

На правах рукописи

Колбнева Наталья Юрьевна

Капиллярные осцилляции заряженной поверхности капли и генерация  
электромагнитных волн

Специальность 01.02.05 –  
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Ярославль – 2018

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова» в учебно-научной лаборатории математического моделирования физических процессов.

Научный руководитель: **Ширяева Светлана Олеговна**, доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, профессор учебно-научной лаборатории математического моделирования физических процессов

Официальные оппоненты: **Садыков Наиль Рахматуллович**, доктор физико-математических наук, Снежинский физико-технический институт – «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», профессор кафедры общей физики

**Аджиев Анатолий Хабасович**, доктор физико-математических наук, профессор, Высокогорный геофизический институт, заведующий отделом стихийных явлений

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Защита состоится «25» октября 2018 г. в 15 ч. 00 м. на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 на базе Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН по адресу: 119526, г. Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН и на сайте: <http://ipmnet.ru>

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 002.240.01  
кандидат физико-математических наук

 Е.Я. Сысоева

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы и объект исследования.** Исследование заряженных капель, осциллирующих во внешних электростатических полях, и физических закономерностей реализации их неустойчивости актуально в связи с многочисленными приложениями капиллярного распада капель в академическом знании (научное приборостроение), технике и технологии. Так капиллярный распад заряженных капель используется при создании ионно-кластерно-капельных пучков в жидкостной масс-спектрометрии (для анализа трудно летучих веществ и веществ органического происхождения), в жидкометаллических источниках ионов, в жидко-металлической эпитаксии и литографии, при получении порошков тугоплавких металлов, в реактивной космической технике, для быстрого рассеяния оптически плотных аэродисперсных систем, при создании потоков монодисперсных капель в термоядерном синтезе, в каплеструйной печати, ускорителях макрочастиц, при электрораспылении инсектицидов, горюче-смазочных материалов, лаков и красок. Кроме того, явление диспергирования заряженных капель во внешних электрических полях используется для истолкования разнообразных геофизических феноменов: огней Св. Эльма, свечения воронок смерчей, инициирования разряда молнии и сбора ею зарядов с отдельных облачных капель для поддержания своего существования. В частности, осцилляции заряженных капель во внешних электрических полях приводят к появлению радиоизлучения из грозowych облаков. Этой проблеме и посвящено данное исследование.

Капиллярные осцилляции заряженной капли во внешнем электрическом поле делают её источником радиоизлучения. Наличие радиоизлучения от осциллирующих во внешних полях заряженных облачных капель, представляет интерес в связи с проблемами радиолокационного зондирования облаков и туманов, проблемой радиопомех от огней Св. Эльма (иногда появляющихся на обшивке самолётов).

Экспериментальные исследования характеристик электромагнитных волн, генерируемых капиллярными осцилляциями заряженной поверхности капель в конвективных облаках и на стадии грозообразования, начались в 1965 году. Наиболее значимый вклад в эти разработки связан с именами Л.Г. Качурина и А.Х. Аджиева. На основании проведенных лабораторных и натурных исследований они зафиксировали наличие электромагнитного излучения при фазовых переходах воды, а с помощью радиолокаторов получили импульсно-временные характеристики радиоизлучения облаков, которые показали резкое увеличение частоты следования и амплитуды импульсов радиоизлучения от развивающихся негрозовых облаков. Интенсивность такого излучения,

обнаруживаемого в широком диапазоне радиочастот, много меньше по сравнению с интенсивностью отдельных импульсов молниевых разрядов, поэтому оно получило название непрерывно-шумового радиоизлучения. На сегодняшнее время проблема регистрации существующими радиолокационными станциями электромагнитного излучения конвективных облаков достаточно актуальна. В этой связи представляется необходимым провести исследование на основе идей и подходов механики сплошной среды особенностей осцилляций заряженной поверхности облачных капель и уточнения характеристик генерируемых при этом электромагнитных волн (интенсивность, диапазон частот).

Впервые проблема теоретического расчета интенсивности радиоизлучения, генерируемого капиллярными осцилляциями поверхности заряженной капли, на основе закона сохранения энергии была сформулирована в 1982 году В.И. Калечицем, И.Е. Нахутиным, П.П. Полуэктовым.

Обсуждаемая проблема, связанная с радиолокационным зондированием метеорологических объектов с целью их изучения, приводит к необходимости исследования физических закономерностей реализации капиллярного волнового движения на поверхности заряженных капель, осциллирующих во внешних электростатических полях.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.** Тема настоящей диссертационной работы соответствует паспорту специальности 01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы», а именно соответствует области исследований, указанных в пункте № 8 «Физико-химическая гидромеханика (течения (осцилляции капель) при наличии излучения)», в пункте № 14 «Линейные и нелинейные (стоячие) волны в жидкостях», в пункте № 16 «Гидромеханика сред, взаимодействующих с электромагнитным полем (излучающих электромагнитные волны)», в пункте № 18 «Аналитические, асимптотические методы исследования уравнений континуальных моделей однородных сред (методы прямого моделирования)», в пункте № 19 «Гидродинамические модели природных процессов». Данная диссертационная работа соответствует формуле научной специальности: изучение на основе идей и подходов механики сплошной среды процессов и явлений, сопровождающих течения однородных сред при механических, тепловых и электромагнитных воздействиях; исследование математических моделей для описания параметров потоков движущихся сред (осцилляций заряженных капель) с целью прогнозирования природных явлений.

**Предметом исследования** являются капиллярные осцилляции заряженных и незаряженных капель идеальной жидкости в однородном электростатическом поле и радиоизлучение от таких объектов на основе идей и подходов механики сплошной среды.

**Целью** данного диссертационного исследования является исследование капиллярных осцилляций заряженных капель во внешнем электростатическом поле и изучение закономерностей генерации ими радиоизлучения.

Для достижения заданной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. построить математическую модель капиллярного волнового движения поверхности заряженной капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости во внешнем электростатическом поле на основе физико-химической гидродинамики в асимптотических расчётах линейного приближения по безразмерной амплитуде осцилляций при использовании двух методов расчета: на основе энергетического подхода Калечица-Полуэктова и на основе общей теории излучения;

2. применить построенную модель к изучению капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли и проанализировать возможность появления электромагнитных волн при расчете методом Калечица-Полуэктова;

3. применить построенную модель к изучению капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли и на основе физико-химической гидродинамики и общей теории излучения, изучить возможность генерации электромагнитных волн квадрупольного типа;

4. применить построенную модель к изучению капиллярных осцилляций поверхности незаряженной капли в однородном электростатическом поле на основе идей и подходов механики сплошной среды и методом Калечица-Полуэктова проанализировать возможность возникновения электромагнитных волн;

5. применить построенную модель к изучению капиллярных осцилляций поверхности незаряженной капли в однородном электростатическом поле и в рамках физико-химической гидродинамики на основе общей теории излучения изучить возможность генерации электромагнитных волн дипольного и квадрупольного типов;

6. применить построенную модель к изучению капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли в однородном электростатическом поле и на основе идей и подходов механики сплошной среды методом Калечица-Полуэктова изучить особенности возникающих при этом электромагнитных волн;

7. применить построенную модель к изучению капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли в однородном электростатическом поле и в модели общей теории излучения изучить возможность генерации электромагнитных волн дипольного типа;

8. сравнить два возможных пути теоретического расчета: на основе закона сохранения энергии в рамках физико-химической гидродинамики на основе идей и подходов механики сплошной среды и на основе общей теории излучения.

### **Научная новизна.**

1. выполнено аналитическое асимптотическое исследование в рамках физико-химической гидродинамики закономерностей реализации капиллярного волнового движения на поверхности заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле;

2. найдена на основе идей и подходов механики сплошной среды асимптотическим методом возникающая при капиллярных осцилляциях заряженной капли квадрупольная компонента электромагнитного излучения;

3. найдена асимптотическим методом возникающая при капиллярных осцилляциях в однородном электростатическом поле незаряженной капли дипольная и квадрупольная компоненты электромагнитного излучения;

4. найдена асимптотическим методом в рамках физико-химической гидродинамики возникающая при капиллярных осцилляциях во внешнем электростатическом поле заряженной капли дипольная компонента электромагнитного излучения;

5. найдено на основе идей и подходов механики сплошной среды, что теоретические расчеты интенсивности излучения, возникающего при осцилляциях заряженной поверхности капель, на основе закона сохранения энергии совпадают с расчетами, проведенными на основе общей теории излучения.

**Практическая значимость.** Результаты теоретического анализа капиллярных волн заряженной поверхности капель, а также полученные оценки интенсивности радиоизлучения, возникающего при капиллярных осцилляциях заряженной поверхности внутриоблачных капель, могут быть использованы в радиолокации, авиации и гидрометеорологических приложениях. В теории грозового электричества полученные результаты способствуют более глубокому пониманию природы радиоизлучения облаков на разных стадиях развития грозовой деятельности. Результаты диссертации найдут практическое применение при решении задач радиофизики.

**Методология и методы исследования.** Аналитическое исследование закономерностей реализации капиллярного волнового движения поверхности осциллирующих в однородном электростатическом поле заряженных капель и связанной с этим процессом генерации электромагнитных волн проведено в рамках методов механики сплошной среды, электрогидродинамики, гидродинамики. Используются аналитические асимптотические методы математического моделирования.

### **Научные положения и результаты, выносимые на защиту.**

1. анализ средствами математической физики капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли и расчет интенсивности возникающего при этом радиоизлучения квадрупольного типа;

2. анализ средствами математической физики капиллярных осцилляций поверхности незаряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле и расчет интенсивности возникающего при этом радиоизлучения дипольного и квадрупольного типов;

3. анализ средствами математической физики капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли в однородном электростатическом поле и расчет интенсивности возникающего при этом радиоизлучения дипольного типа;

4. сравнение интенсивности излучения, возникающего при капиллярных осцилляциях поверхности капель, оценка которого проведена в рамках общей теории излучения, с расчётами на основе закона сохранения энергии.

**Степень достоверности.** Полученные результаты являются достоверными, так как обусловлены использованием строгих математических моделей, соответствующих классическим представлениям механики сплошной среды, электрогидродинамики, математической физики.

**Апробация результатов.** Результаты настоящей работы докладывались и обсуждались на: Международной научно-практической конференции «Математическое образование и наука в технических и экономических вузах» (Ярославль, ЯГТУ, 2014); II, III, IV, V Международных молодежных научно-практических конференциях «Путь в науку», секция «Физика. Электрогидродинамика» (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2014, 2015, 2016); XVIII Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Состав атмосферы. Атмосферное электричество. Климатические процессы» (Борок, Геофизическая обсерватория «Борок», филиал Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта, 2014); XXII, XXIII Международных молодежных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», секция «Математика и механика. Гидромеханика» (Москва, МГУ, 2015, 2016, 2018); XI Международной научной конференции «Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики» (Петергоф, СПбГУ, 2015); XI Международной научной конференции «Волновая электродинамика проводящей жидкости. Долгоживущие плазменные образования и малоизученные формы естественных электрических разрядов в атмосфере» (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2015); XV Всероссийской школе-семинаре «Волновые явления в неоднородных средах» имени профессора А.П. Сухорукова («Волны-2016») (Можайск, МГУ, 2016).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 10 работах, из них 5 статей – в рецензируемых журналах, входящих в список изданий, рекомендованных ВАК. Список работ приведен в конце диссертации.

**Личный вклад автора.** Колбнева Н.Ю. принимала участие во всех стадиях подготовки публикаций. В работах [1-5] подробное проведение аналитических расчетов и анализ полученных результатов выполнены автором лично. В работах [1-5] определение направлений исследований, постановка задач и оформление публикаций выполнены совместно с научным руководителем Ширяевой С.О. и зав. лабораторией, профессором Григорьевым А.И.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, раздела «Рекомендации экспериментаторам», раздела «Результаты и выводы», списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 201 страницу, в том числе 32 рисунка. Список литературы состоит из 161 наименования, включая работы диссертанта по теме исследования.

### **Основное содержание диссертационной работы**

**Во введении** обосновывается актуальность темы исследования, сформулированы цели и задачи работы. Обозначены объект и предмет исследования, научная новизна, практическая значимость диссертации, методология и методы исследования. Перечислены научные положения и результаты, выносимые на защиту. Приведены данные по апробации результатов работы и их степени достоверности. Дана информация о публикациях результатов исследований. Описаны структура и объем диссертации.

**В первой главе** представлен обзор научной литературы по современному состоянию исследуемой проблемы. Рассмотрено историческое развитие поставленной проблемы, определены основные направления, теоретические подходы и методы исследования диссертационной работы.

**Вторая глава** посвящена аналитическому асимптотическому исследованию в первом порядке малости по безразмерной амплитуде осцилляций заряженной поверхности капли и генерации при этом электромагнитных волн.

**В разделе 2.1** на основе идей и подходов механики сплошной среды в рамках физико-химической гидродинамики рассматривается задача о расчете капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли (с зарядом  $Q$ ) радиуса  $R$  идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с массовой плотностью  $\rho_1$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , находящейся в идеальной несжимаемой диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{ex}$  и массовой плотностью  $\rho_2$ , и генерации при этом электромагнитных волн, исходя из закона сохранения энергии.



Полная электрогидродинамическая формулировка задачи состоит из уравнения Эйлера и уравнения неразрывности:

$$\frac{d\vec{V}_j(\vec{r},t)}{dt} = -\frac{1}{\rho_j} \nabla P_j(\vec{r},t); \quad \text{div}\vec{V}_j(\vec{r},t) = 0; \quad j = 1;2;$$

волнового уравнения для напряженности электрического поля вдали от заряженной поверхности капли (в волновой зоне) и уравнения неразрывности для напряженности:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2}; \quad \text{div}\vec{E}(\vec{r},t) = 0;$$

с естественными граничными условиями ограниченности поля скоростей и напряженности поля в начале координат и на бесконечности:

$$r \rightarrow 0: \quad \vec{V}_1(\vec{r},t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \vec{V}_2(\vec{r},t) \rightarrow 0; \quad \vec{E}(\vec{r},t) \rightarrow 0;$$

с гидродинамическими и электрическими граничными условиями на поверхности капли:

$$r(\theta,t) = R + \xi(\theta,t), \quad |\xi(\theta,t)| / R \ll 1:$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{V}_j, \nabla) F = 0; \quad F(r,\theta,t) \equiv r - R - \xi(\theta,t);$$

$$P_1 - P_2 + \varepsilon_{ex} \vec{E}^2 / 8\pi - \sigma \text{div}\vec{n} = 0; \quad (\vec{\tau}(\vec{r},t), \vec{E}(\vec{r},t)) = 0; \quad \vec{r} = \nabla F / |\nabla F|;$$

и дополнительными интегральными условиями сохранения объема капли, неподвижности её центра масс и сохранения полного заряда:

$$\int_V dV = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \int_V \vec{r} dV = 0; \quad V = [0 \leq r \leq R + \xi(\theta,t); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}, \vec{E}) dS = Q; \quad S = [r = R + \xi(\theta,t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \quad (1)$$

где  $\xi(\theta,t)$  – возмущение поверхности капли,  $\vec{V}_j(\vec{r},t)$  – поля скоростей жидкости ( $j=1$ ) и внешней среды ( $j=2$ ),  $\vec{E}(\vec{r},t)$  – напряженность электрического поля.

В задаче использована модель потенциального движения жидкости в капле и среде:  $\vec{V}_j(\vec{r},t) = \nabla \psi_j(\vec{r},t)$ , где  $\psi_j(\vec{r},t)$  – гидродинамический потенциал поля скоростей в капле и внешней среде.

Задача решалась аналитически асимптотически путем разложения неизвестных функций по малому параметру, в качестве которого выступает отношение амплитуды осцилляций к радиусу капли, в линейном приближении.

В ходе решения задачи получено дисперсионное уравнение:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n+1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \left\{ 4W(G(kR)n(n+1)+2) + (n-1)(n+2) \right\};$$

$$G(kR) \equiv \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R}; \quad W \equiv \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_{ex}\sigma R^3}; \quad (2)$$

$h_n^{(2)}(kr)$  – сферическая функция Бесселя третьего рода,  $k$  – волновое число.

Решение уравнения (2) имеет комплексный вид  $\omega_n = \text{Re } \omega_n + i \text{Im } \omega_n$ :

$$(\text{Re } \omega_n)^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n+1)(n-1)}{[(n+1)\rho_1 + \rho_2 n]} [(n+2) - 4W];$$

$$\text{Im } \omega_n = 2W \left[ \frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{(n+1)^{n+2} n^n (n-1)^n}{[\rho_2 n + (n+1)\rho_1]^{n+1}} \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2} c^{2n+1}} [(n+2) - 4W]^n.$$

Здесь вещественная часть  $\text{Re } \omega_n$  определяет частоту собственных осцилляций заряженной капли, а мнимая часть  $\text{Im } \omega_n$  – затухание капиллярных осцилляций, невозможное в идеальной жидкости. Из этого обстоятельства делается вывод о возможном источнике потери энергии осцилляций: излучении каплей электромагнитных волн.

Выражение для интенсивности электромагнитного излучения определяется как скорость убывания энергии механических колебаний капли, которая на основании теоремы вириала представляется как удвоенная средняя за период осцилляций кинетическая энергия волнового движения в капле, связанная с  $n$ -й модой.

В итоге, для мелкой единичной капли с характерным зарядом  $Q = 1.8 \cdot 10^{-3}$  СГСЭ ( $\sim 0.9W_{кр}$  ( $W_{кр}$  – критическое значение параметра Релея) при  $R = 10$  мкм и  $\sim 0.18W_{кр}$  при  $R = 30$  мкм), осциллирующей на основной (второй) моде при  $R = 12$  мкм получено значение интенсивности  $I \sim 1 \cdot 10^{-40}$  эрг/с на частоте  $\approx 400$  кГц. Для капли размером  $R = 20$  мкм интенсивность излучения составила  $I \sim 5 \cdot 10^{-41}$  эрг/с на частоте  $\approx 300$  кГц. Интегральная интенсивность излучения из облака диаметром 5 км будет уже в  $7 \cdot 10^{19}$  раз больше по сравнению с интенсивностью излучения единичной капли.

В разделе 2.2 на основе идей и подходов механики сплошной среды исследуются капиллярные осцилляции поверхности незаряженной капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости в идеальной несжимаемой диэлектрической среде в однородном электростатическом поле напряжённостью  $\vec{E}_0$  и возможности появления электромагнитных волн на основе закона сохранения энергии.

Гидродинамическая математическая постановка такой задачи аналогична (1) с поправкой на искажение равновесной формы капли и на

расчет напряженности электрического поля индуцированного заряда в волновой зоне. Задача решается классическими методами гидродинамики в линейном приближении по отношению амплитуды осцилляций к радиусу капли.

Расчеты нулевого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций показали, что под действием внешнего электрического поля, задающего выделенное направление, равновесная форма поверхности капли становится сфероидальной  $r(\theta) = R \left( 1 + e^2 \frac{1}{3} P_2(\cos \theta) \right)$ , где

$e^2 = 9\varepsilon_{ex} E_0^2 R / 16\pi\sigma$  ( $e^2 \ll 1$ ),  $P_n(\cos \theta)$  – полином Лежандра  $n$ -го порядка.

В расчетах первого порядка малости найдено дисперсионное уравнение:

$$\omega_n^2 = \frac{n(n+1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \frac{\sigma}{R^3} \left\{ (n-1)(n+2) + e^2 \left( 4S_1 + \frac{1}{3} S_2 \right) \right\};$$

$$S_1 \equiv \left( (n+1)(n+2)\mu_n^+ K_{1,n+1,n} G_{n+1}(kR) + n(n-1)\mu_n^- K_{1,n-1,n} G_{n-1}(kR) \right);$$

$$S_2 \equiv 2 \left( 4 + (4 - n(n+1)) K_{2,n,n} \right) - \frac{(n-1)(n+2)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \times$$

$$\times \left( \rho_1 \frac{(n+1)}{n} (nK_{2,n,n} + L_{2,n,n}) + \rho_2 \frac{n}{(n+1)} ((n+1)K_{2,n,n} - L_{2,n,n}) \right);$$

с решениями:

$$(\text{Re } \omega_n)^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n+1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \times$$

$$\times \left\{ (n-1)(n+2) + e^2 \left( -4 \left( (n+2)\mu_n^+ K_{1,n+1,n} + n\mu_n^- K_{1,n-1,n} \right) + \frac{1}{3} S_2 \right) \right\};$$

$$\text{Im } \omega_n = 2e^2 \left( \mu_n^+ K_{1,n+1,n} \left[ \frac{2^{n+1} n!}{(2(n+1))!} \right]^2 \frac{n(n-1)((n+1)(n+2))^3}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)^2} \frac{\sigma^2}{c^4 R^2} + \right.$$

$$\left. + \mu_n^- K_{1,n-1,n} \left[ \frac{2^{n-1} (n-2)!}{(2(n-1))!} \right]^2 \left( \frac{(n+1)(n-1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \right)^n n^{n+1} (n+2)^{n-1} \frac{\sigma^n}{c^{2n-1} R^{n+1}} \right);$$

$$\mu_n^+ = \frac{n+1}{(2n+1)}; \quad \mu_n^- = \frac{n}{(2n+1)}; \quad K_{l,m,n} = \left[ C_{l0,m0}^{n0} \right]^2;$$

$$L_{l,m,n} = -\sqrt{l(l+1)m(m+1)} C_{l0,m0}^{n0} \cdot C_{l-1,m1}^{n0};$$

где  $C_{mk,lp}^{nq}$  – коэффициенты Клебша-Гордана.

Затухание капиллярных осцилляций капли связано только с потерями энергии осцилляций на излучение электромагнитных волн. Для

характерных внутриоблачных полей  $E_0 = 0.17$  СГСЭ ( $\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$  ( $E_{0кр}$  – критическое значение напряженности поля) при  $R = 3$  мкм и  $\sim 7 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$  при  $R = 30$  мкм) для мелких капелек размером от  $R = 3$  мкм до  $R = 30$  мкм, осциллирующих на основной (второй) моде, получим значение интенсивности  $I \sim 8 \cdot 10^{-31}$  эрг/с с полосой частот от  $\sim 100$  кГц до  $\sim 5$  МГц.

Раздел 2.3 посвящен исследованию капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости в идеальной несжимаемой диэлектрической среде, неподвижно висящей в суперпозиции гравитационного  $\vec{g}$  и однородного электростатического  $\vec{E}_0$  полей ( $\vec{E}_0 \parallel -\vec{g}$ ), и излучению электромагнитных волн на основе закона сохранения энергии.

При решении задачи нулевого порядка малости найдена равновесная форма заряженной капли, неподвижной в суперпозиции гравитационного и электростатического полей в виде:

$$r(\theta) = R \left( 1 + \alpha_0^{(4)} P_0(\cos \theta) + \left( \alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(4)} \right) P_2(\cos \theta) + \alpha_3^{(3)} P_3(\cos \theta) + \alpha_4^{(4)} P_4(\cos \theta) \right);$$

$$\alpha_0^{(4)} = -\frac{9}{5} \frac{w^2}{(1-W)^2}; \quad \alpha_2^{(2)} = \frac{3w}{1-W}; \quad \alpha_3^{(3)} = \frac{108}{5} \frac{w\sqrt{Ww}}{(5-4W)(1-W)};$$

$$\alpha_2^{(4)} = \frac{9}{7} \frac{w^2(8W^2 - 84W + 79)}{(5-4W)(1-W)^3}; \quad \alpha_4^{(4)} = \frac{54}{35} \frac{w^2(28W^2 + 33W - 65)}{(2W-3)(5-4W)(1-W)^2};$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_{ex}\sigma R^3}; \quad w \equiv \frac{\epsilon_{ex}E_0^2 R}{16\pi\sigma}; \quad e = \sqrt{9w/(1-W)}; \quad g = 12 \frac{\sigma}{R^2} \frac{\sqrt{Ww}}{(\rho_1 - \rho_2)}.$$

В расчетах первого порядка малости найдено дисперсионное уравнение:

$$\omega_2^2 = \frac{12\sigma}{R^3(3\rho_1 + 2\rho_2)} \left( 2(1 + T_0W) + \frac{2}{7} \left( T_1w - \alpha_2^{(2)}(T_2W - T_3w + V_1) \right) + (T_4W - V_2)\alpha_0^{(4)} - \right. \\ \left. - \alpha_2^{(4)}(T_5W + V_3) + \alpha_4^{(4)}(T_6W - V_4) + \alpha_3^{(3)}T_7\sqrt{wW} + \left( \alpha_2^{(2)} \right)^2 (T_8W + V_5) \right);$$

имеющее комплексные решения.

Для капелек с размерами от 3 до 30 мкм, зарядами  $Q = 5 \cdot 10^{-7}$  СГСЭ ( $\sim 2 \cdot 10^{-3} Q_{кр}$  при  $R = 3$  мкм и  $\sim 7 \cdot 10^{-5} Q_{кр}$  при  $R = 30$  мкм) и внутриоблачными полями  $E_0 = 0.17$  СГСЭ ( $\sim 5 \cdot 10^{-5} E_{0кр}$  при  $R = 3$  мкм

и  $\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$  при  $R = 30$  мкм), интенсивность электромагнитного излучения  $I \sim 8 \cdot 10^{-31}$  эрг/с на частотах от  $\sim 100$  кГц до  $\sim 5$  МГц.

**Третья глава** посвящена гидродинамическому математическому аналитическому расчету дипольных и квадрупольных моментов капель и исследованию их излучения в рамках общей теории. Выполнен анализ принадлежности излучения, найденного в предыдущей главе, к дипольному или квадрупольному типам. Дипольное излучение характерно для разложений первого порядка малости по квадрату отношения размеров излучающей системы к длине излучаемой волны  $\delta \sim 10^{-15}$ , квадрупольное – для второго порядка малости по  $\delta$ .

В разделе 3.1 на основе физико-химической гидродинамики проведен анализ возникающего при капиллярных осцилляциях заряженной капли квадрупольного электромагнитного излучения, обнаруживаемого в расчетах первого порядка малости по  $\varepsilon$  и второго по  $\delta$ .

В данном разделе в гидродинамической математической асимптотической процедуре на основе идей и подходов механики сплошной среды рассчитывается квадрупольный момент заряженной капли, возмущенной капиллярным волновым движением, и по известным формулам общей теории излучения оценивается его интенсивность.

Для достижения поставленной цели было выполнено следующее: рассчитаны капиллярные осцилляции заряженной капли, найдена образующая возмущенной капиллярным волновым движением свободной поверхности капли:

$$r(\theta, t) = R \left( 1 + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \cos(\omega_j t) P_j(\cos \theta) \right);$$

найден вектор нормали к свободной поверхности:

$$\vec{n}(\vec{r}, t) = \vec{e}_r - \sum_{j \in \Xi} h_j \frac{\partial P_j(\cos \theta)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta;$$

найдена поверхностная плотность электрического заряда (зависящая от времени):

$$\nu(\vec{r}, t) = - \frac{n(\vec{r}, t) \cdot \nabla \Phi(\vec{r}, t)}{4\pi} \Big|_{r=r(\theta, t)} = \frac{Q}{4\pi R^2} \left[ 1 + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} (j-1) h_j \cos(\omega_j t) P_j(\cos \theta) \right].$$

Найденное выражение для  $\nu(\vec{r}, t)$  подставим в известное выражение для тензора квадрупольного момента:

$$D_{\alpha\beta}(t) = \iiint_V \nu(\vec{r}, t) \delta(r - r(\theta, t)) (3x_\alpha(t)x_\beta(t) - \delta_{\alpha\beta} \cdot r^2(t)) dV; \quad (3)$$

где  $\delta(r - r(\theta, t))$  – дельта функция Дирака,  $\delta_{\alpha\beta}$  – символ Кронекера,  $x_\alpha(t)$ ,  $x_\beta(t)$  – координаты радиус-вектора  $\vec{r}(t)$  в декартовой системе координат. Переходя в (3) от декартовых координат к сферическим, получим окончательное выражение для тензора квадрупольного момента осциллирующей капли:

$$D_{11} = D_{22} = -\frac{1}{2}D_{33} = -QR^2 \varepsilon h_2 \cos(\omega_2 t).$$

Подставляя это соотношение в известное выражение для интенсивности квадрупольного излучения, найдем, что при  $Q = 1.8 \cdot 10^{-3}$  СГСЭ,  $R = 12$  мкм  $I \sim 4 \cdot 10^{-40}$  эрг/с на частоте  $\approx 400$  кГц, а уже при  $R = 20$  мкм значение интенсивности  $I \sim 2 \cdot 10^{-40}$  эрг/с на частоте  $\approx 300$  кГц, что по порядку величины совпадает с расчетами раздела 2.1, выполненными по методике Калечица-Полужктова (на основе закона сохранения энергии для капли идеальной жидкости).

Раздел 3.2 посвящен исследованию капиллярных осцилляций незаряженной капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости во внешнем однородном электростатическом поле напряжённостью  $\vec{E}_0$  и дипольного электромагнитного излучения от неё.

Под действием внешнего электростатического поля вытягивается в сфероид с квадратом эксцентриситета  $e^2 = 9E_0^2 R / 16\pi\sigma$  ( $e^2 \ll 1$ ), ось симметрии которого коллинеарна внешнему полю, в ней индуцируются электрические заряды, которым можно сопоставить дипольный момент, ориентированный вдоль оси капли. При капиллярных осцилляциях капли будет осциллировать величина дипольного момента, что приведет к появлению электромагнитного излучения дипольного типа.

Для расчета его интенсивности было выполнено следующее: рассчитаны капиллярные осцилляции незаряженной капли в однородном электростатическом поле, найдена равновесная форма капли, оказавшаяся в рамках используемой точности сфероидальной:

$$r(\theta) = R \left( 1 + e^2 \frac{1}{3} P_2(\cos \theta) \right); \quad (4)$$

найдено капиллярное волновое возмущение равновесного сфероида:

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon R \sum_{j \in \Xi} M_j(t) P_j(\cos \theta); \quad (5)$$

$$M_j(t) = h_j \cos(\omega_j t) + e^2 \left( h_{j-2} \beta_1 \left( \cos(\omega_{j-2} t) - \cos(\omega_j t) \right) - h_{j+2} \beta_2 \left( \cos(\omega_{j+2} t) - \cos(\omega_j t) \right) \right);$$

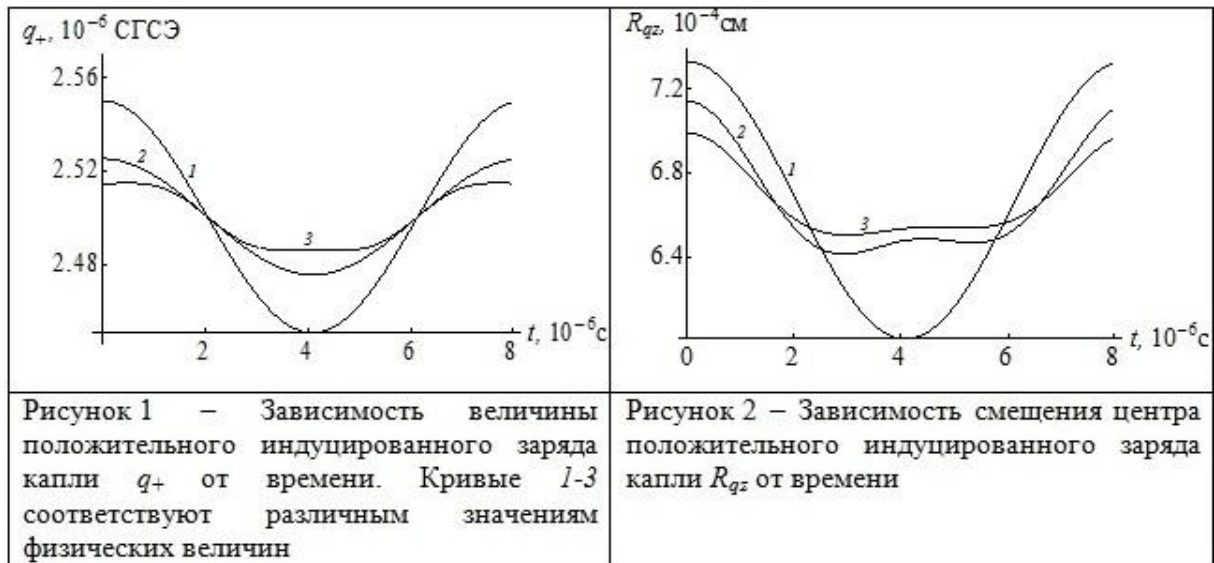
найден вектор нормали к возмущенной поверхности капли:

$$\begin{aligned} \bar{n}(\vec{r}, t) = & \left( 1 - \frac{1}{3} e^2 \frac{\partial P_2(\cos \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r - \\ & - \left( \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{1}{3} e^2 \left( (1 - \xi(\theta, t)) \frac{\partial P_2(\cos \theta)}{\partial \theta} - P_2(\cos \theta) \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) \vec{e}_\theta; \end{aligned} \quad (6)$$

найдено аналитическое выражение поверхностной плотности индуцированного заряда на возмущенной волновым движением поверхности сфероидальной капли:

$$\begin{aligned} v(\vec{r}, t) = & \frac{3}{4\pi} E_0 \left( P_1(\cos \theta) + \frac{2}{5} e^2 P_3(\cos \theta) + \right. \\ & + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} \left( M_{j-1}(t) k_1 + M_{j+1}(t) k_2 - e^2 \left( \frac{2}{35} M_3(t) \delta_{j,0} + M_{j-3}(t) k_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + M_{j-1}(t) k_4 + M_{j+1}(t) k_5 + M_{j+3}(t) k_6 \right) \right) P_j(\cos \theta) \Big); \quad (j \in \Xi). \end{aligned} \quad (7)$$

найден на основе физико-химической гидродинамики аналитическое выражение для величины индуцированного внешним полем диполя, изменяющегося со временем при капиллярных осцилляциях. Подставляя его в известное аналитическое выражение для интенсивности дипольного излучения, можно найти, что для характерного внутриоблачного поля  $E_0 = 0.17$  СГСЭ, предполагая, что все капли имеют одинаковый размер, оценочное значение интенсивности излучения  $I \sim 2 \cdot 10^{-30}$  эрг/с, что по порядку величины совпадает с расчетами раздела 2.2, выполненными по методике Калечица-Полуэктова.



На рисунках 1-2 иллюстрируются осцилляции величины индуцированного заряда  $q_+(t)$  и положения центра индуцированного заряда

капли  $R_{qz}(t)$  при различных видах начальной деформации равновесной сфероидальной формы. Видно, что величины  $q_+(t)$  и  $R_{qz}(t)$  периодически меняются со временем.

В разделе 3.3 на основе идей и подходов механики сплошной среды проведено исследование капиллярных осцилляций незаряженной капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости во внешнем однородном электростатическом поле напряженностью  $\vec{E}_0$  и квадрупольного электромагнитного излучения, гораздо более слабого, чем дипольное, появляющегося в расчетах первого порядка малости по  $\varepsilon$  и второго по  $\delta$ .

В данном разделе в гидродинамической математической асимптотической процедуре рассчитывается квадрупольный момент незаряженной сфероидальной капли, возмущенной капиллярным волновым движением, и по известным формулам общей теории оценивается интенсивность излучения.

Подставляя в (3) соотношения (4)-(7), найденные в предыдущем разделе, получим аналитическое выражение для тензора квадрупольного момента сфероидальной капли:

$$D_{11}(t) = D_{22}(t) = -\frac{1}{2}D_{33}(t) = -E_0 R^4 \varepsilon \left( \frac{9}{7} h_3 \cos(\omega_3 t) + e^2 \left( \frac{52}{245} h_3 \cos(\omega_3 t) + \frac{2}{847} h_5 (236 \cos(\omega_3 t) + 149 \cos(\omega_5 t)) \right) \right).$$

Подставляя это соотношение в известное выражение для интенсивности квадрупольного излучения, для незаряженной капли размером  $R = 30$  мкм, осциллирующей в однородном электростатическом поле с напряженностью  $E_0 = 0.17$  СГСЭ, получим интенсивность  $I \sim 6 \cdot 10^{-46}$  эрг/с. При  $R = 8$  мкм  $I \sim 2 \cdot 10^{-45}$  эрг/с. Для капли радиусом  $R = 3$  мкм  $I \sim 6 \cdot 10^{-45}$  эрг/с, что на 15 порядков величины слабее интенсивности дипольного излучения.

Раздел 3.4 на основе идей и подходов механики сплошной среды посвящен исследованию капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости, неподвижно висящей в суперпозиции гравитационного  $\vec{g}$  и однородного электростатического  $\vec{E}_0$  полей, и электромагнитного излучения дипольного типа от неё.

Наличие внешнего электростатического поля, задающее выделенное направление, приводит к появлению на поверхности заряженной капли ещё и индуцированных зарядов и, как следствие, к искажению равновесной сферической формы капли.

Аналитические асимптотические расчеты на основе физико-химической гидродинамики с использованием в качестве малого



параметра величину стационарной деформации показывают, что её равновесная форма в линейном приближении по малому параметру может считаться сфероидальной.

Осцилляции заряженной сфероидальной капли в суперпозиции гравитационного и электростатического полей приведут к возмущению её поверхности, к появлению зависящего от времени диполя индуцированного заряда и к осцилляциям положения собственного заряда капли, обнаруживаемых в расчетах второго порядка малости по отношению амплитуды осцилляций к характерному линейному размеру капли.

Интенсивность возникающего при капиллярных осцилляциях заряженной сфероидальной поверхности капли излучения моделируется в виде излучений от осциллирующего диполя и осцилляций положения собственного заряда капли.

В данном разделе в гидродинамической математической асимптотической процедуре рассчитывается зависящий от времени дипольный момент сфероидальной капли и осцилляции положения собственного заряда капли и по известным формулам общей теории излучения оценивается их интенсивность.

Для достижения поставленной цели было выполнено следующее: найдена равновесная форма капли:

$$r(\theta) = R \left( 1 + e^2 \frac{1}{3} P_2(\cos \theta) \right); \quad e^2 = \frac{9w}{1-W}; \quad w = \frac{E_0^2 R}{16\pi\sigma}; \quad W = \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3};$$

найдено капиллярное волновое возмущение сфероидальной формы:

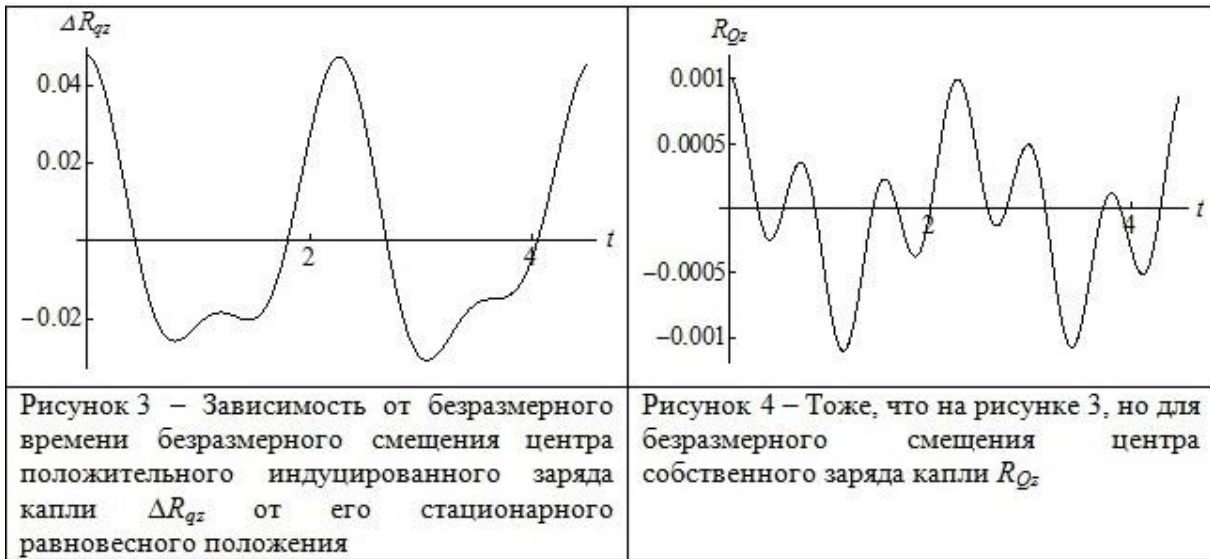
$$\xi(\theta, t) = \varepsilon R \sum_{j \in \Xi} M_j(t) P_j(\cos \theta);$$

$$M_j(t) = (h_j + S_1(j)) \cos(\omega_j t) + S_2(j) (\cos(\omega_{j-2} t) - \cos(\omega_j t)) + S_3(j) (\cos(\omega_j t) - \cos(\omega_{j+2} t)) + S_4(j) \cos(\omega_{j-1} t) + S_5(j) \cos(\omega_{j+1} t); \quad (j \in \Xi);$$

и аналогично выражениям (6)-(8) найдены вектор нормали к возмущенной поверхности капли, выражения поверхностной плотности собственного и индуцированного зарядов и выражения для дипольных моментов на возмущенной капиллярно-волновым движением поверхности капли.

На рисунках 3-4 показано, что величина осцилляций положения центра индуцированного заряда капли  $R_{Qz}$  на порядок выше, чем величина осцилляций положения центра собственного заряда капли  $R_{Qz}$ . Это объясняется тем, что собственный заряд распределяется по всей поверхности заряженной капли, однако при капиллярных колебаниях поверхности капли вдоль оси OZ происходит лишь часть осцилляций заряда, которые вносят вклад в формирование  $R_{Qz}$ . При наличии внешнего электрического поля индуцированные заряды сосредоточены в основном

на вершинах незаряженного сфероида и, следовательно, практически полностью вовлекаются в колебания поверхности сфероида вдоль оси OZ.



Величина индуцированного внешним электростатическим полем диполя незаряженной капли найдена в расчетах первого порядка малости по  $\varepsilon$  аналогично выше изложенному, а величина диполя, возникающего при осцилляциях положения собственного заряда капли – в расчетах второго порядка малости по  $\varepsilon$ :

$$\vec{d}_Q(t) = QR\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} h_j h_{j-1} \frac{3j(j-2)}{(2j-1)(2j+1)} \left( \cos(\omega_j - \omega_{j-1})t + \cos(\omega_j + \omega_{j-1})t \right) \vec{e}_z.$$

Подставляя полученные выражения для диполей в известную формулу общей теории излучения, оценим по порядку величины интенсивность дипольного излучения осциллирующей заряженной капли в суперпозиции гравитационного и внешнего однородного электростатического полей.

### Результаты и выводы

1. В электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по отношению амплитуды осцилляций незаряженной капли идеальной идеально проводящей несжимаемой жидкости в однородном электростатическом поле к её характерному линейному размеру  $\varepsilon$  найдена равновесная форма капли (оказавшаяся сфероидальной в линейном приближении по величине стационарной деформации), напряжённость её электрического поля в волновой зоне и выведено дисперсионное уравнение, имеющее комплексные решения. Мнимая часть частоты характеризует декремент затухания капиллярных осцилляций, невозможного в идеальной жидкости, из чего сделан вывод о наличии

излучения, возникающего при ускоренном движении заряженной поверхности, интенсивность излучения оценена по порядку величины.

2. В электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по  $\varepsilon$  капиллярного волнового движения на поверхности сфероидальной капли рассчитана поверхностная плотность индуцированного внешним электростатическим полем заряда на ней. Рассчитан дипольный момент возмущенной сфероидальной капли, осциллирующий во времени и генерирующий излучение дипольного типа, интенсивность которого оценена по известным соотношениям, и совпала с оценкой из закона сохранения энергии.

3. В электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по  $\varepsilon$  найдены поверхностная плотность собственного электрического заряда на поверхности сферической капли идеально проводящей несжимаемой жидкости, возмущенной капиллярным волновым движением, и зависящий от времени её квадрупольный момент, генерирующий квадрупольное излучение. Интенсивность квадрупольного излучения совпала с оценкой из закона сохранения энергии, выполненной другими авторами.

4. В электрогидродинамических расчетах второго порядка малости по  $\varepsilon$  обнаружено, что если в спектре начального возбуждения присутствуют две моды с последовательными номерами, то возбуждается первая мода осцилляций, превращая осциллирующую заряженную каплю в излучатель дипольного типа.

5. Для осциллирующей заряженной капли в суперпозиции гравитационного и однородного электростатического полей в электрогидродинамических расчетах нулевого порядка малости по  $\varepsilon$  и первого порядка по величине равновесной деформации найдена равновесная форма капли, которая может считаться сфероидальной в указанных порядках малости. В расчетах первого порядка по  $\varepsilon$  осцилляций заряженной сфероидальной капли в волновой зоне найдено дисперсионное уравнение, имеющее комплексное решение, мнимая часть которого характеризует декремент затухания, связанный с излучением электромагнитных волн. В рамках закона сохранения энергии оценена его интенсивность.

6. Для заряженной сфероидальной капли, свободная поверхность которой возмущена капиллярным волновым движением, в электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по  $\varepsilon$  определена аналитическая форма возмущения, поверхностная плотность заряда, зависящий от времени дипольный момент, и по известным формулам найдена интенсивность дипольного излучения, причём интенсивность дипольного излучения от собственного заряда капли искалась в электрогидродинамических расчётах с сохранением слагаемых второго порядка малости по  $\varepsilon$ .

7. Обнаружено при сравнении по порядку величины различных компонент полного излучения от заряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле, что дипольное излучение более интенсивно, чем квадрупольное на 15 порядков величины. Оно обнаруживается для незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле, в электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по  $\varepsilon$ , а для осциллирующей заряженной капли только во втором порядке малости по  $\varepsilon$ .

### **Публикации автора по теме диссертации**

**1. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Излучение электромагнитных волн сферической заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле//Изв. РАН. МЖГ.–2016.–№3.–С.158-168.**

**2. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Дипольное электромагнитное излучение заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле//Изв. РАН. МЖГ.–2018.–№2.–С.62-76.**

**3. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Излучение электромагнитных волн осциллирующей сильно заряженной капли//ЖТФ.–2016.–Т. 86. Вып. 8.–С. 68-75.**

**4. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Квадрупольное электромагнитное излучение осциллирующей заряженной капли//ЖТФ.–2017.–Т.87. Вып. 6.–С. 914-920.**

**5. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю. Асимптотический расчет интенсивности дипольного электромагнитного излучения от осциллирующей в электростатическом поле незаряженной капли//ЭОМ.–2017.–Т.53.–№4.–С.28-38.**

6. Колбнева Н.Ю. Излучение электромагнитных волн незаряженной капли, осциллирующей в слабом электростатическом поле//Дисперсные системы: материалы XXVI международной научной конференции.–Одесса: «Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова».–2014.–С. 82-83.

7. Колбнева Н.Ю. Электромагнитное излучение от заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле//Материалы международного молодежного научного форума «Ломоносов-2015». Секция «Математика и механика». Подсекция «Гидромеханика» [Электронный ресурс].–М.: МАКС Пресс.–2015. <http://lomonosov-msu.ru>

8. Колбнева Н.Ю. Электромагнитное излучение, генерируемое линейными колебаниями заряженной капли, осциллирующей во внешнем

электрическом поле//Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики. Сборник докладов XI Международной научной конференции/Санкт-Петербург.–СПб.: ИД «Петроградский».–2015.–С. 266-269.

9. Колбнева Н.Ю. Дипольное электромагнитное излучение незаряженной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле//Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2016». Секция «Математика и механика». Подсекция «Гидромеханика» [Электронный ресурс]–М.: МАКС Пресс.–2016. <http://lomonosov-msu.ru>

10. Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Дипольное электромагнитное излучение незаряженной каплей, осциллирующей в однородном электростатическом поле//Сборник трудов XV Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» имени профессора А.П. Сухорукова («Волны-2016»). Секция «Гидродинамические волны и течения»/Можайск.–2016.–С. 20-22. <http://waves.phys.msu.ru>