.
6. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Управление колебания неоднородной тяжелой жидкости в подвижном сосуде. // Механика твердого тела. №3. 1985. С. 27-35.
7. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение колебаний тела с полостью, заполненной стратифицированной жидкостью // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 53-60.
8. Архаров А.М., Кунис И.Д. Криогенные заправочные системы ракетно-космических комплексов/ Под. ред. И.В. Бармина.-М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Бвумана, 2006.-252 с.
9. Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. – К.: Наукова думка, 1992. – 592 с.

10. Бужинский В.А., Колебания тел с острыми кромками в несжимаемой маловязкой жидкости и некоторые задачи гидродинамики космических аппаратов. Диссертация...док. физ. мат. наук. ЦНИИмаш Королев. 2003. 280 с.
11. Болонов Н.И., Лобачев В.Г., Пригода Н.А. Моделирование развития турбулентного следа в слоисто-стратифицированной среде // Вісник Донецького національного університету. - 2010. - №1. - С. 23-34. - (Серія А. Природничі науки)
12. Борисов Д. И. Собственные колебания идеальной жидкости в сосудах с перфорированными перегородками // Прикладна гідромеханіка. 2010. Том 12, N 2. С. 8 – 19.
13. Борисов И. Д., Пославский С. А., Руднев Ю.И. Устойчивость равновесия системы несмешивающихся токонесущих жидкостей в магнитном поле // Прикладна гідромеханіка. — 2006. — Т. 8, № 4. — С. 3-14. — Бібліогр.: 23 назв. — рос.
14. Брысев А. П., Юров В. Ю. Возбуждение колебаний границы несмешивающихся жидкостей импульсным ультразвуковым пучком, параллельным границе раздела // Письма в ЖЭТФ, 2014, том 99, вып. 2, с. 94 – 98 с.
15. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Волны в стратифицированных средах.: М. Наука. 2015 г. 740 с.
16. Вин Ко Ко, Темнов А. Н. Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде и их механические аналоги// Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 57-69.
17. Вин Ко Ко, Темнов А. Н. Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде, совершающим плоское движение// Наука и образование, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., № 10, 2016.

18. Вин Ко Ко, Темнов А. Н. Расчет колебаний дискретно-стратифицированных жидкостей методом конечных элементов// Наука и образование, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., № 05, 2016.
19. Вин Ко Ко. О колебаниях полуцилиндра, имеющего цилиндрическую полость с несмешивающимися жидкостями// Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Машиностроение.2017. № 6. С. 89-98.
20. Вин Ко Ко, Темнов А. Н. Экспериментальное и теоретическое исследование колебаний твердого тела со слоистой жидкостью// Инженерный журнал: наука и инновации, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., № 04, 2018. С. 1-13.
21. Габов С.А., Свешников А.Г. Задачи динамики стратифицированных жидкостей. –М.: Наука, 1986.-288 с.
22. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи нестационарных внутренних волн. –М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1990.-344 с.
23. Газиев Э. Л. Моделирование собственных колебаний системы «идеальная капиллярная жидкость-баротропный газ» в цилиндрическом контейнере / Э. Л. Газиев // Book of Abstracts of Crimean International Mathematics Conference (СІМС-2003). Симферополь: КНЦ НАНУ, 2013. –Т. 3 –С. 51-52.
24. Ганичев А. И., Домашенко А. М., Матвеев А. В., Несмелов А. Г., Темнов А. Н. Теоретическое и экспериментальное исследование параметрических колебаний поверхности жидкости при вертикальных вибрациях сосудов различной формы: В сб. Неустановившиеся процессы в криогенных системах / Под ред. чл.-кор. АН СССР К. С. Колесникова // Тр. МВТУ № 406. –М., 1984.
25. Ганичев А. И., Качура В. П., Темнов А. Н. Малые колебания двух несмешивающихся жидкостей в подвижном цилиндрическом сосуде. – В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью, Новосибирск, НЭТИ, 1974, С. 82-88.

26. Гончаров Д. А. Динамика двухслойной жидкости разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения // Наука и образование, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., № 11, 2013.
27. Грибков В.А., Адаменко Р.А. Двумерная модель жидкости для расчета собственных частот колебаний осесимметричных гидрооболочечных систем. Инженерный журн.: наука и инновации, 2017, вып. 3.
28. Грибков В.А., Хохлов А. О. Определение динамических характеристик многозвенной системы с сопоставлением расчетных и экспериментальных результатов// Наука и образование, МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн., № 09, 2015.
29. Григорьев А. И., Федоров М. С., Ширяева С. О. Волновое движение в поле силы тяжести на свободной поверхности и на границе стратификации слоистонеоднородной жидкости. Нелинейный анализ//Изв. РАН. Механика жидкости и газа.–2010. –№ 5. –С. 130–140.
30. Гушин В. А., Рождественская Т. И. Численное исследование явлений, возникающих вблизи кругового цилиндра в течениях стратифицированных жидкостей с небольшими периодами плавучести // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 6(310), С. 69-76.
31. Дерендяев Н.В. Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2014 г. — 154 с.
32. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательного аппарата с деформируемыми элементами – М.: Машиностроение. 1987. – 231 с.
33. Ершов Н.Ф., Шахверди Г.Г. Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости. Ленинград: Судостроение. 1984 г. -237с.
34. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч. Т. II., Гостехиздат, 1948. 143 с.

35. Иванова А.А., Сальникова А.Н. Динамика двухжидкостной системы во вращающемся горизонтальном цилиндре при продольных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 3. С. 39-46.
36. Калиниченко В. А., Секерж-Зенькович С. Я. Экспериментальное исследование волн Фарадея максимальной высоты // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. –2007. – № 6. – С. 103–110.
37. Калиниченко В. А., Секерж-Зенькович С. Я. Экспериментальное исследование вторичных стационарных течений в поверхностных волнах Фарадея // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2008. – № 1.– С. 141–148.
38. Калиниченко В.А. Лабораторное исследование параметрической неустойчивости в двухслойной жидкости//Физика атмосферы и океана, № 2. 1986 г. С. 206-210.
39. Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я. Параметрический резонанс в гидродинамическом эксперименте // Актуальные проблемы механики / Отв. ред. Ф.Л. Черноусько; Ин-т проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. - М.: Наука, 2008 - 50 лет Институту проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. - 2015. (510 с.). С. 140-159.
40. Калиниченко В.А., Нестеров С.В., Секерж-Зенькович С.Я. Теоретическое и экспериментальное исследование параметрического возбуждения волн конечной амплитуды в двухслойной жидкости. // Волны и дифракция. 9 Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Тбилиси: 1985, т. 2. С. 53-56.
41. Калиниченко В.А., Секерж-Зенькович С.Я., Тимофеев А.С. Экспериментальное исследование поля скоростей параметрически возбуждаемых волн в двухслойной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 161-166.
42. Калиниченко В.А., Со А.Н. Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 12. 11 с. [Свидетельство о регистрации СМИ Эл № ФС77-53688 от 17.04.2013 г. ISSN 2308-6033](#)

43. Козлов Н. В., Козлова А. Н., Пичкалев С. В. Динамика двухжидкостной системы во вращающемся горизонтальном цилиндре//Конвективные течения...Вып. 2, Пермь, 2005, с.
44. Козлов Н.В., Шувалова Д.А. Экспериментальное измерение инерционных колебаний границы раздела несмешивающимися жидкостей в горизонтальной цилиндрической полости при вращении// Современные проблемы науки и образования. – 2014.–№ 6.
45. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
46. Колесников К.С., Пожалостин А.А., Шкапов П.М. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. 2012. № 58. С. 15-30.
47. Колесников К.С., Пожалостин А.А., Шкапов П.М. Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского. 2012.№7(7)
[URL:http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/285.html](http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/285.html) (дата обращения: 21.09.2015)
48. Кононов Ю. Н. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на "свободной" и внутренней поверхностях / Ю. Н Кононов, Е. А Татаренко // Акустический вестник. — 2003. —Т.6,№ 3.-С.44-52.
49. Кононов Ю. Н. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко//Прикладная гидромеханика.-2008.-№1.-С.33-38.
50. Кононов Ю. Н., Татаренко Е. А. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на “свободной” и внутренней поверхностях // Акустичний вісник. 2003. Том 6, N 3. С. 44 – 52
51. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П. Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими инерционными мембранами на свободной и внутренней поверхностях // Теор. прикл. мех.– 2001.– N 32.– С. 158–163.

52. Кононов Ю. Н., Шевченко В. П. Свободные колебания многослойной стратифицированной жидкости, разделенной упругими мембранами // Теор. прикл. мех.– 1999.– N 29.– С. 151–163.
53. Кононов Ю.Н., Федорчук А.И. Влияние перегрузки на свободные колебания кольцевой невесомой мембраны, расположенной на свободной поверхности жидкости // Вісник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. – 2015. – № 1-2. С. 109-115.
54. Копачевский Н. Д. О колебаниях несмешивающихся жидкостей. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. № 5. С. 1249-1263.
55. Копачевский Н. Д. Применение метода С. Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости. Ж.В.М. и М.Ф., Т.16, № 2, 1976, С.426-439.
56. Копачевский Н. Д., Темнов А. Н. Колебания идеальной стратифицированной жидкости в цилиндрическом бассейне при переменной частоте плавучести. // Диф. Уравн. Т. 24. 1988. С. 1784-1796.
57. Копачевский Н. Д., Темнов А. Н. Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 5. С. 734-755.
58. Копачевский Н. Д., Темнов А. Н. Свободные колебания вязкой стратифицированной жидкости в сосуде // Деп. в ВИНТИ 16.08.1983, № 4531-83 ДЕП. – 45 с.
59. Копачевский Н. Д., Цветков Д. О. Колебания стратифицированной жидкости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 29. С. 103-130.
60. Копачевский Н. Д., Цветков Д. О. Колебания стратифицированных жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 29 (2008). С. 103–130.
61. Кочин Н. Е., Кибель И. Л., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, физматгиз, Т.1. 1963. 583 с.

62. Кравцов А. В., Секерж-Зенькович С. Я. Параметрическое возбуждение колебаний вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде//Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1993, Т. 33, № 4, С. 611–619.
63. Краусс В. Внутренние волны. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. 272 с.
64. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
65. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошной среды. – М.: “НАУКА” 1986. 735 с.
66. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 215 с.
67. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. 185с.
68. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М., Машиностроение, 1968, 532 с.
69. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
70. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение, 1971. 563с.
71. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. –Л.: Гидрометеиздат, 1981. -304 с.
72. Моисеев Г. А. Движение твердого тела, имеющего полость, целиком заполняющую двумя несмещивающимися жидкостями. – В кн.: Математическая физика, Киев, 1973, в. 12, с. 66-73.
73. Моисеев К. В. Слоистые течения при естественной конвекции слабо стратифицированной жидкости//Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 88–93.
74. Моисеев Н. Н. Вариационные задачи в теории колебаний ограниченного объема жидкостью // Вариационные методы в задачах колебаний жидкости и тела с жидкостью. – М.:, 1962. С. 9-118.

75. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.
76. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Наука, М., 1966. 440 с.
77. Моисеев Н.Н. Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85, №4. С. 719-722.
78. Мотыгин О. В., Стурова И. В. Волновые движения в двухслойной жидкости, вызванные малыми колебаниями цилиндра, пересекающего границу раздела // Изв. РАН, МЖГ. 2002. № 4. С. 105-119.
79. Насонкина А. В. Три спектральные гидродинамические задачи о собственных колебаниях системы идеальных жидкостей в цилиндрическом сосуде // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика» Том 21(60), № 1. 2008 г. С. 11–23.
80. Нестеров С.В. Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофиз. исследования. 1969. № 3(45). С. 87-97.
81. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // инженерный журнал: наука и инновация, 2013, вып. 12. [URL: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1147.html](http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1147.html) (дата обращения 19.9.2017)
82. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А., Кокушкин В.В. Малые колебания двухслойной жидкости с учетом проницаемости разделителя // Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. “Естественные науки”. 2014. С. 109-116.
83. Попов Д. Н., Панайотти С.С., Рябинин М. В. Гидромеханика. М.: Учебное пособие, 2014. 320с.
84. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М., Мишиностроение, 1975. 416 с.

85. Секерж-Зенькович С.Я. Собственные колебания вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде//Прикл. Матем. И механ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 51-57.
86. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Особенности распространения слабонелинейных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью// Динамические системы, том 1(29), №1 (2011),с. 53–68.
87. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовий Ю. В. Нелинейная устойчивость распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости//Прикл. гідромеханіка. –2006. – 8(80),№4.–С. 60–65.
88. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовий Ю. В. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе // Прикл. гідромеханіка.–2005. –7(79),№ 1. –С. 80–89.
89. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовий Ю. В., Наратовый В. В. Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 1. – С. 72–83.
90. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Наратовый В. В. Особенности распространения слабонелинейных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью //Динам. системы. – 2011. – 1(29), № 1. – С. 53–68.
91. Со А.Н. Параметрические колебания маятника на тележке // Молодежный научно-технический вестник. 2013. № 04. 7 с. Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл №. ФС77-51038. ISSN 2307-0609 URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/566982.html>
92. Сретенский Л.Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1951. № 10. С. 1483–1494.
93. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
94. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.-Л.: ОНТИ НКТП, 1936. 303 с.

95. Стурова И.В. Колебания кругового цилиндра в слое линейно стратифицированной жидкости//Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 155-164.
96. Темнов А. Н, Ай Мин Вин. О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твёрдого тела. Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки, 2012. С. 86-101.
97. Темнов А. Н. Колебания идеальной стратифицированной жидкости в неподвижном сосуде // Известия АН СССР, Механика жидкости и газа, 1983. С. 98-106.
98. Темнов А. Н. Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объеме: Диссертация... канд. физ. мат. наук. Москва, 1984. 192 с.
99. Темнов А. Н. Малые колебания идеальной неоднородной самогравитирующей жидкости. Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. 2002. № 2, С. 25-35.
100. Темнов А. Н. О спектре малых колебаний непрерывно стратифицированной жидкости. – В кн.: Нелинейные проблемы аэрогидроупругости. Труды семинара, Казань. 1979. Вып. 11. С. 183-193.
101. Темнов А. Н. Об уравнениях сферического движения твердого тела с неоднородной жидкостью. // Труды МВТУ, 1979. № 306. – С. 31-40.
102. Темнов А. Н. Устойчивость равномерных вращений твердого тела с криогенной жидкостью. // Труды первой международной авиакосмической конференции “человек-земля-космос”, 1995, С. 310-317.
103. Темнов А. Н. Устойчивость стационарных вращений неоднородной жидкости в эллипсоидальной полости. – Изв. ВУЗов, Машиностроение, 1979, № 7, С. 149-151.
104. Филоненко В. С. Метод конечных элементов для спектральной задачи о нормальных колебаниях вязкой экспоненциально-стратифицированной жидкости // ВЕСТНИК ТОГУ «Естественные и точные науки». 2007. № 4 (7). С. 239-248.

105. Цветков Д. О. Малые движения вязкой стратифицированной жидкости // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". 2007. Вып. 22. – С. 73-82.
106. Цветков Д. О. Малые движения идеальной стратифицированной жидкости // Ученые записки Таврического национального университета. Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. 2007. Т. 20 (59). № 1. – С. 80-85.
107. Цветков Д. О. Малые движения системы вязких стратифицированных жидкостей // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". 2007. Вып. 23. С. 63-71.
108. Цветков Д. О. Малые движения стратифицированной жидкости во вращающемся сосуде // Таврический вестник информатики и математики. 2003. Вып. 1. – С. 140-149.
109. Цветков Д. О. Нормальные колебания системы вязких стратифицированных жидкостей // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". 2008. Вып. 24. – С. 39-48.
110. Цветков Д.О. Малые движения вязкой стратифицированной жидкости во вращающемся сосуде // Таврический вестник Математики и Информатики. 2003. № 1. С. 140-149.
111. Чашечкин Ю. Д. Дифференциальная механика жидкостей: согласованные аналитические, численные и лабораторные модели стратифицированных течений. Вестник МГТУ им. Баумана. Сер. Естественные науки, No.6[57].2014. С. 53.
112. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость // М.: ВЦ АН СССР, 1969. 230 с.
113. Чесноков А. А. Свойства и точные решения уравнений движения многослойной стратифицированной мелкой воды // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4(3), с. 1252-1254.

114. Шарфарец Б. П. Теоретические исследования о собственных колебаниях жидкости в органичном цилиндре//НАУЧНОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, 2009, том 19, № 3, с. 21–27.
115. Шклярчук Ф. Н. К расчету осесимметричных колебаний тонких оболочек вращения методом итераций. // Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций. – МАИ. – 1978. – вып. 467. – С. 60 – 65.
116. Шклярчук Ф. Н., Гришанина Т. В. Применение метода отсеков к расчету колебаний жидкостных ракет-носителей. –М.: Изд-во МАИ, 2017. – 160 с.: ил. (ISBN 978-5-4316-0397-6)
117. Шклярчук Ф. Н. О параметрических колебаниях цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью // Колебания упругих конструкций с жидкостью: Сб. трудов II-го Всес. симп. – Новосибирск, 1973.– С. 205 – 208.
118. Camassa R., Rusås P.-O., Saxena A., Tiron R. Fully nonlinear periodic internal waves in a two-fluid system of finite depth // J. Fluid Mech. – 2010. – 652. – P. 259–298.
119. Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // J.Fluid Mech. – 1999. – 396. – P. 1–36.
120. Debsarma S., Das K. P., Kirby J. T. Fully nonlinear higher-order model equations for long internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. – 2010. – 654.–P. 281 – 303.
121. Greenhil A. Waves in a superincumbent strata of liquids. – Amer. Journ., 1887, v. 9, p.82-88.
122. Harrison W.J. the influence of viscosity on the oscillations of superimposed fluids// Proc. London math. Soc.1908. v. 6, p. 396-405.
123. Helmholtz H. Uber diskontinuierliche Tlussigkeitsbewegungen. – Monatsber. Der Kgl. 1868, v.23, p.215-219.
124. Kakinuma T., Yamashita K., Nakayama K. Surface and internal waves due to a moving load on a very large floating structure // J. Appl. Math. – 2012. – 14 p.
125. Lu D. Q., Chwang A. T. Interfacial waves due to a singularity in a system of two semi-infinite fluids // Phys. Fluids. – 2005. – 17. – P. 102107-1–102107-9.

126. M. La Rocca, G. Sciortino, C. Adduce and M. A. Boniforti. "Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface" *Phys. Fluids*, 14, 062101 (2005).
127. Matthew E. Moran, Nancy B. McNelis, and Maureen T. Kudlac. Experimental results of hydrogen slosh in a 62 cubic foot (1750 liter) tank. AIAA-94-3259, 1994.
128. Rayleigh L. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable. – *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1883, v. 14, p.170-178.
129. Selezov I.T., Mironchuk M. V. Propagation of internal harmonic waves in a three-layer liquid// *J. Math.Sci.*– 2000. –Vol. 101, No. 6,P. 3704-3707.
130. Stokes G. On the theory of oscillary waves. *Transact. Cambridge Phil.Soc.*, 1847, v.8, p.441-455.
131. Thorpe S.A. On standing internal gravity waves of finite amplitude.-*J. Fluid Mech.* 1968. v. 32, № 3, p. 489-528.