

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. П.Г. ДЕМИДОВА»

На правах рукописи

Колбнева Наталья Юрьевна

Капиллярные осцилляции заряженной поверхности капли и генерация
электромагнитных волн

Специальность 01.02.05 –
«Механика жидкости, газа и плазмы»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
ШИРЯЕВА СВЕТЛАНА ОЛЕГОВНА

ЯРОСЛАВЛЬ – 2018

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Обзор. Капиллярные осцилляции и электрогидродинамическая устойчивость капли невязкой несжимаемой электропроводной жидкости и излучение ею электромагнитных волн	11
Глава 2. Электрогидродинамические расчёты на основе подходов механики сплошной среды и закона сохранения энергии по Калечицу-Полуэктову	35
2.1. Физико-химический анализ возможности затухания капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной жидкости. Декремент затухания	35
2.2. Физико-химический анализ возможности затухания капиллярных осцилляций незаряженной капли идеальной жидкости в однородном электростатическом поле	53
2.3. Затухание капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной жидкости неподвижной в суперпозиции гравитационного и внешнего однородного электростатического полей	73
Глава 3. Физико-химический анализ затухания капиллярных осцилляций капли идеальной жидкости на основе подходов механики сплошной среды и общей теории излучения	92
3.1. Капиллярные осцилляции заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости и генерация ими квадрупольного излучения	92
3.2. Капиллярные осцилляции незаряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости во внешнем однородном электростатическом поле и генерация ими дипольного излучения	112
3.3. Капиллярные осцилляции незаряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости в однородном	132

электростатическом поле и генерация ими квадрупольного излучения

3.4. Капиллярные осцилляции заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости неподвижной в суперпозиции гравитационного и внешнего однородного электростатического полей и генерация ими квадрупольного излучения 145

Рекомендации экспериментаторам 168

Результаты и выводы 170

Список литературы 172

Приложение 186

Введение

Актуальность темы и объект исследования. Исследование заряженных капель, осциллирующих во внешних электростатических полях, и физических закономерностей реализации их неустойчивости актуально в связи с многочисленными приложениями капиллярного распада капель в академическом знании (научное приборостроение), технике и технологии. Так капиллярный распад заряженных капель используется при создании ионно-кластерно-капельных пучков в жидкостной масс-спектрометрии (для анализа трудно летучих веществ и веществ органического происхождения), в жидкометаллических источниках ионов, в жидко-металлической эпитаксии и литографии, при получении порошков тугоплавких металлов, в реактивной космической технике, для быстрого рассеяния оптически плотных аэродисперсных систем, при создании потоков монодисперсных капель в термоядерном синтезе, в каплеструйной печати, ускорителях макрочастиц, при электрораспылении инсектицидов, горюче-смазочных материалов, лаков и красок. Кроме того, явление диспергирования заряженных капель во внешних электрических полях используется для истолкования разнообразных геофизических феноменов: огней Св. Эльма, свечения воронок смерчей, инициирования разряда молнии и сбора ею зарядов с отдельных облачных капель для поддержания своего существования. В частности, осцилляции заряженных капель во внешних электрических полях приводят к появлению радиоизлучения из грозových облаков. Этой проблеме и посвящено данное исследование.

Капиллярные осцилляции заряженной капли во внешнем электрическом поле делают её источником радиоизлучения. Наличие радиоизлучения от осциллирующих во внешних полях заряженных облачных капель, представляет интерес в связи с проблемами радиолокационного зондирования облаков и туманов, проблемой радиопомех от огней Св. Эльма (иногда появляющихся на обшивке самолётов).

Экспериментальные исследования характеристик электромагнитных волн, генерируемых капиллярными осцилляциями заряженной поверхности капель в конвективных облаках и на стадии грозообразования, начались в 1965 году. Наиболее значимый вклад в эти разработки связан с именами Л.Г. Качурина и А.Х. Аджиева. На основании проведенных лабораторных и натурных исследований они зафиксировали наличие электромагнитного излучения при фазовых переходах воды, а с помощью радиолокаторов получили импульсно-временные характеристики радиоизлучения облаков, которые показали резкое увеличение частоты следования и амплитуды импульсов радиоизлучения от развивающихся негрозовых облаков. Интенсивность такого излучения, обнаруживаемого в широком диапазоне радиочастот, много меньше по сравнению с интенсивностью отдельных импульсов молниевых разрядов, поэтому оно получило название непрерывно-шумового радиоизлучения. На сегодняшнее время проблема регистрации существующими радиолокационными станциями электромагнитного излучения конвективных облаков достаточно актуальна. В этой связи представляется необходимым провести исследование на основе идей и подходов механики сплошной среды особенностей осцилляций заряженной поверхности облачных капель и уточнения характеристик генерируемых при этом электромагнитных волн (интенсивность, диапазон частот).

Впервые проблема теоретического расчета интенсивности радиоизлучения, генерируемого капиллярными осцилляциями поверхности заряженной капли, на основе закона сохранения энергии была сформулирована в 1982 году В.И. Калечицем, И.Е. Нахутиным, П.П. Полуэктовым.

Обсуждаемая проблема, связанная с радиолокационным зондированием метеорологических объектов с целью их изучения, приводит к необходимости исследования физических закономерностей реализации капиллярного волнового движения на поверхности заряженных капель, осциллирующих во внешних электростатических полях.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Тема настоящей диссертационной работы соответствует паспорту специальности

01.02.05 – «Механика жидкости, газа и плазмы», а именно соответствует области исследований, указанных в пункте № 8 «Физико-химическая гидромеханика (течения (осцилляции капель) при наличии излучения)», в пункте № 14 «Линейные и нелинейные (стоячие) волны в жидкостях», в пункте № 16 «Гидромеханика сред, взаимодействующих с электромагнитным полем (излучающих электромагнитные волны)», в пункте № 18 «Аналитические, асимптотические методы исследования уравнений континуальных моделей однородных сред (методы прямого моделирования)», в пункте № 19 «Гидродинамические модели природных процессов». Данная диссертационная работа соответствует формуле научной специальности: изучение на основе идей и подходов механики сплошной среды процессов и явлений, сопровождающих течения однородных сред при механических, тепловых и электромагнитных воздействиях; исследование математических моделей для описания параметров потоков движущихся сред (осцилляций заряженных капель) с целью прогнозирования природных явлений.

Предметом исследования являются капиллярные осцилляции заряженных и незаряженных капель идеальной жидкости в однородном электростатическом поле и радиоизлучение от таких объектов на основе идей и подходов механики сплошной среды.

Целью данного диссертационного исследования является исследование капиллярных осцилляций заряженных капель во внешнем электростатическом поле и изучение закономерностей генерации ими радиоизлучения.

Для достижения заданной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. построить математическую модель капиллярного волнового движения поверхности заряженной капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости во внешнем электростатическом поле на основе физико-химической гидродинамики в асимптотических расчётах линейного приближения по безразмерной амплитуде осцилляций при использовании двух методов расчета: на основе энергетического подхода Калечица-Полуэктова и на основе общей теории излучения;

2. применить построенную модель к изучению капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли и проанализировать возможность появления электромагнитных волн при расчете методом Калечица-Полуэктова;

3. применить построенную модель к изучению капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли и на основе физико-химической гидродинамики и общей теории излучения, изучить возможность генерации электромагнитных волн квадрупольного типа;

4. применить построенную модель к изучению капиллярных осцилляций поверхности незаряженной капли в однородном электростатическом поле на основе идей и подходов механики сплошной среды и методом Калечица-Полуэктова проанализировать возможность возникновения электромагнитных волн;

5. применить построенную модель к изучению капиллярных осцилляций поверхности незаряженной капли в однородном электростатическом поле и в рамках физико-химической гидродинамики на основе общей теории излучения изучить возможность генерации электромагнитных волн дипольного и квадрупольного типов;

6. применить построенную модель к изучению капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли в однородном электростатическом поле и на основе идей и подходов механики сплошной среды методом Калечица-Полуэктова изучить особенности возникающих при этом электромагнитных волн;

7. применить построенную модель к изучению капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли в однородном электростатическом поле и в модели общей теории излучения изучить возможность генерации электромагнитных волн дипольного типа;

8. сравнить два возможных пути теоретического расчета: на основе закона сохранения энергии в рамках физико-химической гидродинамики на основе идей и подходов механики сплошной среды и на основе общей теории излучения.

Научная новизна.

1. выполнено аналитическое асимптотическое исследование в рамках физико-химической гидродинамики закономерностей реализации капиллярного волнового движения на поверхности заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле;

2. найдена на основе идей и подходов механики сплошной среды асимптотическим методом возникающая при капиллярных осцилляциях заряженной капли квадрупольная компонента электромагнитного излучения;

3. найдена асимптотическим методом возникающая при капиллярных осцилляциях в однородном электростатическом поле незаряженной капли дипольная и квадрупольная компоненты электромагнитного излучения;

4. найдена асимптотическим методом в рамках физико-химической гидродинамики возникающая при капиллярных осцилляциях во внешнем электростатическом поле заряженной капли дипольная компонента электромагнитного излучения;

5. найдено на основе идей и подходов механики сплошной среды, что теоретические расчеты интенсивности излучения, возникающего при осцилляциях заряженной поверхности капель, на основе закона сохранения энергии совпадают с расчетами, проведенными на основе общей теории излучения.

Практическая значимость.

Результаты теоретического анализа капиллярных волн заряженной поверхности капель, а также полученные оценки интенсивности радиоизлучения, возникающего при капиллярных осцилляциях заряженной поверхности внутриоблачных капель, могут быть использованы в радиолокации, авиации и гидрометеорологических приложениях. В теории грозового электричества полученные результаты способствуют более глубокому пониманию природы радиоизлучения облаков на разных стадиях развития грозовой деятельности. Результаты диссертации найдут практическое применение при решении задач радиофизики.

Методология и методы исследования. Аналитическое исследование закономерностей реализации капиллярного волнового движения поверхности осциллирующих в однородном электростатическом поле заряженных капель и связанной с этим процессом генерации электромагнитных волн проведено в рамках методов механики сплошной среды, электрогидродинамики, гидродинамики. Используются аналитические асимптотические методы математического моделирования.

Научные положения и результаты, выносимые на защиту.

1. анализ средствами математической физики капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли и расчет интенсивности возникающего при этом радиоизлучения квадрупольного типа;

2. анализ средствами математической физики капиллярных осцилляций поверхности незаряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле и расчет интенсивности возникающего при этом радиоизлучения дипольного и квадрупольного типов;

3. анализ средствами математической физики капиллярных осцилляций поверхности заряженной капли в однородном электростатическом поле и расчет интенсивности возникающего при этом радиоизлучения дипольного типа;

4. сравнение интенсивности излучения, возникающего при капиллярных осцилляциях поверхности капель, оценка которого проведена в рамках общей теории излучения, с расчётами на основе закона сохранения энергии.

Степень достоверности.

Полученные результаты являются достоверными, так как обусловлены использованием строгих математических моделей, соответствующих классическим представлениям механики сплошной среды, электрогидродинамики, математической физики.

Апробация результатов.

Результаты настоящей работы докладывались и обсуждались на: Международной научно-практической конференции «Математическое образование и наука в технических и экономических вузах» (Ярославль,

ЯГТУ, 2014); II, III, IV, V Международных молодежных научно-практических конференциях «Путь в науку», секция «Физика. Электродинамика» (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2014, 2015, 2016); XVIII Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Состав атмосферы. Атмосферное электричество. Климатические процессы» (Борок, Геофизическая обсерватория «Борок», филиал Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта, 2014); XXII, XXIII Международных молодежных научных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», секция «Математика и механика. Гидромеханика» (Москва, МГУ, 2015, 2016, 2018); XI Международной научной конференции «Современные проблемы электрофизики и электродинамики» (Петергоф, СПбГУ, 2015); XI Международной научной конференции «Волновая электродинамика проводящей жидкости. Долгоживущие плазменные образования и малоизученные формы естественных электрических разрядов в атмосфере» (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2015); XV Всероссийской школе-семинаре «Волновые явления в неоднородных средах» имени профессора А.П. Сухорукова («Волны-2016») (Можайск, МГУ, 2016).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 10 работах, из них 5 статей – в рецензируемых журналах, входящих в список изданий, рекомендованных ВАК. Список работ приведен в конце диссертации.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, раздела «Рекомендации экспериментаторам», раздела «Результаты и выводы», списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 201 страницу, в том числе 32 рисунка. Список литературы состоит из 161 наименования, включая работы диссертанта по теме исследования.

Глава 1. Обзор. Капиллярные осцилляции и электрогидродинамическая устойчивость капли невязкой несжимаемой электропроводной жидкости и излучение ею электромагнитных волн

Капиллярные осцилляции и электрогидродинамическая устойчивость заряженной капли

Капиллярные электростатические неустойчивости заряженной поверхности жидкости известны еще с середины XVIII века. Аббат Нолле, опираясь на свои зрелищные опыты, сообщил об образовании на поверхности капли конических выступов, из которых бьют струйки, распадающиеся на мелкие заряженные капельки. Все последующие идеи экспериментов, связанные с неустойчивостью заряженной поверхности жидкости, оставались на уровне курьеза вплоть до конца XIX века.

В 1879 году Релеем [1] впервые получено выражение частоты собственных колебаний изолированной капли идеально проводящей жидкости:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2);$$

где R – радиус равновесной сферической капли, σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости, n – номер моды осцилляций.

В 1882 году впервые опубликованы теоретические результаты, посвященные проблеме устойчивости неподвижной заряженной электропроводной капли, полученные Рэлеем [2], которые широко цитировались и изучались в последующие годы и продолжают цитироваться до настоящего времени.

Работа Рэля [2] содержала теоретическую модель исследования электрогидродинамической неустойчивости вообще и неустойчивости заряженной капли по отношению к собственному заряду в частности. Рэлей

связал явление неустойчивости сильно заряженной капли идеально проводящей несжимаемой жидкости с неустойчивостью капиллярных волн бесконечно малой амплитуды, которые существуют в капле в виду теплового движения молекул. Он нашёл, что критические условия неустойчивости n -ой моды заряженной изолированной сферической капли имеют вид:

$$4W \equiv \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3} \geq (n+2); \quad (1.1.1.1)$$

где W – так называемый параметр Рэлея, Q – заряд капли.

Из (1.1.1.1) видно, что минимальный заряд, при котором капля теряет устойчивость, соответствует второй (основной) моде ($n = 2$).

В [2] приводилась лишь постановка задачи и конечный результат, а все промежуточные выкладки были опущены. В связи с этим возникла проблема понимания полученных результатов. В этой связи в 1963 году С.Д. Hendrics и J.M. Schneider [3] опубликовали с методическими целями обсуждаемую задачу в подробном изложении, поскольку метод, использованный Рэлеем, может быть применен при решении большого количества актуальных задач.

Будем искать, как это сделано в [3], спектр капиллярных осцилляций заряженной капли с зарядом Q идеально проводящей несжимаемой невязкой жидкости с плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что капля находится в вакууме. Уже в силу наличия теплового движения молекул жидкости капля совершает колебательные движения в окрестности равновесной сферической формы с амплитудой $\sim \sqrt{kT/\sigma}$, где k – постоянная Больцмана, T — абсолютная температура.

Капля представляется как колебательная система с бесконечным числом степеней свободы. Аналитическое выражение для искаженной сферической формы поверхности капли раскладывается по бесконечному набору сферических функций. В качестве обобщенных координат принимаются амплитуды осцилляций отдельных мод в окрестности равновесной сферы. Выписывая функцию Лагранжа капли и исходя из принципа наименьшего действия, несложно

получить бесконечную систему несвязанных между собой дифференциальных уравнений второго порядка, описывающих гармонические колебания различных мод капиллярных волн. Учитывая периодическую временную зависимость амплитуды n -ой моды осцилляций, можно выписать дисперсионное уравнение, квадратичное относительно частоты ω_n капиллярных колебаний, в виде:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1) \left((n+2) - \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3} \right).$$

Видно, что при $\frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3} \geq (n+2)$ некоторые из частот капиллярных колебаний становятся мнимыми, и амплитуды соответствующих мод начинают экспоненциально расти со временем, т.е. капля становится неустойчивой. Поскольку неподвижная капля осциллирует при минимальном значении моды с $n=2$, критерий неустойчивости для основной моды запишется в виде: $W/4 \geq 1$.

В 1964 году Тейлор [4] подверг необоснованной критике работу Рэлея и, соответственно, полученный им критерий (1.1.1.1). Тейлор утверждал, что при критическом для основной моды заряде высокие моды остаются устойчивыми и распад капель на более мелкие невозможен.

Однако последующие экспериментальные работы [5-19] подтвердили справедливость критерия Рэлея (1.1.1.1). Неустойчивость основной моды приводит к вытягиванию капли в сфероид (до момента реализации неустойчивости капля сохраняет равновесную сферическую форму). Концентрация заряда на вершинах сфероида увеличивается, что приводит к генерации неустойчивости более высоких мод. Суперпозиция всех высоких неустойчивых мод приводит к образованию на вершинах капли заостренных выступов, с которых сбрасывается избыточный заряд в виде струйки высокодисперсных капелек [5-7, 20].

В работе [20, 22] исследуются осцилляции и устойчивость заряженной зарядом Q капли идеально проводящей несжимаемой жидкости плотности ρ_1 , коэффициентом поверхностного натяжения σ , радиуса R в окружающей

несжимаемой диэлектрической среде с плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ε_{ex} на основе линеаризованной системы уравнений электрогидродинамики. Весь анализ реализуется на основе разложения по полиномам Лежандра уравнения баланса давлений на свободной поверхности капли. В итоге, получено искомое дисперсионное уравнение для капиллярных колебаний капли:

$$\omega_n^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \frac{\sigma}{R^3} \left((n+2) - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_{ex} R^3 \sigma} \right);$$

откуда сразу же следует условие неустойчивости заряженной капли во внешней среде. Заметим, что наличие внешней для капли диэлектрической среды сказалось лишь на частотах осцилляций капли, которые сместились в сторону уменьшения по сравнению с частотами колебаний такой же капли в вакууме. На критические условия устойчивости капли наличие внешней среды не повлияло.

Отметим, что подобный метод нахождения рэлеевского критерия неустойчивости предложен в работе И.П. Стаханова [23] на примере шаровой молнии.

В работе И. Н. Алиева 2013 года [24] решена задача о нахождении спектра гравитационно-капиллярных колебаний сильно заряженной сферической капли методом Гамильтона. В предельном случае результат переходит в классические исследования, полученные Рэлеем.

Капиллярные осцилляции и электрогидродинамическая устойчивость незаряженной капли в однородном электростатическом поле

Начиная с 1914 года, J. Zeleny [25-28] провел первые экспериментальные исследования незаряженной полусфероидальной поверхности жидкого мениска на торце капилляра, по которому жидкость подаётся в разрядную систему в

электрическом поле, не зависящем от времени, и первым подошел к получению критерия неустойчивости электропроводной капли во внешнем поле.

С.Т. R. Wilson, G. Taylor [29], W.A. Masky [30] исследовали на устойчивость мыльные пузыри, находящиеся во внешнем электростатическом поле. Опыты G.G. Nolan [31] со свободно падающими в горизонтальном электрическом поле каплями доказали, что критические значения напряженности поля и радиуса капли хорошо согласуются с данными для мыльных пузырей [29, 30]. Следует отметить, что в 1925 году Wilson и G. Taylor получили критические условия неустойчивости для мыльных пузырей в виде $w = E_0 \sqrt{R / \sigma} = 1.61 \pm 0.04$, где E_0 – напряженность электростатического поля.

В работе W.A. Masky [30], посвященной проблеме грозового электричества, поставлены эксперименты с воздействием горизонтального и вертикального электростатического поля на устойчивость свободно падающих капель воды. Он обнаружил, что в электрическом поле капля деформируется и вытягивается вдоль поля. При достижении критического значения $w = 1.51$ капля теряет устойчивость, что приводит к выбросу струй на обоих концах и сопровождается свечением. W.A. Masky предпринял попытку определить ток коронирования в зависимости от напряженности электрического поля.

Согласно экспериментальным данным и теоретическим расчетам, которые проводятся и по сей день [32-41], в линейном приближении по квадрату эксцентриситета равновесная форма капли во внешнем электростатическом поле близка к эллипсоиду вращения, вытянутому вдоль поля.

В 1964 году, спустя сорок лет после выхода работы [42], Тейлор, основываясь на результатах новых опытов и теоретических исследований, вновь получил критерий неустойчивости незаряженной капли в поле экспериментально $w^2 \geq 2.59$ и теоретически $w^2 \geq 2.62$ (параметр w^2 стали называть критерием Тейлора). Теоретический метод расчета критического условия заключался в приравнивании на вершинах равновесной сфероидальной поверхности капли давления электрического поля давлению капиллярных сил и внутреннего

давления в жидкости. Тейлор отметил, что для возбуждения высоких мод капиллярных волн требуется более сильное внешнее поле, чем для возбуждения основной моды.

В 1981 году С.А. Morrison, R.P. Leavitt, D.E. Wortman [43] получили выражение для частоты осцилляций незаряженной идеально проводящей невязкой капли в однородном электростатическом поле (дисперсионное уравнение):

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1) \left((n+2) - \frac{6E_0^2 R}{4\pi\sigma} \frac{n(12n^3 + 10n^2 - 12n - 1)}{(n-1)(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right).$$

Заметим, что в работе [42] изначально не учтена деформация равновесной формы исходной капли внешним электростатическим полем, что приводит к ошибкам в вычислении частоты осцилляций капли.

Теоретический аналитический анализ в аналогичной постановке реализован в 1985 году К.Ж. Cheng [44]. В отличие от [43] функция Лагранжа (а именно: потенциальная энергия сил поверхностного натяжения и кинетическая энергия волнового движения жидкости) приведена в линейном приближении по квадрату эксцентриситета. В результате, получено корректное выражение для частоты осцилляций капли в однородном электростатическом поле:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1) \left((n+2) - \frac{3E_0^2 R}{4\pi\sigma} \frac{(6n^5 + 9n^4 + 25n^3 + 45n^2 + 5n - 6)}{(n-1)(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right).$$

В работе [40] численным расчетом из условия баланса давлений на свободной поверхности капли найдено искомое значение параметра Тейлора $w^2 = 2.5$. Численный анализ показал, что критические условия появления неустойчивости сильно зависят от величины эксцентриситета, и выброс каплями струек может происходить при меньшем значении критического параметра, если удлинение капли вдоль поля за счет аэродинамического взаимодействия будет достаточно большим.

В [37] теоретически найдено предельное значение параметра Тейлора, разделяющее растущие и убывающие возмущения: $w^2 = 2.63$. Заметим, что критические значения, рассчитанные по результатам экспериментальных исследований разных авторов, измеряются от $w^2 = 2.22$ [45] до $w^2 = 2.59$ [42].

Капиллярные осцилляции и электрогидродинамическая устойчивость заряженной капли в однородном электростатическом поле

В случае заряженной капли, помещенной в однородное электростатическое поле, происходит нарушение симметрии в распределении суммарного (собственного и индуцированного) заряда по двум половинкам капли. В экспериментальных исследованиях [46-48, 30] при развитии неустойчивости на капле образовывается только один эмитирующий выступ на той вершине, где знак индуцированного заряда совпадает со знаком собственного заряда. В работе [50] показано, что в общем случае равновесная форма заряженной капли во внешнем поле становится грушевидной. Однако, для неподвижной [51-55] или свободно падающей капли в поле сил тяжести и подвергающейся действию аэродинамических сил [56] показано, что равновесная форма заряженной капли в однородном электростатическом поле примерно яйцеобразна. Аналитическим асимптотическим расчетом обнаружено, что равновесная поверхность заряженной капли, подвешенной в коллинеарных электростатическом и гравитационном полях, слабо отличается от сфероидальной [52-56].

В работе [57] на основе разложения по амплитудам мод уравнения баланса давлений на свободной поверхности заряженной капли, подвешенной в электростатическом и гравитационном полях, найдено критическое соотношение между безразмерными параметрами Тейлора и Рэлея:

$$\frac{3}{8\sqrt{\pi}}(1+0.476e^2)Ww + 0.25(1+2.07e^2)W^2 + \frac{0.29}{\pi}(1+6.6e^2)w^2 \geq 1;$$

$$e^2 \equiv \frac{9w^2}{16\pi} \left(1 - \frac{W^2}{4}\right)^{-1}.$$

Следует отметить, что экспериментальная проверка критерия возможна лишь для двух крайних положений. При $w^2 = 0$ ($e^2 = 0$) получим критерий Рэлея для неустойчивости сферической заряженной капли: $W^2 \geq 4$. При $W^2 = 0$ и $e^2 = 9w^2 / 16\pi$ получим критерий Тейлора для неустойчивости незаряженной капли в поле: $w^2 \geq 2.63$. При этом для наступления неустойчивости играет роль сумма локальных давлений электрического поля и капиллярных сил, а не сумма локальных напряжений электрического поля и локальная величина поверхностной плотности заряда.

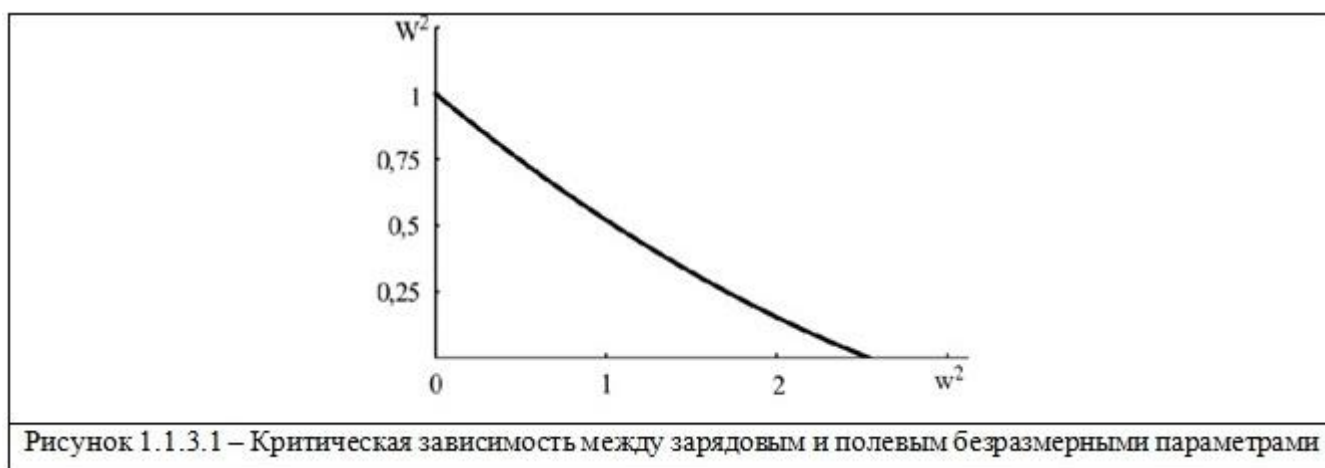
В отличие от [57], в работе [58] в аналогичной постановке проведена экспериментальная проверка критерия неустойчивости для промежуточных значений. Аналитическим путем произведен приближенный расчет неустойчивости заряженной капли, неподвижной в суперпозиции гравитационного и электрического полей, основанный на качественных соображениях с использованием подгоночного параметра 11/21:

$$W^2 + \frac{Ww}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^3}{(1-e^2)^{2/3} (Arthe - e)} - 3(1-e^2)^{1/3} \right) + \frac{11 w^2}{21 4\pi} \left(\frac{e^6}{(1-e^2)^{4/3} (Arthe - e)^2} \right) \geq 1.$$

Это соотношение проиллюстрировано расчётом критической зависимости между безразмерными параметрами W^2 и w^2 (см. рисунок 1.1.3.1).

Кроме того, можно рассмотреть осцилляции капли в переменном поле, как было продемонстрировано в [59, 60]. Однако это выходит за рамки данной работы, которая задумывалась как модельная для идеализированной ситуации. Также следовало бы учесть то обстоятельство, что при движении капли идеальной жидкости в среде на её поверхности возбуждаются осцилляции двух типов:

быстрые и медленные, связанные с движением капли относительно среды, как было отмечено в работе [61], однако это обстоятельство не будем принимать во внимание. Не будем учитывать и возможные изменения во времени заряда капли и внешнего электрического поля (имеющие место в грозовом облаке), приводящие к реализации параметрической неустойчивости [62-63] (см., например, [64-66]).



Экспериментальные исследования

Количественные оценки интенсивности излучения осциллирующих капель воды, составляющих кучево-дождевое облако на разной стадии развития грозовой деятельности, необходимы для определения местоположения источника излучения, контроля предгрозового излучения, разработки радиолокационных критериев грозоопасности, для распознавания грозовых облаков и надежной работы систем штормооповещения. Измерение интенсивности собственного радиоизлучения облаков применяется в гидрометеорологии с целью обнаружения мелкокапельной облачности, определения интенсивности жидких осадков, водности облаков, индикации града.

В работе Л.Г. Качурина, Л.И. Дивинского [67] упоминается, что летательные аппараты могут заряжаться до высоких потенциалов не только

в облаках на стадии грозовой активности, но и в спокойных облаках догрозовой или послегрозовой стадий развития. Такие летательные аппараты провоцируют разряды и излучают термодинамически необратимо в широком диапазоне световых и радио частот. В публикации М.А. Юмана [68] приведены сведения о происшествиях и катастрофах летательных аппаратов, проходивших через негрозоопасные облака, даже в зимнее время. Такие ситуации возникают из-за недостаточной информации об облачности.

Исследование электромагнитного излучения облаков широко используется в радиолокации. Радиолокационные методы зондирования облаков и связанных с ними явлений зародились в 40-50-е годы XX века.

Практическому исследованию нетеплового радиоизлучения облаков (в грозовой и грозоопасной стадиях) радиотехническими методами и объяснению природы этого излучения посвящено довольно много работ. Сами исследования проводились в различных частотных диапазонах.

В шестидесятые годы выделилось два направления изучения нетеплового радиоизлучения облаков в УКВ-диапазоне. К первому направлению относятся работы N.E. Gibson [69], F.R. Dickey [70], W.R. Atkinson, I. Paluch [71], в которых сообщено о радиошумовом излучении конвективных облаков при отсутствии молниевых разрядов. D.C. Hogg и R.A. Semplak [72] зарегистрировали электромагнитное излучение в сантиметровом диапазоне, на частотах 4-6 ГГц. Они предположили, что это излучение возникает при перераспределении зарядов на дождевых и внутриоблачных каплях. D.J. Sartor [73] предположил, что источником нетеплового шума конвективных облаков является излучение сталкивающихся заряженных капель. Однако, в работах F. Horner и P.A. Bradley [74], D.J. Sartor [75], A. Kimpara [76] отмечено, что столкновением заряженных капель нельзя объяснить всех явлений, связанных с излучением конвективных облаков. В публикации K.L. Zonge, W.H. Evans [77] зарегистрировано радиошумовое излучение на частотах 12 кГц, 100 кГц, 2.5 МГц, 10 МГц, 110 МГц. В [78, 79] в лабораторных условиях экспериментально

исследованы характеристики излучения сталкивающихся противоположно заряженных капель.

Второе направление связано с комплексными методами исследования электромагнитных сигналов от молний и облаков в широком диапазоне радиоволн на разных стадиях развития грозовой деятельности. В [80] отмечено, что в диапазоне частот 0.11-300 МГц при приближении облака к грозовой фазе напряженность электромагнитного поля увеличивается, при этом в предгрозовой фазе уровень излучения конвективных облаков на один-два порядка выше уровня шумового радиоизлучения и на два-три порядка ниже уровня нетеплового радиоизлучения от сильноточных атмосферных разрядов. В [67] указано, что сигналы нетеплового радиоизлучения облаков могут быть связаны с кристаллизационно-деформационными процессами, происходящими с гидрометеорами облаков. Наблюдения R.V. Harvey и E.A. Lewis [81] показали, что на частотах 250 МГц и 925 МГц уровень собственного шумового излучения конвективных облаков много ниже уровня излучения, возникающего при появлении в пространстве сигналов молний. В [82-85] сравниваются радиолокационные характеристики ливневых и грозовых облаков в миллиметрово–дециметровом диапазонах длин волн, в [86, 87] – в метровом диапазоне. В [88] исследования в диапазоне частот 4 кГц-1 ГГц показали, что градоопасные облака имеют большую интенсивность радиоизлучения, чем облака без града. В [89] отмечено, что образование ледяных кристаллов и их взаимодействие с переохлажденными облачными каплями создают условия для возникновения мелкомасштабных электрических разрядов, которые являются источником радиоизлучения.

Одной из важных работ в области экспериментального исследования микроструктуры, формы и амплитуды осцилляций падающих капель осадков является публикация [90]. В частности, отмечено, что при осесимметричных колебаниях на основной моде капли приобретают гантелевидную форму. В каплях радиусом от 1.5 мм возможно возбуждение высоких мод осцилляций.

Теоретические работа [22] посвящена проблеме расчета параметров электродиспергирования заряженной поверхности капель и менисков на торце капилляра во внешних электрических полях. Явление электродиспергирования жидкостей вносит вклад в интерпретацию феноменологии грозового электричества [91-93], огней Св. Эльма [94, 95], свечения воронок смерчей [96].

В работе Л.Г. Качурина [97] рассматривалась задача рассеяния туманов с помощью искусственного электрического поля, а также возможность искусственного изменения электрического поля атмосферы, сказывающегося даже на интенсивности ураганов.

Работы Ю.П. Райзера [98-101] посвящены проблеме грозового электричества и регистрации импульсов электромагнитного излучения разрядов молнии в ближней и дальней зонах.

Практические разработки А. Х. Аджиева [102] направлены на обнаружение очагов опасных гидрометеоявлений в атмосфере в России. Показано, что на основе регистрации микрофизических процессов, сопровождающихся разрядными явлениями, разделением электрических зарядов, формированием заряженных областей в облаке, можно контролировать тенденцию, стадию развития и местоположение метеорологического явления.

Теоретические исследования генерируемого капиллярными осцилляциями заряженной электропроводной капли электромагнитного излучения

Явление возникающего при капиллярных осцилляциях заряженных капель в грозовых облаках электромагнитного излучения с теоретической точки зрения исследовано весьма слабо. Впервые в 1982 году В.И. Калечиц, И.Е. Нахутин, П.П. Полуэктов [103] предложили модель непрерывно-шумового радиоизлучения грозовых облаков, сформулировав задачу о расчете интенсивности электромагнитного излучения, генерируемого капиллярными осцилляциями

поверхности заряженной капли идеальной идеально проводящей жидкости. Следуя экспериментальным наблюдениям [104], авторы [103] предложили объяснение радиоизлучению облаков. Коагуляция мелких частиц с падающей крупной каплей сопровождается возбуждением поверхностных колебаний капли, но, поскольку капля заряжена, колебания её формы приводят к генерации излучения электромагнитных волн. Коагуляция капель в грозовом облаке происходит непрерывно, поэтому излучение имеет непрерывный во времени характер. Там же были приведены первые оценки применительно к конвективным облакам для интенсивности излучения от единичного гидрометеора и грозового облака. В [103] исходили из того, что при слиянии крупной капли радиуса R с малой каплей r размер получившейся капли останется $\sim R$, однако, при этом возбуждаются колебания формы с индексом $n \sim R/r$ и амплитудой $\sim r$. Для оценки в [103] был принят заряд на крупной капле $\sim (10^8 - 10^{10})\bar{e}$ (\bar{e} – заряд электрона) и концентрация капель в облаке 10^3 л^{-1} . В итоге была вычислена мощность излучения $\sim 2 \cdot 10^{-9}$ эрг/с от единичного гидрометеора с $R=1$ мм, движущегося в облаке мелких капель $r=10$ мкм. Излучение шло на частоте ~ 120 кГц. Интенсивность излучения для кучево-дождевого облака диаметром 5 км составила $\approx 3 \cdot 10^5$ эрг/с.

Спустя несколько десятков лет в публикациях [105-106] были уточнены расчёты [103] с учётом новых справочных данных по концентрациям и зарядам облачных капель и уточнением принятых в расчётах [103] асимптотик цилиндрических функций. Кроме того, в [105] были обозначены два наиболее вероятных источника электромагнитного излучения капель воды в облаке и приведены оценки интенсивности излучения для отдельной внутриоблачной капли и грозового облака.

В [105] указано, что первый возможный источник электромагнитного излучения обусловлен осцилляциями низких мод мелких капель с концентрацией в облаке порядка $\sim 10^9$ штук на м^3 . Характерные размеры таких капель от 3 до 30 мкм. В [103] отмечено, что второй источник электромагнитного излучения

характеризуется колебаниями высоких мод свободно падающих в облаке крупных капель (гидрометеоров), коагулирующих с более мелкими капельками. Концентрация крупных капель в облаке составляет порядка $\sim 10^3$ штук на м^3 .

В [105] получена интенсивность излучения единичной мелкой капли размером $R = 30$ мкм и зарядом $Q = 2.5 \cdot 10^{-6}$ СГСЭ порядка $\sim 3 \cdot 10^{-14}$ эрг/с и частотой ≈ 100 кГц. Также было указано, что интенсивность излучения мелких капелек приходится на полосу частот от 100 кГц до 5 МГц. Интегральная интенсивность радиоизлучения из грозового облака размером 5 км получилась $\sim 2 \cdot 10^5$ эрг/с. В проведенной оценке излучение всех капель связывалось с осцилляциями основной моды.

Интенсивность электромагнитного излучения от единичного гидрометеора оказалась больше и шла в области меньших частот по сравнению с мелкими каплями. Для гидрометеора радиусом $R = 100$ мкм и зарядом $Q = 5 \cdot 10^{-4}$ СГСЭ при возбуждении двадцатой моды получена интенсивность излучения порядка $\sim 3 \cdot 10^{-10}$ эрг/с на частоте ≈ 25 кГц. Интегральная интенсивность электромагнитного излучения от всех гидрометеоров из грозового облака диаметром 5 км составила $\sim 2 \cdot 10^4$ эрг/с.

Существенный вклад в теоретические исследования интенсивности электромагнитного излучения внес Н.А. Богатов [106], который отметил ошибку в [103, 105]: при расчете интенсивности радиоизлучения от колеблющейся капли: была взята неверная асимптотика для функций Ханкеля, и учёл реалии грозового облака.

Метод расчёта интенсивности электромагнитного излучения от осциллирующей заряженной капли, предложенный в [103] сводится к следующему. Рассматривается осциллирующая заряженная капля идеальной жидкости, но для расчёта электрического поля вокруг капли берётся не уравнение Лапласа для электростатического потенциала (как в [2-3]), а волновое уравнение для напряженности электрического поля. В итоге в выводимом дисперсионном

уравнении частота оказывается комплексной. Мнимая часть частоты означает затухание осцилляций, невозможное в идеальной жидкости. Из этого факта делается вывод о возможном источнике потери энергии: излучении каплей электромагнитных волн. Выражение для интенсивности излучения выписывается как скорость изменения энергии поверхностных капиллярных волн, которая на основании теоремы вириала представляется как удвоенная средняя за период осцилляций кинетическая энергия волн в капле, связанная с n -й модой.

Теоретические исследования генерируемого капиллярными осцилляциями конечной амплитуды заряженной электропроводной капли электромагнитного излучения

Основная часть исследований капиллярных осцилляций заряженных капель, сфероидальных незаряженных и заряженных капель в однородном внешнем электростатическом поле выполнена в рамках линеаризованной системы уравнений гидродинамики. Лишь в 80-е годы XX века стали выполняться исследования нелинейной динамики поверхности капли, позволившие получить качественно новую информацию о закономерностях реализации неустойчивости капли и ее капиллярных колебаниях. Однако до сих пор нет единого подхода к решению подобных задач.

В 1983 году появилась первая теоретическая публикация J.A. Tsamopoulos, R.A. Brown [107], в которой методом Линштедта-Пуанкаре получены поправки к форме поверхности незаряженной капли несжимаемой невязкой жидкости, потенциалам скорости и частотам колебаний в квадратичном приближении по амплитуде начальной деформации равновесной формы капли. J.A. Tsamopoulos, R.A. Brown в [108] сделали акцент на методе многих масштабов, с помощью которого исследованы осцилляции конечной амплитуды заряженной капли, несущей электрический заряд, меньший критического в

смысле устойчивости по Рэлею, при начальном возбуждении первых трех мод, начиная с основной моды (второй, третьей, четвертой). В [109] рассмотрен нелинейный анализ осесимметричных колебаний поверхности идеально проводящей невязкой заряженной капли и характер бифуркаций решений в окрестности критического значения заряда. Численными расчетами аналогичный результат получен в [110]. Подобная ситуация неосесимметричных осцилляций поверхности невязкой заряженной капли рассмотрена в О.А. Basaran, L.E. Scriven [111]. В 1991 году в работе [112] методом многих масштабов получена форма поверхности незаряженной невязкой капли в поле аэродинамической сил и частоты колебаний во втором порядке малости по амплитуде скорости внешнего потока воздуха. В 1996 году в [113] проведены экспериментальные исследования сдвига частоты при нелинейных колебаниях капли в отсутствии силы тяжести, результаты которых хорошо согласуются с результатами [107].

Интерес к трансляционной неустойчивости капель и пузырей начался с работ [114, 115, 116]. В публикациях [117, 118, 119] указана ошибка на некорректную постановку начальных условий в [114, 115, 116] и впервые показано, что при многомодовой начальной деформации равновесной формы поверхности капли в вакууме или во внешней среде требование неподвижности её центра масс приводит к тому, что среди мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия, появляется трансляционная мода. В [118] важным выводом является то, что возбуждение трансляционной моды заряженной капли приводит к генерации акустического и электромагнитного излучения дипольного типа, не обнаруживаемого в линейных расчетах. В [118, 120] указано, что когда в спектре мод, определяющих начальную деформацию заряженной капли, присутствуют две соседние моды, то в расчётах второго порядка малости оказывается, что центр капли совершает осцилляции возле положения равновесия (в расчётах первого порядка малости центр капли неподвижен). А поскольку капля заряжена, то осцилляции заряда приводят к генерации электромагнитного излучения дипольного типа.

По известным формулам теории излучения (см. [118]) проведена оценка интенсивности фонового дипольного электромагнитного излучения, когда смещение центра заряда связано с возбуждением двух соседних мод с $i=100$ и $i+1=101$. Используя параметры для капли $R=30$ мкм, $Q=2.5 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ и типичную концентрацию таких капель в грозовом облаке, которая составляет $\sim 10^3$ см $^{-3}$, получена интенсивность излучения $I \approx 10$ эрг/с на частотах порядка мегагерц для грозового облака диаметром 5 км.

Следует отметить, что методом многих масштабов исследованы капиллярные осцилляции конечной амплитуды незаряженной [121] и заряженной электропроводных капель в однородном электростатическом поле [122] в квадратичном приближении по амплитуде ε безразмерной начальной деформации равновесной формы и величине эксцентриситета e^2 равновесной сфероидальной деформации капли.

Следует отметить, что в [120] высказывалось предположение о том, что при капиллярных осцилляциях заряженной капли в расчётах первого порядка обнаруживается квадрупольное излучение, а в расчётах второго порядка малости – более интенсивное дипольное. Но это предположение нуждается в проверке. Излучение осциллирующей во внешнем электрическом поле незаряженной капли и тем более заряженной не исследовалось.

Потенциал системы зарядов на больших расстояниях

Пусть имеется система N точечных зарядов q_n , занимающая некоторую область пространства с максимальным характерным линейным размером l . Радиус-векторы отдельных зарядов относительно произвольно выбранного начала отсчёта обозначим \mathbf{r}_n . Определим электростатический потенциал Φ этой системы зарядов на большом расстоянии ($R_0 \ll l$) от неё, в точке \mathbf{R}_0 :

$$\Phi = \sum_n^N \frac{q_n}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_n|}.$$

В приближении $R_0 \ll l$ разложим знаменатель этого выражения по степеням $\max |\mathbf{r}_n / \mathbf{R}_0|$. Для этого воспользуемся соотношением

$$\sum_n^N q_n \cdot f(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_n) = \sum_n^N q_n \cdot f(\mathbf{R}_0) - \sum_n^N q_n \cdot \mathbf{r}_n \nabla f(\mathbf{R}_0) + \frac{1}{2} \sum_{n,m}^N q \cdot x_n x_m \frac{\partial^2}{\partial X_n \partial X_m} \frac{1}{R_0} + O\left(\frac{l}{L}\right)^3;$$

где $L \equiv |\mathbf{R}_0|$, $l \equiv \max |\mathbf{r}_n|$. В последней сумме по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование; нижние индексы при q опущены, чтобы не исказить смысла тензорного суммирования. В итоге получим:

$$\Phi(\mathbf{R}_0) = \frac{\sum_n^N q_n}{R_0} - \sum_n^N q_n \cdot \mathbf{r}_n \nabla \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2} \sum_{n,m}^N q \cdot x_n x_m \frac{\partial^2}{\partial X_n \partial X_m} \frac{1}{R_0} + O\left(\frac{l}{L}\right)^3. \quad (1.5.1)$$

В (1.5.1) первое слагаемое справа даёт Кулоновский закон убывания потенциала с расстоянием, где $Q \equiv \sum_n^N q_n$ — полный заряд системы; $\mathbf{d} \equiv \sum_n^N q_n \cdot \mathbf{r}_n$ —

дипольный момент. Третье слагаемое $\frac{1}{2} \sum_{n,m}^N q \cdot x_n x_m \frac{\partial^2}{\partial X_n \partial X_m} \frac{1}{R_0}$ называется

квадрупольным потенциалом системы. Его можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2} \sum_{n,m}^N q \cdot \left(x_n x_m - \frac{1}{3} r^2 \delta_{nm} \right) \frac{\partial^2}{\partial X_n \partial X_m} \frac{1}{R_0}.$$

Тензор

$$D_{nm} \equiv \sum_{n,m}^N q \cdot \left(3x_n x_m - r^2 \delta_{nm} \right);$$

называется квадрупольным моментом системы. Из его определения следует, что сумма его диагональных элементов равна нулю:

$$D_{nn} = 0; \quad (1.5.2)$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). В итоге симметричный тензор D_{nm} имеет лишь 5 независимых компонент. С его помощью можно записать третью компоненту полного потенциала системы зарядов в (1.5.1) в виде:

$$\frac{D_{nm}}{6} \frac{\partial^2}{\partial X_n \partial X_m} \frac{1}{R_0}.$$

В силу того, что D_{nm} симметричный тензор, то он может быть приведен к главным осям. Из-за условия (1.5.2) только два из трёх главных (диагональных) элемента независимы:

$$D_{xx} = D_{yy} = \frac{1}{2} D_{zz}.$$

В сферических координатах треть компонента полного потенциала принимает вид:

$$\frac{D_{zz}}{4R_0^3} (3\cos^2 \theta - 1) \equiv \frac{D_{zz}}{2R_0^3} P_2(\cos \theta).$$

Угол θ – угол между \mathbf{R}_0 и осью симметрии системы (она же и одна из главных осей тензора); $P_n(\cos \theta)$ – осесимметричный полином Лежандра.

Несложно видеть, что разные слагаемые в (1.5.1) по разному зависят от R_0 : первое $\sim 1/R_0$; второе $\sim 1/R_0^2$; третье $\sim 1/R_0^3$.

Вообще-то дипольный момент определяется другим, более общим выражением. Если обозначить положительные заряды как q_n^+ , а радиус-векторы их положений как \mathbf{r}_n^+ и обозначить отрицательные заряды как q_n^- и их радиус-векторы как \mathbf{r}_n^- , то естественно записать:

$$\mathbf{d} \equiv \sum_n q_n^+ \cdot \mathbf{r}_n^+ - \sum_n q_n^- \cdot \mathbf{r}_n^- \equiv \mathbf{R}^+ \sum_n q_n^+ - \mathbf{R}^- \sum_n q_n^-; \quad (1.5.3)$$

где

$$\mathbf{R}^+ \equiv \frac{\sum_n q_n^+ \cdot \mathbf{r}_n^+}{\sum_n q_n^+}; \quad \mathbf{R}^- \equiv \frac{\sum_n q_n^- \cdot \mathbf{r}_n^-}{\sum_n q_n^-}; \quad (1.5.4)$$

радиус-векторы положений центров положительных и отрицательных зарядов.

Если $\sum_n^N q_n = 0$, что бывает при $\sum_n q_n^+ = \sum_n q_n^-$ то дипольный момент не зависит от выбора начала отсчёта, полный заряд системы равен нулю, и потенциал заряженной системы определится соотношением:

$$\Phi(\mathbf{R}_0) = -\mathbf{d} \cdot \nabla \frac{1}{R_0} \equiv \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Мультиполи: диполь и квадруполь

Если расстояние от излучающей системы велико по сравнению как с размерами самой системы, так и с длиной излучаемых системой электромагнитных волн (или скорость зарядов много меньше по сравнению со скоростью света), то имеет смысл говорить о волновой зоне излучения. В такой области поля распространяющаяся электромагнитная волна можно считать плоской. В общем случае электромагнитное излучение сложной системы зарядов делят на несколько составляющих: дипольную, квадрупольную и магнитно-дипольную [123]. Вначале рассмотрим несколько основных понятий.

Мультиполюм принято называть определенные конфигурации точечных источников. Выделение таких конфигураций связано с разложением источников поля по мультиполям. Мультиполюм нулевого порядка является точечный заряд, мультиполюм первого порядка – диполь, мультиполюм второго порядка – квадруполь и т.д. Мультипольное приближение основано на разложении потенциала поля в ряд по обратным степеням радиус-вектора. Такое разложение

используется для приближенного описания поля от сложной системы зарядов на большом расстоянии от неё. Следует отметить, что в мультипольном приближении поле каждого следующего порядка убывает значительно быстрее предыдущего в зависимости от расстояния от источника. Поэтому в мультипольном разложении в зависимости от требуемой точности следует отбросить члены более высокого порядка. Если говорить о мультипольном излучении, то поля разных порядков убывают с расстоянием от излучающей системы одинаково быстро, различаясь лишь зависимостью от угла.

По конфигурации точечных источников диполь представляет собой два противоположных по знаку равновеликих точечных заряда, разнесенных на определенное расстояние. В целом диполь является электронейтральной системой электрических зарядов. Важной характеристикой электрического диполя является дипольный момент. Дипольный момент – векторная физическая величина, характеризующая суммарный заряд и положение системы источников на большом расстоянии.

Для системы из N зарядов дипольный момент равен:

$$\mathbf{d} \equiv \sum_n^N q_n \cdot \mathbf{r}_n;$$

где q_n – заряд n -го элемента, \mathbf{r}_n – его радиус-вектор.

Отметим, что дипольное приближение обусловлено разложением потенциала поля в ряд по обратным степеням радиус-вектора с точностью до членов первого порядка. Дипольный момент является первым мультипольным моментом.

Рассмотрим следующие два случая. Если система источников, расположенная на большом расстоянии, в целом электронейтральна (суммарный заряд равен нулю) и её дипольный момент не равен нулю, то основной вклад в описание электрического поля дает дипольное приближение. Если же суммарный заряд системы источников не равен нулю, то основной вклад в электрическое поле дает нулевое приближение, а дипольное (первое)

приближение является лишь малой поправкой, которая очень мала по сравнению с нулевым приближением.

По конфигурации точечных источников квадруполь представляет собой четыре равновеликих точечных заряда, расположенных в вершинах параллелограмма таким образом, что каждая его диагональ соединяет заряды одинакового знака. Важной характеристикой квадруполя является квадрупольный момент. Квадрупольный момент – тензорная физическая величина, характеризующая потенциал поля системы зарядов, который убывает по закону $\sim 1/r^3$ (поле убывает по закону $\sim 1/r^4$), на расстоянии много большем по сравнению с размерами самой системы.

Квадрупольный момент системы зарядов в декартовой системе координат (x, y, z) является тензором второго ранга:

$$D_{\alpha\beta}(t) = \iiint_V \rho(x, y, z) (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} \cdot r^2) dV ;$$

где $\rho(x, y, z)$ – плотность зарядов, $\delta_{\alpha\beta}$ – дельта-символ Кронекера, r – модуль радиус-вектора, $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ – индексы, нумерующие координаты.

Квадрупольное приближение основано на разложении потенциала поля в ряд по обратным степеням радиус-вектора и отбрасывании всех членов выше второго порядка. Если дипольный момент электронейтральной системы зарядов равен нулю, то в мультипольном приближении следует учитывать поле второго порядка. Следовательно, квадрупольный момент является вторым мультипольным моментом.

Рассмотрим вывод выражения мультипольной интенсивности излучения. Мультипольное излучение основано на разложении в ряд векторного потенциала \mathbf{A} по степеням малого параметра: отношения размеров системы к длине излучающей волны.

Система зарядов, излучая электромагнитные волны, переносит определенное количество энергии. В плоской волне поток энергии задается вектором Пойнтинга в виде:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} cH^2 \mathbf{n};$$

где c – скорость света, H – напряженность магнитного поля, \mathbf{n} – единичный вектор нормали.

Количество энергии dI , излучаемой системой зарядов в единицу времени в элемент телесного угла d_0 , равно потоку энергии S , протекающему в единицу времени через элемент $df = R_0^2 d_0$ шаровой поверхности с центром в начале координат и радиусом R_0 :

$$dI = \frac{1}{4\pi} cH^2 R_0^2 d_0.$$

Здесь магнитное поле H порядка $\sim 1/R_0$, следовательно, интенсивность dI не зависит от расстояния.

Магнитное и электрическое поля удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathbf{n} \right); \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} \right); \quad (1.6.1)$$

где \mathbf{A} – векторный потенциал для больших расстояний от системы точечных зарядов, разложенный в ряд по малому параметру с сохранением первых двух членов:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \sum e\mathbf{v} + \frac{1}{c^2 R_0} \frac{\partial}{\partial t} \sum e\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}).$$

Здесь суммирование ведется по всем зарядам.

Расписывая второе слагаемое в виде

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{2} ((\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n});$$

получим:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \frac{1}{6c^2 R_0} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} + \frac{1}{cR_0} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \times \mathbf{n} \right); \quad (1.6.2)$$

где \mathbf{d} – дипольный момент, $\mathbf{D} = \sum e \left(3\mathbf{r}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{n}r^2 \right) = D_{\alpha\beta} n_\beta$ – квадрупольный момент, $\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ – магнитный момент.

Подставляя (1.6.2) в (1.6.1), получим выражения для векторов магнитного и электрического полей в виде:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} \times \mathbf{n} \right) + \frac{1}{6c} \left(\frac{\partial^3 \mathbf{D}}{\partial t^3} \times \mathbf{n} \right) + \left(\left(\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial t^2} \times \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} \right) \right];$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} \left[\left(\left(\frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} \times \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} \right) + \frac{1}{6c} \left(\left(\frac{\partial^3 \mathbf{D}}{\partial t^3} \times \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n} \right) + \left(\mathbf{n} \times \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial t^2} \right) \right].$$

Усредняя dI по всем направлениям вектора \mathbf{n} , получим полное излучение электромагнитных волн, содержащее три независимых компоненты: дипольную, квадрупольную и магнитно-дипольную

$$I = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} \right)^2 + \frac{1}{180c^5} \left(\frac{\partial^3 D_{\alpha\beta}}{\partial t^3} \right)^2 + \frac{2}{3c^3} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial t^2} \right)^2.$$

Первый член в разложении – интенсивность дипольного излучения, второй член – интенсивность квадрупольного излучения, третий – интенсивность магнитно-дипольного излучения. Следует заметить, если отношение заряда к массе у всех движущихся частиц в системе одинаково, то отсутствуют дипольная и магнитно-дипольная компоненты излучения. Магнитно дипольное излучение отсутствует также у системы, состоящей из двух зарядов.

Глава 2. Электрогидродинамические расчёты на основе подходов механики сплошной среды и закона сохранения энергии по Калечицу-Полужкову

2.1. Физико-химический анализ возможности затухания капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной жидкости. Декремент затухания

Изучение в рамках физико-химической гидродинамики возможности появления затухания капиллярных осцилляций заряженных капель идеальной жидкости за счёт иных физических механизмов, нежели диссипация энергии, за счёт вязкости жидкости (например, за счёт необратимых потерь энергии на изучение электромагнитных волн) на основе подходов механики сплошной среды и закона сохранения энергии началось ещё 36 лет назад (см., например, [103, 106, 124]). Однако большая часть существующих электрогидродинамических исследований относится к осцилляциям слабо заряженных капель, что является не вполне корректным, поскольку в грозовом облаке имеются капли с разными зарядами, а физический механизм сбора электрических зарядов с отдельных капель грозовых облаков для поддержания разряда молнии предполагает реализацию электрогидродинамической неустойчивости капель [125]. Кроме того, изучение возникающего при ускоренном движении заряженной поверхности капель (при капиллярных осцилляциях) электромагнитного излучения является актуальным в связи с проблемами радиолокационного зондирования облаков и туманов [99]. При этом электрический заряд отдельной капли меняется в очень широких пределах [126].

В связи с выше сказанным представляется необходимым провести электрогидродинамические расчёты затухания капиллярных осцилляций сильно заряженной (в смысле близости к порогу реализации рэлеевской неустойчивости [2, 3]) капли на основе подходов механики сплошной среды и закона сохранения энергии.

Постановка задачи. Рассмотрим сферическую каплю радиуса R идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости плотностью ρ_1 , коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что капля находится в идеальной, несжимаемой, диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью ε_{ex} и плотностью ρ_2 . Полный заряд капли равен Q .

Предполагаем, что капиллярные волны в капле существуют уже в силу теплового движения молекул жидкости. Такое волновое движение формирует искажение равновесной поверхности сферической формы капли с характерной тепловой амплитудой $\xi \sim \sqrt{kT/\sigma}$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура в Кельвинах [127].

Задачу о возможности появления затухания капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной жидкости, не связанного с вязкостью, будем решать в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре масс капли. Примем, что в капле и среде существует потенциальное движение с гидродинамическими потенциалами скоростей $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t) = \nabla \psi_j(\mathbf{r}, t)$, $j=1$ относится к капле, $j=2$ – к среде), приводящее к осесимметричному искажению её равновесной сферической формы:

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t).$$

Здесь $\xi(\theta, t)$ – волновое возмущение поверхности капли, порождаемое её тепловыми осцилляциями: $\max |\xi(\theta, t)| \ll R$.

Полная математическая формулировка обсуждаемой задачи содержит основные уравнения электрогидродинамики:

$$\Delta \psi_j(\mathbf{r}, t) = 0;$$

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}; \quad \text{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$P_j(\mathbf{r}, t) = P_{j0}(\mathbf{r}) - \rho_j \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t};$$

$$r = R + \xi: \quad \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial n}; \quad \frac{\partial \psi_1(\mathbf{r}, t)}{\partial n_1} = \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial n_2} = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial n}; \quad (2.1.1)$$

$$\Delta P_0 - \rho_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{1}{8\pi\epsilon_{ex}} \left(\frac{Q}{r^2} \right)^2 - \frac{\sigma}{R} \left(2 - (2 + L_\theta) \frac{\xi}{R} \right) = 0; \quad (2.1.2)$$

$$L_\theta \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right); \quad (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0;$$

и дополнительные естественные (интегральные) условия: сохранения полного объема капли (объем капли несжимаемой жидкости при любых колебаниях её поверхности остается неизменным)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{R+\xi(\theta, t)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3;$$

неподвижности центра масс капли

$$\int_0^\pi \mathbf{r} \cdot (R + \xi(\theta, t))^2 dr \sin \theta d\theta = 0;$$

и неизменности полного заряда капли

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{n}, \mathbf{E}) \cdot (R + \xi(\theta, t))^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{Q}{\epsilon_{ex}}.$$

В выписанных уравнениях введены следующие обозначения: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ – напряженность электростатического поля, создаваемого собственным зарядом капли, $P_j(\mathbf{r}, t)$ – гидродинамические давления (индексом $j=1$ помечены величины, относящиеся к капле, $j=2$ – к среде), P_{j0} – постоянные давления внутри и вне капли в состоянии равновесия, ΔP_0 – перепад давлений в капле и среде в равновесном состоянии, c – скорость света, $\boldsymbol{\tau}$ – орт касательной к поверхности капли, \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 – орты нормалей на границе раздела, внешние по

отношению к капле и среде. Орт нормали \mathbf{n} к свободной поверхности капли $F(\theta, t) = r - R - \xi(\theta, t) = 0$ вычисляется по следующей формуле: $\mathbf{n} = \nabla F / \|\nabla F\|_{F=0}$.

Отношение амплитуды капиллярных осцилляций к радиусу сферической капли образует малый параметр задачи. При этом амплитуда волн на капле имеет тот же порядок малости, что и поле скоростей движения в капле и окружающей среде, вызванного капиллярными колебаниями поверхности капли. Решение поставленной задачи будем искать в рамках метода прямого разложения, ограничиваясь первым порядком малости по безразмерной амплитуде осцилляций.

Решение первого порядка малости. Определим функцию волнового возмущения $\xi(\theta, t)$ в виде разложения по полиномам Лежандра (в случае осесимметричных колебаний):

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n P_n(\mu) \exp(-i\omega_n t); \quad \mu \equiv \cos \theta. \quad (2.1.3)$$

Дополнительные условия (несжимаемости жидкости и неподвижности центра масс капли) позволяют уточнить пределы изменения индекса n в разложении $\xi(\theta, t)$.

Решение уравнения Лапласа для потенциалов скорости движения $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ с учетом условий ограниченности представим также в виде разложений по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \theta, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^n P_n(\mu) \exp(-i\omega_n t); \\ \psi_2(r, \theta, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\mu) \exp(-i\omega_n t). \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Здесь неизвестные коэффициенты A_n и B_n имеют порядок амплитуды возмущения α_n . Связь между ними легко находится из граничных условий (2.1.1):

$$A_n = -\alpha_n \frac{i\omega_n}{n} R^{1-n}; \quad B_n = \alpha_n \frac{i\omega_n}{(n+1)} R^{n+2}. \quad (2.1.5)$$

Следует заметить, что в разложениях (2.1.3), (2.1.4) предполагается, что зависимость искомых функций $\xi(\theta, t)$, $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ от времени t является экспоненциальной.

Используя кинематическое граничное условие (2.1.1), потребуем выполнение динамического граничного условия (2.1.2). Подставим в (2.1.2) решения (2.1.4), (2.1.5) и продифференцируем полученное равенство один раз по времени t при постоянном значении θ :

$$-\rho_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \rho_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} P_q + \frac{\sigma}{R^2} (2 + L_\theta) \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = 0. \quad (2.1.6)$$

Заметим, что в последнем уравнении производные всех функций, зависящих от времени, будем относить к равновесной поверхности капли: $r = R$. Однако в выражении (2.1.6) является неизвестным электрическое давление на поверхности капли $P_q(\mathbf{r}, t)$. Давление электрических сил определяется по известной формуле: $P_q = \varepsilon_0 \varepsilon_{ex} \mathbf{E}^2 / 2$. Подставляя выражение для вектора напряженности электрического поля из (2.1.28) (см. «Приложение. Расчет напряженности электрического поля в окрестности осциллирующей заряженной капли»), получим $P_q(\mathbf{r}, t)$ в окрестности возмущенной поверхности капли в виде:

$$P_q \equiv \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_{ex}R^4} \left(1 - \frac{2}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \exp(-i\omega_n t) (G(kR)n(n+1) + 2) P_n(\mu) \right);$$

$$G(kR) \equiv \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R}.$$

Здесь введено обозначение $h_n^{(2)}(kr)$ сферической функции Бесселя третьего рода [128], k – волновое число, символом ∂_r обозначена частная производная по переменной r .

В (2.1.6) подставим полученное выражение для давления электрического поля и после несложных преобразований запишем дисперсионное уравнение в следующем виде:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n+1)}{[\rho_2 n + (n+1)\rho_1]} \left\{ 4W [G(kR)n(n+1) + 2] + (n-1)(n+2) \right\}; \quad (2.1.7)$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_{ex}\sigma R^3}.$$

Следует заметить, что параметр Релея W определяет устойчивость капли по отношению к собственному заряду. При этом отметим, что сильно заряженная капля становится неустойчивой при выполнении следующего условия [2, 3]: $W \geq 1$.

Согласно [128] сферическую функцию Бесселя третьего рода запишем в виде степенного ряда:

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} e^{-iz} \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}}; \quad z = kr.$$

Следовательно, для функции $G_n(z)$ имеем:

$$G(z) \equiv \frac{h_n^{(2)}(z)}{\frac{\partial(z h_n^{(2)}(z))}{\partial z}} = - \frac{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} (2iz)^m}{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} 2^m (iz)^{m+1} + \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!(n-m)}{(n-m)!m!} (2iz)^m}.$$

Расписывая в полученном выражении суммы, определим вещественную и мнимую части функции $G(z)$. Тогда при малом значении аргумента ($z \ll 1$) получим следующие асимптотики:

$$\operatorname{Re}[G_n(z)] \approx -\frac{1}{n}; \quad \operatorname{Im}[G_n(z)] \approx \left[\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right]^2 z^{2n+1}. \quad (2.1.8)$$

Напомним, что частота осцилляций капли ω_n имеет комплексный вид: $\omega_n = \operatorname{Re} \omega_n + i \operatorname{Im} \omega_n$. Здесь мнимая часть обязана своим появлением затуханию осцилляций капли вследствие потерь энергии осцилляций на излучение

электромагнитных волн. Так как $(\text{Im}\omega_n \ll \text{Re}\omega_n)$, то квадрат частоты осцилляций n -моды выразим в следующем виде: $\omega_n^2 \approx (\text{Re}\omega_n)^2 + 2i\text{Re}\omega_n \text{Im}\omega_n$.

Очевидно, из выражений (2.1.7), (2.1.8), с учетом малости аргумента $z = kR$, будут справедливы следующие соотношения:

$$(\text{Re}\omega_n)^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n+1)(n-1)}{[(n+1)\rho_1 + \rho_2 n]} [(n+2) - 4W]; \quad (2.1.9)$$

$$\text{Im}\omega_n = \frac{(n+1)^2}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_{ex} R^6} \left[\frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 z_0^{2n+1} \frac{1}{2\text{Re}\omega_n}. \quad (2.1.10)$$

Подставим теперь в (2.1.10) выражение для частоты собственных осцилляций капли из (2.1.9) и, учитывая условие $z = \frac{\text{Re}\omega_n}{c} R$, определим $\text{Im}\omega_n$ в следующем виде:

$$\text{Im}\omega_n = 2W \left[\frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{(n+1)^{n+2} n^n (n-1)^n}{[\rho_2 n + (n+1)\rho_1]^{n+1}} \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2} c^{2n+1}} [(n+2) - 4W]^n. \quad (2.1.11)$$

Затухание капиллярных осцилляций капли. Электромагнитное излучение. Итак, осталось определить аналитический вид выражения для мощности излучения, генерируемого капиллярными осцилляциями заряженной капли. Несложно видеть, что мнимая часть частоты $\text{Im}\omega_n$ в (2.1.8) является декрементом затухания капиллярных осцилляций капли η . Однако, в модели идеальной жидкости затухания быть не может. Таким образом, исходя из закона сохранения энергии, затухание можно связать только с потерями энергии осцилляций на излучение электромагнитных волн [103, 123].

$$I = -\frac{d\mathcal{G}_n}{dt} \equiv \eta\mathcal{G}_n.$$

Здесь \mathcal{G}_n – обозначение энергии поверхностных колебаний капли n -й моды. Согласно теореме вириала \mathcal{G}_n равна удвоенной средней за период кинетической энергии движения жидкости в капле [129]:

$$g_n = \frac{2\pi R^3 \rho_1 \alpha_n^2}{n(2n+1)} (\operatorname{Re} \omega_n)^2.$$

Принимая во внимание выше полученные соотношения, запишем аналитическое выражение интенсивности электромагнитного излучения, генерируемого капиллярными осцилляциями единичной заряженной капли:

$$I = 4\pi W \left[\frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{n^n (n-1)^{n+1} (n+1)^{n+3} \rho_1}{[(n+1)\rho_1 + \rho_2 n]^{n+2} (2n+1)} \frac{\sigma^{n+2}}{c^{2n+1} R^n} \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 [(n+2) - 4W]^{n+1}. \quad (2.1.12)$$

Из вида выражения (2.1.12) следует, что с увеличением номера моды n квадрат факториала в знаменателе увеличивается быстрее по сравнению со степенной зависимостью, записанной в числителе. Следовательно, мощность излучения будет резко уменьшаться при возрастании номера моды.

Используя соотношение (2.1.12), приведем численные оценки возникающего при капиллярных осцилляциях заряженной капли электромагнитного излучения от грозового облака. Прежде всего отметим, что возникновение зарядов на внутриоблачных каплях объясняется процессами электризации, например, такими как захват каплями воздушных ионов, соударение с поляризованными частицами, электризация при переходе из одного агрегатного состояния в другое, разбрызгивание капель [126]. Таким образом, согласно [103] обозначим два наиболее вероятных источника радиоизлучения от капель воды в конвективных облаках. Первый источник излучения обусловлен осцилляциями низких мод мелких капель с концентрацией в облаке порядка $\sim 10^3$ штук на см^3 [130]. Характерные размеры таких капель от 3 до 30 мкм. Ко второму источнику излучения электромагнитных волн относятся уже осцилляции высоких мод свободно падающих (со скоростью ≈ 78 см/с) в облаке крупных капель (гидрометеоров), коагулирующих с более мелкими капельками. Натурные наблюдения показали, что концентрация таких капель в облаке существенно меньше и составляет $\sim 10^3$ штук на м^3 [130].

Следует заметить, что осцилляции поверхности капель обусловлены, прежде всего, микрофизическими внутриоблачными процессами: коагуляцией

с более мелкими частицами, изменением агрегатного состояния, дроблением на более мелкие в следствие столкновительных процессов или реализации электростатической неустойчивости, электрического и гидродинамического взаимодействия с соседними частицами [131]. При этом величина амплитуды осцилляций облачных капель может принимать значения до десятков процентов от размера капли.

Для того, чтобы иметь возможность сравнить численные оценки интенсивности излучения по формуле (2.1.12), обратимся к работе [103]. Для заряженного единичного гидрометеора типичного размера $R=100$ мкм интенсивность радиоизлучения, основанная на обсуждаемом механизме, составила $\sim 3 \cdot 10^{-10}$ эрг/с на частоте ≈ 25 кГц. Тогда интегральная интенсивность излучения от всех гидрометеоров из грозового облака диаметром 5 км, равная по порядку величины $\sim 2 \cdot 10^{-4}$ эрг/с, очевидно, оказалась существенно завышенной.

Используя формулу (2.1.12), рассчитаем мощность электромагнитного излучения от единичной капли и грозового облака. Приведем следующие значения физических величин: $\varepsilon_{ex}=1$, $n=2$, $\sigma=73$ дин/см, $\rho_1=1$ г/см³, $\rho_2=1.3 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $\alpha_n=0.1R$, $Q=1.8 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.9W_{кр}$ ($W_{кр}$ – критическое значение параметра Релея) при $R=10$ мкм и $\sim 0.18W_{кр}$ при $R=30$ мкм). Следовательно, из (2.1.11) при радиусе капли $R=12$ мкм легко получим $I \sim 1 \cdot 10^{-40}$ эрг/с на частоте ≈ 400 кГц. Для капли размером $R=20$ мкм интенсивность излучения составляет $I \sim 5 \cdot 10^{-41}$ эрг/с на частоте ≈ 300 кГц (см. рисунок 2.1.1. Рассчитано при $\varepsilon_{ex}=1$, $n=2$, $\sigma=73$ дин/см, $\rho_1=1$ г/см³, $\rho_2=1.3 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $\alpha_n=0.1R$. Кривая 1 соответствует $Q=1.8 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.9W_{кр}$ при $R=10$ мкм и $\sim 0.18W_{кр}$ при $R=30$ мкм), кривая 2 – $Q=1.5 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.87W_{кр}$ при $R=10$ мкм и $\sim 0.15W_{кр}$ при $R=30$ мкм), кривая 3 – $Q=1.2 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.7W_{кр}$ при $R=10$ мкм и $\sim 0.12W_{кр}$

при $R = 30$ мкм)). Кучево-дождевое облако диаметром 5 км обладает интегральной мощностью излучения $I_{in} \sim 7 \cdot 10^{-21}$ эрг/с, если принять во внимание, что все капли имеют одинаковый размер $R = 12$ мкм. Для капель размером $R = 20$ мкм получим $I_{in} \sim 3 \cdot 10^{-21}$ эрг/с. Следует отметить, что такие оценки получены при возбуждении второй (основной) моды осциллирующих капель.

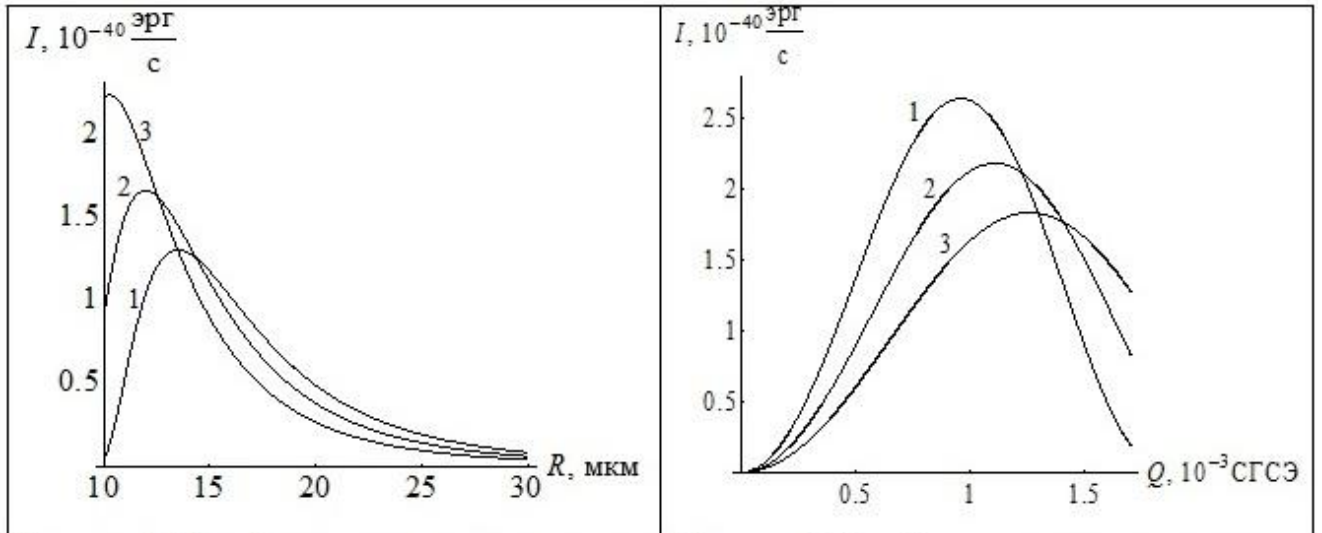


Рисунок 2.1.1 – Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной заряженной капель от радиуса равновеликой сферической капли

Рисунок 2.1.2 – Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной заряженной капель от её заряда, рассчитанные при тех же прочих значениях физических величин, что и на рисунке 2.1.1

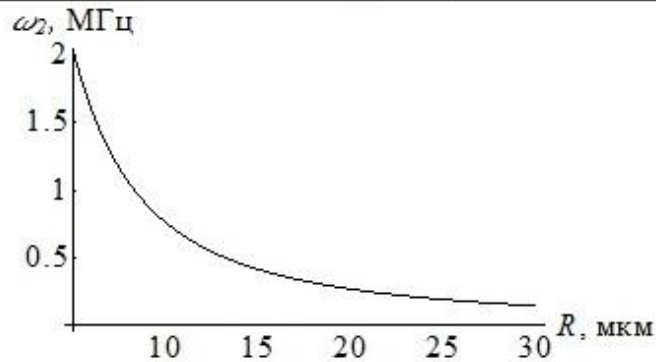


Рисунок 2.1.3 – Зависимость частоты электромагнитного излучения единичной заряженной капель от радиуса сферической капли, рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что и на рисунке 2.1.1 и $Q = 2.5 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.8W_{кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 0.03W_{кр}$ при $R = 30$ мкм)

Из выше полученных численных оценок интенсивности излучения и рисунка 2.1.1 следует, что мощность излучения весьма быстро растет при увеличении размера капли и, достигая максимума, снижается на два порядка

величины при увеличении размера единичной капли в два раза. Таким образом, получим, что основной вклад в мощность излучения от конвективных облаков вносят именно капли с радиусом порядка ~ 10 мкм.

На рисунке 2.1.2 представлены рассчитанные по формуле (2.1.12) зависимости интенсивности излучения от величины заряда единичной капли. Здесь кривая 1 соответствует размеру капли $R=10$ мкм, кривая 2 – $R=11$ мкм, кривая 3 – $R=12$ мкм.

Из рисунка 2.1.3 видно, что частота осцилляций (частота излучения) единичной капли убывает весьма быстро с ростом радиуса капли.

Также заметим, что при синфазных осцилляциях поверхности равновеликих капель, составляющих грозное облако, мощность излучения увеличится в N раз по сравнению с единичной каплей (N – число капель в облаке). Такая ситуация характерна для разряда молнии при резком изменении напряженности электрического поля за время, существенно меньшее периода колебаний капель воды [123]. Однако в случае колебаний капель с произвольными фазами мощность излучения от всех капель из грозного облака увеличится уже \sqrt{N} раз.

Кроме того, численные расчеты показали, что в соответствии с выражением (2.1.11) при увеличении номера моды на единицу интенсивность электромагнитного излучения уменьшается на 15 порядков величины. Следовательно, на высоких модах фоновое электромагнитное излучение незначительно. В этом случае о непрерывно-шумовом радиоизлучении от гидрометеоров, осциллирующих на высоких модах, говорить не приходится.

Следует отметить, что согласно [132, 133] источником непрерывно-шумового электромагнитного излучения также могут являться приземные туманы, которые определяют взвесь мелких водяных капель у поверхности Земли. Характерные размеры таких капель от 2 до 10 мкм. Причем, максимум концентрации приходится на диапазон от 3 до 5 мкм [134]. Таким образом, на основе выражения (2.1.11) проведем оценку интенсивности излучения

от заряженной капли воды, осциллирующей на основной (второй) моде $n=2$, со средними характеристиками: $\alpha_n = 10^{-3} R$, $R = 5$ мкм, $Q = 1.8 \cdot 10^{-8}$ СГСЭ ($\sim 3 \cdot 10^{-5} W_{кр}$). В результате, интенсивность электромагнитного излучения единичной капли составляет $I \sim 7 \cdot 10^{-52}$ эрг/с.

Из выше сказанного ясно, что осциллирующая облачная капля обладает большей мощностью излучения по сравнению с каплей приземного тумана.

Приложение. Расчет напряженности электрического поля в окрестности осциллирующей заряженной капли. Для отыскания электрического поля в окрестности возмущенной волновым движением поверхности невязкой заряженной капли следует решить систему уравнений, состоящую из волнового уравнения и условия неразрывности для вектора напряженности электрического поля:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}; \quad \text{div} \mathbf{E} = 0;$$

учитывая граничные и интегральные условия в виде:

$$r \rightarrow \infty: \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0;$$

$$r = R + \xi(\theta, t): \quad (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0; \quad \frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{E}^{(1)}) dS = \frac{Q}{\epsilon_{ex}}.$$

Расчеты будем проводить в сферической системе координат (r, θ, φ) , начало которой совпадает с началом центра масс капли. Так как капля обладает симметрией по углу φ , решение выше выписанных уравнений представим в виде суперпозиции:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(0)}(r) + \mathbf{E}^{(1)}(r, \theta, t);$$

где $\mathbf{E}^{(0)}(r)$ – напряженность электрического поля у поверхности равновесной сферической капли; $\mathbf{E}^{(1)}(r, \theta, t)$ – добавка к напряженности поля, связанная с капиллярным волновым возмущением поверхности капли. Причем, аналогичный порядок малости будут иметь компонента напряженности поля

$\mathbf{E}^{(1)}(r, \theta, t)$ и волновое возмущение поверхности капли: $|\mathbf{E}^{(1)}| \sim |\xi|$. Верхний индекс, стоящий в скобках, указывает на порядок малости по безразмерной амплитуде осцилляций.

В силу линейности выписанных уравнений им должны удовлетворять каждая из компонент электрического потенциала $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

Не представляется сложным выписать выражение для напряженности поля в окрестности равновесной заряженной сферы в виде:

$$\mathbf{E}^{(0)} \equiv \frac{Q}{\varepsilon_{ex} r^2} \mathbf{e}_r. \quad (2.1.13)$$

Решаемая система уравнений для добавки первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций к напряженности поля имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}^{(1)} = 0; \quad \Delta \mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t^2}; \quad (2.1.14)$$

при выполнении граничных и интегральных условий:

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty: & \quad \mathbf{E}^{(1)} \rightarrow 0; \\ r = R + \xi(\theta, t): & \quad (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)) = 0; \quad \oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{E}^{(1)}) dS = 0. \end{aligned}$$

Используя методику разложения произвольного вектора на сумму независимых векторов, выразим $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ в виде суперпозиции трех ортогональных векторов:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{N}_1 \Phi_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{N}_2 \Phi_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{N}_3 \Phi_3(\mathbf{r}, t); \quad (2.1.15)$$

где $\Phi_j(\mathbf{r}, t)$ – произвольные скалярные функции, \mathbf{N}_j – векторные операторы-проекторы, выбранные в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &\equiv \nabla; & \mathbf{N}_2 &\equiv \nabla \times \mathbf{r}; & \mathbf{N}_3 &\equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}); \\ \mathbf{N}_1^+ &\equiv -\nabla; & \mathbf{N}_2^+ &\equiv \mathbf{r} \times \nabla; & \mathbf{N}_3^+ &\equiv (\mathbf{r} \times \nabla) \times \nabla; \end{aligned}$$

при выполнении свойства ортогональности:

$$\mathbf{N}_j^+ \cdot \mathbf{N}_m = 0; \quad \text{при } m \neq j. \quad (2.1.16)$$

Здесь операторы \mathbf{N}_j^+ означают эрмитово сопряженные операторам \mathbf{N}_j .

Подставляя условие (2.1.16) в уравнение неразрывности из системы (2.1.14) для напряженности поля в первом приближении по безразмерной амплитуде осцилляций, в результате получим уравнение Лапласа для скалярной функции $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$ в виде:

$$\nabla \mathbf{E}^{(1)} = -\mathbf{N}_1^+ \mathbf{E}^{(1)} = -\mathbf{N}_1^+ (\mathbf{N}_1 \Phi_1 + \mathbf{N}_2 \Phi_2 + \mathbf{N}_3 \Phi_3) = -\mathbf{N}_1^+ \mathbf{N}_1 \Phi_1 \equiv \nabla \nabla \Phi_1 \equiv \Delta \Phi_1 = 0. \quad (2.1.17)$$

Перейдем к скаляризации волнового уравнения из системы (2.1.14). Для этого, подставляя в волновое уравнение (2.1.14) вектор $\mathbf{E}^{(1)}$ в виде разложения (2.1.15) и используя свойство коммутации операторов-проекторов \mathbf{N}_j с оператором Лапласа $\mathbf{N}_j \Delta = \Delta \mathbf{N}_j$, получим систему трех независимых уравнений для скалярных функций $\Phi_j(\mathbf{r}, t)$:

$$\sum_{j=1}^3 \mathbf{N}_j \left[\Delta \Phi_j(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \right] = 0.$$

Очевидно, поочередно подействовав слева на полученное уравнение сопряженными операторами \mathbf{N}_j^+ и принимая во внимание условие ортогональности (2.1.16), запишем уравнение (2.1.14) в скалярном виде:

$$\Delta \Phi_j(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0; \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.1.18)$$

В последних уравнениях учтем временную зависимость искомых функций: $\Phi \sim \exp(-i\omega_n t)$. В таком случае выражения (2.1.18) приводятся к уравнениям Гельмгольца.

Наконец, подставляя в (2.1.18) соотношение (2.1.17) и положив индекс j равным 1, перейдем к выражению $(\omega_n^2 / c^2) \Phi_1(\mathbf{r}, t) = 0$. Заметим, что частота осцилляций капли не равна нулю. В результате, имеем $\Phi_1(\mathbf{r}, t) \equiv 0$.

Следовательно, разложение (2.1.15) для вектора напряженности поля $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ будет иметь вид:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{N}_2\Phi_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{N}_3\Phi_3(\mathbf{r}, t).$$

В таком случае электрическое поле является чисто вихревым, а уравнение (2.1.18) сведется к виду:

$$\Delta\Phi_q(\mathbf{r}, t) - \frac{\omega_n^2}{c^2}\Phi_q(\mathbf{r}, t) = 0; \quad q = 2, 3. \quad (2.1.19)$$

Выразим тороидальную и полоидальную компоненты поля $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ в сферической системе координат, учитывая симметрию по азимутальному углу φ :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_2\Phi_2(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial\Phi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial\theta}\mathbf{e}_\varphi; \\ \mathbf{N}_3\Phi_3(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{r}L_\theta\Phi_3(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\Phi_3(\mathbf{r}, t)}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Выпишем решения уравнений Гельмгольца (2.1.19) для $\Phi_q(\mathbf{r}, t)$ в следующем виде:

$$\Phi_q = \sum_n D_n^{(q)} h_n^{(2)}(kr) \exp(-i\omega_n t) P_n(\cos\theta); \quad (2.1.21)$$

где $D_n^{(q)}$ – неизвестные константы, определяемые из граничных и интегральных условий, $h_n^{(2)}(kr)$ – сферическая функция Бесселя третьего рода, выбираемая таким образом, чтобы на бесконечности ($r \rightarrow \infty$) электромагнитная волна расходилась, $k \equiv (\omega_n / c)$ – волновое число.

Чтобы определить константы $D_n^{(2)}$ в уравнении (2.1.21), запишем условие эквипотенциальности к возмущенной поверхности капли и условие постоянства заряда на капле для тороидальной компоненты поля $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ в виде:

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t): \quad (\mathbf{N}_2\Phi_2(\mathbf{r}, t), \boldsymbol{\tau}) = 0; \quad (2.1.22)$$

$$\oint_S (\mathbf{N}_2\Phi_2(\mathbf{r}, t), \mathbf{n}) \cdot dS = 0; \quad (2.1.23)$$

Здесь компоненты поля $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ имеют первый порядок малости по безразмерной амплитуде осцилляций, поэтому единичные вектора нормали \mathbf{n} и касательной $\boldsymbol{\tau}$ относятся к равновесной поверхности капли и определяются в виде: $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta$.

Из соотношений (2.1.20) видно, что тороидальная компонента поля $(\mathbf{N}_2\Phi_2(\mathbf{r}, t)) \sim \mathbf{e}_\varphi$, благодаря чему при $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\theta$ условия (2.1.22), (2.1.23) справедливы для любых $D_n^{(2)}$ в (2.1.21).

Если же принять $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_\varphi$, условие эквипотенциальности (2.1.22) сводится к виду:

$$r = R: \quad \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{r}, t)}{\partial \theta} = 0;$$

и удовлетворяется тождественно при любом значении угла θ . Несложно видеть, что константы $D_n^{(2)}$ принимают лишь нулевые значения в решении для $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$. Следовательно, напряженность электрического поля $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ в (2.1.15) определится только полоидальной компонентой:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{N}_3\Phi_3(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r})\Phi_3(\mathbf{r}, t).$$

Используя соотношение (2.1.21) для определения скалярной функции $\Phi_3(\mathbf{r}, t)$, запишем последнее выражение в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \exp(-i\omega_n t) \left\{ D_n^{(3)} r^{-1} h_n^{(2)}(kr) n(n+1) P_n(\mu) \mathbf{e}_r + \right. \\ \left. + \left(D_n^{(3)} r^{-1} h_n^{(2)}(kr) + D_n^{(3)} \frac{\partial h_n^{(2)}(kr)}{\partial r} \right) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Для нахождения неизвестной константы $D_n^{(3)}$ в (2.1.24), воспользуемся условием эквипотенциальности:

$$(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (2.1.25)$$

Для вектора касательной к параллелям получим $\boldsymbol{\tau}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi$. Вектор касательной в меридиальном направлении определяется через векторное произведение:

$$\boldsymbol{\tau}_\theta = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}_\varphi.$$

Используя выражение для вектора нормали \mathbf{n} к возмущенной поверхности капли с точностью до членов первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \xi(\theta, t) \mathbf{e}_\theta; \quad (2.1.26)$$

запишем решение для вектора $\boldsymbol{\tau}_\theta$ через орты сферической системы координат в виде:

$$\boldsymbol{\tau}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta. \quad (2.1.27)$$

Наконец, подставляя в (2.1.25) соотношения (2.1.24) и (2.1.27), получим условие эквипотенциальности в окончательном виде:

$$r = R: \quad E_r^{(0)} \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} + E_\theta^{(1)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} = 0; \quad (2.1.28)$$

где $E_r^{(0)}$ и $E_\theta^{(1)}$ – компоненты векторов напряженности поля нулевого и первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций.

Используя $E_\theta^{(1)}$ из общего выражения (2.1.24), $E_r^{(0)} \equiv E^{(0)}$ из (2.1.13) и учитывая разложение функции $\xi(\theta, t)$ по полиномам Лежандра, из условия (2.1.28) выразим константы $D_n^{(3)}$ в виде:

$$D_n^{(3)} = -\alpha_n \frac{Q}{\varepsilon_{ex} R^2} \frac{1}{\partial_r \left(r h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}};$$

где α_n – амплитуда осцилляций капли.

Таким образом, подставляя найденное выражение для $D_n^{(3)}$ в (2.1.24), несложно получить решение для добавки к напряженности электрического поля в первом приближении по безразмерной амплитуде осцилляций:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{Q}{\varepsilon_{ex} R^2 r} \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \alpha_n \left\{ \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \times \right. \\ \left. \times n(n+1) P_n(\mu) \mathbf{e}_r + \frac{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \right\}. \quad (2.1.29)$$

Исходя из уравнений (2.1.13), (2.1.29), напряженность электрического поля, создаваемая осциллирующей заряженной каплей, принимает следующий вид:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{Q}{\varepsilon_{ex} r^2} \mathbf{e}_r - \frac{Q}{\varepsilon_{ex} R^2 r} \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \alpha_n \left\{ \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \times \right. \\ \left. \times n(n+1) P_n(\mu) \mathbf{e}_r + \frac{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \right\}. \quad (2.1.30)$$

2.2. Физико-химический анализ возможности затухания капиллярных осцилляций незаряженной капли идеальной жидкости в однородном электростатическом поле

Затухание капиллярных осцилляций капли за счёт физических механизмов, не связанных с вязкой диссипацией, очевидно, возможно при ускоренном движении не только собственного заряда капли, но и индуцированного в капле внешним электрическим полем.

В этой связи целесообразно проведение электрогидродинамического асимптотического исследования осцилляций незаряженной капли в однородном электростатическом поле (осцилляций индуцированного заряда) и генерации при этом электромагнитных волн в рамках физико-химической гидродинамики на основе закона сохранения энергии (аналогично [103, 105, 106]).

Заметим, что вопрос об электрогидродинамическом исследовании осцилляций в электростатическом поле незаряженной капли в окрестности равновесной сфероидальной формы и их неустойчивости по отношению к индуцированному заряду не является новым. Сами расчеты проводились как в линейной, так и в нелинейной постановках (см., например, [40, 44, 120, 135]). Однако задача о возможности появления затухания капиллярных осцилляций незаряженной капли в электростатическом поле не связанном с вязкой диссипацией энергии на основе подходов механики сплошной среды и закона сохранения энергии до сих пор не решена. Аналитическому решению указанной задачи уделено внимание в настоящей работе. Нижеследующее изложение проведем в соответствии с [103, 105, 106].

Постановка задачи. Рассмотрим незаряженную каплю невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ_1 , коэффициентом поверхностного натяжения σ и начальным радиусом R . Капля помещена в

невязкую несжимаемую внешнюю среду с диэлектрической проницаемостью ε_{ex} и плотностью ρ_2 в однородном электростатическом поле напряжённостью \mathbf{E}_0 .

Сформулированную задачу о расчете затухающих капиллярных осцилляций незаряженной капли в однородном электростатическом поле на основе энергетического подхода в рамках физико-химической гидродинамики будем решать в сферической системе координат (r, θ, φ) (угол θ отсчитывается от \mathbf{E}_0), начало которой совпадает с положением центра масс капли. Для уменьшения громоздкости математических выкладок ограничим рассмотрение только осесимметричными капиллярными осцилляциями поверхности капли, уравнение которой в произвольный момент времени t запишем в виде:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t);$$

где $r(\theta)$ – равновесная форма поверхности капли; $\xi(\theta, t)$ – волновое возмущение поверхности капли, причем $\max |\xi| \ll \min r(\theta)$. Заметим, что причиной возникновения капиллярных осцилляций капли является тепловое движение молекул жидкости.

Математическая формулировка обсуждаемой задачи состоит из уравнения Эйлера, уравнения несжимаемости:

$$\frac{d\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t)}{dt} = -\frac{1}{\rho_j} \nabla P_j(\mathbf{r}, t); \quad \operatorname{div} \mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t) = 0; \quad j = 1; 2; \quad (2.2.1)$$

волнового уравнения и условия неразрывности электрического поля:

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}; \quad \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (2.2.2)$$

удовлетворяющие граничным условиям:

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0: & \quad \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \\ r \rightarrow \infty: & \quad \mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}_0 \equiv E_0 \mathbf{e}_z; \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

где $\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t)$ – скорость движения в капле ($j=1$) и среде ($j=2$), $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ – напряженность электрического поля.

На свободной поверхности сфероидальной капли во внешнем поле, описываемой уравнением вида:

$$F(r, \theta, t) \equiv r - r(\theta) - \xi(\theta, t);$$

необходимо выполнение кинематического и динамического граничных условий:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V}_j, \nabla)F = 0; \quad (2.2.4)$$

$$P_1 - P_2 + P_E - P_\sigma = 0; \quad (2.2.5)$$

и условия эквипотенциальности (т.е. проекция вектора \mathbf{E} на единичный вектор касательной $\boldsymbol{\tau}$ к поверхности капли есть нуль):

$$(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (2.2.6)$$

Определим давления, входящие в условие (2.2.5): $P_j(\mathbf{r}, t)$ – гидродинамические давления в капле ($j=1$) и в среде ($j=2$), $P_E = \varepsilon_{ex} \mathbf{E}^2 / 8\pi$ – давление на поверхность капли электрических сил, $P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n}$ – давление капиллярных сил (Лапласовское давление), \mathbf{n} – единичный вектор нормали к свободной поверхности капли, вычисляемый по формуле:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \Big|_{F=0}.$$

Кроме выписанной системы уравнений (2.2.1)-(2.2.6) для решения задачи потребуем выполнения дополнительных интегральных условий: постоянства объема капли несжимаемой жидкости:

$$\int_V dV = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \quad (2.2.7)$$

неподвижности центра масс капли:

$$\int_V \mathbf{r} dV = 0; \quad V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \quad (2.2.8)$$

и условие незаряженности капли:

$$\oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{E}) dS = 0; \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (2.2.9)$$

Скаляризация задачи. Примем, что в капле и окружающей среде существует потенциальное движение. Поле скоростей обозначим $\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t) = \nabla \psi_j(\mathbf{r}, t)$, где $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ – гидродинамический потенциал скорости (величины с индексом $j=1$ относятся к капле, $j=2$ – к среде).

Следующим этапом решения поставленной задачи является переход к гидродинамическим потенциалам $\psi_j(\mathbf{r}, t)$. В итоге, от уравнений (2.2.1)-(2.2.9) перейдем к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta \psi_j(\mathbf{r}, t) &= 0; & P_j &= P_{j0} - \rho_j \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t}; \\ \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}; & \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0; \\ r \rightarrow 0: & \psi_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \\ r \rightarrow \infty: & \psi_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; & \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \mathbf{E}_0 \equiv E_0 \mathbf{e}_z; \\ r = r(\theta) + \xi: & -\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2(\theta)} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial \theta} = 0; \\ & P_1 - P_2 + P_E - P_\sigma = 0; & (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) &= 0; \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)+\xi(\theta, t)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3; \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)+\xi(\theta, t)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3; \\ & \int_0^\pi \mathbf{r} \cdot (r(\theta) + \xi(\theta, t))^2 dr \sin \theta d\theta = 0; \\ & \int_0^\pi (\mathbf{n}, \mathbf{E}) \cdot (r(\theta) + \xi(\theta, t))^2 \sin \theta d\theta = 0. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Здесь \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ – орты сферической системы координат.

За малый параметр задачи примем отношение амплитуды капиллярных колебаний к радиусу капли и будем считать, что тот же порядок малости, что

и амплитуда волн на капле имеют поля скоростей и давлений в жидкости и среде, а также поправки к напряженности электростатического поля, вызванные осцилляциями поверхности капли.

В итоге, ограничивая рассмотрение первым порядком малости по амплитуде осцилляций $\xi(\theta, t)$, искомые величины представим в виде разложений:

$$\begin{aligned}\xi(\theta, t) &= \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\xi^2); & P_j(\mathbf{r}, t) &= P_j^{(0)}(\mathbf{r}, t) + P_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\xi^2); \\ \psi_j(\mathbf{r}, t) &= \psi_j^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \psi_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\xi^2); \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\xi^2); \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

где $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$, где $\Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ – электрический потенциал в окрестности равновесной поверхности капли, т.е. в нулевом приближении. В выражениях (2.2.11) верхний индекс указывает порядок малости. Таким образом, подстановка разложений (2.2.11) в систему уравнений (2.2.10) позволяет отдельно выделить задачи нулевого и первого приближения.

Задача нулевого порядка малости. Равновесная форма незаряженной капли в однородном электростатическом поле. Перейдем к рассмотрению равновесной формы поверхности капли $r(\theta)$. Пусть в сферической системе координат форма образующей, которая вращается вокруг оси OZ , будет представлена в виде разложения по осесимметричным полиномам Лежандра:

$$r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_n(\mu); \quad \mu \equiv \cos \theta.$$

Следует отметить, что здесь минимальное значение индекса $n=2$ определяется в силу условий постоянства объема капли (несжимаемости жидкости) и неподвижности ее центра масс. Таким образом, имеем:

$$r(\theta) = R + h(\theta); \quad h(\theta) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n \cdot P_n(\mu). \quad (2.2.5)$$

Чтобы определить явный вид коэффициентов β_n в разложении формы равновесной поверхности капли $r(\theta)$, необходимо найти выражения

для равновесных давлений электрических сил $P_E^{(0)}$ и сил поверхностного натяжения $P_\sigma^{(0)}$.

Таким образом, для нахождения потенциала электрического поля $\Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ в окрестности равновесного сфероида, т.е. величины нулевого порядка малости по $\xi(\theta, t)$, выпишем электрическую задачу, которая будет иметь следующий вид:

$$\Delta\Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)\Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -E_0 r \cos\theta;$$

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)\Big|_{r=R} = \text{const}.$$

Решение краевой задачи легко находится:

$$\Phi^{(0)} = E_0 r \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) P_1(\mu).$$

С учетом выше выписанного выражения давление электрического поля на поверхность равновесной капли можно представить в виде:

$$P_E^{(0)} = \frac{3\varepsilon_{ex}}{8\pi} E_0^2 (1 + 2P_2(\cos\theta)).$$

Для вектора нормали к равновесной сфероидальной поверхности капли несложно получить:

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta.$$

Следовательно, для давления сил поверхностного натяжения на поверхность невозмущенной сфероидальной капли $P_\sigma^{(0)}$ будет справедливо следующее соотношение:

$$P_\sigma^{(0)} = \frac{\sigma}{R} \left[2 + (n-1)(n+2) \frac{h(\theta)}{R} \right].$$

Перейдем теперь к определению коэффициентов β_n в (2.2.5). Подставляя выше записанные выражения для $P_E^{(0)}$ и $P_\sigma^{(0)}$ в баланс давлений:

$$P_1 - P_2 + \frac{3\varepsilon_{ex}}{8\pi} E_0^2 (1 + 2P_2(\cos\theta)) - \frac{\sigma}{R} \left[2 + (n-1)(n+2) \frac{h(\theta)}{R} \right] = 0;$$

и используя свойство ортогональности полиномов Лежандра, приравняем коэффициенты при полиномах одного и того же порядка:

$$P_1 - P_2 = \frac{2\sigma}{R} - \frac{1}{3R} e^2; \quad \beta_2 = e^2 \frac{R}{3}; \quad \beta_n = 0; \quad n \geq 3;$$

$$e^2 \equiv \frac{9\varepsilon_{ex} E_0^2 R}{16\pi\sigma} \equiv \frac{9w}{16\pi}; \quad w \equiv \frac{\varepsilon_{ex} E_0^2 R}{\sigma}. \quad (2.2.6)$$

Здесь параметр Тейлора w характеризует устойчивость поверхности капли по отношению к индуцированному заряду.

Итак, используя полученные коэффициенты (2.2.6), запишем форму равновесной поверхности незаряженной капли во внешнем поле:

$$r(\theta) = R \left(1 + e^2 \frac{1}{3} P_2(\mu) \right). \quad (2.2.7)$$

Несложно видеть, что равенство (2.2.7) совпадает с уравнением сфероида, вытянутого вдоль электрического поля, в линейном приближении по квадрату эксцентриситета e^2 . В этом случае выражение (2.2.7) хорошо согласуется с решением в [38, 44].

Задача первого порядка малости. Вывод дисперсионного уравнения.

Выпишем систему гидродинамических уравнений первого порядка малости, описывающих движение идеальной жидкости в капле, вызванное малым возмущением формы её равновесной поверхности, относительно внешней среды:

$$\Delta\psi_j = 0; \quad (j = 1; 2);$$

с учетом условий ограниченности потенциалов скорости движения:

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0;$$

кинематического и динамического граничных условий:

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad -\frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial\psi_j(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2(\theta)} \frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial\psi_j(r, \theta, t)}{\partial\theta} = 0;$$

$$P_1^{(1)} - P_2^{(1)} + P_E^{(1)} - P_\sigma^{(1)} = 0;$$

а также дополнительных интегральных условий:

$$\int_0^{\pi} r^2(\theta) \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0; \quad \int_0^{\pi} r^3(\theta) \xi(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0.$$

Для нахождения добавок к напряженности и давлению электрического поля, вызванных возмущением $\xi(\theta, t)$ равновесной поверхности капли и имеющих первый порядок малости по $\xi(\theta, t)$, запишем краевую задачу:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}^{(1)} &= 0; & \Delta \mathbf{E}^{(1)} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t^2}; \\ r \rightarrow \infty: & & \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) &\rightarrow 0; & (2.2.8) \\ r = r(\theta): & & \left(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) \right) &= 0; & \oint_S \left(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) \right) dS = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что при решении в приближении первого порядка граничные условия достаточно взять на невозмущенной поверхности сфероида $r(\theta)$.

Добавки к гидродинамическому давлению и давлению сил поверхностного натяжения, имеющие первый порядок малости, определяются по формулам:

$$r = r(\theta): \quad P_j^{(1)} = -\rho_j \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t}; \quad j = 1, 2; \quad P_\sigma^{(1)} = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n}_1.$$

Для вектора нормали к возмущенной поверхности сфероидальной капли найдем:

$$\mathbf{n}_1 = \left(1 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r(\theta) + \xi(\theta, t)) \mathbf{e}_\theta.$$

Используя выражение для \mathbf{n}_1 , рассчитаем линейную по возмущению $\xi(\theta, t)$ часть Лапласовского давления следующим образом:

$$P_\sigma^{(1)} = \frac{\sigma}{R} \left[- \left(1 - 2 \frac{h(\theta)}{R} \right) (2 + \hat{L}) \frac{\xi}{R} + \frac{2\xi}{R} \hat{L} \frac{h(\theta)}{R} \right]; \quad (2.2.9)$$

где $\hat{L} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ – угловая часть осесимметричного оператора Лапласа в сферических координатах.

Определим теперь функцию волнового возмущения $\xi(\theta, t)$ в наиболее общем виде – в виде разложения по полиномам Лежандра (в случае осесимметричных колебаний), учитывая, что зависимость от времени t является экспоненциальной:

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\mu); \quad \alpha_n(t) = \alpha_n \exp(-i\omega_n t). \quad (2.2.10)$$

Здесь введены следующие обозначения: α_n – амплитуда капиллярных колебаний, ω_n – частота осцилляций капли, записанная в комплексном виде.

Следует отметить, что в разложении (2.2.10) минимальное значение индекса $n=2$ в силу условий постоянства объема капли (несжимаемости жидкости) и неподвижности ее центра масс.

Подставляя разложение (2.2.10) в (2.2.9), в результате, получим окончательное выражение для добавки к давлению сил поверхностного натяжения (Лапласовскому давлению), вызванным искажением сфероидальной капли:

$$P_{\sigma}^{(1)} = \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \left[Q_{n1} \alpha_n - \frac{2}{3} e^2 (Q_{n2} \alpha_n + Q_{n3} \alpha_{n+2} + Q_{n4} \alpha_{n-2}) \right] P_n(\mu); \quad (2.2.11)$$

$$Q_{n1} = (n-1)(n+2); \quad Q_{n2} = (4+n(n+1)) K_{2,n,n};$$

$$K_{l,m,n} = \left[C_{l0,m0}^{n0} \right]^2; \quad Q_{n3} = (4+(n+2)(n+3)) K_{2,n+2,n};$$

$$Q_{n4} = \gamma_2 \gamma_3 (4+(n-2)(n-1)) K_{2,n-2,n}; \quad \gamma_m = 1 - \delta_{nm};$$

где δ_{nm} – дельта-символ Кронекера, $C_{mk,lp}^{nq}$ – коэффициенты Клебша-Гордана [126], отличные от нуля при выполнении условия $|m-k| \leq n \leq m+k$, а $m+k+n$ – четное.

Решение уравнения Лапласа для потенциалов скорости движения $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ с учетом условий ограниченности и кинематического граничного условия запишем как:

$$\begin{aligned}
\psi_1(\mathbf{r}, t) &= R \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \exp(-i\omega_n t) \left\{ i\omega_n \alpha_n \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{3} e^2 T_{na} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} e^2 \left(i\omega_{n+2} \alpha_{n+2} T_{na}^+ + i\omega_{n-2} \alpha_{n-2} T_{na}^- \right) \right\} P_n(\mu); \\
\psi_2(\mathbf{r}, t) &= R \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \exp(-i\omega_n t) \left\{ i\omega_n \alpha_n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3} e^2 T_{nb} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} e^2 \left(i\omega_{n+2} \alpha_{n+2} T_{nb}^+ + i\omega_{n-2} \alpha_{n-2} T_{nb}^- \right) \right\} P_n(\mu); \\
T_{na} &= \frac{1}{n} \left((n-1) K_{2,n,n} - \frac{1}{n} L_{2,n,n} \right); \quad T_{na}^+ = \frac{1}{n} \left((n+1) K_{2,n+2,n} - \frac{1}{(n+2)} L_{2,n+2,n} \right); \\
T_{na}^- &= \frac{1}{n} \left((n-3) K_{2,n-2,n} - \frac{1}{(n-2)} L_{2,n-2,n} \right); \\
T_{nb} &= \frac{1}{(n+1)} \left((n+2) K_{2,n,n} - \frac{1}{(n+1)} L_{2,n,n} \right); \\
T_{nb}^+ &= \frac{1}{(n+1)} \left((n+4) K_{2,n+2,n} - \frac{1}{(n+3)} L_{2,n+2,n} \right); \\
T_{nb}^- &= \frac{1}{(n+1)} \left(n K_{2,n-2,n} - \frac{1}{(n-1)} L_{2,n-2,n} \right); \\
L_{l,m,n} &= -\sqrt{l(l+1)m(m+1)} C_{l0,m0}^{n0} \cdot C_{l-1,m1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, с помощью выше полученных выражений для $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ определим гидродинамические давления $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
P_1^{(1)} &= -\rho_1 R \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \left(\omega_n^2 \alpha_n \left(-\frac{1}{n} + \frac{e^2}{3} (T_{na} - K_{2,n,n}) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^2}{3} \left(\omega_{n+2}^2 \alpha_{n+2} (T_{na}^+ - K_{2,n+2,n}) + \omega_{n-2}^2 \alpha_{n-2} (T_{na}^- - \gamma_2 \gamma_3 K_{2,n-2,n}) \right) \right) P_n(\mu); \\
P_2^{(1)} &= -\rho_2 R \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \left(\omega_n^2 \alpha_n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{e^2}{3} (T_{nb} - K_{2,n,n}) \right) + \right. \quad (2.2.12)
\end{aligned}$$

$$+\frac{e^2}{3}\left(\omega_{n+2}^2\alpha_{n+2}\left(T_{nb}^+-K_{2,n+2,n}\right)+\omega_{n-2}^2\alpha_{n-2}\left(T_{nb}^--\gamma_2\gamma_3K_{2,n-2,n}\right)\right)P_n(\mu).$$

Вернемся к рассмотрению электрической краевой задачи (2.2.8). Представим напряженность электрического поля \mathbf{E} в виде суперпозиции напряженности $\mathbf{E}^{(0)}$ в окрестности равновесной капли в отсутствие возмущения и добавки к напряженности $\mathbf{E}^{(1)}$, вызванной возмущением поверхности капли $\xi(\theta, t)$, линейной по этому возмущению:

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)};$$

$$\mathbf{E}^{(0)} = E_0 \cos \theta \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3}\right) \mathbf{e}_r - E_0 \sin \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \mathbf{e}_\theta;$$

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{3E_0}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) M_n \left\{ \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \times \right. \\ \left. \times n(n+1) P_n(\mu) \mathbf{e}_r + \frac{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr))}{\partial_r (rh_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \right\};$$

$$M_n = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \alpha_{n-1} \mu_{n-1}^+ + \gamma_0 \alpha_{n+1} \mu_{n+1}^-; \quad \mu_n^+ = \frac{n+1}{(2n+1)}; \quad \mu_n^- = \frac{n}{(2n+1)}.$$

Здесь введено обозначение $h_n^{(2)}(kr)$ сферической функции Бесселя третьего рода, k – волновое число, символом ∂_r обозначена частная производная по переменной r .

Отметим, что детальное решение для добавки к напряженности поля $\mathbf{E}^{(1)}$ выписывается по аналогии с методикой, изложенной в [103], и в рамках решаемой задачи не приводится.

Распишем давление электрического поля у поверхности осциллирующего сфероида по формуле:

$$P_E = \frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi} (\mathbf{E})^2 \Big|_{r=r(\theta)+\xi(\theta,t)} \approx \frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi} (\mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)})^2 \Big|_{r=r(\theta)+\xi(\theta,t)} ;$$

где добавка к электрическому давлению в линейном приближении по $\xi(\theta, t)$ представлена как:

$$P_E^{(1)} = -\frac{\varepsilon_{ex} E_0^2}{8\pi R} \sum_{n=2}^{\infty} [\alpha_n \exp(-i\omega_n t) F_1 + \alpha_{n+2} \exp(-i\omega_{n+2} t) F_2 + \alpha_{n-2} \exp(-i\omega_{n-2} t) F_3]; \quad (2.2.13)$$

$$F_1 = 18 \left(G_{n+1}(kR) (n+1)(n+2) \mu_n^+ K_{1,n+1,n} + G_{n-1}(kR) n(n-1) \mu_n^- K_{1,n-1,n} \right) + 12(1 + 2K_{2,n,n});$$

$$F_2 = 18 G_{n+1}(kR) (n+1)(n+2) \mu_{n+2}^- K_{1,n+1,n} + 24 K_{2,n+2,n};$$

$$F_3 = 18 G_{n-1}(kR) n(n-1) \mu_{n-2}^+ K_{1,n-1,n} + 24 K_{2,n-2,n};$$

$$G_n(kR) \equiv \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R}.$$

В ниже следующем изложении будем проводить расчеты, пренебрегая взаимодействием различных мод осцилляций капли, т.е. в выше выписанных выражениях отбросим слагаемые с индексами $n \pm 2$.

Подставим теперь соотношения (2.2.11), (2.2.12), (2.2.13) в динамическое граничное условие и после несложных преобразований перейдем к дисперсионному уравнению вида:

$$\omega_n^2 = \frac{n(n+1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1) R^3} \frac{\sigma}{R} \left\{ (n-1)(n+2) + e^2 \left(4S_1 + \frac{1}{3} S_2 \right) \right\}; \quad (2.2.14)$$

$$S_1 \equiv \left((n+1)(n+2) \mu_n^+ K_{1,n+1,n} G_{n+1}(kR) + n(n-1) \mu_n^- K_{1,n-1,n} G_{n-1}(kR) \right);$$

$$S_2 \equiv 2 \left(4 + (4 - n(n+1)) K_{2,n,n} \right) - \frac{(n-1)(n+2)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \times$$

$$\times \left(\rho_1 \frac{(n+1)}{n} (n K_{2,n,n} + L_{2,n,n}) + \rho_2 \frac{n}{(n+1)} ((n+1) K_{2,n,n} - L_{2,n,n}) \right).$$

Согласно [128] сферическую функцию Бесселя третьего рода запишем в виде степенного ряда:

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} e^{-iz} \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}}; \quad z = kr.$$

Следовательно, для функции $G_n(z)$ имеем:

$$G(z) \equiv \frac{h_n^{(2)}(z)}{\frac{\partial(z h_n^{(2)}(z))}{\partial z}} = - \frac{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} (2iz)^m}{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} 2^m (iz)^{m+1} + \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!(n-m)}{(n-m)!m!} (2iz)^m}.$$

Расписывая в полученном выражении суммы, определим вещественную и мнимую части функции $G(z)$. Тогда при малом значении аргумента ($z \ll 1$) получим следующие асимптотики:

$$\operatorname{Re}[G_n(z)] \approx -\frac{1}{n}; \quad \operatorname{Im}[G_n(z)] \approx \left[\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right]^2 z^{2n+1}. \quad (2.2.15)$$

Напомним, что частота осцилляций капли ω_n имеет комплексный вид: $\omega_n = \omega'_n + i\omega''_n$. Здесь мнимая часть обязана своим появлением затуханию колебаний в следствие потерь энергии осцилляций капли на излучение электромагнитных волн. Так как $\omega''_n \ll \omega'_n$, то квадрат частоты осцилляций n -моды выразим в следующем виде: $\omega_n^2 \approx \omega'^2_n + 2i\omega'_n\omega''_n$.

Очевидно, из выражений (2.2.14), (2.2.15), с учетом малости аргумента $z = kR$, будут справедливы следующие соотношения:

$$\omega_n'^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n+1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \left\{ (n-1)(n+2) + e^2 \left(-4 \left((n+2)\mu_n^+ K_{1,n+1,n} + n\mu_n^- K_{1,n-1,n} \right) + \frac{1}{3} S_2 \right) \right\}; \quad (2.2.16)$$

$$\omega_n'' = 4e^2 \frac{n(n+1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \frac{\sigma}{R^3} \left((n+1)(n+2)\mu_n^+ K_{1,n+1,n} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{2^{n+1}n!}{(2(n+1))!} \right]^2 z_0^{2n+3} + n(n-1)\mu_n^- K_{1,n-1,n} \left[\frac{2^{n-1}(n-2)!}{(2(n-1))!} \right]^2 z_0^{2n-1} \left) \frac{1}{2\omega_n'} . \quad (2.2.17)$$

Подставим теперь в (2.2.17) выражение для частоты собственных осцилляций из (2.2.16) и, учитывая условие $z = \frac{\omega_n'}{c} R$, определим ω_n'' в следующем виде:

$$\omega_n'' = 2e^2 \left(\mu_n^+ K_{1,n+1,n} \left[\frac{2^{n+1}n!}{(2(n+1))!} \right]^2 \frac{n(n-1)((n+1)(n+2))^3}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)^2} \frac{\sigma^2}{c^4 R^2} + \mu_n^- K_{1,n-1,n} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{2^{n-1}(n-2)!}{(2(n-1))!} \right]^2 \right) \left(\frac{(n+1)(n-1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \right)^n n^{n+1} (n+2)^{n-1} \frac{\sigma^n}{c^{2n-1} R^{n+1}} . \quad (2.2.18)$$

Затухание капиллярных осцилляций капли. Излучение электромагнитных волн. Несложно видеть, что мнимая часть частоты в (2.2.18) является декрементом затухания капиллярных осцилляций капли. Однако в модели идеальной жидкости затухания быть не может. Таким образом, исходя из закона сохранения энергии, затухание можно связать только с потерями энергии осцилляций на излучение электромагнитных волн (см. [103, 104, 124]).

В этом случае интенсивность излучения, генерируемая капиллярными осцилляциями капли, равна скорости убывания механической энергии осцилляций [103]:

$$I = -\frac{d\mathcal{G}_n}{dt} \equiv \omega_n'' \mathcal{G}_n .$$

Здесь \mathcal{G}_n – обозначение энергии поверхностных колебаний капли n -й моды. Согласно теореме вириала \mathcal{G}_n равна удвоенной средней за период кинетической энергии движения жидкости в капле:

$$\mathcal{G}_n = \frac{2\pi R^3 \rho_1 \omega_n'^2 \alpha_n^2}{n(2n+1)} .$$

В результате, аналитическое выражение интенсивности возникающего при капиллярных осцилляциях незаряженной капли в электростатическом поле электромагнитного излучения принимает следующий вид:

$$I = \frac{9}{4} E_0^2 \left(\frac{n(n+1)(n-1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \right)^{n+1} \frac{(n+2)^n}{(2n+1)} \left(\mu_n^+ K_{1,n+1,n} \left[\frac{2^{n+1} n!}{(2(n+1))!} \right]^2 n(n-1) \times \right. \\ \left. \times \frac{((n+1)(n+2))^3}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)^2} \frac{\sigma^2}{c^4 R^2} + \mu_n^- K_{1,n-1,n} \left[\frac{2^{n-1}(n-2)!}{(2(n-1))!} \right]^2 \right) \frac{\varepsilon_{ex} \rho_1 \sigma^n}{c^{2n-1} R^{n-2}} \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2. \quad (2.2.19)$$

Используя (2.2.19), приведем численные оценки непрерывно-шумового радиоизлучения от многофазных жидкокапельных систем естественного и искусственного происхождения на примере конвективных облаков. Для этого обозначим два наиболее вероятных источника электромагнитного излучения капель воды в конвективных облаках. Первый источник излучения обусловлен осцилляциями низких мод мелких капель с концентрацией в облаке порядка $\sim 10^9$ штук на м^3 [130, 134]. Характерные размеры таких капель от 3 до 30 мкм. Максимум их концентрации в облаке приходится на диапазон от 3 до 7 мкм. Следует заметить, что осцилляции поверхности капель объясняются, прежде всего, микрофизическими внутриоблачными процессами: коагуляцией с более мелкими частицами, изменением агрегатного состояния, дроблением на более мелкие в следствие столкновительных процессов или реализации электростатической неустойчивости, электрического и гидродинамического взаимодействия с соседними частицами [131]. Натурные наблюдения показали, что величина амплитуды осцилляций облачных капель может принимать значения до десятков процентов от размера капли [92, 99, 131]. Таким образом, для получения оценок интенсивности излучения примем отношение амплитуды осцилляций к радиусу капли α_n/R равным 0.1. В анализируемом случае величина параметра Тейлора $w \ll 1$ [134], т.е. большая часть внутриоблачных капель находится весьма далеко от предела неустойчивости поверхности капли по отношению к индуцированному внешним электрическим полем заряду.

Оценим мощность электромагнитного излучения по формуле (2.2.19), принимая $\varepsilon_{ex}=1$, $n=2$, $\sigma=73$ дин/см, $\rho_1=1$ г/см³, $\rho_2=1.3 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $\alpha_n=0.1 \cdot R$, $E_0=0.17$ СГСЭ ($E_0=50$ В/см) ($\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ ($E_{0кр}$ – критическое значение напряженности поля) при $R=3$ мкм и $\sim 7 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ при $R=30$ мкм). Следовательно, для капли размером $R=30$ мкм интенсивность излучения составляет $I \sim 8 \cdot 10^{-31}$ эрг/с на частоте ≈ 100 кГц. При радиусе капли $R=8$ мкм интенсивность составляет $I \sim 8 \cdot 10^{-31}$ эрг/с и будет идти на частоте ≈ 1 МГц. Для $R=3$ мкм получим $I \sim 8 \cdot 10^{-31}$ эрг/с на частоте ≈ 4.5 МГц. Численные расчеты показали, что мощность излучения мелких облачных капелек (размером от $R=3$ мкм до $R=30$ мкм) приходится на полосу частот ~ 100 кГц до ~ 5 МГц. Принимая во внимание, что все капли имеют одинаковый размер, кучево-дождевое облако диаметром 5 км обладает интегральной интенсивностью излучения $I_{in} \sim 5 \cdot 10^{-11}$ эрг/с. Следует отметить, что такие оценки получены при возбуждении второй (основной) моды осциллирующих капель.

Из выше приведенных оценок следует весьма слабая зависимость интенсивности излучения от размера облачных капель. Таким образом, проследим зависимость величины интенсивности электромагнитного излучения от размера внутриоблачных капель. Для характерных облачных полей получим следующую оценку интенсивности излучения на основной моде:

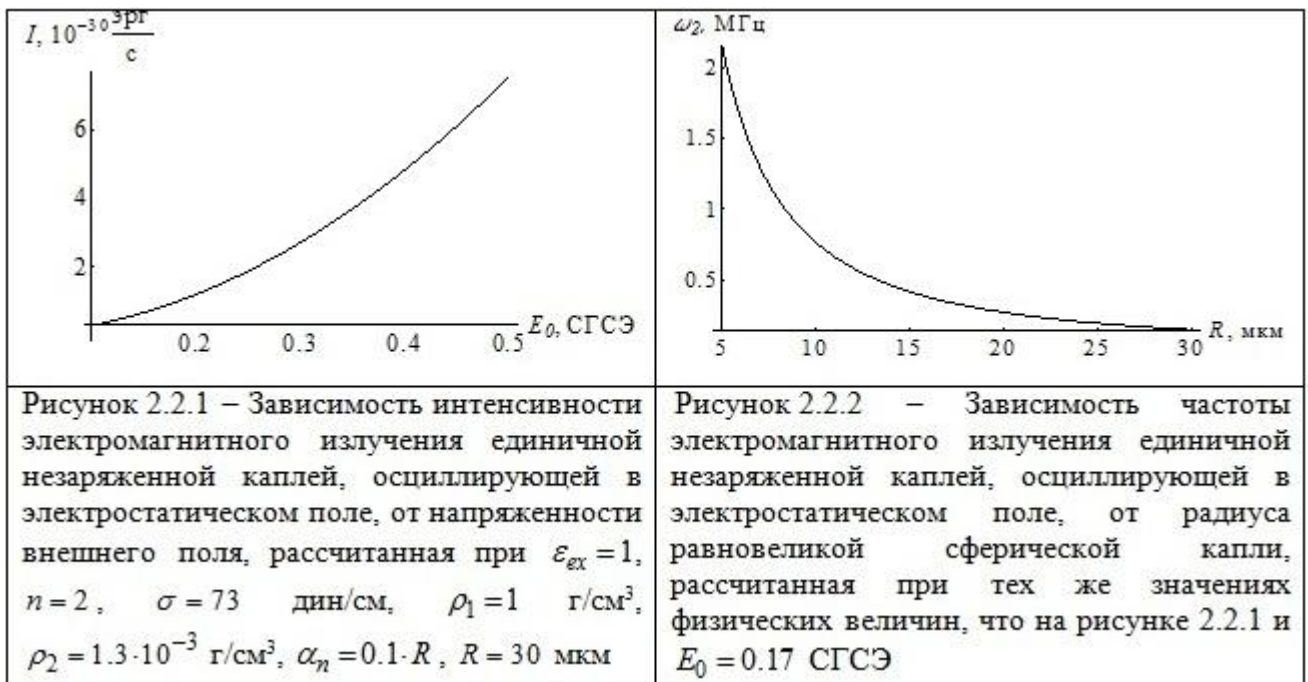
$$I \approx E_0^2 \left(4 \cdot 10^{-68} R^{-2} + 3 \cdot 10^{-29} \right) \text{ эрг/с.}$$

Видно, что интенсивность возникающего при капиллярных осцилляциях незаряженной капли во внешнем электрическом поле излучения определена вторым слагаемым, величина которого много больше по сравнению с первым слагаемым. Отметим, что зависимость интенсивности излучения от размера внутриоблачных капель будет более выражена с увеличением номера моды (в этом случае увеличивается величина первого слагаемого в круглых скобках в

(2.2.19)), а также, если при разложении формы равновесной поверхности капли $r(\theta)$ учитывать слагаемые с точностью до $\sim e^4$.

На рисунке 2.2.1 приведены рассчитанные по формуле (2.2.19) зависимости интенсивности излучения осциллирующей на основной моде единичной капли от напряженности внутриоблачного поля. Из представленного графика видно, что увеличение напряженности электрического поля в три раза приводит к увеличению мощности излучения на порядок.

Из рисунка 2.2.2, на котором изображена зависимость частоты излучения от размера облачной капли, следует, что при увеличении радиуса равновеликой сферической капли на порядок (от $R=3$ мкм до $R=30$ мкм) частота колебаний уменьшается в тридцать раз. Отметим также, что от величины напряжённости электростатического поля частота зависит крайне слабо.



Ко второму источнику излучения электромагнитных волн относятся уже осцилляции высоких мод свободно падающих (со скоростью ≈ 78 см/с) в облаке крупных капель (гидрометеоров), коагулирующих с более мелкими капельками. Исходя из натуральных наблюдений, концентрация таких капель в облаке существенно меньше и составляет $\sim 10^3$ штук на м³ [130]. В таком случае

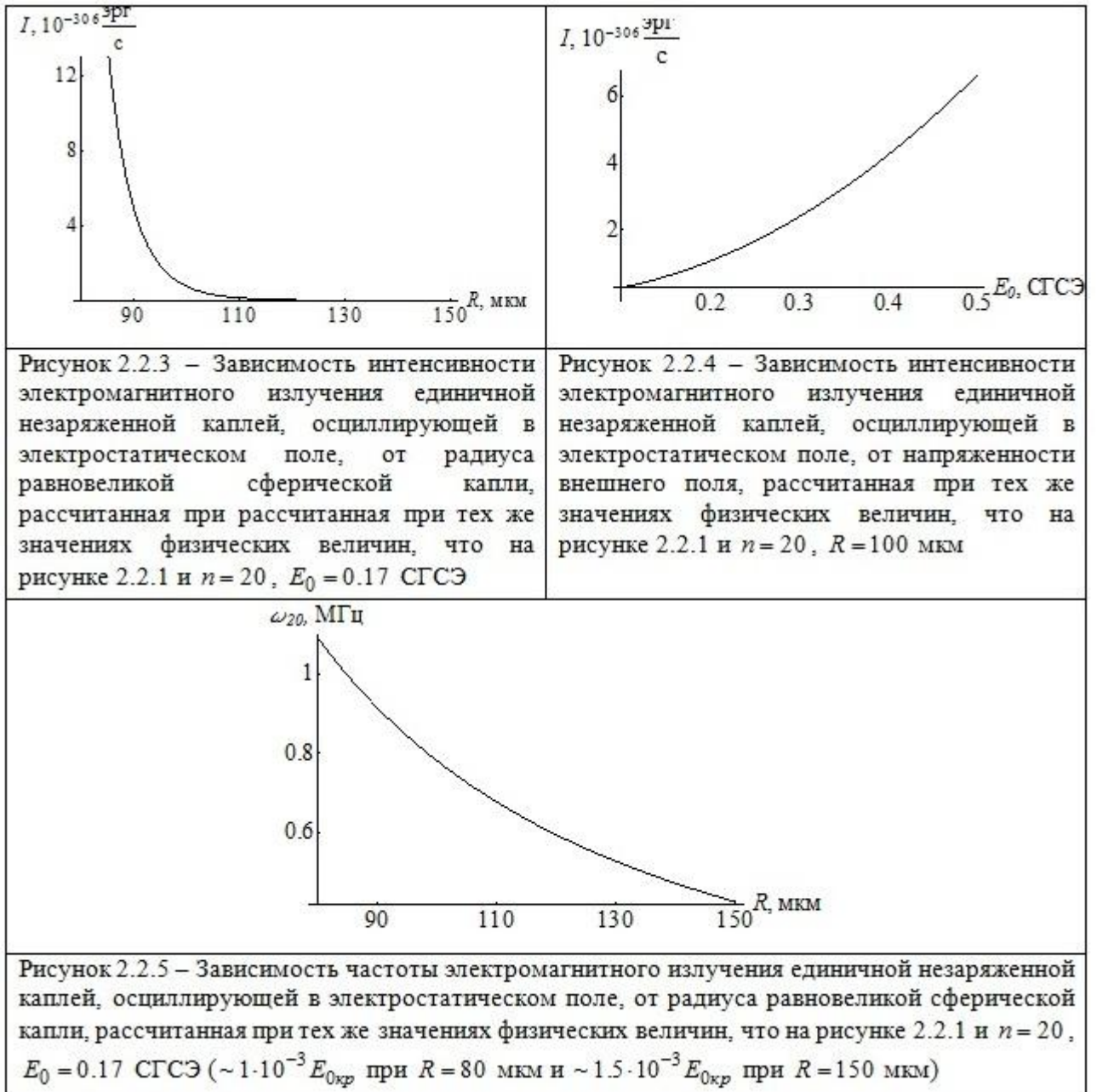
гидрометеор ежесекундно будет испытывать приблизительно 22 столкновения с мелкими капельками, что приведет к возбуждению мод с $n \in \{2 \div 30\}$.

Проведем оценку интенсивности электромагнитного излучения от единичного гидрометеора с радиусом $R=100$ мкм. Примем также, что $\alpha_n = 0.1 \cdot R$, $E_0 = 0.17$ СГСЭ ($E_0 = 50$ В/см) ($\sim 1 \cdot 10^{-3} E_{0кр}$ при $R=80$ мкм и $\sim 1.5 \cdot 10^{-3} E_{0кр}$ при $R=150$ мкм) и $n=20$. Тогда электромагнитное излучение будет идти на частоте ≈ 780 кГц с интенсивностью $I \sim 7 \cdot 10^{-307}$ эрг/с. Интегральная интенсивность излучения электромагнитных волн от грозового облака диаметром 5 км будет в $7 \cdot 10^{19}$ раз больше: $I_{in} \sim 5 \cdot 10^{-293}$ эрг/с.

На рисунке 2.2.3 приведена зависимость интенсивности излучения от радиуса капли, связанная со вторым источником излучения. Видно, что на высоких модах с увеличением размера капли интенсивность излучения быстро снижается. На рисунке 2.2.4 изображена зависимость интенсивности излучения от величины напряженности электрического поля, аналогичная приведенной на рисунком 2.2.1. Частоты генерируемого излучения при этом иллюстрируются рисунком 2.2.5.

Кроме того, численные расчеты показали, что в соответствии с выражением (2.2.19) при увеличении номера моды на единицу интенсивность электромагнитного излучения уменьшается на 15 порядков величины. Следовательно, на высоких модах фоновое электромагнитное излучение незначительно.

В результате, из двух выше перечисленных источников излучения электромагнитных волн от капель воды в конвективных облаках первый, определяемый осцилляциями низких мод мелких капелек, обладает большей мощностью излучения по сравнению со вторым, который обусловлен колебаниями высоких мод крупных капель (гидрометеоров).



Кроме того отметим, что источником фонового шумового радиоизлучения могут являться приземные туманы, которые определяют взвесь мелких осциллирующих (с малой амплитудой $\alpha_n = 10^{-3} R$) каплей воды у поверхности Земли [132, 133, 134]. Характерные размеры таких каплей от 2 до 10 мкм. Максимум их концентрации приходится на диапазон от 3 до 5 мкм [134]. Таким образом, используя соотношение (2.3.14), проведем оценку интенсивности электромагнитного излучения, связанного с осцилляциями второй моды незаряженной капли во внешнем поле. Примем радиус капли $R=5$ мкм и среднюю напряженность электрического поля у поверхности Земли

$E_0 = 4.3 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($E_0 = 130$ В/м) ($\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$). В результате, получим интенсивность излучения $I \sim 6 \cdot 10^{-38}$ эрг/с.

Из анализа полученных результатов следует, что при наличии внешнего электрического поля единичная мелкая облачная капля, осциллирующая с большой амплитудой, имеет большую интенсивность излучения, чем единичная капля тумана при возбуждении основной моды, так как величина напряженности поля грозового облака на несколько порядков превышает напряженность поля у поверхности Земли.

2.3. Затухание капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной жидкости неподвижной в суперпозиции гравитационного и внешнего однородного электростатического полей

Основным объектом исследования туманов, смогов и облаков различных типов являются осциллирующие заряженные капли, находящиеся в приземном электростатическом поле [132, 133, 134]. Отметим, что напряжённости электрического поля, размеры и заряды капель изменяются в пределах нескольких порядков [134].

В настоящей разделе методом, ранее использованном в предыдущих разделах (на основе закона сохранения энергии [103]), в рамках физико-химической гидродинамики с использованием идей и подходов механики сплошной среды решается задача о капиллярных осцилляциях поверхности заряженной капли, неподвижной в суперпозиции поля сил тяжести и однородного электростатического поля. Равновесная форма иакой капли в линейном приближении по стационарной деформации может считаться сфероидальной [57].

Постановка задачи. Рассмотрим в гравитационном поле \mathbf{g} заряженную каплю радиуса R невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости с массовой плотностью ρ_1 , коэффициентом поверхностного натяжения σ . Полный заряд капли обозначим Q . Каплю поместим в невязкую несжимаемую диэлектрическую среду с диэлектрической проницаемостью ε_{ex} и массовой плотностью ρ_2 в однородном постоянном электрическом поле напряженностью \mathbf{E}_0 таким образом, что $\mathbf{E}_0 \parallel -\mathbf{g}$. При этом величина напряженности электростатического поля подобрана так, что обеспечивается неподвижность центра масс капли.

Равновесная форма заряженной капли во внешнем поле в линейном приближении по амплитуде стационарной деформации является сфероидальной, вытянутой вдоль поля [38, 44].

Заметим, что тепловое движение молекул жидкости создает капиллярное волновое движение во всём спектре длин капиллярных волн и, как следствие, приводит к искажению равновесной формы поверхности капли. Такое волновое движение имеет бесконечно малую (тепловую) амплитуду с характерной высотой гребней порядка $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где $\kappa = 8.31 \cdot 10^7$ эрг/(моль·К) – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура. При комнатных температурах амплитуда тепловых колебаний любых жидкостей не превышает ангстрема [127].

Задачу о возможности появления невязкого затухания капиллярных осцилляций заряженной капли в однородном внешнем электростатическом поле на основе энергетического подхода в рамках физико-химической гидродинамики будем решать в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре масс капли. Рассмотрение задачи ограничим осесимметричными возмущениями капли, что существенно уменьшит громоздкость математических расчетов, но не отразится на общности рассуждений. Уравнение, описывающее возмущенную капиллярным волновым движением поверхность капли, имеет вид:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t);$$

где функция $r(\theta)$ определяет равновесную форму капли, $\xi(\theta, t)$ – капиллярное волновое возмущение поверхности капли: $\max |\xi| \ll \min r(\theta)$. Отметим, что отношение амплитуды капиллярных осцилляций к радиусу капли $\max |\xi| / R$ образует малый параметр ε .

Электрогидродинамическая математическая формулировка обсуждаемой задачи состоит из уравнения Эйлера (уравнения движения), уравнения неразрывности (здесь величины с индексом $j=1$ относятся к капле, $j=2$ – к среде):

$$\frac{d\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t)}{dt} = -\frac{1}{\rho_j} \nabla P_j(\mathbf{r}, t); \quad \text{div} \mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (j=1, 2); \quad (2.3.1)$$

волнового уравнения и условия неразрывности электрического поля:

$$r \geq r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}; \quad \text{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (2.3.2)$$

удовлетворяющие граничным условиям:

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0: \quad & \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0 \\ r \rightarrow \infty: \quad & \mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}_0 \equiv E_0 \mathbf{e}_z; \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

где $\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t)$ – скорость движения в капле и среде, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ – напряженность электростатического поля.

На свободной поверхности сфероидальной заряженной капли в поле, определяемой уравнением:

$$F(r, \theta, t) \equiv r - r(\theta) - \xi(\theta, t);$$

должны выполняться кинематическое и динамическое граничные условия:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V}_j, \nabla) F = 0; \quad (2.3.4)$$

$$P_1 - P_2 + P_q + P_g - P_\sigma = 0; \quad (2.3.5)$$

а также условие эквипотенциальности поверхности капли:

$$(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0; \quad (2.3.6)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор касательной к поверхности капли, выражения для давлений гидродинамического $P_j(\mathbf{r}, t)$, электрического поля $P_q(\mathbf{r}, t)$, гравитационного поля $P_g(\mathbf{r}, t)$, капиллярного $P_\sigma(\mathbf{r}, t)$ записываются в следующем

виде: $P_j(\mathbf{r}, t) = P_{0j} - \frac{\partial \psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$, P_{0j} – постоянное давление внутри и вне капли

в состоянии равновесия, $P_q = \varepsilon_{ex} \mathbf{E}^2 / 8\pi$, $P_g = (\rho_1 - \rho_2) g [r(0) - (r(\theta) + \xi(\theta, t)) \mu]$,

$\mu \equiv \cos \theta$, $P_\sigma = \sigma \text{div} \mathbf{n}$, \mathbf{n} – единичный вектор нормали на поверхности капли, определяемый в виде соотношения:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \Big|_{F=0}.$$

Кроме того, выписанную систему электрогидродинамических уравнений дополним интегральными условиями: постоянства полного объема капли,

неподвижности центра масс капли при её осцилляциях и неизменности суммарного заряда капли.

$$\int_V dV = \frac{4}{3}\pi R^3; \quad \int_V \mathbf{r}dV = 0;$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{E}) dS = \frac{Q}{\varepsilon_{ex}}; \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (2.3.7)$$

Волновое движение в капле и окружающей среде будем полагать потенциальным с потенциалами скоростей $\psi_j(\mathbf{r}, t)$: $\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t) = \nabla \psi_j(\mathbf{r}, t)$. Тогда в безразмерных переменных ($R = \rho = \sigma = 1$) величины поля скоростей движения, а также поправки к давлениям и напряженности электростатического поля, вызванные капиллярными осцилляциями поверхности капли, имеют аналогичный порядок малости.

Чтобы найти решение задачи (2.3.1)-(2.3.7) в рамках метода прямого разложения, искомые функции представим в виде рядов по безразмерной амплитуде осцилляций $\varepsilon \equiv \max |\xi| / R$, ограничивая рассмотрение первым приближением:

$$\xi(\theta, t) = \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2); \quad P_j(\mathbf{r}, t) = P_j^{(0)}(\mathbf{r}) + P_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\psi_j(\mathbf{r}, t) = \psi_j^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \psi_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2); \quad \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi^{(0)}(\mathbf{r}). \quad (2.3.8)$$

Отметим, что верхний индекс в разложениях (2.3.8) указывает на порядок малости по ε , а компонента электрического потенциала $\Phi^{(0)}(\mathbf{r})$ характеризует поле вблизи невозмущенной поверхности капли.

Очевидно, подставляя разложения (2.3.8) в исходную систему уравнений (2.3.1)-(2.3.7), получим задачи нулевого и первого приближений по ε .

Нулевой порядок малости по ε . Расчёт равновесной формы капли. Перейдем к рассмотрению равновесной формы поверхности капли $r(\theta)$. Пусть

в сферической системе координат форма образующей $f(\theta)$, вращающейся вокруг оси OZ , будет представлена в виде разложения по осесимметричным полиномам Лежандра:

$$r(\theta) = R(1 + f(\theta)); \quad f(\theta) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \cdot P_n(\mu); \quad |f(\theta)| \ll 1; \quad (2.3.9)$$

Принимая во внимание, что электрическое поле, задающее выделенное направление, приводит к искажению равновесной сферической поверхности капли, следует учесть, что $|f(\theta)| \sim e$. При этом заметим, что собственный заряд на капле не приводит к деформации ее сферической формы: $Q \sim e^0$. Напомним, что капля неподвижно висит в грозовом облаке, в суперпозиции гравитационного и однородного электростатического полей. Таким образом, наличие гравитационного поля удерживает каплю в неподвижном состоянии (центр масс капли неподвижен): $g \sim QE_0 \sim e$ и $E_0^2 \sim e^2$. Чтобы записать выражение для невозмущенной поверхности капли, учтем влияние g , Q и E_0 на ее равновесную форму. В этом случае, раскладывая коэффициенты $\alpha_n^{(k)}$ в асимптотический ряд по степеням эксцентриситета e и ограничивая рассмотрение четвертым порядком по e :

$$\alpha_n = \alpha_n^{(2)} + \alpha_n^{(3)} + \alpha_n^{(4)} + O(e^5);$$

уравнение равновесной поверхности капли примет следующий вид:

$$r(\theta) = R \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n^{(2)} + \alpha_n^{(3)} + \alpha_n^{(4)} \right) P_n(\mu) \right). \quad (2.3.10)$$

Здесь верхний индекс, стоящий в скобках, означает порядок малости по эксцентриситету e .

Перейдем теперь к нахождению явного вида коэффициентов $\alpha_n^{(k)}$ в разложении (2.3.10). Пользуясь методикой, изложенной в [122], подставим выражения для $P_q^{(0)}$, $P_g^{(0)}$, $P_\sigma^{(0)}$ в баланс давлений нулевого порядка малости по возмущению $\xi(\theta, t)$ и, используя свойство ортогональности полиномов

Лежандра, приравняем коэффициенты при полиномах одного и того же порядка по e :

$$r(\theta) = R \left(1 + \alpha_0^{(4)} P_0(\mu) + \left(\alpha_2^{(2)} + \alpha_2^{(4)} \right) P_2(\mu) + \alpha_3^{(3)} P_3(\mu) + \alpha_4^{(4)} P_4(\mu) \right); \quad (2.3.11)$$

$$\alpha_0^{(4)} = -\frac{9}{5} \frac{w^2}{(1-W)^2}; \quad \alpha_2^{(2)} = \frac{3w}{1-W}; \quad \alpha_3^{(3)} = \frac{108}{5} \frac{w\sqrt{Ww}}{(5-4W)(1-W)};$$

$$\alpha_2^{(4)} = \frac{9}{7} \frac{w^2(8W^2 - 84W + 79)}{(5-4W)(1-W)^3}; \quad \alpha_4^{(4)} = \frac{54}{35} \frac{w^2(28W^2 + 33W - 65)}{(2W-3)(5-4W)(1-W)^2}.$$

Здесь параметр Релея $W = Q^2 / 16\pi\epsilon_{ex} R^3 \sigma$ характеризует устойчивость капли по отношению к собственному заряду, а параметр Тейлора $w = \epsilon_{ex} E_0^2 R / 16\pi\sigma$ – по отношению к индуцированному заряду (напряженности внешнего поля). Эксцентриситет равновесной поверхности капли связан с безразмерными параметрами Тейлора и Релея следующим образом: $e = \sqrt{9w/(1-W)}$.

Прежде всего отметим, что форма равновесной поверхности капли $r(\theta)$ раскладывается по степеням параметра Тейлора $w \sim e^2$, характеризующего степень малости каждого из слагаемого в (2.3.11), и записана с точностью до членов порядка $\sim w^2$.

Приравнивая коэффициенты при полиномах порядка $\sim w^{1/2} \sim e$, выпишем следующее соотношение для ускорения свободного падения:

$$g = 12 \frac{\sigma}{R^2} \frac{\sqrt{Ww}}{(\rho_1 - \rho_2)}.$$

Первый порядок малости по ϵ . Дисперсионное уравнение.
 Электродинамическая математическая постановка обсуждаемой задачи в линейном приближении по отношению амплитуды возмущения к радиусу капли ϵ и ее детальное решение не приводятся (методика аналогична работам [118, 122]). Перейдем сразу же к рассмотрению дисперсионного уравнения. Пренебрегая взаимодействием различных мод осцилляций капли (т.е. отбрасывая

слагаемые с индексами $n \pm 2$) и учитывая свойство ортогональности полиномов Лежандра [136], получим дисперсионное уравнение при осцилляциях капли на основной (второй) моде $n = 2$:

$$\begin{aligned} \omega_2^2 = & \frac{12\sigma}{R^3(3\rho_1 + 2\rho_2)} \left(2(1 + T_0W) + \frac{2}{7} \left(T_1w - \alpha_2^{(2)}(T_2W - T_3w + V_1) \right) + \right. \\ & + (T_4W - V_2)\alpha_0^{(4)} - \alpha_2^{(4)}(T_5W + V_3) + \alpha_4^{(4)}(T_6W - V_4) + \\ & \left. + \alpha_3^{(3)}T_7\sqrt{wW} + \left(\alpha_2^{(2)} \right)^2 (T_8W + V_5) \right); \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

$$T_0 = 2 \left(3G_1(kr) \Big|_{r=R} + 1 \right); \quad G_1(kr) \equiv \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r \left(rh_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}}.$$

Здесь введено обозначение $h_n^{(2)}(kr)$ сферической функции Бесселя третьего рода [128], k – волновое число, символом ∂_r обозначена частная производная по переменной r . Коэффициенты V_j , зависящие только от плотностей ρ_1 и ρ_2 , и T_j ($j=3 \div 8$), зависящие от ρ_1 , ρ_2 , $h_n^{(2)}(kr)$, приведены в приложении, чтобы не загромождать изложение тривиальными выражениями.

В ниже следующем рассмотрении будем принимать, что частота осцилляций капли ω_n имеет комплексный вид: $\omega_n = \omega_n' + i\omega_n''$. Здесь мнимая часть обязана своим появлением затуханию колебаний в следствие потерь энергии осцилляций капли на излучение электромагнитных волн. Так как $\omega_n'' \ll \omega_n'$, то квадрат частоты осцилляций n -моды выразим в общем виде: $\omega_n^2 \approx \omega_n'^2 + 2i\omega_n'\omega_n''$. Заметим, что аргумент сферической функции Бесселя определяется через частоту ω_2 и равенство (2.3.12) является нелинейным.

Очевидно, из (2.3.12), с учетом малости аргумента $kR \equiv \frac{\omega_n'}{c}R$, будут справедливы

следующие соотношения для частного случая $n = 2$:

$$\omega_2'^2 = \frac{4\sigma}{R^3(3\rho_1 + 2\rho_2)^3} \left(6(3\rho_1 + 2\rho_2)^2 \left(1 - W - \frac{162}{35}w \right) - \frac{6}{7}\alpha_2^{(2)}S_0^+ + 6\alpha_0^{(4)}S_1^+ - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{7}\alpha_2^{(4)}S_2^+ - \frac{2}{7}\alpha_4^{(4)}S_3^+ + \frac{3}{49}\left(\alpha_2^{(2)}\right)^2 S_4^+ - \frac{4248}{49}\alpha_3^{(3)}\sqrt{wW}(3\rho_1 + 2\rho_2)^2 \Big); \\
& S_0^+ = W(81\rho_1^2 + 78\rho_1\rho_2 + 16\rho_2^2) + 5(27\rho_1^2 + 30\rho_1\rho_2 + 8\rho_2^2) + \\
& \quad + \frac{3}{175}w(115569\rho_1^2 + 162192\rho_1\rho_2 + 56764\rho_2^2); \\
& S_1^+ = W(27\rho_1^2 + 39\rho_1\rho_2 + 14\rho_2^2) - 3(3\rho_1^2 + 5\rho_1\rho_2 + 2\rho_2^2); \\
& S_2^+ = 2W(216\rho_1^2 + 303\rho_1\rho_2 + 106\rho_2^2) + (351\rho_1^2 + 438\rho_1\rho_2 + 136\rho_2^2); \\
& S_3^+ = W(621\rho_1^2 + 858\rho_1\rho_2 + 296\rho_2^2) + (729\rho_1^2 + 942\rho_1\rho_2 + 304\rho_2^2); \\
& S_4^+ = 10W(5517\rho_1^2 + 7134\rho_1\rho_2 + 2284\rho_2^2) + (3357\rho_1^2 + 4176\rho_1\rho_2 + 1492\rho_2^2); \\
& \omega_2'' = \frac{2\sigma}{R^3(3\rho_1 + 2\rho_2)^3} \left(\omega_2'^2 \left(\frac{R}{c}\right)^3 S_0^- + \omega_2'^4 \left(\frac{R}{c}\right)^5 S_1^- + \omega_2'^6 \left(\frac{R}{c}\right)^7 S_2^- - \right. \\
& \quad \left. - 450\omega_2'^8 \left(\frac{R}{c}\right)^9 (3\rho_1 + 2\rho_2)^2 \left(\alpha_2^{(1)}\right)^2 W \right); \tag{2.3.13} \\
& S_0^- = \frac{54}{35} \left(2(237\rho_1^2 + 356\rho_1\rho_2 + 132\rho_2^2)\alpha_2^{(2)}w + \right. \\
& \quad \left. + 33(3\rho_1 + 2\rho_2)^2 \alpha_3^{(3)}\sqrt{wW} \right) + \frac{144}{5}(2\rho_2 + 3\rho_1)^2 w; \\
& S_1^- = \frac{3}{7}\alpha_2^{(2)} \left(\frac{36}{5}(3\rho_1 + 2\rho_2)^2 w + W(21\rho_1^2 + 38\rho_1\rho_2 + 16\rho_2^2) \right) + \\
& \quad + \frac{311}{490}(3\rho_1 + 2\rho_2)^2 \alpha_3^{(3)}\sqrt{wW} + W \left((3\rho_1 + 2\rho_2)(-\rho_2\alpha_0^{(4)} + (3\rho_1 + 2\rho_2)) \right) + \\
& \quad + \frac{2}{21}(81\rho_1^2 + 123\rho_1\rho_2 + 46\rho_2^2)\alpha_2^{(4)} - \frac{2}{49}\left(\alpha_2^{(2)}\right)^2 (1458\rho_1^2 + 1689\rho_1\rho_2 + 428\rho_2^2) + \\
& \quad + \frac{1}{21}(243\rho_1^2 + 354\rho_1\rho_2 + 128\rho_2^2)\alpha_4^{(4)} \Big); \\
& S_2^- = \frac{8}{875} \left(\left(9(2\rho_2 + 3\rho_1)^2 - \frac{1}{35}(963\rho_1^2 - 66\rho_1\rho_2 - 472\rho_2^2)\alpha_2^{(2)} \right) w + \right.
\end{aligned}$$

$$+2(3\rho_1 + 2\rho_2)^2 \alpha_3^{(3)} \sqrt{wW} \Big); \quad kR \equiv \frac{\omega_2'}{c} R.$$

Затухание капиллярных осцилляций капли. Излучение электромагнитных волн. Несложно видеть, что мнимая часть частоты в (2.3.13) является декрементом затухания капиллярных осцилляций капли. Однако, в модели идеальной жидкости затухания быть не может. Таким образом, исходя из закона сохранения энергии, затухание можно связать только с потерями энергии осцилляций на излучение электромагнитных волн [103].

В этом случае интенсивность излучения равна скорости убывания механической энергии осцилляций [123]:

$$I = -\frac{d\mathcal{G}_n}{dt} \equiv \omega_n'' \mathcal{G}_n;$$

Здесь \mathcal{G}_n – обозначение энергии поверхностных колебаний капли n -й моды. Согласно теореме вириала \mathcal{G}_n равна удвоенной средней за период кинетической энергии движения жидкости в капле [129]:

$$\mathcal{G}_n = \frac{2\pi R^3 \rho_1 \omega_n'^2 \beta_n^2}{n(2n+1)}.$$

В результате, аналитическое выражение интенсивности электромагнитного излучения, генерируемого капиллярными осцилляциями поверхности заряженной капли в электростатическом поле на основной моде ($n=2$), принимает следующий вид:

$$I = \frac{2304\pi}{5} \frac{\beta_2^2 \rho_1 (W-1) \sigma^3}{c^3 R^3 (3\rho_1 + 2\rho_2)^3} \left(12 \frac{W(W-1)^2 \sigma}{c^2 R (3\rho_1 + 2\rho_2)} + \frac{36}{875} (W-1) \times \right. \\ \times \left(2w \left(175 + \frac{288(W-1)^2 \sigma^2}{c^4 R^2 (3\rho_1 + 2\rho_2)^2} \right) - \frac{50W\sigma}{c^2 R (3\rho_1 + 2\rho_2)^2} \times \right. \\ \left. \left. \times \left(5(\rho_1(19-10W) + 6\rho_2) \alpha_2^{(2)} + 81w(3\rho_1 + 2\rho_2) \right) \right) \right) + \frac{1}{35} \frac{(W-1)}{(3\rho_1 + 2\rho_2)^2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{41472}{1715} \frac{W(W-1)^4 \sigma^3}{c^6 R^3 (3\rho_1 + 2\rho_2)} \left(\alpha_2^{(2)} \right)^2 + \frac{36}{875} \frac{1}{c^4 R^2 (3\rho_1 + 2\rho_2)} \times \right. \\
& \times \left(\left(162w(3\rho_1 + 2\rho_2) + 5\alpha_2^{(2)} (5(9\rho_1 + 4\rho_2) - W(27\rho_1 + 8\rho_2)) \right) \times \right. \\
& \times \left(700c^4 R^2 w(3\rho_1 + 2\rho_2)^2 + \sigma(W-1) (2304w(W-1)\sigma - 375c^2 R \times \right. \\
& \times \left. \left. \left. (7\rho_1 + 8\rho_2) W \alpha_2^{(2)} \right) \right) \right) + 64\sigma^2 (W-1)^3 \left((321\rho_1 - 236\rho_2) w \alpha_2^{(2)} - \right. \\
& \left. \left. - 70(3\rho_1 + 2\rho_2) \sqrt{wW} \alpha_3^{(3)} \right) \right) + \frac{2}{35} \frac{(W-1)^2 \sigma^3}{c^5 R^4 (3\rho_1 + 2\rho_2)^3} \times \\
& \times \left(\frac{9}{35} \frac{W}{(1-W)} \left(162(3\rho_1 + 2\rho_2) w + 5\alpha_2^{(2)} (5(9\rho_1 + 4\rho_2) + W(27\rho_1 + 8\rho_2)) \right) \right)^2 + \\
& + (3\rho_1 + 2\rho_2) \left(7350(-9\rho_1 - 10\rho_2 + W(27\rho_1 + 22\rho_2)) \alpha_0^{(4)} - 54w \alpha_2^{(2)} \times \right. \\
& \times \left(-420(3\rho_1 + 2\rho_2) + W(39783\rho_1 + 29222\rho_2) \right) - 350W \alpha_2^{(4)} \times \\
& \times \left(297\rho_1 + 158\rho_2 + 2W(243\rho_1 + 182\rho_2) \right) - 700W \alpha_4^{(4)} \left(4(81\rho_1 + 49\rho_2) + \right. \\
& \left. + W(351\rho_1 + 254\rho_2) \right) - 15(3\rho_1 + 2\rho_2) (-311 + 21551W) \sqrt{wW} \alpha_3^{(3)} \Big) + \\
& + 75W \left(\alpha_2^{(2)} \right)^2 \left(\left(4239\rho_1^2 + 5772\rho_1\rho_2 + 2764\rho_2^2 \right) + \right. \\
& \left. + 2W \left(85671\rho_1^2 + 110388\rho_1\rho_2 + 35116\rho_2^2 \right) \right) \Big) + 27(W-1) \times \\
& \times \left(2 \left(237\rho_1^2 + 356\rho_1\rho_2 + 132\rho_2^2 \right) w \alpha_2^{(2)} + 33(3\rho_1 + 2\rho_2)^2 \sqrt{wW} \alpha_3^{(3)} \right) \Big) \Big). \quad (2.3.14)
\end{aligned}$$

Используя полученное выражение (2.3.14), приведем численные оценки фонового шумового электромагнитного излучения от конвективных облаков. Прежде всего отметим, что возможный источник электромагнитного излучения обусловлен осцилляциями низких мод мелких капель с концентрацией в облаке

порядка $\sim 10^9$ штук на м^3 [130]. Характерные размеры таких капель от 3 до 30 мкм. Максимум их концентрации в облаке приходится на диапазон от 3 до 7 мкм. Следует заметить, что осцилляции поверхности капель объясняются, прежде всего, микрофизическими внутриоблачными процессами: коагуляцией с более мелкими частицами, изменением агрегатного состояния, дроблением на более мелкие в следствие столкновительных процессов или реализации электростатической неустойчивости, электрического и гидродинамического взаимодействия с соседними частицами [131]. Натурные наблюдения показали, что величина амплитуды осцилляций облачных капель может принимать значения до десятков процентов от размера капли [131]. Таким образом, для получения оценок интенсивности излучения примем отношение амплитуды осцилляций к радиусу капли β_n/R равным 0.1. Также отметим, что в анализируемом случае величина параметров Релея $W \ll 1$ и Тейлора $w \ll 1$. Из этого следует, что большая часть внутриоблачных капель расположена достаточно далеко от предела неустойчивости поверхности капли по отношению к комбинации собственного и индуцированному внешним электрическим полем зарядов.

Таким образом, на основе соотношения (2.3.14) проведем оценку интенсивности фонового шумового радиоизлучения от капель воды, осциллирующих на основной (второй) моде $n=2$. Заметим, что осцилляции второй моды обусловлены движением капель относительно среды [137]. Приведем следующие значения физических величин: $\epsilon_{ex}=1$, $\sigma=73$ дин/см, $\rho_1=1$ г/см³, $\rho_2=1.3 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $\beta_2=0.1R$, $E_0=0.17$ СГСЭ ($E_0=50$ В/см) ($\sim 5 \cdot 10^{-5} E_{0кр}$ ($E_{0кр}$ – критическое значение напряженности поля) при $R=3$ мкм и $\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ при $R=30$ мкм), $Q=5 \cdot 10^{-7}$ СГСЭ ($\sim 2 \cdot 10^{-3} Q_{кр}$ ($Q_{кр}$ – критическое значение заряда) при $R=3$ мкм и $\sim 7 \cdot 10^{-5} Q_{кр}$ при $R=30$ мкм). Следовательно, для единичной капли размером $R=30$ мкм электромагнитное излучение будет идти на частоте ≈ 100 кГц с интенсивностью $I \sim 8 \cdot 10^{-31}$ эрг/с.

При $R=8$ мкм интенсивность излучения составляет $I \sim 8 \cdot 10^{-31}$ эрг/с на частоте ≈ 1 МГц. Для капли радиусом $R=3$ мкм получим $I \sim 8 \cdot 10^{-31}$ эрг/с на частоте ≈ 4.5 МГц. Интегральная интенсивность излучения электромагнитных волн от грозового облака диаметром 5 км будет уже в $7 \cdot 10^{19}$ раз больше по сравнению с единичной каплей $I_{in} \sim 1 \cdot 10^{-10}$ эрг/с (здесь учтено, что все капли имеют одинаковый размер и осциллируют синфазно). Интересно отметить, что при независимых осцилляциях капель, с произвольными фазами, интенсивность излучения из облака будет \sqrt{N} раз больше по сравнению с излучением одиночной капли.

Чтобы определить характер зависимости величины интенсивности излучения электромагнитных волн от радиуса единичной слабо заряженной капли, осциллирующей в слабом электростатическом поле, в соотношении (2.3.14) выделим только старшие по величине слагаемые. Таким образом, имеем следующую зависимость:

$$I \approx c_1(Q^2)R^{-5} - c_2(E_0^2 Q^2)R^{-3} + c_3(E_0^2) - c_4(E_0^4)R. \quad (2.3.15)$$

В результате, принимая для оценки $Q = 5 \cdot 10^{-7}$ СГСЭ, $E_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ ($E_0 = 3 \cdot 10^{-3}$ В/см), в (2.3.15) определим коэффициенты c_1 - c_4 в следующем виде:

$$\begin{aligned} c_1(Q^2) &\sim 2 \cdot 10^{-61} R^{-5} \text{ эрг/с}, & c_2(E_0^2 Q^2) &\sim 4 \cdot 10^{-55} R^{-3} \text{ эрг/с}, \\ c_3(E_0^2) &\sim 3 \cdot 10^{-39} \text{ эрг/с}, & c_4(E_0^4) &\sim 7 \cdot 10^{-53} R \text{ эрг/с}. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует, что интенсивность излучения от единичной заряженной капли в отсутствие электрического поля характеризуется лишь первым членом в выражении (2.3.15) и для размера капли $R=10$ мкм составляет $\sim 10^{-46}$ эрг/с.

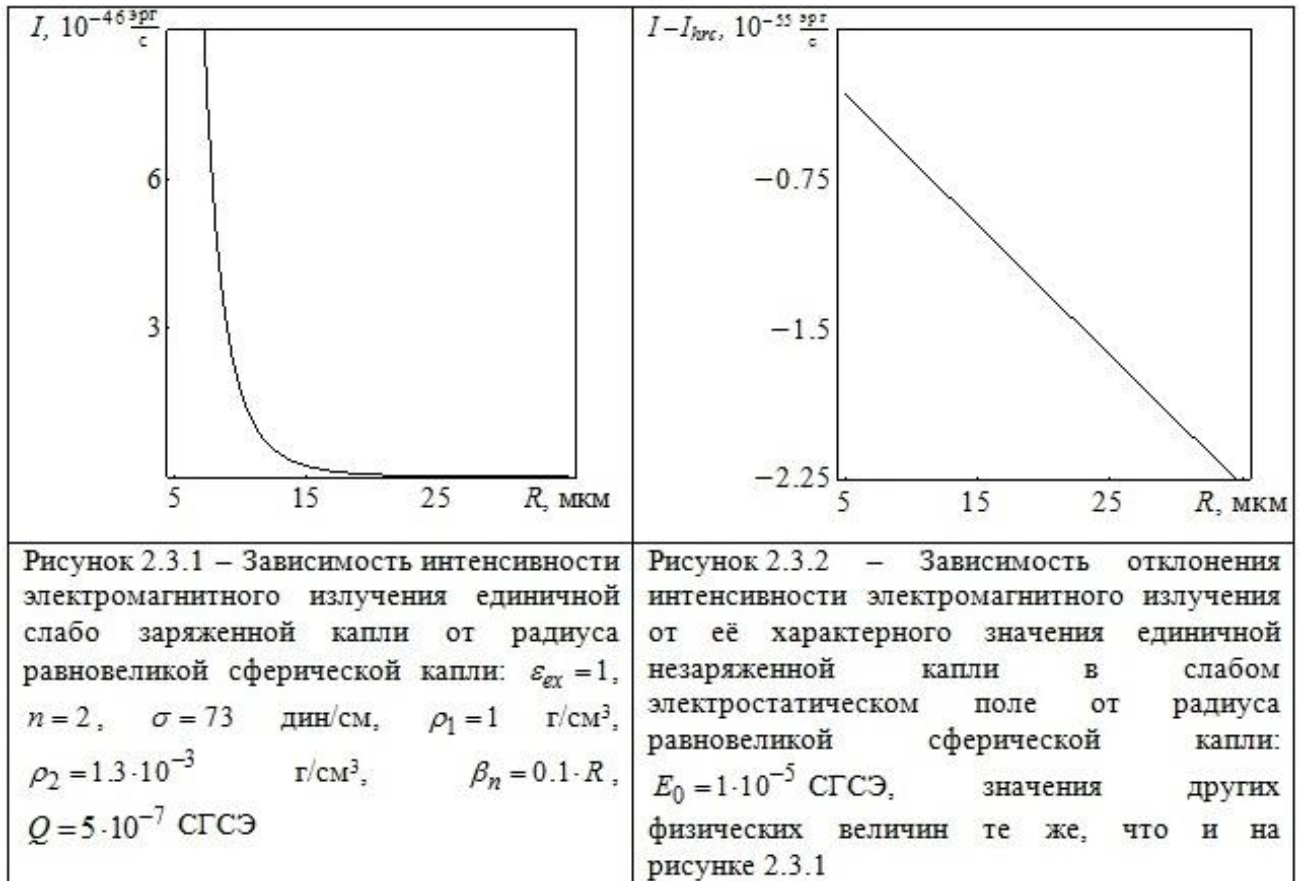
Если же во внешнем электрическом поле осциллирует незаряженная капля воды ($Q=0$), то интенсивность электромагнитного излучения от такой капли будет характеризоваться третьим и четвертым членами в выражении (2.3.15).

Принимая для оценки радиус капли $R = 10$ мкм, получим, что четвертое слагаемое порядка $\sim 10^{-55}$ эрг/с много меньше характерного значения $I_{chr} \sim c_3(E_0^2) \sim 3 \cdot 10^{-39}$ эрг/с.

Из проведенной выше оценки следует, что в случае осциллирующей в электростатическом поле заряженной капли третий член по порядку величины много больше по сравнению с остальными слагаемыми в соотношении (2.3.15). Таким образом, задавшись целью проследить зависимость интенсивности электромагнитного излучения от радиуса капли, на графиках будем иллюстрировать отклонение интенсивности излучения I от ее характерного значения I_{chr} .

Из рисунка 2.3.1, на котором отображена зависимость мощности электромагнитного излучения единичной заряженной капли от её размера при $E_0 = 0$, следует, что увеличение радиуса капли приводит к достаточно быстрому снижению интенсивности излучения. Следует отметить, что для расчетов брались весьма малые заряды капель $\sim 2 \cdot 10^{-3} Q_{кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 5 \cdot 10^{-5} Q_{кр}$ при $R = 30$ мкм.

На рисунке 2.3.2 приведена зависимость величины отклонения интенсивности излучения от ее характерного значения для незаряженной капли, осциллирующей во внешнем поле, от размера капли. Из представленного графика видно, увеличение радиуса капли приводит к снижению интенсивности излучения по линейному закону. Заметим, что проведенные расчеты характерны для слабых полей с напряженностями порядка $\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 7 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 30$ мкм. Из сравнения рисунка 2.3.1 и рисунка 2.3.2 следует, что интенсивность излучения от осциллирующей заряженной капли по порядку величины много больше по сравнению с отклонением интенсивности излучения для незаряженной капли в поле.



Зависимость отдельных слагаемых в интенсивности излучения, определяемой по формуле (2.3.15), от размера капли иллюстрируется рисунком 2.3.3. Несложно видеть, что четвертое слагаемое в (2.3.15) в масштабе рисунка 2.3.3 не отображается, так как данная фигура сливалась бы с осью абсцисс. Кривой 1 на рисунке 2.3.3 изображается зависимость интенсивности излучения заряженной капли от её радиуса (соответствует первому слагаемому в (2.3.15)). Напомним, что в анализируемом случае при увеличении размера капли мощность излучения снижается. Анализ рисунка 2.3.3 показывает, что наличие электрического поля изменяет поведение кривой 1. Таким образом, кривая 2, которая соответствует второму слагаемому в (2.3.15) при взаимодействии внешнего поля и заряда на капле, весьма быстро стремится в область насыщения. Кривая 3 на том же рисунке получается сложением кривых 1 и 2, описывающая отклонение интенсивности излучения для осциллирующей во внешнем поле заряженной капли.

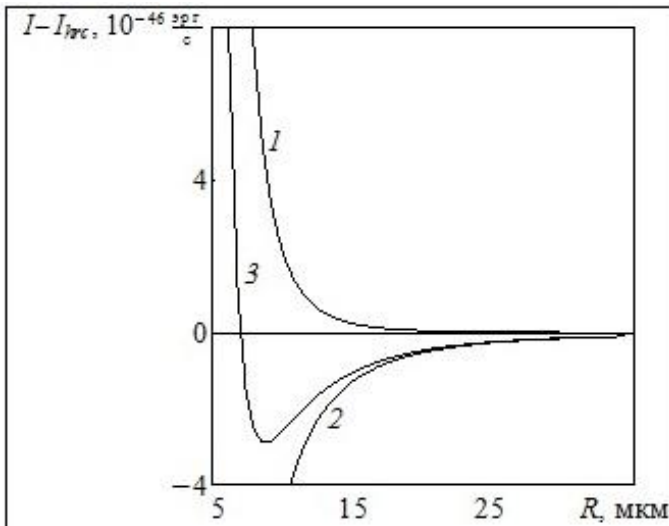


Рисунок 2.3.3 – Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной слабо заряженной капли (кривая 1) и отклонения интенсивности от характерного значения для единичной незаряженной капли в слабом внешнем поле (кривая 2) и слабо заряженной капли в слабом электростатическом поле (кривая 3) от радиуса равновеликой сферической капли: $E_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ СГСЭ при тех же прочих значениях физических величин, что и на рисунке 2.3.1

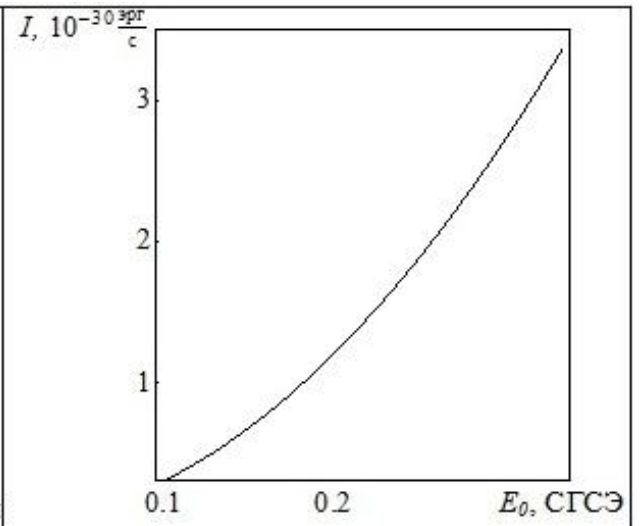


Рисунок 2.3.4 – Зависимость интенсивности электромагнитного излучения единичной слабо заряженной капли от напряженности слабого электрического внутриоблачного поля: $Q = 5 \cdot 10^{-7}$ СГСЭ при тех же прочих значениях физических величин, что и на рисунке 2.3.1 и $R = 30$ мкм

Принимая во внимание более сильные поля, чем принятые на рисунке 2.3.3, заметим, что первый член в (2.3.15) по порядку величины много меньше по сравнению со вторым. Сказанное означает, что кривая 2 подавляет кривую 1, а их суперпозиция приближается к кривой 2. В результате получим, что увеличение радиуса осциллирующей во внешнем поле заряженной капли приводит к весьма быстрому росту и к выходу в область насыщения мощности излучения.

В ниже следующем изложении размер внутриоблачной капли положим фиксированным $R = 30$ мкм.

На рисунке 2.3.4 представлена рассчитанная по формуле (2.3.14) зависимость интенсивности излучения заряженной капли, осциллирующей в электрическом поле, от величины напряженности внешнего поля (в предположении его малости). Из представленного графика видно, что увеличение напряженности внутриоблачного поля в пять раз приводит росту мощности излучения на порядок. Прежде всего отметим, что при варьировании

заряда на капле интенсивность излучения изменяется крайне слабо. Таким образом, анализ полученной фигуры показал, что при различных зарядах на каплях результаты расчетов совпадают с приведенным графиком в пределах толщины линии.

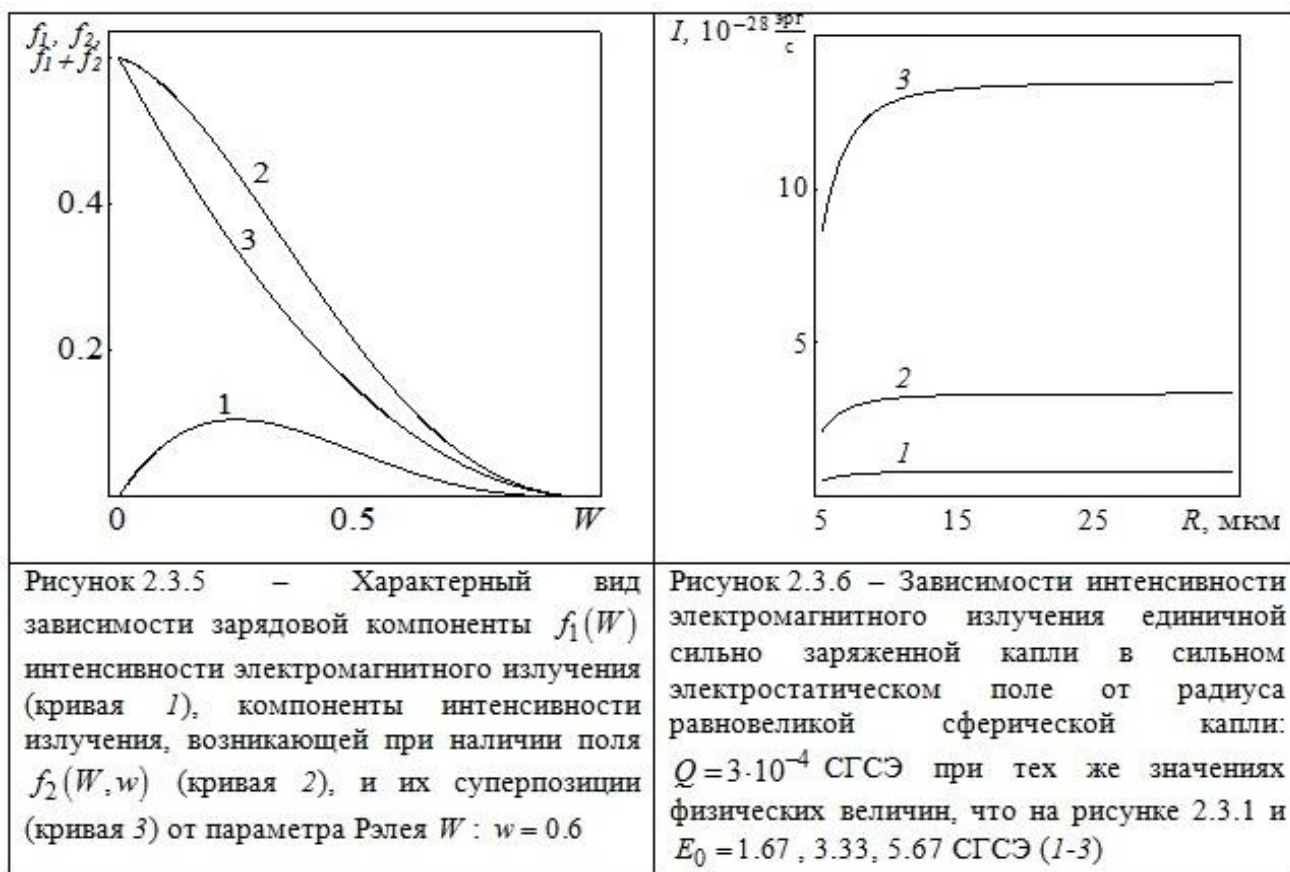
Чтобы определить зависимость величины интенсивности электромагнитного излучения заряженной капли, осциллирующей во внешнем поле, от величины заряда на облачных каплях, в соотношении (2.3.14) выделим только старшие по величине слагаемые. Таким образом, имеем:

$$I \approx k_1 f_1(W) + k_2 f_2(W, w); \quad (2.3.16)$$

$$f_1(W) \equiv (1-W)^3 W; \quad f_2(W, w) \equiv (1-W)^2 w.$$

Здесь f_n характеризуют безразмерные функции параметров Релея W и Тейлора w . Значения коэффициентов $k_1 \sim 3 \cdot 10^{-4}$ эрг/с, $k_2 \sim 4 \cdot 10^{-23}$ эрг/с (при $R = 30$ мкм).

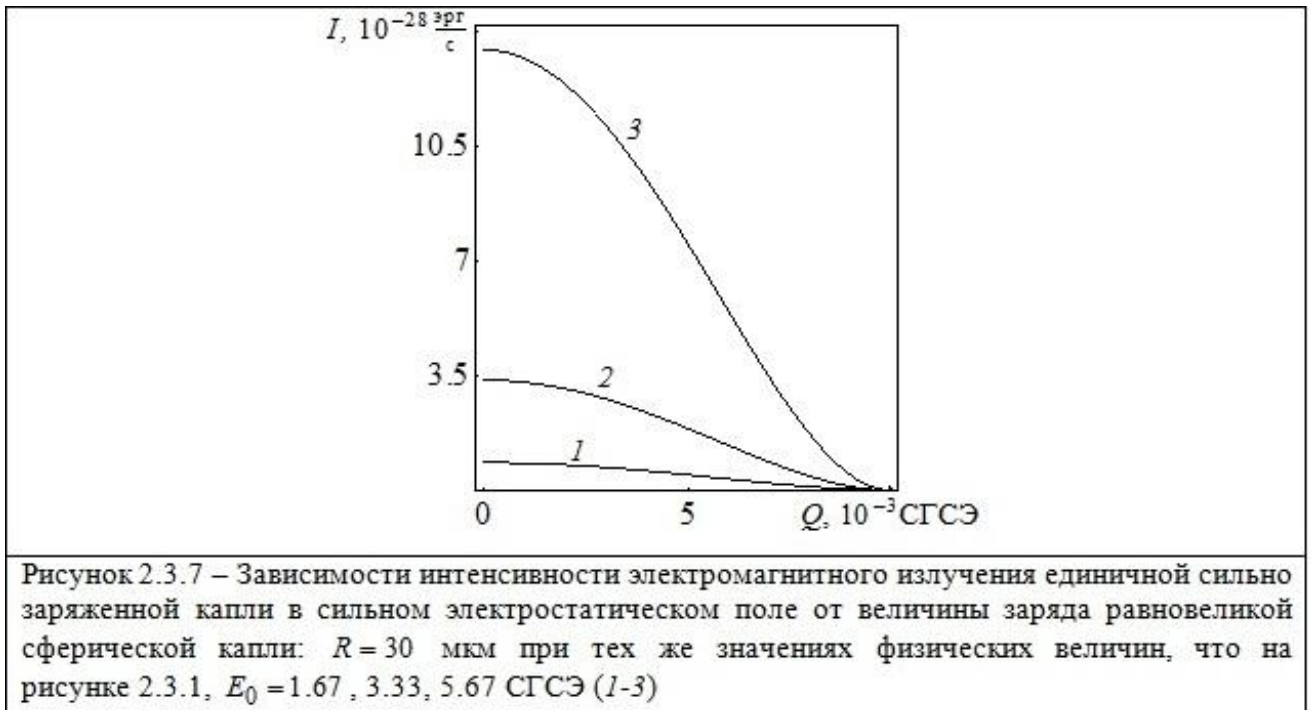
Для анализа каждого из слагаемых в соотношении (2.3.16) коэффициенты k_1 и k_2 примем порядка единицы. Из вида выражения (2.3.16) следует, что первый член характеризует мощность излучения от осциллирующей заряженной капли при $E_0 = 0$. Из рисунка 2.3.5 можно видеть, что для малых зарядов на каплях ($W \ll 1$) интенсивность излучения растет, а при стремлении заряда к критическому по Рэлею весьма быстро стремится к нулю (см. кривую I). Следует заметить, что характерные величины на внутриоблачных каплях находятся далеко от предельных значений. Следовательно, в настоящем анализе зависимость интенсивности электромагнитного излучения от слабого заряда характеризуется возрастающим участком кривой I , расположенным у оси ординат.



Однако, при наличии внешнего электрического поля основной вклад в (2.3.16) дает второе слагаемое, определяемое как зарядом, так и напряженностью поля (см. кривую 2). Из рисунка 2.3.5 видно, что при увеличении заряда на капле (параметра Релея) кривая 2 монотонно снижается. На этом же рисунке суперпозиция кривых 1 и 2 дает кривую 3. Интересно отметить, что поведение кривой 3 определяется параметром Тейлора: при увеличении w область роста на графике сужается и при некотором (достаточно малом) значении поля вовсе исчезает. Из анализа полученных результатов следует, что в случае слабо заряженной капли, осциллирующей в слабом электрическом поле, характер зависимости мощности электромагнитного излучения от такой капли меняется при определенных значениях напряженности поля с растущей на убывающую.

Заметим, что в выше полученных расчетах брались достаточно малые значения зарядов на облачных каплях и напряженностей внешних полей. Однако, в общем случае целесообразно рассмотреть и большие (вплоть до критических) значения перечисленных физических величин. Из рисунка 2.3.6, на котором приведена зависимость интенсивности излучения сильно заряженной капли

в сильном электростатическом поле от размера капли, видно, что при увеличении радиуса единичной капли мощность излучения весьма быстро растет выходит в область насыщения. Из рисунка 2.3.7, на котором иллюстрируется зависимость интенсивности излучения от заряда внутриоблачной капли, следует, что увеличение заряда на капле приводит к уменьшению интенсивности излучения. Показано, что при увеличении напряженности поля в три раза мощность излучения возрастает на порядок.



Отметим, что на рисунках 2.3.6 и 2.3.7 для расчета выбраны следующие значения: $Q = 3 \cdot 10^{-4}$ СГСЭ ($\sim Q_{кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 4 \cdot 10^{-2} Q_{кр}$ при $R = 30$ мкм), $E_0 = 1.67$ СГСЭ ($E_0 = 5 \cdot 10^2$ В/см) ($\sim 5 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 2 \cdot 10^{-3} E_{0кр}$ при $R = 30$ мкм), $E_0 = 3.3$ СГСЭ ($E_0 = 1 \cdot 10^3$ В/см) ($\sim 1 \cdot 10^{-3} E_{0кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 3 \cdot 10^{-3} E_{0кр}$ при $R = 30$ мкм) и $E_0 = 5.67$ СГСЭ ($E_0 = 2 \cdot 10^3$ В/см) ($\sim 2 \cdot 10^{-3} E_{0кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 6 \cdot 10^{-3} E_{0кр}$ при $R = 30$ мкм). При этом напряженность электрического поля не превосходит напряженность пробоя воздуха ≈ 36.7 СГСЭ (26 кВ/см) [99].

Интересно заметить, что в случае сильных полей характеристики излучения сильно заряженных капель имеют более выраженный характер по сравнению со слабо заряженными каплями, осциллирующими в слабых полях.

Также отметим, что источником непрерывно-шумового электромагнитного излучения являются приземные туманы, которые определяют взвесь мелких осциллирующих (с малой амплитудой) капель воды у поверхности Земли [132, 133]. Характерные размеры таких капель от 2 до 10 мкм. Максимум их концентрации приходится на диапазон от 3 до 5 мкм [134]. В результате, используя аналитическое выражение (2.3.14), проведем оценку интенсивности электромагнитного излучения от заряженной капли, осциллирующей на основной моде в приземном электростатическом поле. Примем $\beta_n = 10^{-3} R$, $R = 5$ мкм, $Q = 1.8 \cdot 10^{-8}$ СГСЭ ($\sim 4 \cdot 10^{-5} Q_{кр}$), $E_0 = 4.3 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($E_0 = 130$ В/м) ($\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$). Таким образом, из (2.3.14) получим значение интенсивности $I \sim 6 \cdot 10^{-38}$ эрг/с.

Из анализа полученных результатов следует, что при наличии внешнего электрического поля единичная мелкая заряженная капля, осциллирующая в грозном облаке, имеет большую интенсивность излучения, чем единичная капля тумана (при возбуждении основной моды), так как величина напряженности поля грозного облака на несколько порядков выше по сравнению с напряженностью поля у поверхности Земли.

Глава 3. Физико-химический анализ затухания капиллярных осцилляций капли идеальной жидкости на основе подходов механики сплошной среды и общей теории излучения

3.1. Капиллярные осцилляции заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости и генерация ими квадрупольного излучения

Теоретическое и экспериментальное исследование капиллярных осцилляций капли жидкости при осложняющих дополнительных условиях (заряд собственный или индуцированный, конечность скорости выравнивания электрического потенциала вдоль поверхности капли, наличие поверхностно активных веществ, релаксация вязкости и поверхностного натяжения и т. п.) играют серьёзную роль как в гидродинамике и электрогидродинамике в целом, так и в её конкретных их приложениях. В частности, они представляют значительный интерес в геофизике в связи с проблемой формирования облачных систем [138, 139]. Основным объектом облаков и туманов, представляющим интерес в связи с проблемами радиолокационного зондирования [67, 90, 97], является осциллирующая капля, несущая электрический заряд и гидродинамически взаимодействующая с соседними каплями.

Задача о возникающем при капиллярных осцилляциях заряженной капли идеальной несжимаемой проводящей жидкости электромагнитном излучении впервые опубликована В.И. Калечицем, И.Е. Нахутиным, П.П. Полуэктов [103], там же выведено дисперсионное уравнение, из которого следовало наличие затухания капиллярных осцилляций капли. Отметим, что в модели идеальной жидкости затухания быть не может, поэтому, исходя из закона сохранения энергии, затухание можно связать только с потерями энергии осцилляций на излучение электромагнитных волн. В работе [124] выполнены уточненные расчеты для реальной жидкости, предполагающие вязкость и конечную проводимость (эффект релаксации заряда в жидкости).

Электрогидродинамические асимптотические расчеты [103, 106, 124] затухания капиллярных осцилляций капли на основе подходов механики сплошной среды и закона сохранения энергии выполнены в линейном приближении по малому параметру ε – отношению амплитуды осцилляций к радиусу капли. Необходимо отметить, что порядок величины малого параметра может достигать значительной величины $\varepsilon \sim 0.1$.

Проводимый в настоящей главе в рамках физико-химической гидродинамики анализ предполагает качественно иной подход (в отличие от [103, 105, 106]) к исследованию невязкого затухания капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной жидкости, основанный на общей теории излучения.

Для начала следует отметить, что система зарядов создает в окружающем пространстве электрическое поле. Если пренебречь пространственным распределением зарядов, то на расстояниях много больших собственных линейных размеров системы электрическое поле можно считать кулоновским. Если же учесть пространственное распределение, то появляются поправки к интенсивности поля, называемые квадрупольными. Если заряды, составляющие систему, движутся, поле электрическое поле будет переменным. В соответствие с закономерностями движения и используемыми модельными идеализациями различают дипольное поле, квадрупольное и т. д.

В теории излучения [123] асимптотические расчеты ведутся по гораздо более малому параметру, чем ε , а именно δ – квадрату отношения радиуса капли к длине излучаемой волны. Порядок величины этого параметра $\delta \sim 10^{-15}$ [144]. Заметим, что он определяет величину электромагнитного поля на больших расстояниях от системы источников (в нашем случае – осциллирующие заряженные капли), создающих это поле. При этом дипольное излучение обнаруживается в расчётах первого порядка малости по δ , а квадрупольное – второго порядка малости по δ [123], стр.130. Соответственно различаются и интенсивности этих типов излучения.

Чтобы оценить интенсивности дипольной и квадрупольной компонент полного излучения, необходимо сначала рассчитать дипольный и квадрупольный моменты системы зарядов (в нашем случае – осциллирующей заряженной поверхности капли), а это чисто электрогидродинамическая проблема. Начнём с нахождения квадрупольного момента.

Чтобы рассчитать квадрупольный момент осциллирующей заряженной капли и, следовательно, интенсивность квадрупольного излучения от неё, проведем гидродинамические асимптотические расчёты в первом приближении по безразмерной амплитуде осцилляций ε и во втором приближении по квадрату отношения радиуса капли к длине излучаемой волны δ .

Физическая постановка задачи. Рассмотрим заряженную каплю с зарядом Q идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что капля находится в вакууме, её объем определяется объемом сферы с радиусом R .

Отметим, что в жидкости за счет теплового движения молекул порождается волновое движение во всём спектре длин капиллярных волн с характерной тепловой амплитудой колебаний $\xi \propto \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура [127]. При комнатных температурах такая амплитуда для любых жидкостей не превосходит ангстрема. Кроме того, капиллярное волновое движение приводит к искажению равновесной сферической формы капли $\xi(\theta, \varphi, t)$ ($\max |\xi(\theta, \varphi, t)| \ll R$). Под действием внешних силовых воздействий амплитуда непрерывно осциллирующей капли может принимать значения до десятков процентов от радиуса капли [90, 131]. При этом капиллярные осцилляции поверхности заряженной капли приводят к излучению электромагнитных волн.

Для удобства дальнейших рассуждений уравнения задачи представим в безразмерной форме. Для этого в качестве основных масштабов обезразмеривания выберем $R = \rho = \sigma = 1$. Остальные же физические величины выражаются в

единицах своих характерных значений в следующем виде: $[Q]=R^{3/2}\sigma^{1/2}$, $[t]=R^{3/2}\rho^{1/2}\sigma^{-1/2}$, $[V]=R^{-1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}$, $[r]=R$, $[P]=R^{-1}\sigma$.

Исходя из общей теории излучения электромагнитных волн, интенсивность мультипольного излучения для ускоренно движущейся системы зарядов описывается выражением [123], стр.230:

$$I = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{d} \right)^2 + \frac{1}{180c^5} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} D_{\alpha\beta} \right)^2 + \frac{2}{3c^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{m} \right)^2; \quad (3.1.1)$$

где первый член в (3.1.1) характеризует интенсивность дипольного излучения, второй – квадрупольного и третий – магнитно-дипольного. Учтем, что комбинация $\mathbf{d} = Q\mathbf{R}_q$ носит название дипольного момента, $D_{\alpha\beta}$ – тензор квадрупольного момента, определяющий симметричное положение зарядов [130], стр.69, $\mathbf{m} = Q(\mathbf{R}_q \times \partial_t \mathbf{R}_q) / 2c$ – магнитный момент. Здесь вектор \mathbf{R}_q указывает на расположение центра «эффективного» заряда относительно начала отсчета системы.

В случае заряженной сферической капли началом отсчета является положение центра масс капли, а в линейных расчетах по отношению амплитуды осцилляций к радиусу капли центр такой капли соответствует её центру масс. Таким образом, легко показать, что в таком случае смещение «эффективного» заряда отсутствует $\mathbf{R}_q = 0$. Отсюда следует, что в линейных расчетах по безразмерной амплитуде осцилляций дипольная и магнитно-дипольная компоненты излучения отсутствуют ($\mathbf{d} = \mathbf{m} = 0$), и мощность излучения в (3.1.1) будет состоять лишь из квадрупольной компоненты.

Введем тензор квадрупольного момента $D_{\alpha\beta}(t)$ в виде соотношения:

$$D_{\alpha\beta}(t) = \iiint_V \gamma(\mathbf{r}, t) \left(3x_\alpha(t)x_\beta(t) - \delta_{\alpha\beta} \cdot r^2(t) \right) dV; \quad (3.1.2)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – дельта-символ Кронекера, $\gamma(\mathbf{r}, t)$ – объемная плотность заряда, $x_\alpha(t)$, $x_\beta(t)$ – координаты радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ в декартовой системе координат (x, y, z) для точки, лежащей в объеме капли V .

Из (3.1.2) можно видеть, что в случае поверхностно распределенного заряда [141], стр.45, проводящей сферы, а также объемного распределенного заряда [123], стр.138, диэлектрической сферы квадрупольные моменты равны нулю [140], стр.69. Очевидно, квадрупольный электрический момент атомного ядра не равен нулю, так как его форма отлична от сферической [140], стр.69.

Задачу о капиллярных осцилляциях поверхности заряженной капли, будем решать в сферической системе координат (r, θ, φ) , начало которой совпадает с положением центра масс капли.

Математическая формулировка задачи. В данной задаче равновесная заряженной сферическая форма капли, претерпевающая осесимметричное волновое возмущение $\xi(\theta, t)$ малой амплитуды ε ($\varepsilon \ll 1$), описывается уравнением вида:

$$r(\theta, t) = 1 + \xi(\theta, t); \quad |\xi| \ll 1. \quad (3.1.3)$$

Будем полагать, что движение жидкости в капле, связанное с её осцилляциями, является потенциальным с гидродинамическим потенциалом $\psi(\mathbf{r}, t)$: $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \nabla \psi(\mathbf{r}, t)$. Тот же порядок малости будут иметь поле скоростей течения жидкости в капле и амплитуда осцилляций её поверхности: $\psi(\mathbf{r}, t) \sim \xi(\theta, t) \sim \varepsilon$.

В данной задаче предполагается, что капля является идеальным проводником так, что характерное время релаксации заряда было много меньше характерного гидродинамического времени колебания поверхности, а электрическое поле в окрестности возмущенной капли, создаваемое её зарядом, можно считать постоянным в любой момент времени. Такое поле будет характеризоваться электрическим потенциалом $\Phi(\mathbf{r}, t)$.

Математическая формулировка обсуждаемой задачи состоит из основных уравнений электрогидродинамики: уравнений Лапласа для потенциалов скорости движения жидкости и электрического поля:

$$\Delta\psi(\mathbf{r},t)=0; \quad (3.1.4)$$

$$\Delta\Phi(\mathbf{r},t)=0; \quad (3.1.5)$$

при выполнении условий ограниченности потенциалов:

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r},t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\mathbf{r},t) \rightarrow 0; \quad (3.1.6)$$

кинематического и динамического граничных условий:

$$r=1+\xi(\theta,t): \quad \frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial t} = \frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial\theta} \frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial\theta};$$

$$P + P_q = P_\sigma; \quad (3.1.7)$$

а также условия постоянства электрического потенциала вдоль поверхности капли:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \Phi_s(t). \quad (3.1.8)$$

Исходя из общефизических соображений, для замыкания выписанной системы уравнений сформулируем дополнительные интегральные условия: постоянства объема капли, неподвижности центра масс капли, а также сохранения полного заряда на капле.

$$\int_V r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi; \quad \int_V \mathbf{r} \cdot r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = 0;$$

$$V = [0 \leq r \leq 1 + \xi(\theta,t); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}, \nabla\Phi) dS = Q; \quad S = [r = 1 + \xi(\theta,t); 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (3.1.9)$$

В выше приведенных уравнениях используются обозначения: $\Phi_s(t)$ – электрический потенциал поверхности капли, P , P_q , P_σ – гидродинамическое, электрическое и капиллярное давления, определяемые в виде $P = P_0 - \frac{\partial\psi}{\partial t}$,

$P_q = (\nabla\Phi(\mathbf{r},t))^2 / 8\pi$, $P_\sigma = \text{div}\mathbf{n}(\mathbf{r},t)$, где P_0 – постоянное давление в капле

в равновесном состоянии, $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ – орт нормали к осесимметричной поверхности капли, записанный в сферической системе координат по формуле:

$$\mathbf{n}(\theta, t) = \left. \frac{\nabla(r - r(\theta, t))}{|\nabla(r - r(\theta, t))|} \right|_{r=r(\theta, t)} = \mathbf{e}_r - \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta; \quad (3.1.10)$$

\mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ – орты сферической системы координат.

Сформулируем начальные условия задачи. Начальную деформацию сферической капли зададим в виде суперпозиции мод и приравняем к нулю начальную скорость движения поверхности капли:

$$t=0: \quad \xi(\theta) = \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu); \quad \sum_{j \in \Xi} h_j = 1; \quad \varepsilon \ll 1; \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0; \quad (3.1.11)$$

где Ξ – множество значений номеров изначально возбужденных мод (их суперпозиция определяет начальную деформацию равновесной поверхности капли), h_j – коэффициенты, характеризующие парциальный вклад j -ой колебательной моды в форму начального возмущения, j – целое число.

Сформулированную задачу будем решать асимптотическим методом, раскладывая все искомые функции в асимптотический ряд по малому параметру ε , ограничивая рассмотрение первым приближением:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2); & \psi(\mathbf{r}, t) &= \psi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2); \\ P(\mathbf{r}, t) &= P^{(0)}(\mathbf{r}) + P^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2); \\ P_\sigma(\mathbf{r}, t) &= P_\sigma^{(0)}(\mathbf{r}) + P_\sigma^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2); \\ P_q(\mathbf{r}, t) &= P_q^{(0)}(\mathbf{r}) + P_q^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2); \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2); \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

где верхний индекс в скобках обозначает порядок малости (индекс «0» указывает на равновесное значение величины). Отметим, что $\Phi^{(0)}(r) = \frac{Q}{r}$ – электрический потенциал собственного заряда капли в окрестности её невозмущенной

поверхности, $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$ – добавка к потенциалу электрического поля, вызванная волновым возмущением формы поверхности капли $\xi(\theta, t)$ (имеет тот же порядок, что и $\xi(\theta, t)$).

При подстановке разложений (3.1.12) в систему уравнений (3.1.4)-(3.1.9) получим задачи различных порядков малости по ε : нулевого и первого.

Обратимся к задаче первого приближения для расчета искажения равновесной поверхности капли $\xi(\theta, t)$ и добавки к потенциалу $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$, вызванным возмущением поверхности $\xi(\theta, t)$. Для этого распишем предварительно функции $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$, являющиеся решениями уравнений Лапласа (3.1.4)-(3.1.5) и удовлетворяющие условиям ограниченности (3.1.6), и $\xi(\theta, t)$ в виде разложений по полиномам Лежандра [132]:

$$\psi(r, \theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) r^n P_n(\mu); \quad \mu \equiv \cos \theta; \quad (3.1.13)$$

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu); \quad (3.1.14)$$

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) P_n(\mu). \quad (3.1.15)$$

Заметим, что на первый порядок величин указывает первая степень малого параметра ε .

Задача первого порядка малости по ε . Группировка слагаемых $\sim \varepsilon$ в (3.1.4)-(3.1.11) позволяет выписать систему уравнений для нахождения явного вида коэффициентов D_n , F_n , M_n в разложениях (3.1.13)-(3.1.15):

$$r=1: \quad \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial r};$$

$$-\frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi^{(0)}(r)}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}(r)}{\partial r^2} \xi(\theta, t) \right) = -(2 + L_\theta) \xi(\theta, t);$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(r, \theta, t) + \frac{\partial \Phi^{(0)}(r)}{\partial r} \xi(\theta, t) &= \Phi_s^{(1)}(t); \\ \int_0^\pi \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta &= 0; \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \xi(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0; \\ \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}(r)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(0)}(r)}{\partial r} \right) \xi(\theta, t) \right] \sin \theta d\theta &= 0; \\ L_\theta &\equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

В (3.1.16) введено обозначение $\Phi_s^{(1)}$ добавки первого приближения к электрическому потенциалу поверхности капли.

В результате, решение системы уравнений (3.1.16) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} M_0(t) = 0; \quad M_1(t) = 0; \quad D_n(t) &= \frac{1}{n} \frac{\partial M_n(t)}{\partial t}; \quad (n \geq 2); \\ F_n(t) = QM_n(t); \quad (n \geq 2); \quad \Phi_s^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Динамическое граничное условие в (3.1.7) с учетом выше полученных соотношений дает нам однородное дифференциальное уравнение второго порядка, записанное относительно амплитуд $M_n(t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_n(t) + \omega_n^2 M_n(t) = 0. \quad (3.1.18)$$

Здесь ω_n – частота осцилляций n -й моды заряженной капли:

$$\omega_n^2 = n(n-1)((n+2) - W); \quad W = \frac{Q^2}{4\pi}. \quad (3.1.19)$$

Положим, что зависимость от времени амплитуд $M_n(t)$ является экспоненциальной. Тогда решение дифференциального уравнения определим как

$$M_n(t) = a_n \exp(i(\omega_n t + b_n)) + \text{к.с.}; \quad (n \geq 2). \quad (3.1.20)$$

Здесь аббревиатурой "к.с." обозначены комплексно сопряженные слагаемые.

В последнем выражении неизвестными величинами являются константы a_n и b_n . Определим их из начальных условий (3.1.7). Таким образом, для a_n и b_n получаем решение:

$$a_n = \frac{1}{2} h_j \delta_{n,j}; \quad b_n = 0; \quad (j \in \Xi, n = 2, 3, \dots); \quad (3.1.21)$$

$\delta_{n,j}$ – символ Кронекера.

Итак, используя найденные выражения (3.1.20), (3.1.21), можно определить уравнение $r(\theta, t)$, описывающее форму возмущенной поверхности сферической капли с точностью до слагаемых $\sim \varepsilon$ в виде:

$$r(\theta, t) = 1 + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \cos(\omega_j t) P_j(\mu). \quad (3.1.22)$$

Подставляя в (3.1.14) выражение для коэффициентов $F_n(t)$ из (3.1.17) и используя явный вид решений дифференциального уравнения (3.1.20) с учетом (3.1.21), получим выражение для добавки электрического потенциала в окрестности возмущенной заряженной сферы в виде:

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = \varepsilon Q \sum_{j \in \Xi} h_j \cos(\omega_j t) r^{-(j+1)} P_j(\mu). \quad (3.1.23)$$

В рамках решаемой задачи проведем исследование асимптотических разложений (3.1.12) по малому параметру ε .

Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \delta_n(\varepsilon)$, где α_n не зависит от ε , $\delta_n(\varepsilon)$ – асимптотическая последовательность, является асимптотическим разложением функции $f(\varepsilon)$, которую можно записать в виде:

$$f(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \delta_n(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

и определить как:

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n \delta_n(\varepsilon) + O(\delta_N(\varepsilon)) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

При этом ошибка, совершаемая при обрывании ряда, имеет порядок первого отброшенного члена ($\sim O(\delta_N(\varepsilon))$) [142].

Чтобы решить задачу в теории возмущения, необходимо выбрать безразмерную величину возмущения ε так, чтобы ε было мало, и задать асимптотическую последовательность определенного вида.

Для исследования решаемой задачи в теории малых возмущений в качестве малого возмущения выбрано отношение амплитуды осцилляций к радиусу капли $\xi/R = \varepsilon$, а асимптотическая последовательность задана в виде последовательности целых степеней ε^n . Таким образом, асимптотические разложения (3.1.12) представляют собой ряд по малому параметру безразмерной амплитуды осцилляций ε и определены с точностью до членов первого порядка малости по ε .

Однако на основании только первых нескольких членов разложения нельзя говорить о сходимости или расходимости асимптотического разложения, так как математическая сходимость зависит от поведения членов бесконечно высокого порядка [143].

В асимптотических разложениях (3.1.12), ограниченных первым порядком малости по ε , добавим следующий член разложения порядка $\sim \varepsilon^2$ и оценим величину коэффициентов при различных степенях малого параметра ε на примере возмущения поверхности капли $\xi(\theta, t)$.

Для этого, используя решение задачи о нелинейных осцилляциях заряженной капли [119], представим возмущение сферической поверхности капли $\xi(\theta, t)$ в безразмерном виде в виде разложения по степеням малого параметра ε с точностью до членов второго порядка по ε при начальном возбуждении второй моды:

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, t) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\theta, t) + O(\varepsilon^3) =$$

$$= \varepsilon M_2^{(1)}(t) P_2(\mu) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu) + O(\varepsilon^3); \quad (3.1.24)$$

$$M_2^{(1)}(t) = h_2 \cos(\omega_2 t); \quad M_0^{(2)}(t) = -\frac{1}{10} h_2^2 (1 + \cos(2\omega_2 t));$$

$$M_n^{(2)}(t) \equiv \frac{1}{2} h_2^2 \left[\lambda_{22n}^{(+)} (\cos(2\omega_2 t) - \cos(\omega_2 t)) + \lambda_{22n}^{(-)} (1 - \cos(\omega_2 t)) \right]; \quad (n \geq 1);$$

$$\lambda_{22n}^{(+)} \equiv \frac{K_{22n} \left(\omega_2^2 \left(\frac{3n}{2} - 2 \right) + 10n + n(2n-5)W \right) + \frac{1}{2} \alpha_{22n} \left(\omega_2^2 \left(2 + \frac{n}{4} \right) + nW \right)}{\omega_n^2 - 4\omega_2^2};$$

$$\lambda_{22n}^{(-)} \equiv \omega_n^{-2} \left(K_{22n} \left(\omega_2^2 \frac{n}{2} + 10n + n(2n-5)W \right) + \frac{1}{2} n \alpha_{22n} \left(-\frac{1}{4} \omega_2^2 + W \right) \right);$$

$$K_{22n} = \frac{(2n+1)((n-3)(n-1)(n+2)(n+4))^2}{(4-n)!(n+5)!};$$

$$\alpha_{22n} = -\frac{36(-1)^n (2n+1)(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)(n^2+n-4)}{(4-n)!(n+5)!};$$

$$\omega_n^2 = n(n-1)((n+2)-W); \quad W = \frac{Q^2}{4\pi}.$$

Проведем оценку коэффициентов $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ в разложении (3.1.24), заменяя полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ на их усредненное значение. Для численных оценок примем $h_2 = 1$, $W = 1 \cdot 10^{-7}$.

В итоге получим, что величина отношения коэффициентов $\xi^{(2)} / \xi^{(1)} \leq 2$ при любом значении времени t . Следовательно, для достижения заданной точности (при $\varepsilon = 0.1$ величина $\varepsilon^2 \xi^{(2)}$ меньше, чем на порядок, по сравнению с величиной $\varepsilon \xi^{(1)}$) для функции $\xi(\theta, t)$ в (3.1.12), ограниченной первым порядком по малому параметру ε , добавление следующего члена порядка $\sim \varepsilon^2$ приведет лишь к малой поправке и усложнению математических расчетов.

Определим теперь плотность поверхностного заряда, распределенного по возмущенной осесимметричной поверхности идеально проводящей капли по известной формуле:

$$v(\theta, t) = \frac{E_n(\mathbf{r}, t)}{4\pi} \Big|_{r=r(\theta, t)} = - \frac{n(\mathbf{r}, t) \nabla \Phi(\mathbf{r}, t)}{4\pi} \Big|_{r=r(\theta, t)}. \quad (3.1.25)$$

Здесь $\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$, а $r(\theta, t)$ определяется (3.1.22).

Подставим добавку к электрическому потенциалу из (3.1.24), вектор нормали, определяемый по формуле (3.1.10), в выражение (3.1.23), после чего оно примет вид:

$$v(\theta, t) = \frac{Q}{4\pi} \left[1 + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} (j-1) h_j \cos(\omega_j t) P_j(\mu) \right]. \quad (3.1.26)$$

Отметим, что в этом случае напряженность электрического поля внутри идеально проводящей сферы равна нулю, а весь заряд распределен по ее поверхности. Очевидно, в отсутствии возмущения $\xi(\theta, t)$ плотность поверхностного заряда (в безразмерном виде) будет постоянной: $v(\theta, t) = Q / 4\pi$.

Квадрупольный момент. Перейдем к вычислению тензора квадрупольного момента $D_{\alpha\beta}(t)$ в сферической системе координат. Чтобы перейти в формуле (3.1.2) от объемной плотности заряда $\gamma(\mathbf{r}, t)$ диэлектрической капли к поверхностной плотности заряда проводящей капли $v(\theta, t)$, будем использовать формальное уравнение (см. «Приложение. Вывод соотношения между объёмной плотностью заряда диэлектрической капли и поверхностной плотностью заряда для электропроводной капли»):

$$\gamma(r, \theta, t) \equiv v(\theta, t) \delta(r - r(\theta, t)).$$

Использование дельта-функция Дирака [140], стр.902, $\delta(r - r(\theta, t))$ при вычислении тензора $D_{\alpha\beta}(t)$ в (3.1.2) позволяет перейти от интегрирования по объему капли с объемно распределенным зарядом к интегрированию

по поверхности капли с поверхностно распределенным зарядом, в результате чего имеем:

$$\begin{aligned}
 D_{12} = D_{21} = D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} &= 0; \\
 D_{11}(t) = D_{22}(t) &= -\frac{1}{2}D_{33}(t) = \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi (\mathbf{n}(\theta, t), \nabla \Phi(\mathbf{r}, t)) r^4(\theta, t) (1 - 3 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta. \quad (3.1.27)
 \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (3.1.10), (3.1.12), (3.1.22), (3.1.23), найдем подынтегральное выражение, сохраняя лишь величины порядка малости не выше ε :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{n}(\theta, t), \nabla \Phi(\mathbf{r}, t)) r^4(\theta, t) &= - \left(Q + 2Q\xi(\theta, t) - \frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial r} \right) = \\
 &= -Q \left(1 + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} (j+3) h_j \cos(\omega_j t) P_j(\mu) \right).
 \end{aligned}$$

Подставим теперь получившееся выражение в (3.1.27) и с учетом свойства ортогональности полиномов Лежандра определим диагональные (отличные от нуля) компоненты тензора квадрупольного момента:

$$\begin{aligned}
 D_{11}(t) = D_{22}(t) &= -\frac{1}{2}D_{33}(t) = \\
 &= -\frac{Q}{2} \int_0^\pi \left(P_0(\mu) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} (j+3) h_j \cos(\omega_j t) P_j(\mu) \right) P_2(\mu) \sin \theta d\theta \equiv -Q\varepsilon M_2(t).
 \end{aligned}$$

Учитывая условия (3.1.20), (3.1.21), выше выписанное соотношение в размерном виде примет следующий вид:

$$D_{11}(t) = D_{22}(t) = -\frac{1}{2}D_{33}(t) = -QR^2 \varepsilon h_2 \cos(\omega_2 t).$$

Наконец, рассчитывая максимальное значение суммы квадратов третьей производной по времени от полученных компонент тензора квадрупольного момента:

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} D_{\alpha\beta}(t) \right)_{\max}^2 = 6Q^2 R^4 \varepsilon^2 h_2^2 \omega_2^6;$$

получим следующее решение (в размерном виде) для квадрупольной компоненты интенсивности излучения электромагнитных волн от заряженной капли, осциллирующей на основной (второй) моде:

$$I = \frac{1}{30c^5} Q^2 R^4 \varepsilon^2 h_2^2 \omega_2^6 = \frac{256}{15} \frac{Q^2 \sigma^3 \varepsilon^2 h_2^2}{c^5 R^5 \rho^3} \left(1 - \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3} \right)^3. \quad (3.1.28)$$

Несложно видеть, что при вычислении интенсивности излучения в (3.1.28) принимались во внимание лишь максимальные значения величины квадрупольного момента (значение функции косинуса равно единице). Однако, если брать не максимальное значение, а среднее по периоду квадрата косинуса, то результат в (3.1.28) уменьшится в два раза.

Стоит заметить, что решение (3.1.28), полученное методом общей теории излучения электромагнитных волн, хорошо согласуется с результатом, обнаруженным альтернативным методом на основе закона сохранения энергии при $n=2$ (см. раздел 2.1), в смысле реализации основных зависимостей мощности электромагнитного излучения I от величин Q , R , σ , ρ : в асимптотике близких к критическим значениям зарядов ($Q^2/16\pi\sigma R^3 \sim 1$) и в асимптотике малых значений зарядов ($Q^2/16\pi\sigma R^3 \ll 1$).

Из вида выражения (3.1.28) видно, что квадрупольное электромагнитное излучение определяется осцилляциями заряженной капли только на основной (второй) моде. Напомним, что такие расчеты проведены в первом порядке малости по отношению амплитуды осцилляций к радиусу капли $\xi/R = \varepsilon$. Отметим, что интенсивность электромагнитного излучения от капли при возбуждении более высоких мод, чем основная, определяется изменением во времени мультипольного момента более высокого порядка, чем квадрупольного [140], стр.69-70. В этом случае мощность излучения на много порядков слабее. В разделе 2.1 диссертационной работы отмечено, что

при увеличении номера моды на единицу полная мощность излучения будет убывать на 15 порядков величины (применена альтернативная методика вычислений на основе закона сохранения энергии).

Используя полученное выражение (3.1.28), приведем численные оценки радиоизлучения от заряженных облаков. Прежде всего отметим, что возникновение зарядов на внутриоблачных каплях объясняется процессами электризации, например, такими как захват каплями воздушных ионов, соударение с поляризованными частицами, электризация при переходе из одного агрегатного состояния в другое, разбрызгивание капель [126]. Таким образом, согласно [103] наиболее вероятный источник электромагнитного излучения капель воды в конвективных облаках обусловлен осцилляциями низких мод мелких капель с концентрацией в облаке порядка $\sim 10^9$ штук на м^3 [130]. Характерные размеры таких капель от 3 до 30 мкм. Натурные наблюдения показали, что величина амплитуды осцилляций облачных капель может принимать значения до десятков процентов от размера капли.

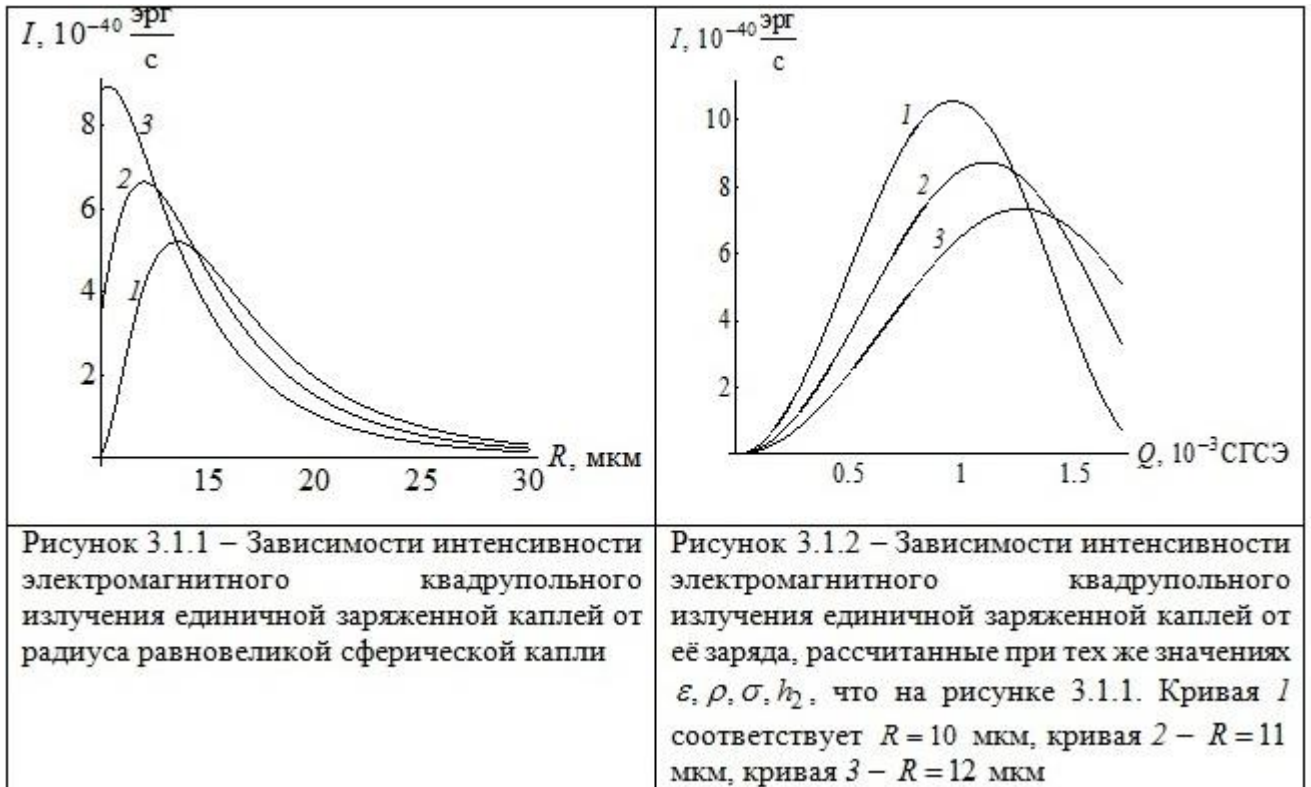
Следует заметить, что осцилляции поверхности капель большой амплитуды обусловлены, прежде всего, микрофизическими внутриоблачными процессами: коагуляцией с более мелкими частицами, изменением агрегатного состояния, дроблением на более мелкие в следствие столкновительных процессов или реализации электростатической неустойчивости, электрического и гидродинамического взаимодействия с соседними частицами [131].

Согласно формуле (3.1.28) рассчитаем интенсивность квадрупольного излучения, генерируемого капиллярными осцилляциями единичной сильно заряженной капли на основной (второй) моде $j=2$. Для этого приведем характеристики для капли, аналогичные тем, которые использованы в разделе 2.1 диссертационной работы (в разделе 2.1 проведено исследование электромагнитного излучения на основе закона сохранения энергии): $\varepsilon = 0.1$, $h_2 = 1$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $Q = 1.8 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.9Q_{кр}$ ($Q_{кр}$ – критическое значение заряда) при $R = 10$ мкм и $\sim 0.18Q_{кр}$ при $R = 30$ мкм). Таким

образом, из (3.1.28) для капли размером $R=12$ мкм легко получим $I \sim 4 \cdot 10^{-40}$ эрг/с на частоте ≈ 400 кГц. При $R=20$ мкм интенсивность излучения составляет $I \sim 2 \cdot 10^{-40}$ эрг/с на частоте ≈ 300 кГц. Для капли размером $R=30$ мкм получим $I \sim 3 \cdot 10^{-41}$ эрг/с на частоте ≈ 100 кГц (см. рисунок 3.1.1. Рассчитано при $\varepsilon=0.1$, $h_2=1$, $\sigma=73$ дин/см, $\rho=1$ г/см³. Кривая 1 соответствует $Q=1.8 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.9Q_{кр}$ при $R=10$ мкм и $\sim 0.18Q_{кр}$ при $R=30$ мкм), кривая 2 – $Q=1.5 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.87Q_{кр}$ при $R=10$ мкм и $\sim 0.15Q_{кр}$ при $R=30$ мкм), кривая 3 – $Q=1.2 \cdot 10^{-3}$ СГСЭ ($\sim 0.7Q_{кр}$ при $R=10$ мкм и $\sim 0.12Q_{кр}$ при $R=30$ мкм)).

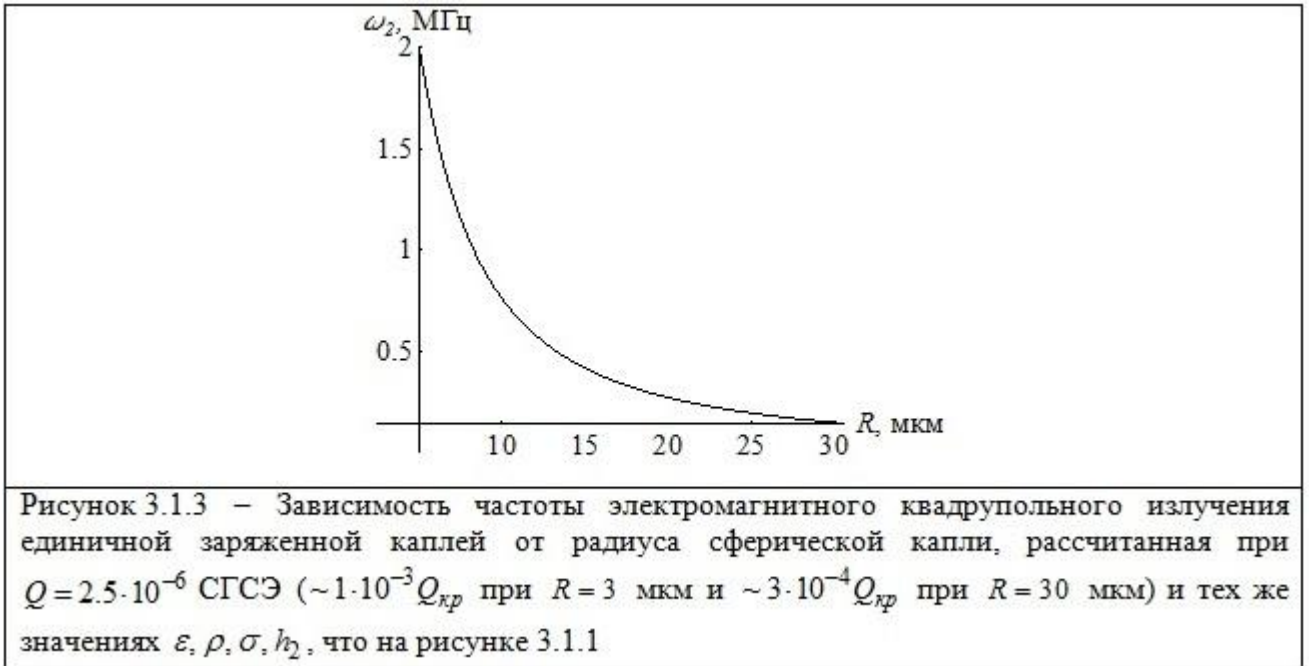
Из выше полученных численных оценок интенсивности излучения и рисунка 3.1.1 следует, что с ростом радиуса единичной капли воды мощность излучения весьма быстро увеличивается и, достигая максимума (соответствует каплям с размерами ~ 10 мкм), затем начинает убывать. Несложно видеть, что поведение кривых на рисунке 3.3.1 объясняется множителем $(1 - Q^2 / 16\pi\sigma R^3)^3$ в формуле (3.1.28). В предположении малости заряда множитель $(1 - Q^2 / 16\pi\sigma R^3)^3 \sim 1$, что соответствует участку возрастания зависимостей $I \sim I(Q)$ на рисунке 3.3.1. Однако при больших значениях заряда, вплоть до предельных в смысле реализации электростатической неустойчивости капли, множитель $(1 - Q^2 / 16\pi\sigma R^3)^3$ стремится к нулю, что соответствует участку убывания кривых на рисунке 3.3.1.

На рисунке 3.1.2 представлены рассчитанные по формуле (3.1.28) зависимости интенсивности излучения от величины заряда (в этом случае заряд стремится к критическому по Рэлею [1]) при различных радиусах единичной капли. Здесь кривая 1 соответствует $R=10$ мкм, кривая 2 – $R=11$ мкм, кривая 3 – $R=12$ мкм. Из представленных графиков видно, что они качественно аналогичны кривым на рисунке 3.1.1.



Из рисунка 3.1.3, на котором изображена зависимость частоты осцилляций единичной капли, видно, что с ростом радиуса капли частота излучения снижается по примерно гиперболическому закону. От величины заряда частота осцилляций зависит крайне слабо.

Следует отметить, что при синфазных осцилляциях поверхности равновеликих капель, составляющих грозовое облако, мощность излучения увеличится в N раз по сравнению с единичной каплей (N – число капель в облаке). Такая ситуация характерна для разряда молнии при резком изменении напряженности электрического поля за время, существенно меньшее периода колебаний капель воды [125]. Однако, в случае колебаний капель с произвольными фазами мощность излучения от всех капель из грозового облака увеличится уже \sqrt{N} раз. Объёмные концентрации таких капель и распределение их по размерам в облаках различных типов следует определять по справочным данным [130].



Заметим, что рисунки 3.1.1-3.1.3 качественно совпадают с рисунками 2.1.1-2.1.3, приведенными в разделе 2.1. Из анализа полученных результатов раздела 2.1 и раздела 3.1 настоящей диссертационной работы, выполненных по двум методам, следует, что расчеты на основе общей теории излучения по порядку величины совпадают с расчетами, выполненными методом, предложенным В.И. Калечицем, И.Е. Нахутиным, П.П. Полуэктовым [103] на основе закона сохранения энергии. Совпадение расчетов по порядку величины достаточно для идентификации мультипольности излучения, так как интенсивность дипольного излучения превышает интенсивность квадрупольного излучения на 15 порядков величины.

Приложение. Вывод соотношения между объёмной плотностью заряда диэлектрической капли и поверхностной плотностью заряда для электропроводной капли. Пусть имеется невозмущённая сферическая капля радиуса R с зарядом Q . Закон сохранения полного заряда диэлектрической капли запишем в сферических координатах в виде:

$$Q = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \gamma(r, \theta, t) \sin \theta d\theta d\varphi r^2 dr. \quad (3.1.29)$$

В условиях решаемой задачи капля проводящая, её заряд равномерно распределен по поверхности капли S . Закон сохранения заряда запишем в виде:

$$Q = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} v(R, \theta, t) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi; \quad (3.1.30)$$

где $v(R, \theta, t)$ – поверхностная плотность заряда на сфере радиуса R .

Приравняем правые части выражений (3.1.29)-(3.1.30):

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \gamma(r, \theta, t) \cdot \sin \theta d\theta \cdot d\varphi \cdot r^2 dr = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} v(R, \theta, t) \cdot R^2 \cdot \sin \theta d\theta \cdot d\varphi.$$

Такое равенство возможно, если

$$\int_0^R \gamma(r, \theta, t) \cdot r^2 \cdot dr = v(R, \theta, t) \cdot R^2;$$

что может быть при выполнении формального равенства

$$\gamma(r, \theta, t) \equiv v(R, \theta, t) \delta(r - R); \quad (3.1.31)$$

где $\delta(r - R)$ – дельта-функция Дирака. Отметим, что употребление дельта-функции по переменной r , подразумевает последующее обязательное интегрирование по этой переменной.

Если форма поверхности капли немного отлична от сферической, в следствие осцилляций, и её образующая записывается в виде $r = r(\theta, t)$, то (3.1.31) следует переписать как:

$$\gamma(r, \theta, t) \equiv v(\theta, t) \delta(r - r(\theta, t)).$$

3.2. Капиллярные осцилляции незаряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости во внешнем однородном электростатическом поле и генерация ими дипольного излучения

В данном разделе в отличие от предыдущего проведём расчеты в первом порядке малости по δ и по ε . Согласно разделу 2.2 предыдущей главы интенсивность излучения от незаряженной капли, осциллирующей во внешнем однородном электрическом поле, оказывается на 15 порядков величины больше, чем интенсивность квадрупольного излучения (см. раздел 3.1), что указывает на его дипольную природу. Чтобы убедиться в этом, проведём электрогидродинамические расчеты в дипольном приближении: с точностью до первого порядка малости по δ и ε .

В нижеследующем рассмотрении в рамках физико-химической гидродинамики проведем исследование невязкого затухания капиллярных осцилляций незаряженной капли идеальной жидкости. Важной электрогидродинамической проблемой на этом пути будет являться расчёт индуцированного внешним электрическим полем дипольного момента осциллирующей капли.

Постановка задачи. Пусть имеется незаряженная капля равновесного радиуса R идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости с массовой плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ , помещенная в однородное электростатическое поле напряженностью \mathbf{E}_0 .

Наличие внешнего электростатического поля, задающее выделенное направление, приводит к появлению на поверхности капли индуцированных зарядов и, как следствие, к искажению равновесной сферической формы капли. В линейном приближении по отношению величины деформации к радиусу равновесная форма капли $r = r(\theta)$ будет считаться вытянутой по полю

сфероидальной [38, 44]. Естественно принять в качестве малого параметра квадрат эксцентриситета сфероида e^2 ($e^2 \ll 1$).

В следствие теплового движения молекул жидкости на поверхности капли существуют капиллярные волны бесконечно малой амплитуды. При этом тепловые осцилляции капли приведут к искажению $\xi(\theta, \varphi, t)$ её равновесной сфероидальной формы. В качестве второго малого параметра положим отношение амплитуды капиллярных осцилляций к радиусу капли $\max|\xi(\theta, t)/R| = \varepsilon$. Отметим, что в последующих рассуждениях задачи электрогидродинамические расчеты будем проводить с точностью до членов $\sim \varepsilon \cdot e^2$.

Индукированные электростатическим полем заряды, распределяясь по возмущённой капиллярными осцилляциями поверхности капли, будут ускоренно двигаться (при осцилляциях) и излучать электромагнитные волны.

Ограничим рассмотрение задачи о капиллярных осцилляциях поверхности неаряженной капли во внешнем электростатическом поле осесимметричными осцилляциями капли (это снижает громоздкость математических выкладок, но не сказывается на общности рассуждений). Все расчёты будем проводить в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре масс сфероидальной капли, угол θ которой будем отсчитывать от оси симметрии капли, совпадающей по направлению с \mathbf{E}_0 . Чтобы упростить вычисления задачи, введем безразмерные переменные, приравнивая единице следующие параметры: $R = \rho = \sigma = 1$. Тогда все остальные величины задачи будут выражены в долях своих характерных значений: $[E_0] = R^{-1/2} \sigma^{1/2}$, $[t] = R^{3/2} \rho^{1/2} \sigma^{-1/2}$, $[V] = R^{-1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2}$, $[r] = R$, $[P] = R^{-1} \sigma$.

Уравнение, описывающее поверхность капли в системе координат с началом в центре масс капли, в безразмерных переменных имеет вид:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t). \quad (3.2.1)$$

Движение жидкости в капле будем считать потенциальным и примем, что поле скоростей движения жидкости в капле $\mathbf{V}(r, \theta, t) = \nabla \psi(r, \theta, t)$ полностью

определяется функцией потенциала скорости $\psi(r, \theta, t)$. Поле индуцированных в капле зарядов будем характеризовать потенциалом $\Phi(r, \theta, t)$. Амплитудные значения величины поля скоростей течения жидкости имеют (в безразмерных переменных) тот же порядок малости, что и амплитуда осцилляций поверхности капли $\psi(r, \theta, t) \sim \xi(\theta, t) \sim \varepsilon$.

Математическая формулировка обсуждаемой задачи состоит из основных уравнений электрогидродинамики: уравнений Лапласа для потенциалов скорости течения жидкости и электрического поля:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (3.2.2)$$

удовлетворяющих условиям ограниченности потенциалов:

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -E_0 r \cos \theta; \quad (3.2.3)$$

кинематического и динамического граничных условий:

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t):$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right); \quad P + P_E = P_\sigma; \quad (3.2.4)$$

условия постоянства электрического потенциала вдоль поверхности капли:

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_s(t); \quad (3.2.5)$$

Кроме того, зададим начальные условия в виде начальной деформации равновесной сфероидальной поверхности капли и нулевой начальной скорости её движения:

$$t = 0: \quad \xi(\theta) = \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu); \quad \varepsilon \ll 1; \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0; \quad (3.2.6)$$

где $P_j(\mu)$ – полином Лежандра j – ого порядка, $\mu \equiv \cos \theta$, Ξ – множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод, h_j – коэффициенты, характеризующие парциальный вклад j -ой колебательной моды в форму начального возмущения $\sum_{j \in \Xi} h_j = 1$.

Помимо выписанной системы уравнений (3.2.2)-(3.2.6) потребуем выполнения дополнительных естественных условий: сохранение полного объема капли (объем капли несжимаемой жидкости при любых колебаниях её поверхности остается постоянным), неподвижности центра масс и условия незаряженности капли.

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi; \quad \int_V \mathbf{r} \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad (3.2.7)$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \nabla \Phi) dS = 0;$$

$$S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (3.2.8)$$

Здесь $\Phi_s(t)$ – электрический потенциал поверхности капли, P , P_E , P_σ – гидродинамическое, электрическое и капиллярное давления, определяемые по формулам: $P = P_0 - \frac{\partial \psi}{\partial t}$, $P_E = (\nabla \Phi)^2 / 8\pi$, $P_\sigma = \text{div} \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$, где P_0 – постоянное давление внутри капли в состоянии равновесия, $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ – орт нормали к поверхности капли, вычисляемый в виде

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}, t) = \frac{\nabla(r - r(\theta, t))}{|\nabla(r - r(\theta, t))|} \Big|_{r=r(\theta, t)}. \quad (3.2.9)$$

Для отыскания решения поставленной задачи искомые функции представим в виде разложений по степеням малого параметра ε , ограничивая рассмотрение первым порядком:

$$\xi(\theta, t) = \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2); \quad \psi_j(\mathbf{r}, t) = \psi_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$P(\mathbf{r}, t) = P^{(0)}(\mathbf{r}) + P^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$P_\sigma(\mathbf{r}, t) = P_\sigma^{(0)}(\mathbf{r}) + P_\sigma^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$P_E(\mathbf{r}, t) = P_E^{(0)}(\mathbf{r}) + P_E^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2). \quad (3.2.10)$$

Верхний индекс в (3.2.10) означает порядок малости по безразмерной амплитуде осцилляций ε . При этом компонента электрического потенциала $\Phi^{(0)}(\mathbf{r})$ характеризует поле в окрестности равновесной сфероидальной капли, а добавка $\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ связана с волновым искажением равновесной поверхности капли.

Заметим, что подстановка разложений (3.2.10) в систему уравнений (3.2.2)-(3.2.8) позволяет получить набор краевых задач нулевого и первого порядков малости.

Задача нулевого порядка малости по ε . Чтобы определить равновесную форму поверхности капли $r(\theta)$ и потенциал электрического поля $\Phi^{(0)}(\mathbf{r})$ вблизи невозмущенной поверхности капли, сформулируем следующую краевую задачу в нулевом приближении по ε :

$$\Delta\Phi^{(0)}(\mathbf{r}) = 0;$$

с граничными условиями

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) \rightarrow -E_0 r \cos \theta;$$

$$r = r(\theta): \quad \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) = \text{const}; \quad P^{(0)} + P_E^{(0)} = P_\sigma^{(0)};$$

и дополнительными естественными (интегральными) условиями

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi; \quad \int_V \mathbf{r} \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0;$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\oint_S (\mathbf{n}_0(\mathbf{r}), \nabla \Phi^{(0)}) dS = 0; \quad S = [r = r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (3.2.11)$$

В выражении (3.2.11) введено обозначение орта нормали $\mathbf{n}_0(\mathbf{r})$ к равновесной поверхности капли, вычисляемого по формуле (3.3.9) при $r = r(\theta)$.

Задача (3.2.11) легко решается, а решение имеет вид:

$$r(\theta) \approx 1 + e^2 h(\theta) + O(e^4) \equiv 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) + O(e^4).$$

Из вида выражения следует, что незаряженная капля в однородном электростатическом поле принимает вытянутую по полю форму, которая в линейном приближении по квадрату эксцентриситета e^2 может считаться сфероидальной. При этом эксцентриситет определяется напряженностью электрического поля: $e \equiv \sqrt{9E_0^2/16\pi}$. Отметим, что полученный результат хорошо согласуется с [127].

Однако уравнение равновесного электрического потенциала $\Phi^{(0)}(\mathbf{r})$ в первом по e^2 приближении несложно найти прямым разложением, используя метод возмущений в решении электростатической краевой задачи в (3.2.11) [142]:

$$\Phi^{(0)}(r, \theta) = E_0 r P_1(\mu) \left(\frac{1}{r^3} - 1 \right) + \frac{2}{5} \frac{1}{r^2} e^2 E_0 \left(P_1(\mu) + \frac{3}{2} \frac{1}{r^2} P_3(\mu) \right). \quad (3.2.12)$$

Прежде всего отметим, что аналогичный результат можно получить путем перехода от известного уравнения для потенциала вытянутого по полю проводящего эллипсоида, записанного в сфероидальной системе координат, непосредственно к сферическим координатам [141], стр.41.

Решение задачи первого порядка малости по ε . Напомним, что асимптотические расчеты обсуждаемой задачи основаны на разложениях по двум малым параметрам: первый – эксцентриситет равновесной сфероидальной формы капли e и второй – амплитуда ε её осцилляций. Кроме того, учтем $E_0 \sim e$. Необходимо отметить, что в ниже следующем рассмотрении будем вести разложения с точностью до слагаемых порядка $\sim e^2 \varepsilon$. Однако, для корректных расчетов при вычислении величины индуцированных внешним электрическим полем зарядов также требуется учесть слагаемые порядка $\sim E_0 e^2 \varepsilon$.

Отметим, что уравнения Лапласа (3.2.2) являются линейными, и, очевидно, им должны удовлетворять каждая из компонент потенциалов скорости $\psi(\mathbf{r}, t)$ и электрического поля $\Phi(\mathbf{r}, t)$ в (3.2.10). Следовательно, функции $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$, являющиеся решениями уравнений (3.2.2) с учетом условий ограниченности

(3.2.3), а также искажения равновесной поверхности капли $\xi(\theta, t)$ представим в виде разложений по полиномам Лежандра (в силу осесимметричности задачи):

$$\psi(r, \theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) r^n P_n(\mu); \quad (3.2.13)$$

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu); \quad (3.2.14)$$

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) P_n(\mu). \quad (3.2.15)$$

Следует заметить, что на первый порядок выше перечисленных величин указывает первая степень малого параметра ε .

Решение электрической части задачи (в первом порядке малости по ε).

Для нахождения добавки к потенциалу электрического поля $\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$, возникающего в следствие волнового возмущения поверхности капли, прежде всего, определим вид коэффициентов F_n в разложении (3.2.14). Таким образом, собирая в уравнениях (3.2.5), (3.2.8) слагаемые, содержащие малый параметр ε в первой степени, выделим электрическую задачу первого порядка малости:

$r=1$:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} + \frac{1}{3} e^2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} P_2(\mu) - 3E_0 \left(1 + e^2 \left((P_1(\mu))^2 - \frac{3}{5} \right) \right) P_1(\mu) \xi(\theta, t) = \Phi_s^{(1)}; \\ \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{3} e^2 \left(\left(2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} \right) P_2(\mu) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} + \right. \right. \quad (3.2.16) \\ \left. \left. + E_0 \left(\frac{18}{5} (4P_3(\mu) + P_1(\mu)) \xi(\theta, t) - 9(P_1(\mu))^2 \frac{\partial P_1(\mu)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) \right) \sin \theta d\theta = 0. \end{aligned}$$

В (3.2.16) введено обозначение $\Phi_s^{(1)}$ добавки первого приближения к электрическому потенциалу поверхности капли.

В итоге, решение системы (3.2.16), с учетом разложений (3.2.14), (3.2.15), можно представить в виде:

$$F_0(t) = \frac{6}{35} E_0 e^2 M_3(t); \quad (3.2.17)$$

$$F_n(t) = E_0 \left(3 \left(\mu_{n-1}^+ M_{n-1}(t) + \mu_{n+1}^- M_{n+1}(t) \right) + \right. \\ \left. + e^2 \left(M_{n-3}(t) l_1(n) + M_{n-1}(t) l_2(n) + M_{n+1}(t) l_3(n) + M_{n+3}(t) l_4(n) \right) \right); \quad (n \geq 1);$$

$$\mu_n^+ = \frac{n+1}{2n+1}; \quad \mu_n^- = \frac{n}{2n+1};$$

где коэффициенты $l_1(n) - l_4(n)$, зависящие только от n , приведены в приложении.

Решение гидродинамической части задачи (в первом порядке малости по ε). Вывод эволюционного уравнения. Группировка слагаемых порядка $\sim \varepsilon$ в (3.2.4), (3.2.7) позволяет выписать систему уравнений для нахождения явного вида коэффициентов D_n , M_n в разложениях для поправок первого порядка малости к гидродинамическому потенциалу в (3.2.13) и возмущению поверхности капли в (3.2.15):

$r = 1$:

$$\int_0^\pi (1 + 2e^2 h(\theta)) \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0; \quad \int_0^\pi (1 + 3e^2 h(\theta)) \xi(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0;$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial r} + e^2 \left(\frac{\partial^2 \psi(r, \theta, t)}{\partial r^2} h(\theta) - \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial \theta} \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \right);$$

$$P^{(1)} + P_E^{(1)} = P_\sigma^{(1)}; \quad P^{(1)} = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + e^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} h(\theta) \right);$$

$$P_E^{(1)} = - \frac{3E_0}{4\pi} \left(6E_0 \xi(\theta, t) P_1(\mu) + \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) P_1(\mu);$$

$$P_\sigma^{(1)} = -(2 + L_\theta) \xi(\theta, t) + 2e^2 \left(\xi(\theta, t) L_\theta h(\theta) + h(\theta) (2 + L_\theta) \xi(\theta, t) \right);$$

$$L_\theta \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (3.2.18)$$

В результате, решение системы уравнений (3.2.18) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
M_0(t) &= -\frac{2}{3}e^2 M_2(t); & M_1(t) &= -\frac{3}{5}e^2 M_3(t); \\
D_n(t) &= \frac{1}{n} \left(\frac{\partial M_n(t)}{\partial t} \left(1 - \frac{1}{3n} e^2 (n(n-1)K_{2,n,n} - \alpha_{2,n,n}) \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^2}{3} \left(\frac{\partial M_{n-2}(t)}{\partial t} \frac{((n-2)(n-3)K_{2,n-2,n} - \alpha_{2,n-2,n})}{(n-2)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial M_{n+2}(t)}{\partial t} \frac{((n+2)(n+1)K_{2,n+2,n} - \alpha_{2,n+2,n})}{(n+2)} \right) \right); & (n \geq 0).
\end{aligned}$$

$$K_{m,k,n} = \left[C_{k0,m0}^{n0} \right]^2; \quad \alpha_{m,k,n} = -\sqrt{m(m+1)k(k+1)} C_{m0,k0}^{n0} \cdot C_{m-1,k1}^{n0};$$

где $C_{mk,lp}^{nq}$ – коэффициенты Клебша-Гордана [136], отличные от нуля при выполнении условий $|m-k| \leq n \leq m+k$, а $m+k+n$ – четное и $k+p=q$.

Динамическое граничное условие в (3.2.11) с учетом выше полученных соотношений дает нам систему несвязанных между собой неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка (эволюционное уравнение), записанных относительно амплитуд $M_n(t)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_n(t) + \omega_n^2 M_n(t) = \\
&= e^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{n-2}(t) \chi_1 + M_{n-2}(t) \chi_2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{n+2}(t) \chi_3 + M_{n+2}(t) \chi_4 \right); \\
&\chi_1 = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}; \quad \chi_2 = \frac{n^2(n-1)^2(n+2)}{(2n-1)(2n-3)}; \\
&\chi_3 = -\frac{(n+1)(n+4)}{2(2n+3)(2n+5)}; \quad \chi_4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n^2+9n+10)}{(2n+3)(2n+5)}.
\end{aligned}$$

Здесь ω_n – частота собственных осцилляций сфероидальной незаряженной капли в поле, принимающая в размерных величинах следующий вид:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \left[1 - e^2 \frac{(2n^5 + 23n^4 + 21n^3 - 17n^2 - 7n - 2)}{(n-1)(n+2)(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right]. \quad (3.2.19)$$

Здесь эксцентриситет связан с напряженностью поля соотношением $e^2 \equiv 9E_0^2 R / 16\pi\sigma$.

Следует заметить, что полученное выражение качественно совпадает с результатом К.Ж. Cheng [44], однако характеризуется асимптотиками, соответствующими более адекватной ситуации.

В этом случае решение эволюционного уравнения представим в виде суперпозиции общего решения однородного уравнения и частного решения соответствующего неоднородного уравнения.

В эволюционном уравнении приравняем правую часть к нулю, т.е. избавимся от неоднородной части уравнения. Положим, что зависимость от времени амплитуд $M_n(t)$ является экспоненциальной. Тогда решение однородного уравнения запишем в следующем виде:

$$M_n(t)_{одн} = a_n \exp(i(\omega_n t + b_n)) + \text{к.с.}; \quad (n \geq 0).$$

Здесь аббревиатурой "к.с." обозначены комплексно сопряженные слагаемые. Вещественные константы a_n и b_n вычисляются при выполнении начальных условий (как будет показано ниже).

Для того, чтобы определить частное решение выше записанного неоднородного уравнения, воспользуемся методом последовательных приближений по малому параметру e^2 .

В итоге, общее решение эволюционного уравнения будет представлено в следующем виде:

$$M_n(t) = 2 \left[a_n \cos(\omega_n t + b_n) + e^2 \left(a_{n-2} \left(\frac{n(n-1)(3n^2 - 3n + 2)}{4(2n-1)(2n-3)(3n-4)} \right) \cos(\omega_{n-2} t + b_{n-2}) + \right. \right.$$

$$+a_{n+2} \left(-\frac{(n+1)(3n^3 + 27n^2 + 44n + 16)}{4(2n+3)(2n+5)(3n+2)} \cos(\omega_{n+2}t + b_{n+2}) \right); \quad (n \geq 0). \quad (3.2.20)$$

В последнем выражении неизвестными величинами являются константы a_n и b_n . Определим их из начальных условий (3.2.6). Таким образом, для a_n и b_n получаем решение:

$$a_n = \frac{1}{2} h_j \left(\delta_{j,n} + e^2 \left(-\delta_{j,n-2} \frac{n(n-1)(3n^2 - 3n + 2)}{4(2n-1)(2n-3)(3n-4)} + \delta_{j,n+2} \frac{(n+1)(3n^3 + 27n^2 + 44n + 16)}{4(2n+3)(2n+5)(3n+2)} \right) \right);$$

$$b_n = 0; \quad (j \in \Xi, \quad n = 2, 3, 4 \dots) \quad (3.2.21)$$

$\delta_{j,n}$ – символ Кронекера.

Итак, используя найденные выражения (3.2.20), (3.2.21), можно определить уравнение $r(\theta, t)$, описывающее форму возмущенной поверхности капли, с точностью до слагаемых первого порядка по каждому из малых параметров ε и e^2 в виде:

$$r(\theta, t) = 1 + e^2 h(\theta) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j(t) P_j(\mu); \quad (3.2.22)$$

где коэффициенты $M_j(t)$ принимают следующий вид:

$$M_j(t) = h_j \cos(\omega_j t) + e^2 \left(h_{j-2} \frac{j(j-1)(3j^2 - 3j + 2)}{4(2j-1)(2j-3)(3j-4)} (\cos(\omega_{j-2}t) - \cos(\omega_j t)) - \right.$$

$$\left. - h_{j+2} \frac{(j+1)(3j^3 + 27j^2 + 44j + 16)}{4(2j+3)(2j+5)(3j+2)} (\cos(\omega_{j+2}t) - \cos(\omega_j t)) \right); \quad (j \in \Xi). \quad (3.2.23)$$

В отсутствии внешнего электрического поля выражение, величина которого имеет порядок $\sim e^2$, обращается в ноль, и амплитуда возмущения $M_j(t)$ будет определяться лишь слагаемым с частотой ω_j : $M_j(t) = h_j \cos(\omega_j t)$.

Подставляя в (3.2.14) выражение для коэффициентов $F_n(t)$ из (3.2.17) и используя явный вид решений эволюционного уравнения (3.2.23) с учетом начальных условий, получим выражение для добавки электрического потенциала в окрестности возмущенного сфероида в виде:

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) = E_0 \varepsilon \left(\frac{6}{35} \frac{e^2 M_3(t)}{r} + \left(\sum_{j \in \Xi} \left[3 \left(\mu_{j-1}^+ M_{j-1}(t) + \mu_{j+1}^- M_{j+1}(t) \right) + e^2 \left(M_{j-3}(t) l_1(j) + M_{j-1}(t) l_2(j) + M_{j+1}(t) l_3(j) + M_{j+3}(t) l_4(j) \right) \right] r^{-(n+1)} \right) \right) P_j(\mu);$$

($j \in \Xi$). (3.2.24)

Величины индуцированных зарядов. Прежде всего отметим, что величины индуцированных зарядов будем вычислять путем интегрирования поверхностной плотности заряда $\nu(\theta, t)$ по разноименно заряженным половинкам сфероида $r(\theta, t)$ в виде:

$$q_+ = \int_{S_1} dq_+ = \int_{S_1} \nu(\theta, t) dS_1; \quad S_1 \equiv \left[r = r(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right]; \quad (3.2.25)$$

$$q_- = \int_{S_2} dq_- = \int_{S_2} \nu(\theta, t) dS_2; \quad S_2 \equiv \left[r = r(\theta, t); \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right];$$

где за q_+ обозначен положительный индуцированный заряд, за q_- — отрицательный индуцированный заряд.

Подставляя в (3.2.25) известное соотношение поверхностной плотности заряда $\nu = \nu(\mathbf{r}, t) = -(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \nabla \Phi(\mathbf{r}, t)) / 4\pi$, для положительно индуцированного заряда, распределенного по возмущенной поверхности капли $r(\theta, t)$, будет справедливо следующее выражение:

$$q_+ = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \nabla \Phi(\mathbf{r}, t))}{(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{e}_r)} r^2 \Big|_{r=r(\theta, t)} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3.2.26)$$

Здесь $\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$, а $r(\theta, t)$ определяется (3.2.22).

Подставим теперь компоненты электрического потенциала (3.2.12) и (3.2.24), вектор нормали, определяемый по формуле (3.2.9), с точностью до членов порядка $\sim e^2 \varepsilon$, в выражение (3.2.26), после чего оно примет вид:

$$q_+(t) = \frac{3}{4} E_0 \left(1 + \frac{1}{15} e^2 + 2\varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j(t) (G_1(j) + e^2 G_2(j)) \right). \quad (3.2.27)$$

В тоге, перейдем к размерным переменным и, учитывая явный вид амплитудных коэффициентов $M_j(t)$ в (3.2.23), аналитическое выражение для разноименных равных по величине индуцированных зарядов представим в следующем виде:

$$q_{\pm} = \pm \frac{3}{4} E_0 R^2 \left(1 + \frac{1}{15} e^2 + 2\varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \times \right. \quad (3.2.28)$$

$$\left. \times \left(G_1(j) \cos(\omega_j t) + e^2 \left(G_1^+(j) \cos(\omega_j t) + G_2^+(j) \cos(\omega_{j-2} t) - G_3^+(j) \cos(\omega_{j+2} t) \right) \right) \right);$$

где q_+ записан с положительным знаком, q_- – с отрицательным знаком.

В (3.3.27), (3.3.28) $G_1(j)$, $G_2(j)$, $G_1^+(j)$, $G_2^+(j)$, $G_3^+(j)$ зависят от функций $F_{j\pm 1}$, $F_{j\pm 3}$ и значения индекса j , выражения для которых приведены в приложении.

Из рисунка 3.2.1, на котором приведены осцилляции центра положительного индуцированного заряда, видно, что величина q_+ периодически меняется со временем.

Модель осциллирующего диполя. В этом случае разноименно заряженные половинки сфероида образуют электрический диполь, который можно оценить на основе простой модели: разноименным зарядам (их величина определяется выражением (3.2.28)) поставим в соответствие равновеликие точечные заряды, которые поместим на оси симметрии сфероида в положениях центров тяжести положительного и отрицательного зарядов, вычисляемых по формуле:

$$\mathbf{R}_{q_{\pm}} = \frac{1}{q_{\pm}} \int_{S_{1,2}} \mathbf{r} dq_{\pm}.$$

Разнесенные относительно друг друга разноименные равные по величине индуцированные заряды, величина которых зависит от времени, образуют диполь. При капиллярных осцилляциях сфероида будет изменяться величина индуцированного заряда и расстояние между центрами «эффективных» индуцированных зарядов, т.е. получим изменяющийся во времени свою величину электрический диполь. Очевидно, дипольный момент будет определяться следующим соотношением [141]:

$$\mathbf{d}(t) = q_+(t) \left(\mathbf{R}_{q_+}(t) - \mathbf{R}_{q_-}(t) \right); \quad (3.2.29)$$

Такой диполь будет излучать электромагнитные волны дипольного типа в соответствии с известной формулой ([123], стр.213):

$$I = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{d^2 \mathbf{d}(t)}{dt^2} \right)^2. \quad (3.2.30)$$

Несложно видеть, что для получения аналитического выражения интенсивности излучения осциллирующей в электростатическом поле незаряженной капли, необходимо знать векторы $\mathbf{R}_{q_{\pm}}$ положений «эффективных» индуцированных зарядов на возмущенной поверхности сфероида.

Начнем с рассмотрения положительно заряженной половинки сфероида. Приведем известное выражение для вычисления вектора положения центра индуцированного заряда q_+ :

$$\mathbf{R}_{q_+}(t) = \frac{1}{q_+} \int_{S_1} \mathbf{r} dq_+ = \frac{1}{q_+} \int_{S_1} r \mathbf{e}_r dq_+; \quad S_1 \equiv \left[r = r(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right].$$

Радиальный орт \mathbf{e}_r сферической системы координат распишем через орты декартовой системы координат, пользуясь соотношением:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \theta. \quad (3.2.31)$$

Обратим внимание, что электрическое поле направлено по оси z , поэтому в плоскости x, y смещение «эффективного» заряда отсутствует: $R_{qx} = R_{qy} = 0$. Таким образом, с помощью (3.2.31) смещение «эффективного» индуцированного заряда q_+ вдоль оси z можно представить как:

$$R_{qz} = -\frac{1}{4\pi q_+} \int_{S_1} \frac{(\mathbf{n}, \nabla \Phi)}{(\mathbf{n}, \mathbf{e}_r)} r^3 \Big|_{r=r(\theta, t)} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Несложно заметить, что направление вектора нормали \mathbf{n} единичной площадки возмущенной поверхности капли не совпадает с радиальным ортом \mathbf{e}_r сферической системы координат. Очевидно, что скалярное произведение, записанное в знаменателе, даёт косинус угла между векторами \mathbf{n} и \mathbf{e}_r .

Таким образом, вычисляя интеграл по поверхности сфероиды S_1 и подставляя в получившееся соотношение величину положительного индуцированного заряда (3.2.27), перейдем к следующему выражению:

$$R_{qz}(t) = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3} e^2 + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j(t) \left(3G_3(j) - 2G_1(j) - e^2 \left(\frac{8}{15} G_1(j) + 2G_2(j) + \frac{1}{5} G_3(j) - 3G_4(j) \right) \right) \right).$$

Используя выражение для амплитуд $M_j(t)$ из (3.2.23) и переходя к размерным переменным, получим окончательное выражение для смещения центра положительного индуцированного заряда незаряженной сфероидальной капли вдоль оси z в первом порядке малости по возмущению поверхности и квадрату эксцентриситета:

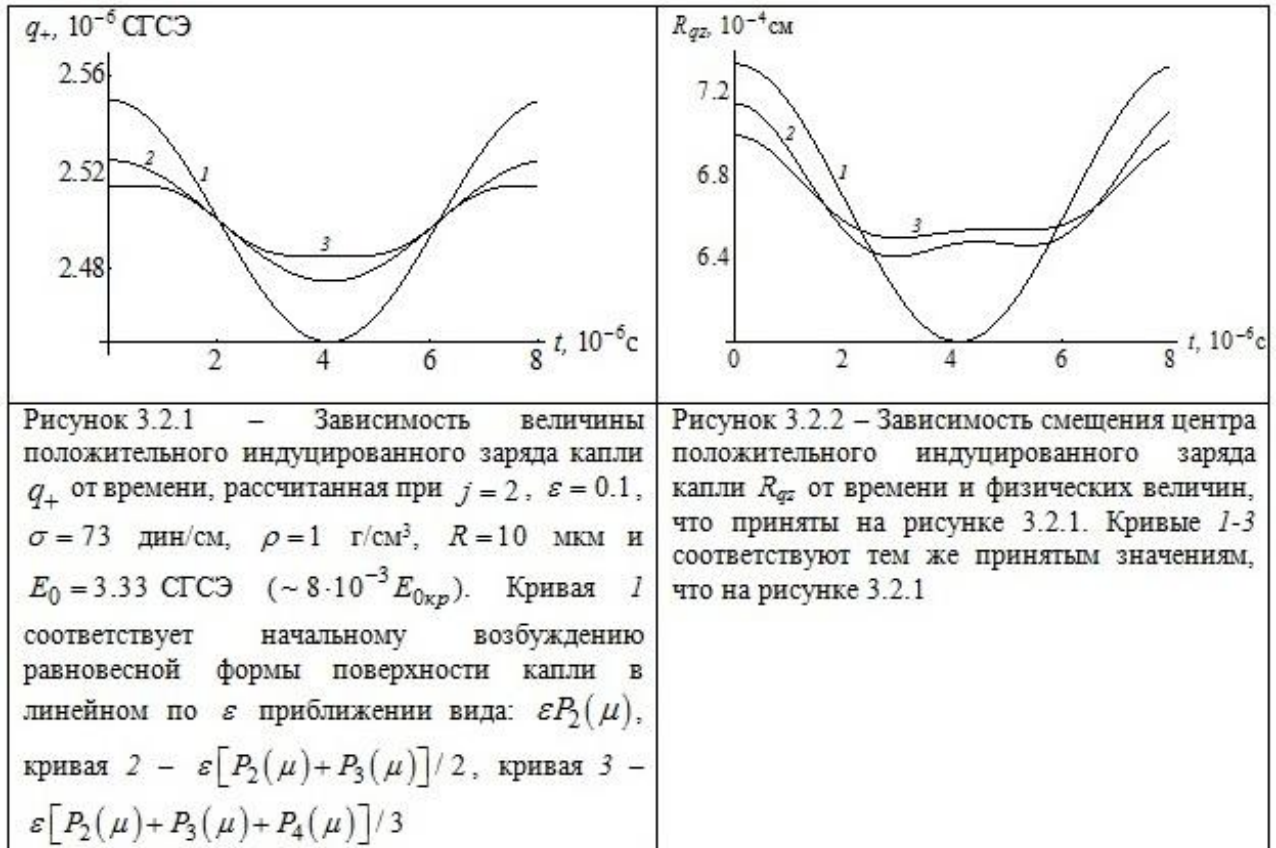
$$R_{qz} = \frac{2}{3} R \left(1 + \frac{1}{3} e^2 + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \times \left(J_1 \cos(\omega_j t) + e^2 \left(J_2 \cos(\omega_j t) + J_3 \cos(\omega_{j+2} t) + J_4 \cos(\omega_{j-2} t) \right) \right) \right);$$

$$J_1 = 3G_3(j) - 2G_1(j); \quad J_2 = -\frac{8}{15}G_1(j) - \frac{1}{5}G_3(j) - 2G_1^+(j) + 3G_1^-(j);$$

$$J_3 = 2G_3^+(j) - 3G_3^-(j); \quad J_4 = 3G_2^-(j) - 2G_2^+(j); \quad (3.2.32)$$

где $G_3(j)$, $G_4(j)$, $G_1^-(j)$, $G_2^-(j)$, $G_3^-(j)$ зависят от функций F_j , $F_{j\pm 1}$, $F_{j\pm 2}$, $F_{j\pm 3}$, $F_{j\pm 4}$ и значения индекса j , выражения для которых приведены в приложении.

Из рисунка 3.2.2, на котором изображены осцилляции положения центра индуцированного заряда $R_{qz}(t)$ при осцилляциях капли (см. (3.2.32)), следует, что величина R_{qz} периодически меняется со временем.



Перейдем к рассмотрению отрицательно заряженной половинки сфероида. Пользуясь вышеописанной методикой, получим решение для смещения центра отрицательного индуцированного заряда в следующем виде:

$$R_{qz}^- = -\frac{2}{3}R \left(1 + \frac{1}{3}e^2 + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \times \right.$$

$$\times \left(J_1^* \cos(\omega_j t) + e^2 \left(J_2^* \cos(\omega_j t) + J_3^* \cos(\omega_{j+2} t) + J_4^* \cos(\omega_{j-2} t) \right) \right) \Bigg). \quad (3.2.33)$$

Функция J_m^* отличается знаком от J_m в (3.2.32) лишь для нечетных значений изначально возбужденных мод j . Выражения для $J_1^* - J_4^*$ вынесены в приложение.

Отметим, что при четных значениях изначально возбужденных мод (в этом случае возмущенная поверхность капли симметрична относительно экваториальной плоскости) осцилляции центров разноименных зарядов будут происходить в противофазе друг относительно друга (центры будут сближаться и удаляться). Однако, при изначально возбужденных нечетных мод (возмущенная поверхность капли асимметрична относительно экваториальной плоскости) центры эквивалентных зарядов осциллируют синфазно.

Таким образом, подставляя (3.2.28), (3.2.32), (3.2.33) в (3.2.29), найдем проекцию вектора дипольного момента на ось z в виде:

$$d_z = \frac{1}{2} E_0 R^3 \left[2 \left(1 + \frac{1}{3} e^2 \right) \left(1 + \frac{1}{15} e^2 \right) + \right. \quad (3.2.34)$$

$$+ 4\varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \left(1 + \frac{1}{3} e^2 \right) \left(G_1 \cos(\omega_j t) + e^2 \left(G_1^+ \cos(\omega_j t) + G_2^+ \cos(\omega_{j-2} t) - G_3^+ \cos(\omega_{j+2} t) \right) \right) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \left(1 + \frac{1}{15} e^2 \right) \left(J_1 \cos(\omega_j t) + e^2 \left(J_2 \cos(\omega_j t) + J_3 \cos(\omega_{j+2} t) + J_4 \cos(\omega_{j-2} t) \right) \right) +$$

$$\left. + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \left(1 + \frac{1}{15} e^2 \right) \left(J_1^* \cos(\omega_j t) + e^2 \left(J_2^* \cos(\omega_j t) + J_3^* \cos(\omega_{j+2} t) + J_4^* \cos(\omega_{j-2} t) \right) \right) \right].$$

На основе (3.2.30), (3.2.34) получим окончательное выражение для интенсивности электромагнитного излучения незаряженной сферической капли во внешнем поле, заменяя в функциях косинусы на их максимальное значение:

$$I = \frac{2}{3c^3} E_0^2 R^6 \varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} h_j \left[\left\{ \left(1 + \frac{1}{3} e^2 \right) \left(G_1 \omega_j^2 + e^2 \left(G_1^+ \omega_j^2 + G_2^+ \omega_{j-2}^2 - G_3^+ \omega_{j+2}^2 \right) \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{15} e^2 \right) \left(J_1 \omega_j^2 + e^2 \left(J_2 \omega_j^2 + J_3 \omega_{j+2}^2 + J_4 \omega_{j-2}^2 \right) \right) \right\}^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left(1 + \frac{1}{3} e^2 \right) \left(G_1 \omega_j^2 + e^2 \left(G_1^+ \omega_j^2 + G_2^+ \omega_{j-2}^2 - G_3^+ \omega_{j+2}^2 \right) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{15} e^2 \right) \left(J_1^* \omega_j^2 + e^2 \left(J_2^* \omega_j^2 + J_3^* \omega_{j+2}^2 + J_4^* \omega_{j-2}^2 \right) \right) \right\}^2 \Bigg]. \quad (3.2.35)
\end{aligned}$$

На основе соотношения (3.2.35) приведем численные оценки фонового шумового радиоизлучения от конвективных облаков. Прежде всего отметим, что возможный источник электромагнитного излучения обусловлен осцилляциями низких мод мелких капель с концентрацией в облаке порядка $\sim 10^9$ штук на м^3 [130]. Характерные размеры таких капель от 3 до 30 мкм. Максимум их концентрации в облаке приходится на диапазон от 3 до 7 мкм. Следует заметить, что осцилляции поверхности капель объясняются, прежде всего, микрофизическими внутриоблачными процессами: коагуляцией с более мелкими частицами, изменением агрегатного состояния, дроблением на более мелкие в следствие столкновительных процессов или реализации электростатической неустойчивости, электрического и гидродинамического взаимодействия с соседними частицами [131]. Натурные наблюдения показали, что величина амплитуды осцилляций облачных капель может принимать значения до десятков процентов от размера капли [131]. Таким образом, для получения оценок интенсивности излучения примем отношение амплитуды осцилляций к радиусу капли $\xi(\theta, t)/R = \varepsilon$ равным 0.1.

Таким образом, используя выражение (3.2.35), проведем оценку интенсивности фонового дипольного электромагнитного излучения, когда смещение центров индуцированных зарядов связано с возбуждением второй (основной) моды $j=2$. Заметим, что осцилляции второй моды обусловлены движением капель относительно среды [137]. Приведем значения физических величин такими же, как в разделе 2.2 диссертационной работы, в котором проведено исследование электромагнитного излучения на основе закона сохранения энергии (с целью сравнения результатов расчетов): $j=2$, $\varepsilon=0.1$, $h_2=1$, $\sigma=73$ дин/см, $\rho=1$ г/см³, $R=10$ мкм, $E_0=0.17$ СГСЭ ($E_0=50$ В/см). В

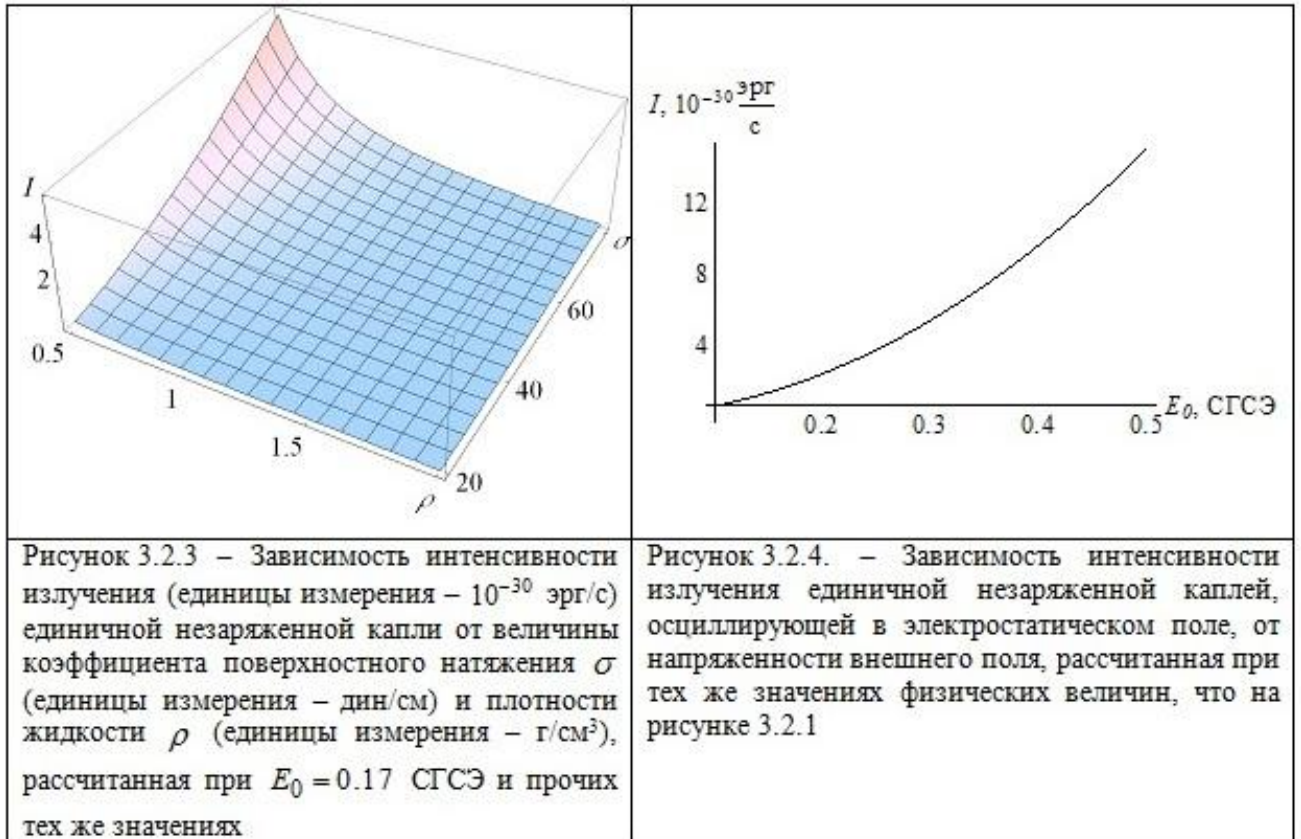
итоге, единичная капля размером $R=10$ мкм обладает мощностью излучения $I \sim 2 \cdot 10^{-30}$ эрг/с.

Принимая во внимание зависимость частоты осцилляций от радиуса капли в (3.2.19), из выражения (3.2.35) несложно видеть, что при варьировании размера капли интенсивность излучения изменяется крайне слабо. В этом случае от радиуса капли зависит лишь величина эксцентриситета (причем, $e^2 \ll 1$).

Интегральная интенсивность излучения электромагнитных волн от грозового облака диаметром 5 км будет уже в $7 \cdot 10^{19}$ раз больше: $I_{in} \sim 1 \cdot 10^{-10}$ эрг/с. Если рассматривать осцилляции незаряженных капель в сильных полях, то такое излучение может быть надёжно зарегистрировано радиоприёмной аппаратурой ([102], стр.24), см. также [67, 106].

Также заметим, что при синфазных осцилляциях поверхности равновеликих капель, составляющих грозовое облако, мощность излучения увеличится в N раз по сравнению с единичной каплей (N – количество капель в облаке). Такая ситуация характерна для разряда молнии при резком изменении напряженности электрического поля за время, существенно меньшее периода колебаний капель воды [106, 145]. Однако в случае колебаний капель с произвольными фазами мощность излучения от всех капель из грозового облака увеличится уже \sqrt{N} раз.

На рисунке 3.2.3 представлены рассчитанные по формуле (3.2.33) характеристики излучения в зависимости от плотности жидкости ρ и величины её коэффициента поверхностного натяжения σ . Из вида выражения (3.2.33) видно, что от выше перечисленных физических величин зависят как частота излучения, так и эксцентриситет равновесной поверхности капли.



На рисунке 3.2.4 изображена зависимость интенсивности излучения единичной незаряженной капли от величины напряженности слабого внешнего поля. Из представленного графика видно, что увеличение напряженности электрического поля приводит к быстрому росту мощности излучения. Следует заметить, что в реальности незаряженные внутриоблачные капли целесообразно рассматривать лишь в слабых электрических полях [134]. Отметим также, что рисунок 3.2.4 качественно совпадает с рисунком 2.2.1 (см. раздел 2.2, где исследование электромагнитного излучения проведено методом, основанным на законе сохранения энергии) и совпадение наблюдается по порядку величины.

Таким образом, сравнивая результаты расчетов, выполненных по двум методам, видим, что расчеты на основе общей теории излучения по порядку величины совпадают с расчетами, выполненными методом на основе анализа дисперсионного уравнения. Совпадение расчетов по порядку величины достаточно для идентификации мультипольности излучения, так как интенсивность квадрупольного излучения на 15 порядков величины ниже по сравнению с интенсивностью дипольного излучения.

3.3. Капиллярные осцилляции незаряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости в однородном электростатическом поле и генерация ими квадрупольного излучения

Чтобы завершить исследование невязкого затухания капиллярных осцилляций незаряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости во внешнем электростатическом поле, необходимо исследовать интенсивность их затухания при осцилляциях индуцированного внешним электростатическим полем её квадрупольного момента. Расчёт в рамках электрогидродинамики квадрупольного момента осциллирующей во внешнем электрическом поле незаряженной капли представляет собой серьёзную электрогидродинамическую задачу, которую и будем решать в данном разделе на основе идей и подходов механики сплошной среды.

Вся процедура электрогидродинамического асимптотического расчёта будет проведена в первом порядке малости по отношению амплитуды осцилляций к радиусу капли ε и во втором порядке малости по квадрату отношения характерного линейного размера капли к длине излучаемой волны δ .

Физическая постановка задачи. Рассмотрим незаряженную каплю идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости, осциллирующую в однородном электростатическом поле напряженностью E_0 . Пусть массовая плотность жидкости ρ , коэффициент поверхностного натяжения σ . Примем, что капля находится в вакууме, а её объем определяется объемом сферы с радиусом R . На поверхности капли всегда существует капиллярное волновое движение, возбуждаемое уже тепловым движением молекул воды. Амплитуда таких волновых движений весьма мала: $\propto \sqrt{kT/\sigma}$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура [127]. При температурах порядка комнатной такая амплитуда для всех жидкостей меньше ангстрема.

На поверхности свободно падающей капли под действием внешних силовых воздействий (например, со стороны обдувающего её потока воздуха) амплитуда отдельных мод осциллирующей капли может принимать значения до десятков процентов от её радиуса [90, 131]. При этом капиллярные осцилляции заряженной индуцированным зарядом поверхности проводящей капли приводят к излучению электромагнитных волн.

Исходя из общей теории излучения электромагнитных волн, интенсивность квадрупольного излучения для ускоренно движущейся системы зарядов вычисляется по формуле [123], стр.230:

$$I = \frac{1}{180c^5} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} D_{\alpha\beta} \right)^2; \quad (3.3.1)$$

где тензор квадрупольного момента $D_{\alpha\beta}$ определяется в виде:

$$D_{\alpha\beta}(t) = \iiint_V \gamma(\mathbf{r}, t) \left(3x_\alpha(t)x_\beta(t) - \delta_{\alpha\beta} \cdot r^2(t) \right) dV; \quad (3.3.2)$$

$\gamma(\mathbf{r}, t)$ – объемная плотность заряда, $\delta_{\alpha\beta}$ – дельта-символ Кронекера, $x_\alpha(t)$ и $x_\beta(t)$ – координаты радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ в декартовой системе координат (x, y, z) для точки, лежащей в объеме капли V .

Наличие внешнего электростатического поля приводит к искажению равновесной сферической формы капли, которая в линейном приближении по величине деформации может считаться сфероидальной [38]. Все расчёты задачи будем проводить в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре масс капли в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$. Остальные величины задачи будут выражены в долях своих характерных значений: $[E_0] = R^{-1/2} \sigma^{1/2}$, $[t] = R^{3/2} \rho^{1/2} \sigma^{-1/2}$, $[V] = R^{-1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2}$, $[r] = R$, $[P] = R^{-1} \sigma$.

Сформулируем задачу о капиллярных осцилляциях сфероидальной незаряженной капли во внешнем электростатическом поле.

Математическая формулировка задачи. Пусть в начальный момент времени $t=0$ равновесная сфероидальная форма капли $r(\theta)$ претерпевает

виртуальное осесимметричное возмущение $\xi(\theta, t)$ фиксированной амплитуды ε , существенно меньшей радиуса капли. Поскольку начальное возмущение поверхности капли осесимметрично и мало, примем, что форма капли осесимметрична как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Примем также, что уравнение, описывающее поверхность капли, в сферической системе координат с началом в центре масс в безразмерных переменных имеет вид:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t); \quad |\xi| \ll 1.$$

Движение жидкости в капле будем полагать потенциальным и примем, что поле скоростей движения жидкости в капле $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \nabla \psi(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется функцией потенциала скорости $\psi(\mathbf{r}, t)$. Величины поля скоростей течения жидкостей имеют тот же порядок малости, что и амплитуда осцилляций поверхности капли $\psi(\mathbf{r}, t) \sim \xi(\theta, t) \sim \varepsilon$. Электрическое поле в окрестности капли будем характеризовать электрическим потенциалом $\Phi(\mathbf{r}, t)$.

Математическая формулировка задачи о расчёте движения жидкости в незаряженной капле, осциллирующей во внешнем электростатическом поле, имеет вид:

$$\Delta \psi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad \Delta \Phi(\mathbf{r}, t) = 0; \quad (3.3.3)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -E_0 r \cos \theta; \quad (3.3.4)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t):$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right); \quad P + P_E = P_\sigma; \quad (3.3.5)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_s(t); \quad (3.3.6)$$

$$t = 0: \quad \xi(\theta) = \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu); \quad \sum_{j \in \Xi} h_j = 1; \quad \varepsilon \ll 1; \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0; \quad (3.3.7)$$

где h_j – коэффициенты, определяющие парциальный вклад j – ой колебательной моды в суммарное начальное возмущение, Ξ – множество значений номеров

изначально возбужденных колебательных мод, $P_j(\mu)$ – полином Лежандра j – ого порядка, j – целое число, $\mu \equiv \cos \theta$.

Исходя из общезначительных соображений, для замыкания выписанной системы уравнений сформулируем дополнительные естественные условия: постоянства объема капли, неподвижности её центра масс, а также условие незаряженности капли.

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi; \quad \int_V \mathbf{r} \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad (3.3.8)$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\oint_S (\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \nabla \Phi) dS = 0; \quad (3.3.9)$$

$$S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi].$$

В этих выражениях введены следующие обозначения: $\Phi_s(t)$ – постоянное вдоль поверхности капли значение её электрического потенциала, $P = P_0 - \frac{\partial \psi}{\partial t}$ – гидродинамическое давление, P_0 – постоянное давление внутри капли в состоянии равновесия, $P_E = (\nabla \Phi)^2 / 8\pi$ – давление электрического поля, $P_\sigma = \text{div} \mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ – капиллярное давление, $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ – единичный вектор нормали, определяемый в виде:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}, t) = \frac{\nabla(r - r(\theta, t))}{|\nabla(r - r(\theta, t))|} \Big|_{r=r(\theta, t)}. \quad (3.3.10)$$

Искомые величины разложим по порядкам малости безразмерной амплитуды осцилляций ε :

$$\xi(\theta, t) = \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2); \quad \psi_j(\mathbf{r}, t) = \psi_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$P(\mathbf{r}, t) = P^{(0)}(\mathbf{r}) + P^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2); \quad P_\sigma(\mathbf{r}, t) = P_\sigma^{(0)}(\mathbf{r}) + P_\sigma^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$P_E(\mathbf{r}, t) = P_E^{(0)}(\mathbf{r}) + P_E^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2); \quad (3.3.11)$$

где $\Phi^{(0)}(r, \theta)$ – электрический потенциал в окрестности равновесного незаряженного сфероида во внешнем электростатическом поле, $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$ – добавка первого порядка малости к электрическому потенциалу, связанная с возмущением поверхности капли. Верхний индекс означает порядок малости по ε .

Подставляя разложения (3.3.11) в (3.3.3)-(3.3.9), выделим задачи нулевого и первого порядков по ε .

Потенциал $\Phi^{(0)}(\mathbf{r})$ в линейном по e^2 приближении может быть получен как переходом от известного выражения [141] (стр.41) для электрического потенциала вытянутого проводящего эллипсоида в однородном внешнем поле (приведенного в [141], стр.41, в сфероидальных координатах), так и прямым решением электростатической задачи нулевого порядка малости по ε в сферической системе координат методом возмущений [142]:

$$\Phi^{(0)}(r, \theta) = E_0 r P_1(\mu) \left(\frac{1}{r^3} - 1 \right) + \frac{2}{5} \frac{1}{r^2} e^2 E_0 \left(P_1(\mu) + \frac{3}{2} \frac{1}{r^2} P_3(\mu) \right). \quad (3.3.12)$$

Форма возмущенной поверхности капли $r(\theta, t)$ с точностью до слагаемых первого порядка по каждому из малых параметров ε и e^2 описывается уравнением:

$$r(\theta, t) = 1 + e^2 h(\theta) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j(t) P_j(\mu); \quad (3.3.13)$$

где амплитудные коэффициенты $M_j(t)$ имеют следующий вид:

$$M_j(t) = h_j \cos(\omega_j t) + e^2 \left(h_{j-2} \frac{j(j-1)(3j^2 - 3j + 2)}{4(2j-1)(2j-3)(3j-4)} (\cos(\omega_{j-2} t) - \cos(\omega_j t)) - \right. \\ \left. - h_{j+2} \frac{(j+1)(3j^3 + 27j^2 + 44j + 16)}{4(2j+3)(2j+5)(3j+2)} (\cos(\omega_{j+2} t) - \cos(\omega_j t)) \right); \quad (j \in \Xi). \quad (3.3.14)$$

В отсутствии внешнего электрического поля выражение, величина которого имеет порядок $\sim e^2$, обращаются в ноль, и амплитуда возмущения $M_j(t)$ будет определяться лишь слагаемым с частотой ω_j : $M_j(t) = h_j \cos(\omega_j t)$.

Выражение для добавки электрического потенциала в окрестности возмущенного сфероида определяется в виде:

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) = E_0 \varepsilon \left(\frac{6}{35} \frac{e^2 M_3(t)}{r} + \left(\sum_{j \in \Xi} \left[3 \left(\mu_{j-1}^+ M_{j-1}(t) + \mu_{j+1}^- M_{j+1}(t) \right) + e^2 \left(M_{j-3}(t) l_1(j) + M_{j-1}(t) l_2(j) + M_{j+1}(t) l_3(j) + M_{j+3}(t) l_4(j) \right) \right] r^{-(n+1)} \right) \right) P_j(\mu);$$

$$(j \in \Xi). \quad (3.3.15)$$

Поверхностная плотность заряда. Определим теперь плотность поверхностного заряда $\nu(\mathbf{r}, t)$, распределенного по возмущенной осесимметричной поверхности идеально проводящей капли по известной формуле:

$$\nu(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \right) \Big|_{r=r(\theta, t)} = -\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \nabla \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \nabla \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) \right) \Big|_{r=r(\theta, t)};$$

$$(3.3.16)$$

где $r(\theta, t)$ задана соотношением (3.3.13).

Используя разложения (3.3.12), (3.3.15) для компонент электрического потенциала и вектор нормали к возмущенной поверхности сфероида во внешнем поле:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}, t) = \left(1 - \frac{1}{3} e^2 \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r - \left(\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{1}{3} e^2 \left((1 - \xi(\theta, t)) \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} - P_2(\mu) \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) \mathbf{e}_\theta; \quad (3.3.17)$$

получим поверхностную плотность заряда на возмущенной капле $r(\theta, t)$ с точностью до слагаемых порядка $\sim E_0 e^2 \varepsilon \sim E_0^3 \varepsilon$:

$$v(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \left(3E_0 \left(P_1(\mu) + \frac{2}{5} e^2 P_3(\mu) \right) - \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + E_0 \xi(\theta, t) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(6P_1(\mu) + \frac{2}{5} e^2 (P_1(\mu) + 15P_3(\mu)) \right) + \frac{1}{3} e^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} P_2(\mu) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} \right) \right) \right) \Bigg|_{r=1}.$$

Здесь функции $\xi(\theta, t)$ и $\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ имеют первый порядок малости по ε . В (3.3.17) \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ – орты сферической системы координат.

Учитывая вид функции $\xi(\theta, t)$ из (3.3.13) и решение (3.3.15) для добавки электрического потенциала $\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$, запишем поверхностную плотность заряда в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$v(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{4\pi} E_0 \left(P_1(\mu) + \frac{2}{5} e^2 P_3(\mu) + \right. \\ \left. + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} \left(M_{j-1}(t) k_1 + M_{j+1}(t) k_2 - e^2 \left(\frac{2}{35} M_3(t) \delta_{j,0} + M_{j-3}(t) k_3 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + M_{j-1}(t) k_4 + M_{j+1}(t) k_5 + M_{j+3}(t) k_6 \right) \right) P_j(\mu) \right); \quad (j \in \Xi). \quad (3.3.18)$$

Числовые коэффициенты $k_1 - k_6$, зависящие лишь от значения индекса j , приведены в приложении.

Расчет квадрупольных моментов. Для вычисления интенсивности квадрупольного электромагнитного излучения от электропроводной капли в (3.3.1) рассчитаем тензор квадрупольного момента $D_{\alpha\beta}(t)$. Подставляя в исходную формулу (3.3.2) выражение для квадрата модуля радиус-вектора $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, запишем в общем виде выражение для тензора квадрупольного момента в декартовой системе координат:

$$D_{\alpha\beta}(t) = \iiint_V v(\mathbf{r}, t) \delta(r - r(\mathbf{r}, t)) (3x_\alpha(t)x_\beta(t) - \delta_{\alpha\beta} \cdot r^2(t)) dV; \quad (3.3.19)$$

$$V = \left[-r \leq x \leq r; -\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}; -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right].$$

Здесь $r = r(\mathbf{r}, t)$ – уравнение поверхности капли, $v(\mathbf{r}, t)$ – поверхностная плотность заряда, \mathbf{r} – радиус-вектор точки на поверхности капли, $\delta(r - r(\theta, t))$ – дельта-функция Дирака [136], стр.902, $\delta_{\alpha\beta}$ – дельта-символ Кронекера.

Перепишем выражение (3.3.19) для компонент квадрупольных моментов в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре капли. Наличие дельта функции в (3.3.19) превращает интегрирование по объёму в интегрирование по возмущённой капиллярным волновым движением поверхности капли.

Поскольку капля осесимметрична, и уравнение её возмущенной поверхности $r(\theta, t)$ не зависит от координаты φ , то после интегрирования (3.3.19) по углу φ получим:

$$\begin{aligned} D_{11}(t) = D_{22}(t) &= -\frac{1}{2} D_{33}(t) = \pi \int_0^\pi \frac{v(\theta, t)}{(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{e}_r)} r^4(\theta, t) (1 - 3\cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= -2\pi \int_0^\pi \frac{v(\theta, t)}{(\mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \mathbf{e}_r)} r^4(\theta, t) P_2(\mu) \sin \theta d\theta; \quad (3.3.20) \\ D_{12} = D_{21} = D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} &= 0. \end{aligned}$$

В (3.3.20) $r(\theta, t)$ определяется выражением (3.3.13), $v(\theta, t)$ – соотношением (3.3.18), а $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ – формулой (3.3.17).

Подставляя в компоненты тензора $D_{11}(t) = D_{22}(t) = -\frac{1}{2} D_{33}(t)$ поверхностную плотность заряда (3.3.18) и вектор нормали (3.3.17) на возмущенной поверхности капли $r(\theta, t)$, найдём осесимметричные компоненты тензора квадрупольного момента:

$$\begin{aligned}
D_{11}(t) = D_{22}(t) = -\frac{1}{2}D_{33}(t) = -\frac{3}{2}E_0 \int_0^\pi \left(\cos \theta \left(1 + e^2 \left(3 \cos^2 \theta - \frac{19}{15} \right) \right) + \right. \\
\left. + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} \left(M_{j-1}(t) p_1 + M_{j+1}(t) p_2 + e^2 \left(\frac{2}{35} M_3(t) \delta_{j,0} + M_{j-3}(t) p_3 + \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. + M_{j-1}(t) p_4 + M_{j+1}(t) p_5 + M_{j+3}(t) p_6 \right) \right) P_j(\cos \theta) \right) P_2(\mu) \sin \theta d\theta; \quad (j \in \Xi);
\end{aligned}$$

учитывая ортогональность полиномов Лежандра и переходя к переходя к размерным переменным, получим решение:

$$D_{11}(t) = D_{22}(t) = -\frac{1}{2}D_{33}(t) = -\frac{1}{5}E_0 \varepsilon \left(\frac{45}{7} M_3(t) + e^2 \left(\frac{52}{49} M_3(t) + \frac{50}{11} M_5(t) \right) \right).$$

В результате, используя выражение для амплитудных коэффициентов $M_j(t)$ из (3.3.14) и переходя к размерным переменным, запишем отличные от нуля компоненты квадрупольного момента в виде:

$$\begin{aligned}
D_{11}(t) = D_{22}(t) = -\frac{1}{2}D_{33}(t) = -E_0 R^4 \varepsilon \left(\frac{9}{7} h_3 \cos(\omega_3 t) + \right. \\
\left. + e^2 \left(\frac{52}{245} h_3 \cos(\omega_3 t) + \frac{2}{847} h_5 (236 \cos(\omega_3 t) + 149 \cos(\omega_5 t)) \right) \right); \quad (3.3.21)
\end{aligned}$$

$$\omega_j = \left(\frac{\sigma}{\rho R^3} j \left((j-1)(j+2) - e^2 \frac{(2j^5 + 23j^4 + 21j^3 - 17j^2 - 7j - 2)}{(2j-1)(2j+1)(2j+3)} \right) \right)^{1/2}; \quad e^2 = \frac{9E_0^2 R}{16\pi\sigma}.$$

Следует заметить, что квадрупольный момент незаряженной капли во внешнем поле отличен от нуля только для возмущенной поверхности капли (квадрупольный момент равновесного незаряженного сфероида во внешнем электростатическом поле равен нулю) и при расчетах с точностью до квадрата эксцентриситета определяется третьей и пятой модами осцилляций.

Наконец, рассчитывая максимальное значение суммы квадратов третьей производной по времени от полученных компонент тензора квадрупольного момента:

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} D_{\alpha\beta}(t) \right)_{\max}^2 =$$

$$= 6E_0^2 R^8 \varepsilon^2 \left(\frac{9}{7} h_3 \omega_3^3 + e^2 \left(\frac{52}{245} h_3 \omega_3^3 + \frac{2}{847} h_5 (236 \omega_3^3 + 149 \omega_5^3) \right) \right)^2. \quad (3.3.22)$$

Подставляя (3.3.22) в (3.3.1), найдем интенсивность квадрупольного электромагнитного излучения от незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле:

$$I = \frac{1}{30c^5} E_0^2 R^8 \varepsilon^2 \left(\frac{9}{7} h_3 \omega_3^3 + e^2 \left(\frac{52}{245} h_3 \omega_3^3 + \frac{2}{847} h_5 (236 \omega_3^3 + 149 \omega_5^3) \right) \right)^2. \quad (3.3.23)$$

Используя полученное соотношение (3.3.23), приведем численные оценки фонового шумового радиоизлучения от конвективных облаков. Прежде всего отметим, что возможный источник электромагнитного излучения обусловлен осцилляциями низких мод мелких капель с концентрацией в облаке порядка $\sim 10^9$ штук на м^3 [130]. Характерные размеры таких капель от 3 до 30 мкм. Максимум их концентрации в облаке приходится на диапазон от 3 до 7 мкм. Следует заметить, что осцилляции поверхности капель объясняются, прежде всего, микрофизическими внутриоблачными процессами: коагуляцией с более мелкими частицами, изменением агрегатного состояния, дроблением на более мелкие в следствие столкновительных процессов или реализации электростатической неустойчивости, электрического и гидродинамического взаимодействия с соседними каплями [131]. Натурные наблюдения показали, что величина амплитуды осцилляций облачных капель может принимать значения до десятков процентов от размера капли [131]. Таким образом, для получения оценок интенсивности излучения примем отношение амплитуды осцилляций к радиусу капли $\xi(\theta, t)/R = \varepsilon$ равным 0.1.

Согласно формуле (3.3.23) рассчитаем интенсивность квадрупольного излучения от единичной незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле. Для численных оценок примем: $h_3 = h_5 = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$,

$\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $R = 30$ мкм, $E_0 = 0.17$ СГСЭ ($E_0 = 50$ В/см) ($\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ ($E_{0кр}$ – критическое значение напряженности поля) при $R = 3$ мкм и $\sim 7 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 30$ мкм). Тогда из (3.3.27) получим оценку $I \sim 6 \cdot 10^{-46}$ эрг/с. Для капли радиусом $R = 8$ мкм получим значение интенсивности $I \sim 2 \cdot 10^{-45}$ эрг/с. При радиусе капли $R = 3$ мкм излучение составляет $I \sim 6 \cdot 10^{-45}$ эрг/с (см. рисунок. 3.3.1).

Интегральная же интенсивность электромагнитного излучения из облака диаметром 5 км будет уже в $7 \cdot 10^{19}$ раз больше: $I_{in} \sim 4 \cdot 10^{-26}$ эрг/с, если принять для оценки по порядку величины, что все капли имеют одинаковый размер $R = 30$ мкм. Интегральная интенсивность будет $I_{in} \sim 1 \cdot 10^{-25}$ эрг/с при радиусе $R = 8$ мкм и $I_{in} \sim 4 \cdot 10^{-25}$ эрг/с для капель радиусом $R = 3$ мкм.

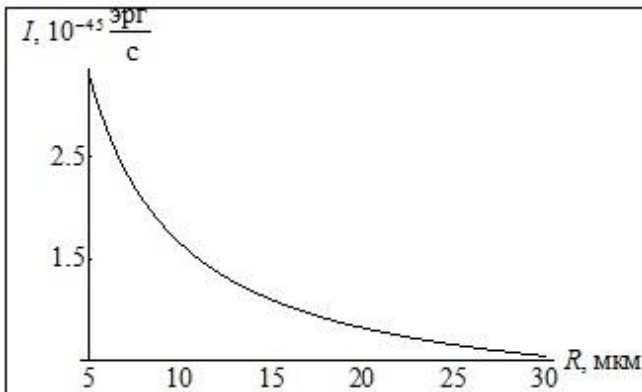


Рисунок 3.3.1 – Зависимость интенсивности квадрупольного электромагнитного излучения единичной незаряженной каплей, осциллирующей в электростатическом поле, от радиуса равновеликой сферической капли, рассчитанная при $\varepsilon = 0.1$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $E_0 = 0.17$ СГСЭ ($\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 7 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 30$ мкм)

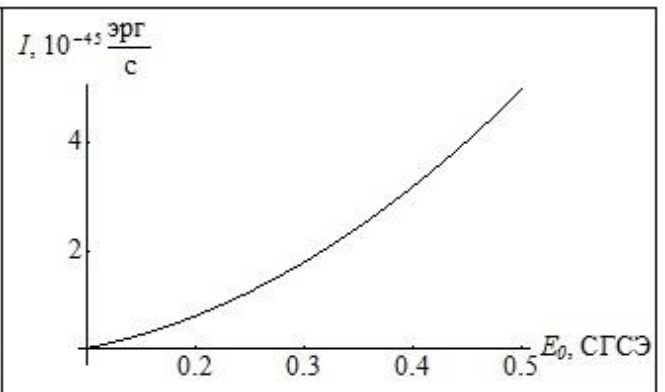
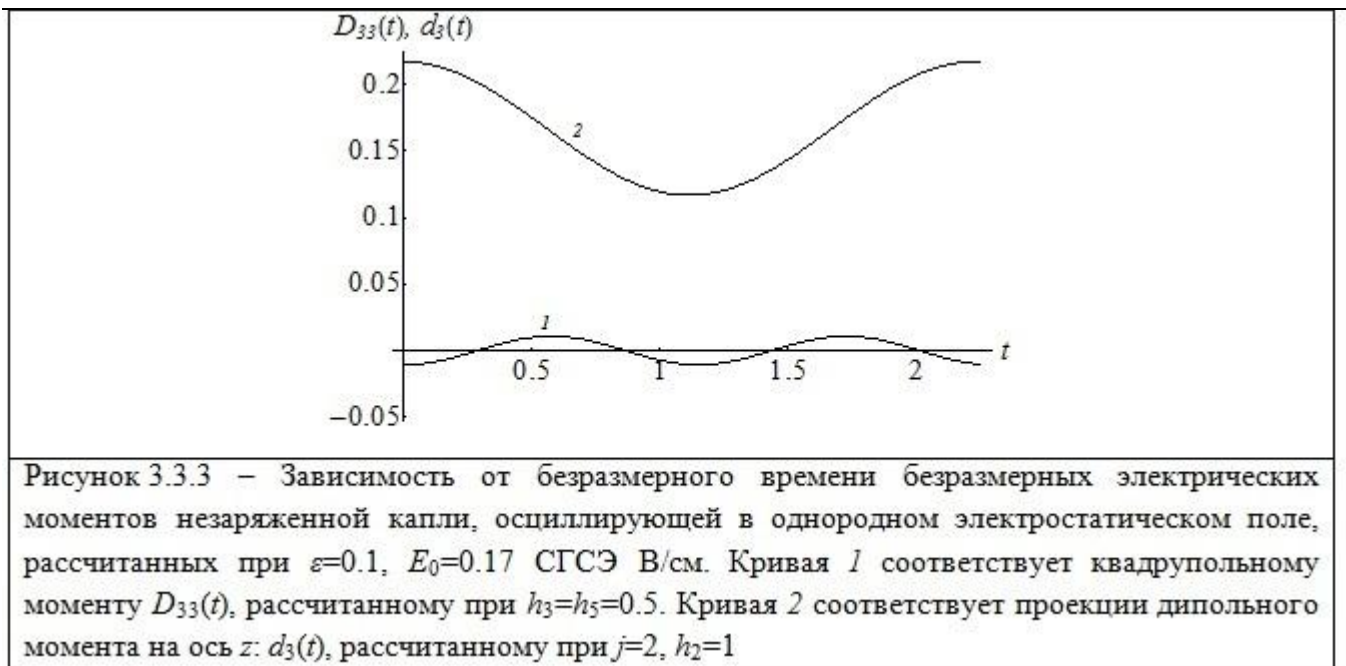


Рисунок 3.3.2 – Зависимость интенсивности электромагнитного излучения единичной незаряженной каплей, осциллирующей в электростатическом поле, от напряженности внешнего поля, рассчитанная при тех же значениях физических величин, что на рисунке 3.3.1 и $R = 30$ мкм

Из приведенных оценок и рисунка 3.3.1 видно, что с увеличением радиуса капли на порядок (от $R = 3$ мкм до $R = 30$ мкм) интенсивность излучения уменьшается на порядок.

На рисунке 3.3.2 приведены характеристики излучения в зависимости от напряженности внешнего электрического поля. Видно, что с увеличением напряженности электростатического поля интенсивность излучения быстро увеличивается: при увеличении напряженности поля в 3 раза интенсивность излучения увеличивается на порядок, что согласуется с (3.3.28).

По сравнению с интенсивностью дипольного электромагнитного излучения от незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле (см. раздел 3.2), интенсивность квадрупольного электромагнитного излучения оказывается на 14-15 порядков слабее.



На рисунке 3.3.3 приведены зависимости от безразмерного времени величин безразмерного квадрупольного момента $D_{33}(t)$, рассчитанного на основе (3.3.26) (кривая 1), а также её безразмерной проекции дипольного момента на ось z : $d_3(t)$ (кривая 2), рассчитанного по выражению (3.2.34) (см. раздел 3.2), для сфероидальной капли воды во внешнем однородном электростатическом поле. Безразмерные кривые пришлось строить потому, что размерности $D_{zz}(t)$ и $d(t)$ не совпадают, а их желательно было представить на одном графике для сравнения.

Несложно видеть, что частота изменения во времени квадрупольного момента примерно в четыре раза больше чем частота изменения дипольного момента, что может помочь в экспериментальной идентификации

мультипольности электромагнитного излучения от капли воды во внешнем однородном электростатическом поле.

Таким образом, в первом порядке малости по отношению амплитуды осцилляций к характерному линейному размеру капли и во втором порядке малости по квадрату отношения характерного линейного размера капли к длине излучаемой волны проведена оценка интенсивности квадрупольного электромагнитного излучения от незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле. Оказалось, что интенсивность квадрупольного излучения на 14-15 порядков величины меньше интенсивности дипольного излучения от такой же капли, а частота выше, чем у дипольного момента в несколько раз.

3.4. Капиллярные осцилляции заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости неподвижной в суперпозиции гравитационного и внешнего однородного электростатического полей и генерация ими квадрупольного излучения

Завершающим этапом всего рассмотрения следует считать электрогидродинамический расчёт невязкого затухания капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости неподвижной в суперпозиции поля сил тяжести и внешнего электростатического поля, направленного коллинеарно гравитационному в противоположную сторону.

Физическая постановка задачи. Пусть заряженная сферическая капля с зарядом Q , начальным радиусом R невязкой несжимаемой идеально проводящей жидкости с массовой плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ неподвижно висит в суперпозиции гравитационного \mathbf{g} и однородного электростатического \mathbf{E}_0 полей ($\mathbf{E}_0 \parallel -\mathbf{g}$). Внешнее электростатическое поле, во первых, задает выделенное направление и, во вторых, сказывается на равновесной форме капли. Как выше уже отмечалось, незаряженная капля в однородном электростатическом поле принимает вытянутую по полю форму, которая в линейном приближении по стационарной деформации может считаться сфероидальной. Появление на такой капле собственного заряда приведёт к её дополнительной стационарной деформации: увеличится её вытянутость и появится искажение сфероидальной формы. Однако все расчёты проводятся в сферической системе координат, сфероидальную форму в сферических координатах мы представляем в виде разложения по квадрату эксцентриситета e^2 , вводя таким образом дополнительный малый параметр e^2 – квадрат эксцентриситета. Искажение сфероидальной формы капли за счёт собственного заряда, как будет показано ниже, проявится в более высоком порядке малости квадрата эксцентриситета, чем первый. В итоге, при расчётах в линейном

приближении по ε и линейном по e^2 равновесную форму заряженной капли в однородном электростатическом поле будем считать сфероидальной, но её эксцентриситет будет больше, чем у незаряженной капли в электростатическом поле.

Поляризация капли в поле приводит к возникновению на её поверхности индуцированных зарядов. Ускоренно движущиеся собственный и индуцированные внешним электрическим полем заряды распределяются по возмущенной поверхности капли и, следовательно, при капиллярных осцилляциях поверхности капли излучают электромагнитные волны.

Для упрощения записи математических выкладок ограничим рассмотрение данной задачи осесимметричными капиллярными колебаниями капли. Все последующие расчеты проведем в сферической системе координат (r, θ, φ) , начало которой совпадает с положением центра масс капли, а угол θ совпадает по направлению с вектором \mathbf{E}_0 . Уравнения задачи представим в безразмерной форме, выбирая в качестве основных масштабов обезразмеривания $R = \rho = \sigma = 1$. Тогда остальные физические величины будут определены в долях своих характерных значений: $[Q] = R^{3/2} \sigma^{1/2}$, $[E_0] = R^{-1/2} \sigma^{1/2}$, $[t] = R^{3/2} \rho^{1/2} \sigma^{-1/2}$, $[V] = R^{-1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2}$, $[r] = R$, $[P] = R^{-1} \sigma$.

Для случая заряженной капли, осциллирующей в суперпозиции гравитационного и электростатического полей, равноименным индуцированным зарядам q_+ и q_- поставим в соответствие равновеликие точечные заряды, разнесенные друг от друга на определенное расстояние относительно экваториальной плоскости капли (получим «эффективный» диполь), а собственному заряду Q поставим в соответствие равновеликий точечный заряд, помещенный в центре масс капли.

Введем обозначение поверхностной плотности индуцированного внешним электрическим полем заряда в виде $\nu(r, \theta)$. Чтобы получить величины

индуцированных зарядов, проинтегрируем $v(r, \theta)$ по поверхности двух разноименно заряженных половинок капли (S_1 и S_2) [3]:

$$q_+(r, \theta, t) = \int_{S_1} dq_+(r, \theta, t) = \int_{S_1} v(r, \theta, t) dS_1;$$

$$q_-(r, \theta, t) = \int_{S_2} dq_-(r, \theta, t) = \int_{S_2} v(r, \theta, t) dS_2.$$

Векторы положения «эффективных» индуцированных зарядов определяются соотношениями:

$$\mathbf{R}_{q_+}(t) = \frac{1}{q_+(r, \theta, t)} \int_{S_1} \mathbf{r} dq_+(r, \theta, t) = \frac{1}{q_+(r, \theta, t)} \int_{S_1} r \cos \theta \mathbf{e}_z dq_+(r, \theta, t);$$

$$\mathbf{R}_{q_-}(t) = \frac{1}{q_-(r, \theta, t)} \int_{S_2} \mathbf{r} dq_-(r, \theta, t) = \frac{1}{q_-(r, \theta, t)} \int_{S_2} r \cos \theta \mathbf{e}_z dq_-(r, \theta, t); \quad (3.4.1)$$

$$S_1 \equiv \left[r = r(\theta, t); \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right];$$

$$S_2 \equiv \left[r = r(\theta, t); \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right];$$

где $r = r(\theta, t)$ описывает уравнение возмущенной поверхности капли.

«Центры» всех точечных зарядов и величина «эффективных» индуцированных зарядов будут осциллировать при капиллярных осцилляциях поверхности капли и, следовательно, будут излучать электромагнитные волны.

Интенсивность излучения такой капли будем моделировать в виде суммы излучений от осциллирующего диполя и осциллирующего положения центра собственного заряда капли.

Согласно общей теории излучения электромагнитных волн интенсивность дипольного излучения для ускоренно движущегося заряда q задается формулой [121], стр.227:

$$I = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} \right)^2; \quad \mathbf{d} \equiv q \cdot \mathbf{R}_q; \quad (3.4.2)$$

где \mathbf{R}_q – радиус-вектор положения заряда q , \mathbf{d} – дипольный момент ($\ddot{\mathbf{d}} \equiv q \cdot \mathbf{a}$, \mathbf{a} – ускорение движущегося заряда).

Математическая формулировка задачи. В настоящей задаче в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сфероидальная форма капли $r(\theta)$ претерпевает осесимметричное тепловое возмущение $\xi(\theta, t)$ с амплитудой осцилляций ε , причем $\varepsilon \ll R$. Форму возмущенной поверхности капли в системе координат, начало которой совпадает с положением центра масс капли, в безразмерных переменных представим в виде:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t); \quad |\xi| \ll 1. \quad (3.4.3)$$

Примем, что волновое движение жидкости в капле является потенциальным. Поле скоростей течения жидкости в капле $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \nabla \psi(\mathbf{r}, t)$, связанное с осцилляциями её поверхности, полностью определяется гидродинамическим потенциалом $\psi(\mathbf{r}, t)$ и имеет тот же порядок малости (в безразмерных переменных), что и безразмерная амплитуда осцилляций поверхности капли $\psi(\mathbf{r}, t) \sim \xi(\theta, t) \sim \varepsilon$.

Электрическое поле в окрестности возмущенной капли обозначим как $\Phi(r, \theta, t)$.

Полная математическая формулировка задачи о капиллярных осцилляциях заряженной капли неподвижной в суперпозиции гравитационного и внешнего однородного электростатического полей содержит основные уравнения электрогидродинамики:

$$\Delta \psi(r, \theta, t) = 0; \quad \Delta \Phi(r, \theta, t) = 0; \quad (3.4.4)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi(r, \theta, t) \rightarrow -E_0 r \cos \theta; \quad (3.4.5)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right); \quad (3.4.6)$$

$$P(r, \theta, t) + P_q(r, \theta, t) + P_g(r, \theta, t) = P_\sigma(r, \theta, t); \quad (3.4.7)$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi_s(t); \quad (3.4.8)$$

а также дополнительные естественные (интегральные) условия: постоянства полного объема капли, неподвижности её центра масс и неизменности полного заряда на поверхности капли:

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi; \quad \int_V \mathbf{r} \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad (3.4.9)$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}, \nabla \Phi) dS = Q; \quad S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (3.4.10)$$

Здесь $\Phi_s(t)$ – электрический потенциал поверхности капли, P , P_q , P_g , P_σ – гидродинамическое, электрическое, гравитационное и капиллярное давления, определяемые по формулам $P(r, \theta, t) = P_0 - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2$, $P_q(r, \theta, t) = (\nabla \Phi)^2 / 8\pi$, $P_g = g [r(0) - (r(\theta) + \xi(\theta, t)) \mu]$, $\mu \equiv \cos \theta$, $P_\sigma(r, \theta, t) = \text{div} \mathbf{n}(r, \theta, t)$, где P_0 – постоянное давление в капле в равновесном состоянии, $\mathbf{n}(r, \theta, t)$ – орт нормали к осесимметричной поверхности капли, записанный в сферической системе координат в виде:

$$\mathbf{n}(r, \theta, t) = \frac{\nabla(r - r(\theta, t))}{\left| \nabla(r - r(\theta, t)) \right|} \Big|_{r=r(\theta, t)}. \quad (3.4.11)$$

Кроме того, зададим начальные условия в виде начальной деформации равновесной поверхности капли и нулевой начальной скорости её движения:

$$t = 0: \quad \xi(\theta) = \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu); \quad \sum_{j \in \Xi} h_j = 1; \quad \varepsilon \ll 1; \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0. \quad (3.4.12)$$

Здесь введены следующие обозначения: Ξ – множество значений номеров изначально возбужденных мод (их суперпозиция определяет начальную деформацию равновесной поверхности капли), h_j – коэффициенты, характеризующие парциальный вклад j -ой колебательной моды в форму

начального возмущения, j – целое число, $P_j(\mu)$ – полином Лежандра j -ого порядка.

Решение. Сформулированную задачу будем решать асимптотическим методом. Для этого искомые функции разложим в асимптотический ряд по малому параметру безразмерной амплитуды осцилляций ε , ограничивая рассмотрение первым приближением [141]:

$$\begin{aligned}\xi(\theta, t) &= \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2); & \psi_j(r, \theta, t) &= \psi_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ \Phi(r, \theta, t) &= \Phi^{(0)}(r, \theta) + \Phi^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ P(r, \theta, t) &= P^{(0)}(r, \theta) + P^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ P_\sigma(r, \theta, t) &= P_\sigma^{(0)}(r, \theta) + P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ P_g(r, \theta, t) &= P_g^{(0)}(r, \theta) + P_g^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ P_q(r, \theta, t) &= P_q^{(0)}(r, \theta) + P_q^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2).\end{aligned}\quad (3.4.13)$$

Заметим, что верхний индекс в (3.4.13) указывает на порядок малости по ε . При этом электрический потенциал $\Phi^{(0)}(r, \theta)$ характеризует поле в окрестности невозмущенной сфероидальной поверхности заряженной капли, а добавка к электрическому потенциалу $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$ связана с волновым возмущением поверхности капли.

Подстановка разложений (3.4.13) в систему уравнений (3.4.4)-(3.4.12) позволяет получить задачи различных порядков малости по ε : нулевого и первого.

Чтобы найти электрический потенциал $\Phi^{(0)}(r, \theta)$ в окрестности невозмущенной капли и равновесную форму поверхности капли $r(\theta)$, выпишем математическую постановку задачи в нулевом приближении по ε :

$$\Delta\Phi^{(0)}(r, \theta) = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(0)}(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta;$$

$$r = r(\theta): \quad \Phi^{(0)}(r, \theta) = \text{const}; \quad P^{(0)} + P_q^{(0)} + P_g^{(0)} = P_\sigma^{(0)};$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi; \quad \int_V \mathbf{r} \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0;$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}_0(r, \theta), \nabla \Phi^{(0)}(r, \theta)) dS = Q; \quad S = [r = r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi].$$

Здесь $\mathbf{n}_0(r, \theta)$ обозначен орт нормали к невозмущенной поверхности капли, вычисляемый по формуле (3.4.11) на поверхности $r(\theta)$.

В итоге, решение задачи в нулевом приближении по ε примет следующий вид:

$$\Phi^{(0)}(r, \theta) = \frac{Q}{r} \left(1 + \frac{1}{3r^2} e^2 P_2(\mu) \right) +$$

$$+ E_0 \left(r P_1(\mu) \left(\frac{1}{r^3} - 1 \right) + \frac{2}{5} \frac{1}{r^2} e^2 \left(P_1(\mu) + \frac{3}{2} \frac{1}{r^2} P_3(\mu) \right) \right); \quad (3.4.14)$$

$$P^{(0)}(r, \theta) = P_0; \quad P_q^{(0)}(r, \theta) = \left(\nabla \Phi^{(0)} \right)^2 / 8\pi; \quad P_g^{(0)} = g(1 - \mu);$$

$$P_\sigma^{(0)}(r, \theta) = 2 - \frac{1}{3} e^2 (2 + L_\theta) P_2(\mu); \quad L_\theta \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right);$$

$$r(\theta) \approx 1 + e^2 h(\theta) + O(e^4) \equiv 1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) + O(e^4);$$

$$e^2 = \frac{9w}{1-W}; \quad w = \frac{E_0^2}{16\pi}; \quad W = \frac{Q^2}{16\pi}; \quad g = 12\sqrt{Ww}. \quad (3.4.15)$$

Здесь функция $h(\theta)$ характеризует отклонение сфероидальной поверхности капли от сферы [3, 134]. Отметим, что уравнение (3.4.14) хорошо согласуется с ранее полученным решением в [52].

Выделим теперь электрогидродинамическую математическую постановку задачи в первом приближении по ε :

$$\Delta \psi(r, \theta, t) = 0; \quad \Delta \Phi^{(1)}(r, \theta, t) = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0;$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t):$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right);$$

$$P^{(1)}(r, \theta, t) + P_q^{(1)}(r, \theta, t) + P_g^{(1)}(r, \theta, t) = P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t); \quad \Phi(r, \theta, t) = \Phi_s(t);$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad \int_V \mathbf{r} \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0;$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\oint_S (\mathbf{n}(\mathbf{r}), \nabla \Phi(\mathbf{r})) dS = 0; \quad S = [r = r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi].$$

Заметим, что уравнения Лапласа (3.4.4) являются линейными, и, следовательно, им должны удовлетворять каждая из компонент потенциалов скорости $\psi(r, \theta, t)$ и электрического поля $\Phi(r, \theta, t)$ в (3.4.13). Таким образом, функции $\psi(r, \theta, t)$, $\Phi(r, \theta, t)$, являющиеся решениями уравнений (3.4.4) и удовлетворяющие условиям ограниченности (3.4.5), а также возмущение поверхности капли $\xi(\theta, t)$ разложим в ряды по осесимметричным полиномам Лежандра:

$$\psi(r, \theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t) r^n P_n(\mu); \quad (3.4.16)$$

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) r^{-(n+1)} P_n(\mu); \quad (3.4.17)$$

$$\xi^{(1)}(\theta, t) = \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n(t) P_n(\mu). \quad (3.4.18)$$

В итоге, выражения для поправок к давлениям, вызванных возмущением поверхности капли $\xi(\theta, t)$, принимают следующий вид:

$$P^{(1)}(r, \theta, t) = - \left(\frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial t} + e^2 \frac{\partial^2 \psi(r, \theta, t)}{\partial r \partial t} h(\theta) \right);$$

$$P_q^{(1)}(r, \theta, t) = -\frac{1}{4\pi} \left(2 \left(4Q^2 e^2 h(\theta) + \frac{1}{3} (Q + 3E_0 \cos \theta)^2 \right) \xi(\theta, t) + (Q + 3E_0 \cos \theta) \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \right. \\ \left. + Q e^2 \left(-\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} + h(\theta) \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} \right) \right) \right);$$

$$P_g^{(1)}(r, \theta, t) = -g \xi(\theta, t) \cos \theta;$$

$$P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) = -(2 + L_\theta) \xi(\theta, t) + 2e^2 (\xi(\theta, t) L_\theta h(\theta) + h(\theta) (2 + L_\theta) \xi(\theta, t)).$$

Подстановка полученных разложений (3.4.16)-(3.4.18) в граничные условия (3.4.6), (3.4.8), (3.4.10), (3.4.11) позволяет получить выражения для коэффициентов $D_n(t)$ и $F_n(t)$ в (3.4.16) и (3.4.17), выраженных через амплитудные коэффициенты $M_n(t)$:

$$D_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial M_n(t)}{\partial t} \left(1 - \frac{1}{3n} e^2 (n(n-1) K_{2,n,n} - \alpha_{2,n,n}) \right) - \right. \\ \left. - \frac{e^2}{3} \left(\frac{\partial M_{n-2}(t)}{\partial t} \frac{((n-2)(n-3) K_{2,n-2,n} - \alpha_{2,n-2,n})}{(n-2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial M_{n+2}(t)}{\partial t} \frac{((n+2)(n+1) K_{2,n+2,n} - \alpha_{2,n+2,n})}{(n+2)} \right) \right); \quad (n \geq 0); \quad (3.4.19)$$

$$F_n(t) = \Phi_s^{(1)} \delta_{n,0} + E_0 \left(3 \left(\mu_{n-1}^+ M_{n-1}(t) + \mu_{n+1}^- M_{n+1}(t) \right) + \right. \\ \left. + e^2 (M_{n-3}(t) l_1 + M_{n-1}(t) l_2 + M_{n+1}(t) l_3 + M_{n+3}(t) l_4) \right) + \\ + Q \left(M_n(t) + e^2 (M_{n-2}(t) l_5 + M_n(t) l_6 + M_{n+2}(t) l_7) \right); \quad (n \geq 0); \quad (3.4.20)$$

$$M_0(t) = -\frac{2}{3} e^2 M_2(t); \quad M_1(t) = -\frac{3}{5} e^2 M_3(t);$$

$$\mu_n^+ = \frac{n+1}{2n+1}; \quad \mu_n^- = \frac{n}{2n+1};$$

$$K_{m,k,n} = \left[C_{k0,m0}^{n0} \right]^2; \quad \alpha_{m,k,n} = -\sqrt{m(m+1)k(k+1)} C_{m0,k0}^{n0} \cdot C_{m-1,k1}^{n0}.$$

Здесь коэффициенты l_j в (3.4.20), зависящие только от номера моды n , вынесены в приложение. $C_{mk,lp}^{nq}$ обозначены коэффициенты Клебша-Гордана [134], отличные от нуля при выполнении условий $|m-k| \leq n \leq m+k$, а $m+k+n$ – четное и $k+p=q$.

Кроме того, динамическое граничное условие в (3.4.7) с учетом выше полученных соотношений дает нам систему несвязанных между собой неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка (эволюционное уравнение), записанных относительно амплитуд $M_n(t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_n(t) + \omega_n^2 M_n(t) = \\ & = e^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{n-2}(t) \chi_1 + M_{n-2}(t) \chi_2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_{n+2}(t) \chi_3 + M_{n+2}(t) \chi_4 \right) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \left(Q^2 e^2 (M_{n-2}(t) \chi_5 + M_{n+2}(t) \chi_6) + QE_0 (M_{n-1}(t) \chi_7 + M_{n+1}(t) \chi_8) \right). \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Здесь коэффициенты χ_j зависят только от n и в виду их громоздкости вынесены в приложение.

В (3.4.21) введено обозначение ω_n частоты колебаний сфероидальной заряженной капли в поле:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 = n \left((n-1)(n+2) - e^2 \frac{(2n^5 + 23n^4 + 21n^3 - 17n^2 - 7n - 2)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} + \right. \\ \left. + 4W \left(-(n-1) + e^2 \frac{(4n^4 + 6n^3 - 2n^2 - 2n - 1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

В этом случае решение эволюционного уравнения (3.4.21) представим в виде суперпозиции общего решения однородного уравнения и частного решения соответствующего неоднородного уравнения.

Пологая, что зависимость от времени амплитуд $M_n(t)$ является экспоненциальной, решение однородного уравнения представим в следующем виде:

$$M_n(t)_{\text{одн}} = a_n \exp(i(\omega_n t + b_n)) + \text{к.с.}; \quad (n \geq 0). \quad (3.4.23)$$

Здесь аббревиатурой "к.с." обозначены комплексно сопряженные слагаемые.

Заметим, что частное решение неоднородного дифференциального уравнения находится методом последовательных приближений по e^2 .

В выражении (3.4.23) неизвестными величинами являются вещественные константы a_n и b_n , которые определим из начальных условий (3.4.9). Таким образом, для a_n и b_n получаем решение:

$$a_n = \frac{1}{2} h_j \left(\delta_{j,n} + e^2 (\delta_{j,n-2} \alpha_1(n) + \delta_{j,n} \alpha_2(n) + \delta_{j,n+2} \alpha_3(n)) + \right. \\ \left. + \frac{3}{4\pi} Q E_0 (\delta_{j,n-1} \alpha_4(n) + \delta_{j,n+1} \alpha_5(n)) \right); \\ b_n = 0; \quad (j \in \Xi, \quad n = 2, 3, 4 \dots). \quad (3.4.24)$$

Здесь $\delta_{j,n}$ обозначен символ Кронекера. Коэффициенты $\alpha_1(n) - \alpha_5(n)$, зависящие от номера моды n и параметра Релея W , приведены в приложении.

Итак, подставляя полученные соотношения (3.4.24) в решение неоднородного эволюционного уравнения, определим уравнение $r(\theta, t)$, описывающее форму возмущенной поверхности заряженной капли неподвижной в суперпозиции гравитационного и электростатического полей, с точностью до слагаемых первого порядка по каждому из малых параметров ε и e^2 в виде:

$$r(\theta, t) = 1 + e^2 h(\theta) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j(t) P_j(\mu); \quad (3.4.25)$$

где коэффициенты $M_j(t)$ принимают следующий вид:

$$M_j(t) = (h_j + S_1(j)) \cos(\omega_j t) + S_2(j) (\cos(\omega_{j-2} t) - \cos(\omega_j t)) +$$

$$+S_3(j)\left(\cos(\omega_j t) - \cos(\omega_{j+2} t)\right) + S_4(j)\cos(\omega_{j-1} t) + S_5(j)\cos(\omega_{j+1} t). \quad (3.4.26)$$

Здесь коэффициенты $S_i(j)$, зависящие от начальных амплитуд h_j , $h_{j\pm 1}$, $h_{j\pm 2}$, значений индекса j и физических параметров W , w и e^2 (см. выражения (3.4.15)), вынесены в приложение в виду их громоздкости. Следует отметить, что $S_1(j)$, $S_4(j)$, $S_5(j)$ имеют величину порядка $\sim QE_0$, а $S_2(j)$, $S_3(j) \sim e^2$.

Из выражения (3.4.26) несложно видеть, что в отсутствии внешнего электростатического поля коэффициенты $S_i(j)$ обращаются в ноль. Из сказанного следует, что амплитудные коэффициенты $M_j(t)$ определяются лишь слагаемым с частотой ω_j : $M_j(t) = h_j \cos(\omega_j t)$.

Соотношение для коэффициентов $F_n(t)$ из (3.4.20) и решение эволюционного уравнения из (3.4.26) подставим в (3.4.17), после чего выражение для добавки электрического потенциала в окрестности возмущенной поверхности капли примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \left(\frac{1}{35r} e^2 (6E_0 M_3(t) + 14QM_2(t)) + \sum_{j \in \Xi} \left[E_0 \left(3(\mu_{j-1}^+ M_{j-1}(t) + \mu_{j+1}^- M_{j+1}(t)) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + e^2 (M_{j-3}(t)l_1(j) + M_{j-1}(t)l_2(j) + M_{j+1}(t)l_3(j) + M_{j+3}(t)l_4(j)) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \left. + Q(M_j(t) + e^2 (M_{j-2}(t)l_5(j) + M_j(t)l_6(j) + M_{j+2}(t)l_7(j))) \right] r^{-(j+1)} P_j(\mu) \right). \end{aligned} \quad (3.4.27)$$

Излучение электромагнитных волн от индуцированных зарядов.

Принимая во внимание симметричное распределение индуцированного заряда на поверхности капли относительно её экваториальной плоскости, запишем величины разноименных индуцированных зарядов через известное выражение плотности поверхностного заряда $\nu \equiv \nu(r, \theta, t) \equiv -(\mathbf{n}(r, \theta, t), \nabla \Phi) / 4\pi$ в следующем виде [123]:

$$q_{\pm} = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_{1,2}} \frac{(\mathbf{n}(r, \theta, t), \nabla\Phi)}{(\mathbf{n}(r, \theta, t), \mathbf{e}_r)} r^2 \Big|_{r=r(\theta, t)} \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Подставим теперь в последнее выражение соотношения для электрического потенциала (см. (3.4.13), (3.4.14), (3.4.27)) и вектора нормали (3.4.12), после чего уравнение для разноименных равных по величине индуцированных зарядов в размерных переменных примет следующий вид:

$$q_{\pm} = \pm \frac{3}{4} E_0 R^2 \left(1 + \frac{3}{5} w + 2\varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \left((N_0(j) + N_1(j)) \cos(\omega_j t) + N_2(j) \cos(\omega_{j+1} t) + \right. \right. \\ \left. \left. + N_3(j) \cos(\omega_{j-1} t) + N_4(j) \cos(\omega_{j+2} t) + N_5(j) \cos(\omega_{j-2} t) \right) \right). \quad (3.4.28)$$

Заметим, что соотношение для отрицательного индуцированного заряда q_- содержит знак минус.

В таком случае, используя формулу (3.4.1), выражения для векторов $\mathbf{R}_{q_{\pm}}$ положений центров разноименных индуцированных зарядов на оси симметрии капли можно получить в размерных переменных в следующем виде:

$$R_{qz}^+ = \frac{2}{3} R \left(1 + 3w + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \left((\eta_0(j) + \eta_1(j)) \cos(\omega_j t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta_2(j) (\cos(\omega_j t) - \cos(\omega_{j+2} t)) + \eta_3(j) (\cos(\omega_{j-2} t) - \cos(\omega_j t)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta_4(j) \cos(\omega_{j+1} t) + \eta_5(j) \cos(\omega_{j-1} t) + \eta_6(j) \cos(\omega_{j-2} t) + \eta_7(j) \cos(\omega_{j+2} t) \right) \right); \\ R_{qz}^- = -\frac{2}{3} R \left(1 + 3w + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j \left((\eta_0^*(j) + \eta_1^*(j)) \cos(\omega_j t) + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta_2^*(j) (\cos(\omega_j t) - \cos(\omega_{j+2} t)) + \eta_3^*(j) (\cos(\omega_{j-2} t) - \cos(\omega_j t)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \eta_4^*(j) \cos(\omega_{j+1} t) + \eta_5^*(j) \cos(\omega_{j-1} t) + \eta_6^*(j) \cos(\omega_{j-2} t) + \eta_7^*(j) \cos(\omega_{j+2} t) \right) \right). \quad (3.4.29)$$

Функция $\eta_i^*(j)$ отличается знаком от $\eta_i(j)$ лишь для нечетных значений изначально возбужденных мод j . Числовые коэффициенты $N_0(j)$, $\eta_0(j)$, $\eta_0^*(j)$, зависящие лишь от индекса j , и коэффициенты $N_i(j)$ ($i=1-5$), $\eta_m(j)$, $\eta_m^*(j)$ ($m=1-7$), зависящие помимо j от физических параметров задачи, в силу их чрезвычайной громоздкости вынесены в приложение. Следует отметить, что коэффициенты $N_1(j)-N_3(j)$, $\eta_1(j)$, $\eta_1^*(j)$, $\eta_4(j)$, $\eta_4^*(j)$, $\eta_5(j)$, $\eta_5^*(j)$ имеют порядок величины $\sim QE_0 \sim e$, а $N_4(j)$, $N_5(j)$, $\eta_2(j)$, $\eta_2^*(j)$, $\eta_3(j)$, $\eta_3^*(j)$, $\eta_6(j)$, $\eta_6^*(j)$, $\eta_7(j)$, $\eta_7^*(j) \sim e^2$.

Отметим, что при четных значениях изначально возбужденных мод (в этом случае возмущенная поверхность капли симметрична относительно экваториальной плоскости) осцилляции центров разноименных зарядов будут происходить в противофазе друг относительно друга (центры будут сближаться и удаляться). Однако при изначально возбужденных нечетных мод (возмущенная поверхность капли асимметрична относительно экваториальной плоскости) центры эквивалентных зарядов осциллируют синфазно.

Осцилляции смещения ΔR_{qz} центра положительного индуцированного заряда от его стационарного равновесного положения $R_{qz}^{(eq)} = \frac{2}{3}R(1+3w)$ (в безразмерном виде) иллюстрируются рисунком 3.4.1а.

Наконец, используя выражения для величин индуцированных зарядов (3.4.28) и их положений на капле (3.4.29), из формулы (3.4.2), заменяя косинусы на их максимальное значение, в расчётах первого порядка малости по ε получим выражение (в размерном виде) для интенсивности дипольного излучения заряженной капли неподвижной в суперпозиции гравитационного и электростатического полей, генерируемого ускоренно движущимися индуцированными внешним электростатическим полем зарядами:

$$\begin{aligned}
\tilde{I} = & \frac{E_0^2 R^6 \varepsilon^2}{3c^3} \sum_{j \in \Xi} h_j^2 \left[\left(\left(1 + \frac{3}{5} w \right) \left(\omega_j^2 (\eta_0(j) + \eta_1(j)) + (\omega_j^2 - \omega_{j+2}^2) \eta_2(j) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + (\omega_{j-2}^2 - \omega_j^2) \eta_3(j) + \omega_{j+1}^2 \eta_4(j) + \omega_{j-1}^2 \eta_5(j) + \omega_{j-2}^2 \eta_6(j) + \omega_{j+2}^2 \eta_7(j) \right) + \right. \\
& \left. \left. + 2(1+3w) \left(\omega_j^2 (N_0(j) + N_1(j)) + \omega_{j+1}^2 N_2(j) + \omega_{j-1}^2 N_3(j) + \omega_{j+2}^2 N_4(j) + \omega_{j-2}^2 N_5(j) \right) \right)^2 + \right. \\
& \left. \left. + \left(\left(1 + \frac{3}{5} w \right) \left(\omega_j^2 (\eta_0^*(j) + \eta_1^*(j)) + (\omega_j^2 - \omega_{j+2}^2) \eta_2^*(j) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + (\omega_{j-2}^2 - \omega_j^2) \eta_3^*(j) + \omega_{j+1}^2 \eta_4^*(j) + \omega_{j-1}^2 \eta_5^*(j) + \omega_{j-2}^2 \eta_6^*(j) + \omega_{j+2}^2 \eta_7^*(j) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2(1+3w) \left(\omega_j^2 (N_0(j) + N_1(j)) + \omega_{j+1}^2 N_2(j) + \omega_{j-1}^2 N_3(j) + \omega_{j+2}^2 N_4(j) + \omega_{j-2}^2 N_5(j) \right) \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Видно, что в полученном уравнении собственный заряд капли сказывается лишь на величине эксцентриситета, определенного формулой (3.4.15). Однако осцилляции ускоренно движущегося собственного заряда при капиллярных осцилляциях поверхности капли, обнаруживаемые в расчетах первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций, генерируют лишь квадрупольное излучение (см. раздел 3.1), которое на 15 порядков величины слабее дипольного излучения, порождаемого индуцированными внешним полем зарядами [144].

Следует отметить, что при $Q=0$ капля является незаряженной, и, следовательно, в выше полученном уравнении коэффициенты $\eta_4(j) - \eta_7(j)$ и $\eta_4^*(j) - \eta_7^*(j)$ равны нулю. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{E_0^2 R^6 \varepsilon^2}{3c^3} \sum_{j \in \Xi} h_j^2 \left[\left(\left(1 + \frac{3}{5} w \right) \left(\omega_j^2 (\eta_0(j) + \eta_1(j)) + (\omega_j^2 - \omega_{j+2}^2) \eta_2(j) + (\omega_{j-2}^2 - \omega_j^2) \eta_3(j) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2(1+3w) \left(\omega_j^2 (N_0(j) + N_1(j)) + \omega_{j+2}^2 N_4(j) + \omega_{j-2}^2 N_5(j) \right) \right)^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\left(1 + \frac{3}{5} w \right) \left(\omega_j^2 (\eta_0^*(j) + \eta_1^*(j)) + (\omega_j^2 - \omega_{j+2}^2) \eta_2^*(j) + (\omega_{j-2}^2 - \omega_j^2) \eta_3^*(j) \right) + \right. \\
& \left. + 2(1 + 3w) \left(\omega_j^2 (N_0(j) + N_1(j)) + \omega_{j+2}^2 N_4(j) + \omega_{j-2}^2 N_5(j) \right) \right)^2 \Bigg]. \quad (3.4.30)
\end{aligned}$$

Заметим, что при получении последнего выражения соотношения (3.4.28) и (3.4.29) найдены в линейных расчетах по отношению амплитуды осцилляций к радиусу капли ε , однако в соответствии с [113] выражение (3.4.30) имеет второй порядок малости по ε .

Излучение электромагнитных волн от собственного заряда сфероидальной капли. Для того, чтобы иметь возможность оценить интенсивность излучения, порождаемого собственным зарядом сфероидальной капли, в соответствии с формулой (3.4.2), найдем положение центра собственного заряда на возмущенной капле, используя формулу (3.4.1) (в этом случае интегрирование ведется по всей поверхности капли). В результате, в расчетах с сохранением членов второго порядка малости по ε выражение для смещения центра собственного заряда сфероидальной капли вдоль оси z в размерных переменных принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
R_{Qz} = R \left(-\frac{6}{35} e^2 \varepsilon h_3 \cos(\omega_3 t) + \varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \left[h_j h_{j-1} \left\{ \left(\frac{j}{2(2j+1)} + \beta_1(j) \right) \left(\cos(\omega_j - \omega_{j-1}) t + \cos(\omega_j + \omega_{j-1}) t \right) + \right. \right. \right. \\
+ \beta_2(j) \left(\cos(\omega_{j+1} - \omega_{j-1}) t + \cos(\omega_{j+1} + \omega_{j-1}) t \right) + \beta_3(j) \left(1 + \cos(2\omega_j t) \right) + \beta_4(j) \left(1 + \cos(2\omega_{j-1} t) \right) + \\
+ \beta_5(j) \left(\cos(\omega_{j+2} - \omega_{j-1}) t + \cos(\omega_{j+2} + \omega_{j-1}) t \right) + \beta_6(j) \left(\cos(\omega_{j-2} - \omega_{j-1}) t + \cos(\omega_{j-2} + \omega_{j-1}) t \right) + \\
+ \beta_7(j) \left(\cos(\omega_j - \omega_{j+1}) t + \cos(\omega_j + \omega_{j+1}) t \right) + \beta_8(j) \left(\cos(\omega_j - \omega_{j-3}) t + \cos(\omega_j + \omega_{j-3}) t \right) + \\
+ \beta_9(j) \left(\cos(\omega_j - \omega_{j-2}) t + \cos(\omega_j + \omega_{j-2}) t \right) + \beta_{10}(j) \left(\cos(\omega_{j+1} - \omega_{j-2}) t + \cos(\omega_{j+1} + \omega_{j-2}) t \right) \left. \right\} + \\
\left. \left. + h_j h_{j-3} \beta_{11}(j) \left(\cos(\omega_j - \omega_{j-3}) t + \cos(\omega_j + \omega_{j-3}) t \right) \right] \right). \quad (3.4.31)
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $\beta_i(j)$ ($i=1-11$), зависящие от значения индекса j и от всех физических параметров системы, в виду их громоздкой записи вынесены в приложение. Они имеют слагаемые порядка $\sim QE_0$, $\sim e^2$.

Следует отметить, что коэффициенты $\beta_i(j)$ обусловлены сфероидальным искажением равновесной поверхности осциллирующей во внешнем поле заряженной капли. Коэффициенты $\beta_1(j)-\beta_4(j)$, $\beta_9(j)$ имеют величину порядка $\sim QE_0$, а $\beta_5(j)-\beta_8(j)$, $\beta_{10}(j)$, $\beta_{11}(j) \sim e^2$. Однако в отсутствие электростатического поля эксцентриситет равновесной капли e и, следовательно, коэффициенты $\beta_i(j)$ обращаются в ноль. В этом случае выражение (3.4.31) будет иметь величину порядка $\sim \varepsilon^2$ и содержать только частоты $\omega_j \pm \omega_{j-1}$.

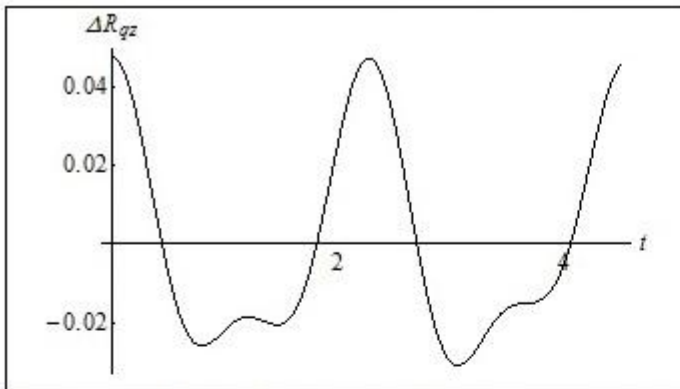


Рисунок 3.4.1a – Зависимость от безразмерного времени безразмерного смещения центра положительного индуцированного заряда капли ΔR_{qz} от его стационарного равновесного положения $R_{qz}^{(eq)} = 2(1+3w)/3$ при начальном возбуждении равновесной формы поверхности капли вида: $\varepsilon[P_2(\mu) + P_3(\mu)]/2$, рассчитанная при $\varepsilon = 0.1$, $Q = 5.6 \cdot 10^{-7}$ СГСЭ ($\sim 3 \cdot 10^{-3} Q_{кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 8 \cdot 10^{-5} Q_{кр}$ при $R = 30$ мкм), $E_0 = 0.17$ СГСЭ ($\sim 5 \cdot 10^{-5} E_{0кр}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 2 \cdot 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 30$ мкм). Здесь $Q_{кр}$ – критическое значение заряда и $E_{0кр}$ – критическое значение напряженности поля

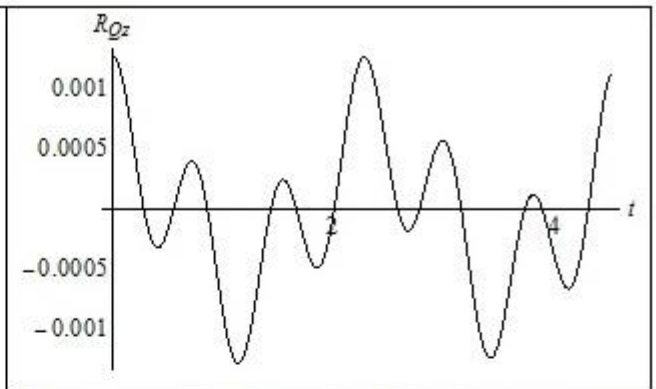


Рисунок 3.4.1b – Тоже, что на рисунке 3.4.1a, но для безразмерного смещения центра собственного заряда капли R_{Qz}

В соответствии с выражением (3.4.31) на рисунке 3.4.1b представлены осцилляции смещения центра собственного заряда капли $R_{Qz}(t)$ в безразмерном виде.

Из рисунка 3.4.1a и рисунка 3.4.1b можно видеть, что величина осцилляций «положения» центра индуцированного заряда капли R_{qz} на порядок выше, чем величина осцилляций «положения» центра собственного заряда капли R_{Qz} .

Это объясняется тем, что собственный заряд распределяется по всей поверхности заряженной капли ([141], стр.40), однако при капиллярных колебаниях поверхности капли вдоль оси OZ происходит лишь часть осцилляций заряда, которые вносят вклад в формирование R_{Qz} . Заметим, что при наличии внешнего электрического поля индуцированные заряды сосредоточены в основном на вершинах незаряженного сфероида (вблизи экватора капли плотность индуцированных зарядов весьма мала) и, следовательно, практически полностью вовлекаются в колебания поверхности сфероида вдоль оси OZ.

Таким образом, подставляя (3.4.31) в (3.4.2) и заменяя косинусы на их максимальное значение, в расчетах с сохранением членов второго порядка малости по ε получим выражение (в размерных переменных) для интенсивности дипольного излучения собственного заряда сфероидальной заряженной капли:

$$\begin{aligned}
 I_3 = & \frac{2Q^2}{3c^3} R^2 \left(\frac{6}{35} e^2 \varepsilon h_3 \omega_3^2 + \varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \left[h_j h_{j-1} \left\{ \left(\frac{j}{2(2j+1)} + \beta_1(j) \right) \left((\omega_j - \omega_{j-1})^2 + (\omega_j + \omega_{j-1})^2 \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \beta_2(j) \left((\omega_{j+1} - \omega_{j-1})^2 + (\omega_{j+1} + \omega_{j-1})^2 \right) + 4\beta_3(j) \omega_j^2 + 4\beta_4(j) \omega_{j-1}^2 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \beta_5(j) \left((\omega_{j+2} - \omega_{j-1})^2 + (\omega_{j+2} + \omega_{j-1})^2 \right) + \beta_6(j) \left((\omega_{j-2} - \omega_{j-1})^2 + (\omega_{j-2} + \omega_{j-1})^2 \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \beta_7(j) \left((\omega_j - \omega_{j+1})^2 + (\omega_j + \omega_{j+1})^2 \right) + \beta_8(j) \left((\omega_j - \omega_{j-3})^2 + (\omega_j + \omega_{j-3})^2 \right) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \beta_9(j) \left((\omega_j - \omega_{j-2})^2 + (\omega_j + \omega_{j-2})^2 \right) + \beta_{10}(j) \left((\omega_{j+1} - \omega_{j-2})^2 + (\omega_{j+1} + \omega_{j-2})^2 \right) \right\} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+h_j h_{j-3} \beta_{11}(j) \left((\omega_j - \omega_{j-3})^2 + (\omega_j + \omega_{j-3})^2 \right) \right] \right]^2. \quad (3.4.32)$$

Здесь отклонение сфероидальной поверхности капли от сферы характеризуется совместным воздействием внешнего слабого электрического поля, задающего выделенное направление, и заряда на капле, определяющего конечное значение (отличное от нуля) эксцентриситета [53]. Таким образом, излучением, порождаемым индуцированными зарядами, пренебрегаем.

Следует отметить, что в отсутствие внешнего поля ($E_0 = 0$) равновесная форма капли будет сферической. В результате, с учетом точного выражения для возмущенной поверхности заряженной капли (с точностью до членов второго порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций ε) выражение для интенсивности дипольного излучения осциллирующей заряженной капли примет следующий вид:

$$I_2 = \frac{4}{3} \frac{Q^2}{c^3} R^2 \varepsilon^4 \left[\sum_{j \in \Xi} h_j h_{j-1} \frac{j(j-2)}{(2j-1)(2j+1)} \left((\omega_j - \omega_{j-1})^2 + (\omega_j + \omega_{j-1})^2 \right) \right]^2. \quad (3.4.33)$$

Из выражения (3.3.33) следует, что интенсивность дипольного излучения от осциллирующего собственного заряда капли отлична от нуля, когда в спектре изначально возбужденных мод, определяющих начальное возмущение поверхности заряженной капли в отсутствии внешнего электрического поля, присутствуют две соседние колебательные моды. При этом возбуждается первая мода осцилляций, превращая осциллирующую заряженную каплю в излучатель дипольного типа.

Можно видеть, что выражение (3.3.30) получено в расчетах первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций ε , а (3.3.33) – в расчетах второго порядка малости по ε . Таким образом, излучение, генерируемое ускоренным движением собственного заряда капли, обнаруживаемое в расчетах второго порядка малости по ε , является дипольным (в линейных расчетах по ε дипольное излучение заряженной капли не реализуется). Однако квадрупольное излучение обнаруживается уже в расчетах первого порядка по ε . Как выяснилось,

излучение дипольного типа, генерируемое ускоренным движением индуцированных зарядов капли, обнаруживается в расчетах первого порядка малости по ε .

В итоге, полную интенсивность возникающего при капиллярных осцилляциях поверхности заряженной капли неподвижной в суперпозиции гравитационного и электростатического полей излучения I , будем моделировать в виде суммы интенсивностей излучений, генерируемых собственным и индуцированными зарядами капли. Таким образом, получим $I = \tilde{I} + I_3$, где первое слагаемое получено в расчетах первого порядка малости ε , а второе – в расчетах с сохранением членов второго порядка малости по ε .

Согласно [103] обозначим два наиболее вероятных источника радиоизлучения от капель воды в конвективных облаках. Первый источник излучения обусловлен осцилляциями низких мод мелких капель с концентрацией в облаке порядка $\sim 10^3$ штук на см^3 [130]. Характерные размеры таких капель от 3 до 30 мкм. Ко второму источнику излучения электромагнитных волн относятся уже осцилляции высоких мод свободно падающих (со скоростью ≈ 78 см/с) в облаке крупных капель (гидрометеоров), коагулирующих с более мелкими капельками. Натурные наблюдения показали, что концентрация таких капель в облаке существенно меньше и составляет $\sim 10^3$ штук на м^3 [130]. Падая сквозь облако, гидрометеор испытывает около 22 столкновений в секунду с мелкой каплей, в результате которых в нём будут возбуждаться колебательные моды с $n \in \{2 \div 30\}$.

Следует заметить, что осцилляции поверхности капель обусловлены, прежде всего, микрофизическими внутриоблачными процессами: коагуляцией с более мелкими частицами, изменением агрегатного состояния, дроблением на более мелкие в следствие столкновительных процессов или реализации электростатической неустойчивости, электрического и гидродинамического взаимодействия с соседними частицами [131]. При этом величина амплитуды

осцилляций облачных капель может принимать значения до десятков процентов от размера капли.

Согласно формуле (3.3.33) рассчитаем интенсивность дипольного излучения I_2 от единичной мелкой заряженной капли при начальном возбуждении двух соседних колебательных мод с номерами $j=2$ и $j=3$. Приведем следующие характеристики для капли: $\varepsilon=0.1$, $h_2=h_3=0.5$, $\sigma=73$ дин/см, $\rho=1$ г/см³.

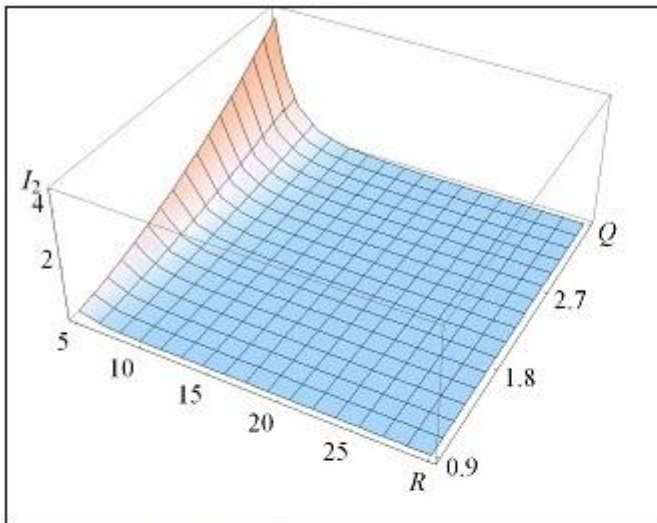


Рисунок 3.4.2 – Зависимость интенсивности I_2 электромагнитного излучения (единицы измерения – 10^{-29} эрг/с) единичной заряженной капли в отсутствии внешнего поля от радиуса (единицы измерения – мкм) и заряда капли (единицы измерения – 10^{-6} СГСЭ) при начальном возбуждении равновесной формы поверхности капли того же вида, что на рисунке 3.4.1а, рассчитанная при $\varepsilon=0.1$, $\sigma=73$ дин/см, $\rho=1$ г/см³

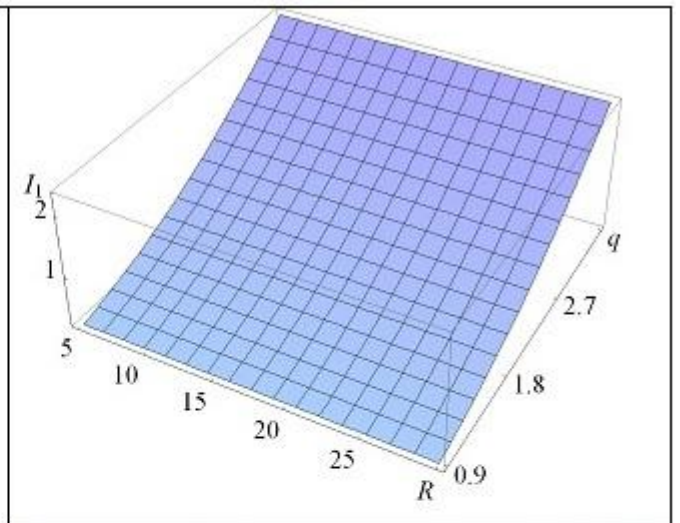


Рисунок 3.4.3 – То же, что и на рисунке 3.4.2, но для I_1 . Напряженность электростатического поля изменяется от $E_0=0.13$ СГСЭ до $E_0=0.53$ СГСЭ

Из рисунка 3.4.2, на котором изображена зависимость интенсивности излучения I_1 незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле, от размера капли и величины индуцированного заряда $q=3E_0R^2/4$, видно, что с увеличением внешнего поля интенсивность излучения быстро растет, а при изменении радиуса капли интенсивность излучения меняется крайне слабо (как было показано в разделе 3.2 диссертационной работы).

Из рисунка 3.4.3, на котором представлены зависимости интенсивности излучения I_2 от размера капли и величины её заряда, следует, что с увеличением заряда на капле интенсивность излучения возрастает, а при увеличении радиуса капли интенсивность быстро снижается.

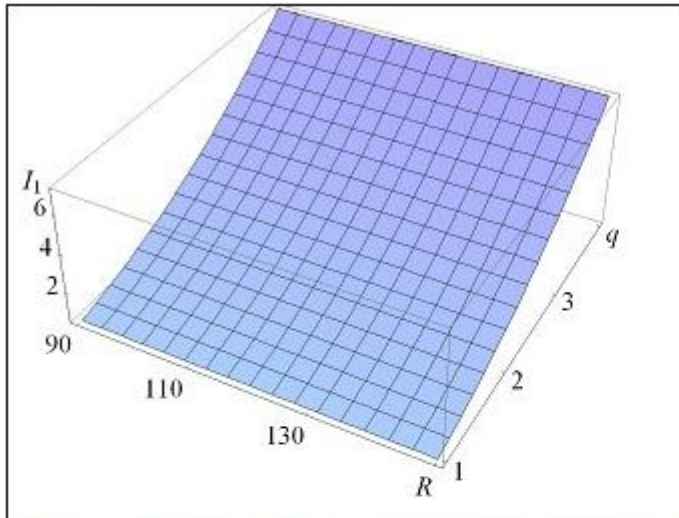


Рисунок 3.4.4 – Зависимость I_1 (единицы измерения – 10^{-30} эрг/с) для незаряженной капли, осциллирующей в слабом электростатическом поле, от радиуса (единицы измерения – мкм) и величины индуцированного заряда $q = 3E_0R^2/4$ (единицы измерения – 10^{-5} СГСЭ) при начальном возбуждении вида $\varepsilon[P_{20}(\mu) + P_{21}(\mu)]/2$, рассчитанная при тех же значениях величин, что на рисунке 3.4.2. Напряженность электростатического поля изменяется от $E_0=0.13$ СГСЭ до $E_0=0.53$ СГСЭ

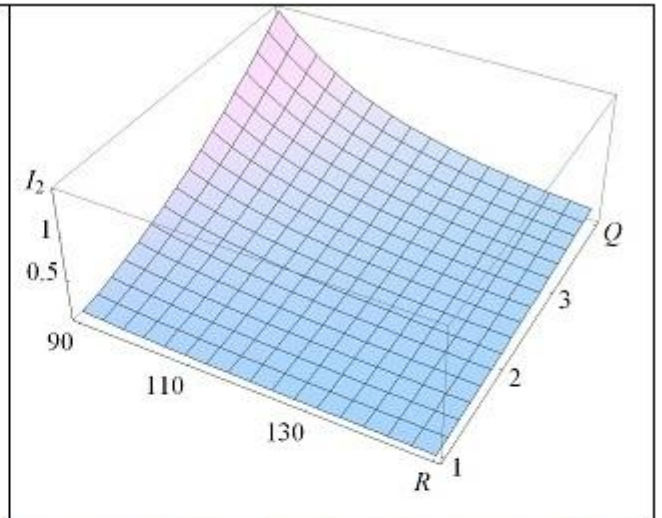


Рисунок 3.4.5 – То же, что на рисунке 3.4.4, но для I_2 (единицы измерения – 10^{-26} эрг/с) от радиуса (единицы измерения – мкм) и собственного заряда капли (единицы измерения – 10^{-5} СГСЭ) при том же начальном возбуждении, что на рисунке 3.4.4

На рисунке 3.4.4 и рисунке 3.4.5 отображены характеристики дипольного излучения для второго источника излучения, связанного со свободно падающими в облаке гидрометеорами, коагулирующими с более мелкими капельками, при начальном возбуждении двух соседних колебательных мод с номерами $j=20$ и $j=21$. Отметим, что зависимости, приведенные на рисунках 3.4.4-3.4.5, качественно совпадают с приведенными зависимостями на рисунках 3.4.2-3.4.3 для излучения мелких капелек. Показано, что интенсивность излучения единичного гидрометеора на три порядка величины превышает интенсивность излучения мелкой капли. Это связано с тем, что собственный заряд крупной капли (гидрометеора) на порядок выше по сравнению с зарядом мелкой капли.

Однако, оценивая мощность излучения от конвективного облака, следует учитывать, что концентрация мелких капелек с $R \approx 3$ мкм на шесть порядков выше, чем концентрация крупных капель с $R \approx 100$ мкм. Таким образом, по порядку величины мощность электромагнитного излучения от кучуво-дождевого облака определится мелкими капельками.

Следует заметить, что зависимости для \tilde{I} и I_3 будут качественно аналогичны с приведенными для I_1 и I_2 при тех же физических величинах, что на рисунке 3.4.2. Значения же интенсивностей излучения увеличиваются при этом на несколько процентов.

Таким образом, в теоретических асимптотических расчетах установлено, что имеются асимптотические различия между электромагнитным излучением, генерируемым капиллярными осцилляциями поверхности заряженной капли, и излучением, вызванным капиллярными осцилляциями поверхности незаряженной капли в электростатическом поле. В первом случае менее интенсивное квадрупольное излучение обнаруживается в расчетах первого порядка малости по ε , а интенсивное дипольное – в расчетах второго порядка малости по ε . Однако во втором случае дипольное излучение обнаруживается уже в линейных расчетах по ε .

Следует отметить, что использованные выше идеи и методы анализа могут быть использованы для изучения электромагнитного излучения нано объектов, таких как фуллерены и нанотрубки [146-148].

Рекомендации экспериментаторам

Анализируя выше полученные результаты интенсивности возникающего при капиллярных осцилляциях поверхности капель воды электромагнитного излучения, прежде всего отметим, что возможный источник электромагнитного излучения, связанный с осцилляциями низких мод мелких капелек в грозовом облаке, обладает наибольшей мощностью излучения (из всех возможных в рамках диссертационной работы), идущей в области низких, средних и высоких частот. Принимая для оценки напряженность сильного поля $E_0 = 56.7$ СГСЭ ($E_0 = 2 \cdot 10^4$ В/см) ($\sim 6 \cdot 10^{-2} E_{0кр}$) (меньше пробивного), грозовое облако диаметром 5 км, состоящее из осциллирующих сильно заряженных капель радиусом $R = 30$ мкм и зарядом $Q = 9 \cdot 10^{-4}$ СГСЭ ($\sim 0.13 Q_{кр}$), дает интенсивность дипольного электромагнитного излучения $I_{in} \sim 2 \cdot 10^{-4}$ эрг/с (обнаруживается методом общей теории излучения в расчетах первого порядка малости по квадрату отношения радиуса капли к длине излучаемой волны δ и с сохранением членов второго порядка малости по отношению амплитуды осцилляций к радиусу капли ε). Такая интенсивность излучения может быть надежно зафиксирована радиоприемной аппаратурой, чувствительность которой составляет $\sim 2 \cdot 10^{-6}$ эрг/с [102].

Из сказанного ясно, что для выше приведенной оценки рассматривалось сильное поле, тогда как в реальности незаряженные внутриоблачные капли целесообразно рассматривать в слабых электрических полях [134] (при этом варьирование зарядов на каплях не отразится на усилении мощности излучения). Таким образом, следует сделать заключение о том, что для обнаружения электромагнитного излучения от конвективных облаков необходимо усовершенствование радиоприемных средств с целью повышения чувствительности радиоприемного тракта.

Отметим, что проведенное исследование является модельным. Однако, чтобы приблизиться к реалиям грозового облака, необходимо учесть изменение во времени заряда капли и напряженности электрического поля в грозовом облаке. Информацию о состоянии вопроса с измерением изменения напряженности поля внутри облака можно найти в [154-156].

Результаты и выводы

1. В электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по отношению амплитуды осцилляций незаряженной капли идеальной идеально проводящей несжимаемой жидкости в однородном электростатическом поле к её характерному линейному размеру ε найдена равновесная форма капли (оказавшаяся сфероидальной в линейном приближении по величине стационарной деформации), напряжённость её электрического поля в волновой зоне и выведено дисперсионное уравнение, имеющее комплексные решения. Мнимая часть частоты характеризует декремент затухания капиллярных осцилляций, невозможного в идеальной жидкости, из чего сделан вывод о наличии излучения, возникающего при ускоренном движении заряженной поверхности, интенсивность излучения оценена по порядку величины.

2. В электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по ε капиллярного волнового движения на поверхности сфероидальной капли рассчитана поверхностная плотность индуцированного внешним электростатическим полем заряда на ней. Рассчитан дипольный момент возмущённой сфероидальной капли, осциллирующий во времени и генерирующий излучение дипольного типа, интенсивность которого оценена по известным соотношениям, и совпала с оценкой из закона сохранения энергии.

3. В электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по ε найдены поверхностная плотность собственного электрического заряда на поверхности сферической капли идеально проводящей несжимаемой жидкости, возмущённой капиллярным волновым движением, и зависящий от времени её квадрупольный момент, генерирующий квадрупольное излучение. Интенсивность квадрупольного излучения совпала с оценкой из закона сохранения энергии, выполненной другими авторами.

4. В электрогидродинамических расчетах второго порядка малости по ε обнаружено, что если в спектре начального возбуждения присутствуют две моды

с последовательными номерами, то возбуждается первая мода осцилляций, превращая осциллирующую заряженную каплю в излучатель дипольного типа.

5. Для осциллирующей заряженной капли в суперпозиции гравитационного и однородного электростатического полей в электрогидродинамических расчетах нулевого порядка малости по ε и первого порядка по величине равновесной деформации найдена равновесная форма капли, которая может считаться сфероидальной в указанных порядках малости. В расчетах первого порядка по ε осцилляций заряженной сфероидальной капли в волновой зоне найдено дисперсионное уравнение, имеющее комплексное решения, мнимая часть которого характеризует декремент затухания, связанный с излучением электромагнитных волн. В рамках закона сохранения энергии оценена его интенсивность.

6. Для заряженной сфероидальной капли, свободная поверхность которой возмущена капиллярным волновым движением, в электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по ε определена аналитическая форма возмущения, поверхностная плотность заряда, зависящий от времени дипольный момент, и по известным формулам найдена интенсивность дипольного излучения, причём интенсивность дипольного излучение от собственного заряда капли искалась в электрогидродинамических расчётах с сохранением слагаемых второго порядка малости по ε .

7. Обнаружено при сравнении по порядку величины различных компонент полного излучения от заряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле, что дипольное излучение более интенсивно, чем дипольное на 15 порядков величины. Оно обнаруживается для незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле, в электрогидродинамических расчетах первого порядка малости по ε , а для осциллирующей заряженной капли только во втором порядке малости по ε .

Список литературы

1. Rayleigh J.W.S. On the capillary phenomena of jets//Proc. R. Soc. London.–1879.–V.19.–P. 71-97.
2. Rayleigh J.W.S. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity//Phil. Mag.–1882.–V.14.–P. 184-186.
3. Hendrics C.D., J.M. Schneider. Stability of conducting droplet under the influence of surface tension and electrostatic forces//J. Amer. Phys.–1963.–V.1, №6.–P. 450-453.
4. Taylor G. Disintegration of water drops in an electric field//Proc. Roy. Soc. A.–1964.–V.280.–P. 383-397.
5. Doyle A., Moffett D.R., Vonnegut B. Behavior of evaporating electrically charged droplets//J. Coll. Sci.–1964.–V.19.–P. 136-143.
6. Schweizer J.D., Hanson D.N. Stability limit of charged drops//J. Coll. Int. Sci.–1971.–V.35, №3.–P. 417-423.
7. Baily A.G.//Phys. Fluids.–1974.–V.17, №4.–P. 852-853.
8. Roth D.G., Kelly A.J.//IEEE Trans. Ind. Appl.–1983.–V.IA-19, №5.–P. 771-775.
9. Elghazaly H.M.A., Castle G.S.P.//IEEE Trans. Ind. Appl.–1987.–V.IA-23, №1.–P. 108-113.
10. Elghazaly H.M.A., Castle G.S.P.//IEEE Trans. Ind. Appl.–1986.–V.IA-22, №5.–P. 892-895.
11. Ryce S.A., Wyman R.R.//Canad. J. Phys.–1964.–V.42, №11.–P. 2185-2194.
12. Ryce S.A., Patriarche D.A.//Canad. J. Phys.–1965.–V.43, №9.–P. 2192-2199.
13. Abbas M.A., Latham J.//J. Fluid. Mech.–1967.–V.30, №4. –P. 663-670.
14. Berg G.O., Irainor R.J., Vaughan U.//J. Atmos. Sci.–1970.–V.27, № 11.–P. 1173-1181.
15. Roulleau M., Desbois M.//J. Atmos. Sci.–1972.–V.29, №4.–P. 565-569.
16. Cerkanowicz A.E.//IEEE. IAS Conf. Proc. New York.–1981.–P. 1161-1165.

17. Fong C.S., Black N.D., Kiefer P.A., Shaw R.A. An experiment on the Rayleigh instability of charged liquid drops//Am. J. Phys.2007– V.75, №6.–P. 499-503.
18. Berg G.O., George D.C. Investigations of charged water drops//Monthly Weather Review.–V.95, №12.–P. 884-894.
19. Duft D., Lebius H., Huber B.A. Shape oscillations and stability of charged microdroplets// Phys. Rev. Lett.–V.89–084503.
20. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Закономерности релеевского распада заряженной капли//ЖТФ.–1991.–Т.61, №3.–С. 19-28.
21. Григорьев А.И. О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли//ЖТФ.–1985.–Т.55, №7.–С. 1272-1278.
22. Григорьев А.И. Аналитические расчеты осцилляций заряженной капли: монография/Григорьев А.И., Ширяева С.О.//Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова.–Ярославль: ЯрГУ.–2011.–312 с.
23. Стаханов И.П. Об устойчивости шаровой молнии//ЖТФ.–1974.–Т.44, №7.–С. 1373-1379.
24. Алиев И.Н. Спектр капиллярных колебаний заряженной капли//Инженерный журнал: наука и инновации.–2013.–вып. 8.–С. 1-10.
25. Zeleny J. The electrical discharge from liquid points and a hydrostatic method of measuring the electric intensity at their surface//Amer. Phys. Soc. Rev.–1914.–V.3, №2.–P. 69-91.
26. Zeleny J. On the conditions of instability of electrified drops with applications to the electrical discharge from liquid points//Proc. Cambridge Phil. Soc.–1914.–V.18, №1.–P. 71-83.
27. Zeleny J. Instability of electrified liquid surfaces//Phys. Rev.–1917.–V.10, №1.–P. 1-6.
28. Zeleny J. Electrical discharges from pointed conductors//Phys. Rev.–1920.–V.16, №1.–P. 120-125.
29. Wilson C.T.R., Taylor G.T. The bursting of soap-bubbles in a uniform electric field// Proc. Cambridge Phil. Soc.–1925.–V.22.–P. 720-730.

30. Macky W.A. Some investigations on the deformation and breaking of water drops in strong electric fields//Proc. Roy. Soc. London.–1931.–V.A133, №822.–P. 565-587.
31. Nolan G.G. The breaking of water drops by electric field//Proc. Roy. Irish Akad.–1926.–V.A37.–P. 28-39.
32. Шкадов В.Я., Шутов А.А. Деформация капель и пузырьков в электрическом поле// Изв. АН СССР. МЖГ.–2002.–№5.–С. 54–54.
33. Могилевский Е.И., Шкадов В.Я., Шутов А. А. Равновесные формы висящей капли в электростатическом поле// Изв. АН СССР. МЖГ.–2012.–№5.–С. 23–31.
34. Могилевский Е.И., Шкадов В.Я., Шутов А.А. Итерационный метод определения формы капли жидкости в электрическом и гравитационном поле//Сб. докладов X междунар. научн. конфер. Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей.–С-Петербург, 2012.–С. 244–246.
35. Квасов Д.И. Капля слабопроводящей жидкости в гармоническом электрическом поле.//Изв. АН СССР. МЖГ.–2016.–№2.–С. 100-114.
36. Торза С., Кокс Р., Мейсон С. Электродинамическая деформация и разрыв капель//В сб.: Реология суспензий.–М.: Мир.–1975.–С. 347-350.
37. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Равновесная форма проводящей капли в электрическом поле//ЖТФ.–1987.–Т.57, №9.–С. 1706-1713.
38. O' Konski С.Т., Thacher Н.С. The distortion of aerosol droplets by an electric field//J. Phys. Chemistry.–1953.–V.57, №9.–P. 955-958.
39. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.–М.: Наука.–1982.–623 с.
40. Григорьев А.И., Синкевич О.А. К механизму развития неустойчивости капли жидкости в электрическом поле//Изв. АН СССР. МЖГ.–1985.–№6.–С. 10–15.

41. Александров М.Л. и др. Расчет свободной поверхности проводящей жидкости в сильном электрическом поле// Изв. АН СССР. МЖГ.–1983.–№6.–С. 165–167.
42. Taylor G. Disintegration of water drops in a electric field//Proc. Roy. Soc. A.–1964.–V.280.–P. 383-397.
43. Morrison C.A., Leavitt R.P., Wortman D.E. The extended Rayleigh theory of the oscillation of liquid droplets// J. Fluid Meeh.–1981.–V.104–P. 295-309.
44. Cheng K.J. Capillary oscillations of a drop in an electric field// Physics Letters.–1985.–V.112A, №8.–P. 392-396.
45. O' Konski C.T., Thacher H.C. Electric free energy and deformation of droplets in electrically conducting system//J. Phys. Chemistry.–1957.–V.61, №9.–P. 1172-1174.
46. Бейтуганов М.Н. К вопросу о коронировании нейтральных заряженных частиц в электрическом поле//Сб. тр. ВГИ.–1982.–№52.–С. 9-14.
47. Бейтуганов М.Н., Белгороков Л.Г. Исследование взаимодействия двух частиц в электрическом поле//Сб. тр. ВГИ.–1987.–№69.–С. 3-11.
48. Бейтуганов М.Н. Об обусловленных сильными электрическими полями физических явлений в облаках//Метеорология и гидрология.–1989.–№9.–С. 42-49.
49. Габович М.Д. Жидкометаллические эмиттеры ионов//Успехи физических наук.–1983.–Т.140, № 1.–С. 137-151.
50. Гзиришвили Т.Г., Магражзе Г.Д.//Тр. Института геофизики АН СССР.–1984.–Т. 52.–С. 46-52.
51. Brasier-Smith P.R.//Quart J.R. Met. Soc.–1972.–V.98.–P. 434-439.
52. Ширяева С.О. Нелинейный анализ равновесной формы заряженной электропроводной капли в электростатическом подвесе.//ЖТФ.–2006.–Т.76, вып. 10.–С. 32-40.
53. Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Григорьев А.И. О равновесной форме сильно заряженной капли, висящей в слабом электростатическом поле//ЖТФ.–2015.–Т.85, вып. 8.–С. 33-39.

54. Панченков Г.М., Цабек Л.К. Поведение эмульсии во внешнем электрическом поле.–М.: Химия.–1959.–190 с.
55. Zrníc D.S., Doviak R.J., Mahapatra P.R. The effect of charge and electric field on the shape of raindrops//Radio Sci.–1984.–V.19, №1.–P. 75-83.
56. Abbas M.A., Latham J. The disintegration and electrification of charged water drops falling in an electric field//Quart J.R. Met. Soc.–1969.–V.95. –P. 63-76.
57. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях//ЖТФ.–1989.–Т.59, №6.–С. 27-34.
58. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Критерий неустойчивости заряженной капли в электростатическом подвесе//ЭОМ.–2015.–Т.51, №3.–С. 44-50.
59. Нестеров С.В. Параметрическая неустойчивость заряженной капли//МЖГ.–1986.–№5.–С. 170-172.
60. Стерлядкин В.В., Тенякова О.А. Возбуждение собственных колебаний капли внешним периодическим электрическим полем//Московский институт приборостроения.–1988.–№ 54.–С. 1-12.
61. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Поверхностные колебания свободно падающей капли идеальной жидкости//Известия РАН. ФАО.–2018.–Т.54, № 2.–С. 1-7.
62. Гигорьев А.И., Лазарянц А.Э. Параметрическая неустойчивость проводящей капли по отношению к стохастически изменяющемуся со временем собственному заряду//Известия АН СССР. МЖГ.–1990.–№ 5.–С. 52-56.
63. Григорьев А.И. Неустойчивость электропроводной капли в переменном электрическом поле//Известия АН СССР. МЖГ.–1989.–№ 1.–С. 50-55.
64. Bordakov G.A., Karpov I.I., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya, Shingareva I.K. Analytic derivation of the dependence of the frequency of standing surface waves on the amplitude in a liquid of finite depth// Comp. Math. Math Phys.–1995.–V. 35, № 11.–С. 1423-1428.

65. Кравцов А.В., Секерж-Зенькович С.Я. Собственные колебания вязкой непрерывно стратифицированной жидкости в замкнутом сосуде//Журнал вычисл. матем. и матем. физики.–1996.–Т. 36, № 2.–С. 119-125.
66. Кравцов А.В., Секерж-Зенькович С.Я., Калиниченко В.А., Родригес-Мижангес Р., Флоренс-Эспиноза Р. Гармоническая неустойчивость поверхности маловязкой жидкости в вертикально колеблющемся сосуде//Известия РАН. ПММ.–Т. 64, № 2.–С. 285-292.
67. Качурин Л.Г., Дивинский Л.И. Активно-пассивная радиолокация грозовых и грозоопасных очагов в облаках.–Л.: Гидрометеиздат.– 1992.–215 с.
68. Юман М.А. Естественная и искусственно инициированная молнии и стандарты на молниезащиту//ТИИЭР.–1988.–Т. 76, № 12.–С. 5-26.
69. Gibson N.E. Some observations of microwave radiation from clouds//Mem. Rept. 693 US Naval Res. Laboratory.–Washington, DC.– 1957.–P. 4.
70. Dickey F.R.J. The production of millimeter waves by spark discharges//Tech. Rept. 123 Cruft Laboratory.–Harward University– 1951.
71. Atkinson W.R., Paluch I. Electromagnetic emission from pairs of water drops exchanging charge//J. Geophys. Res.–1966.–V.71, №16.– P. 3811-3816.
72. Hogg D.C., Sempлак R.A. The effect of rain and water drops on sky noise centimeter wavelengths//Bell. System. Tech. J.–1961.–V.40.–P. 1331—1348.
73. Sartor D.J. Radio emission from clouds//J. Geophys. Res.–1963.–V. 68, №18. P. 5168—5172.
74. Horner F., Bradley P A. The spectra of atmospherics from near lightning discharges//J. Atmos. and Terr. Phys.–1964.–V.24, №12.–P. 1156—1166.
75. Sartor D.J. Radio observations of the electromagnetic emission from warm clouds//Science.–1964.–V.143.–P. 948—950.
76. Kimpara A. Electromagnetic energy radiation from lightning//Proc. Res. Inst. Atmos-Nagoya Univ.–1964.–№11.–P. 1-12.
77. Zonge K.L., Evans W.H. Prestroke radiation from thunder clouds//J. Geophys. Res.–1966.–V. 71, №6.–P. 1519-1523.

78. Miller A.H., Sheldon C.E., Atkinson W.R. Spectral study of the luminosity produced during coalescence of oppositely charged falling water drops.//Phys. of Fluids.–1965.–V.8,№11.–P. 1921-1928.
79. Sartor J.D., Atkinson W.R. Charge transfer between raindrops.//Science.–1967.–V.157, №3794.–P. 1267.
80. Качурин Л.Г., Кармов М.И., Медалиев Х.Х. Основные характеристики радиоизлучения конвективных облаков//Изв. АН СССР. Сер. ФАО.–1974.–Т. 10, №11.–С. 1164-1169.
81. Harvey R.B., Lewis E.A. Radio mapping of 250- and 925-Megahertz noise sources in clouds//J. Geophys. Res.–1973.–V.78, №12.–P. 1944-1947.
82. Гашина С.Б., Сальман Е.М. Особенности радиолокационных характеристик грозовых облаков//Тр. ГГО.–1965.–Вып. 173.–С. 19-25.
83. Исследование радиолокационных характеристик кучево-дождевых облаков применительно к задаче распознавания опасных явлений/А. Г. Линева, С. Б. Гашина, Б. Ш. Дивинская, Е. М. Сальман//Тр. Всесоюз. симпоз. по радиофизическим исследованиям атмосферы.–Л.: Гидрометеиздат.– 1977.–С. 239.
84. Мучник В.М. Некоторые радиолокационные характеристики ливней и гроз//Тр. ЦАО.–1958.–Вып. 20.–С. 82-87.
85. Сальман Е.М. Методы совершенствования радиолокационного штормооповещения//Тр. Всесоюз. симпоз. по радиофизическим исследованиям атмосферы.–Л.: Гидрометеиздат.–1977.–С. 238.
86. Кармов М.И. О некоторых особенностях электромагнитного излучения кучево-дождевых облаков в метровом диапазоне волн//Тр. Всесоюз. симпоз. по радиофизическим исследованиям атмосферы.–Л.: Гидрометеиздат.–1977.–С. 275.
87. Медалиев Х.Х., Сижажев С.М. Активная и пассивная радиолокация грозовых явлений//Тр. Всесоюз. симпоз. по радиофизическим исследованиям атмосферы.–Л.: Гидрометеиздат.– 1977.–С. 276.

88. Кармов М.И. Оценка полных энергий электромагнитного излучения разрядных процессов в облаках в диапазоне $4-10^6$ кГц//Тр. ВГИ.–1985.– Вып. 56.–С. 21-28.
89. Исследование эффективности кристаллизующего действия реагентов в облаках по радиоизлучению/Х.Х. Медалиев, В.В. Березкин, Х. Б. Кяров, С.М. Сижажев//Тр. ВГИ.–1979.–Вып. 42.–С. 84-88.
90. Стерлядкин В.В. Натурные измерения колебаний капель осадков//Изв. АН СССР. Сер. ФАО.–1988.–Т.24, №6.–С. 613-621.
91. Latham J. The mass loss of water drops falling in electric fields//Quart J. R. Met. Soc.–1965.–V.91, №387. –P. 87-91.
92. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Механизм развития ступенчатого лидера и внутриоблачного ветвления линейной молнии//ЖТФ.–1989.–Т.59, вып.5.–С. 6-13.
93. Петров Н.И., Сисакян И.Н. Излучение молниевых разрядов//Компьютерная оптика.–1993.–№13.–С. 65-75.
94. Войцеховский Б.В., Войцеховский Б.Б.//Письма в ЖЭТФ.–1976.–Т.23, №9.– С. 2020-2026.
95. Григорьев А.И. Капиллярные электростатические неустойчивости// Соревновательный журнал. Химия.–2000.–Т.6, №6.–С. 37-43.
96. Григорьев А.И., Синкевич О.А. О природе электрических явлений в воронке смерча//ЖТФ.–1986.–Т.56. Вып. 10.–С. 1985-1987.
97. Качурин Л.Г. Физические основы воздействия на атмосферные процессы.– Л.: Гидрометеиздат.– 1990.–463 с.
98. Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Механизм притяжения молнии и проблема лазерного управления молнией//УФН.–2000.–Т.170. №7.–С. 753-769.
99. Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Физика молнии и молниезащиты.–М.: Физматлит.–2001.–320 с.
100. Райзер Ю.П. Физика газового разряда.–М.: Наука.–1987.–592 с.
101. Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Искровой разряд. Учебное пособие: Для вузов.– М.: Издательство МФТИ.–1997.–320 с.

102. Аджиев А.Х., Богаченко Е.М. Грозы Северного Кавказа: монография/А.Х. Аджиев, Е.М. Богаченко–Нальчик: Полиграфсервис и Т.–2011.–152 с.
103. Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков//ДАН СССР.–1982.–Т.262, №6.–С. 1344-1347.
104. Чалмерс Дж. Атмосферное электричество//Л.: Гидрометеиздат.–1974.
105. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Голованов А.С., Рыбакова М.В. Электромагнитное излучение, генерируемое линейными колебаниями заряженной капли//ЖТФ.–2002.–Т.72, вып. 1.–С. 8-14.
106. Богатов Н.А. Электромагнитное поле, генерируемое капиллярными колебаниями капель//Сборник тезисов докладов VI Международной конференции “Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений”.–Петропавловск-Камчатский, ДВО РАН.–2013.–С. 22–26.
107. Tsamopoulos J.A., Brown R.A. Nonlinear oscillation of inviscid drops and bubbles//J. Fluid Mech.–1983.–V.127.–P. 519-537.
108. Tsamopoulos J.A., Brown R.A. Resonant oscillations of inviscid charged drops//J. Fluid Mech.–1984.–V.147.–P. 373-395.
109. Tsamopoulos J.A., Akylas T.R., Brown R.A. Dynamics of charged drop break-up//Proc Roy. Soc. London. Ser. A.–1985.–V.401, №1820.–P. 67-88.
110. Natarajan R., Brown R.A. The role of three-dimensional shapes in the break-up of charged drops//Proc Roy. Soc. London. Ser. A.–1987.–V.410, №1838.–P. 209-227.
111. Basaran O.A., Scriven L.E. Axisymmetric shapes and stability of isolated charged drops//Phys. Fluids. A.–1989.–V.1, №5.–P. 795-798.
112. Feng J.Q., Beard K.V. A perturbation model of raindrop oscillation characteristics with aerodynamic effects//J. Atmos. Sci.– 1991.–№48 (16).–P. 1856–1868.
113. Wang T.G., Anilkumar A.V., Lee C.P. Oscillation of liquid drops: results from USML-1 experiments in Space//J. Fluid Mech.–1996.–V.308.–P. 1-14.
114. Benjamin T.B., Ellis A.T.//J. Fluid Mech.–1989.–V.202.–P. 65-80.

115. Feng Z.C., Leal L.G.//Phys. Fluids.– 1995.–V.7, №6.–P. 1325–1336.
116. Feng Z.C.//J. Fluid Mech.–1997.–V.333.–P. 1-21.
117. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н. О расчете амплитуды трансляционной моды при нелинейных осцилляциях капли во внешней среде//ЖТФ.–2003.–Т.73, вып. 9.–С. 60-63.
118. Ширяева С.О. Нелинейные осцилляции заряженной капли при начальном возбуждении соседних мод//ЖТФ.–2002.–Т.72, вып. 4.–С. 15-22.
119. Ширяева С.О. Нелинейные осцилляции заряженной капли при многомодовой начальной деформации равновесной формы//Изв. РАН. МЖГ.–2001.–№3.–С. 173-184.
120. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Голованов А.С. Электромагнитное излучение нелинейно осциллирующей заряженной капли//Письма в ЖТФ.–2001.–Т.27, вып. 20.–С. 65-71.
121. Ширяева С.О., Волкова М.В., Григорьев А.И. Нелинейные осцилляции незаряженной электропроводной капли в однородном внешнем электростатическом поле//ЖТФ.–2002.–Т.72, вып. 4.–С. 15-22.
122. Ширяева С.О. Нелинейные осцилляции заряженной капли, ускоренно движущейся в электростатическом поле//ЖТФ.–2006.–Т.76, вып. 6.–С. 44-54.
123. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля.–М.: Наука.–1973.–504 с.
124. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Электромагнитное излучение заряженной вязкой капли конечной проводимости//Изв. РАН. МЖГ.–2002.–№5. С. 67-73.
125. Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O.//Physica Scripta.–1996.–V.54.–P. 660-666.
126. Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. Физические величины: Справочник.–М.: Энергоатомиздат.–1991.–1232 с.
127. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме//ЖЭТФ.–1936.–Т.6. №4.–С. 348-350.

128. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям.—М.: Наука.—1979.—830 с.
129. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика.—М.: Наука.—1988.—208 с.
130. Мазин И.П., Шметер С.М. Облака. Строение и физика образования.—Л.: Гидрометеиздат.—1983.—280 с.
131. Beard K.V., Tokay A. field study of small raindrop oscillations//Geophysical research letters.—1991.—V.18. №12.—P. 2257-2260.
132. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли-пыли, дымы и туманы.—Л: Химия.—1969.—428 с.
133. Амелин А.Г. Теоретические основы образования тумана при конденсации пара.—М: Химия.—1966.—295 с.
134. Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. Облака и облачная атмосфера. Справочник.—Л.: Гидрометеиздат.—1989.—647 с.
135. Григорьев А.И., Паранин А.Р., Ширяева С.О. О структуре поля скоростей под сфероидальной свободной поверхностью осциллирующей капли вязкой жидкости в электростатическом поле//ЖТФ.—2011.—Т.81. Вып.9.—С. 30-371.
136. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента.—Л.: Наука.— 1975.—436 с.
137. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика.—М.: Наука.—1986.—733 с.
138. Кистович А.В. Капиллярные волны на поверхности падающей капли жидкости//Процессы в геосредах.—2016.—№7.—С. 232-238.
139. Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю. Капиллярные волны на поверхности погружающейся в жидкость капли//ДАН.—2015.—Т. 465.—№4.—С. 434-440.
140. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Том 1.—М: Наука.—1969.—912 с.
141. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.—М.: Наука.—1982.—621 с.
142. Найфе А.Х. Методы возмущений.—М.: Мир.—1976.—455 с.
143. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. —М.: Мир.—1967.—310 с.

144. Григорьев А.И., Ширяева С.О. О нелинейном и линейном электромагнитном излучении осциллирующей заряженной капли//ЖТФ.–2016.–Т.86. Вып.12.–С.129-134.
145. Юман М. Молния//М: Мир.–1972.–328 с.
146. Садыков Н.Р. Излучающие и поглощающие свойства среды на основе массива не взаимодействующих нанотрубок// ЖТФ.–2014.–Т.84. Вып. 8.–С. 88-92.
147. Садыков Н.Р., Пешков Д.А., Ахлюстина Е.А. Аналог излучения Вавилова–Черенкова в среде на основе массива не взаимодействующих нанотрубок//Теоретическая и математическая физика.–2015.–Т. 184, № 2.–С. 307-314.
148. Садыков Н.Р., Апороски А.В. Аналогии излучения Вавилова–Черенкова в массиве невзаимодействующих нанотрубок//Теоретическая и математическая физика.–2016.–Т. 188, № 1.–С. 169-182.
149. Аджиев А.Х., Тапасханов В.О., Стасенко В.Н. Система грозопеленгации на Северном Кавказе//Метеорология и гидрология.–2013.–№ 1.–С. 5-11.
150. Аджиев А.Х., Коровин Е.А., Чернышев С.В., Щукин Г.Г., Кулиев Д.Д. Измеритель напряженности электрического поля атмосферы//Приборы и техника эксперимента.–2017.–№ 5.–С. 125-129.
151. Аджиев А.Х., Стасенко В. Н., Шаповалов А.В, Шаповалов В.А. Напряженность электрического поля атмосферы и грозовые явления на Северном Кавказе//Метеорология и гидрология.–2016.–№ 3.–С. 46-54.

Публикации автора по теме диссертации.

Статьи в рецензируемых журналах, включенных в перечень ВАК:

152. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Излучение электромагнитных волн сфероидальной заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле//Изв. РАН. МЖГ.–2016.–№3.–С.158-168.
153. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Дипольное электромагнитное излучение заряженной капли, осциллирующей в

- однородном электростатическом поле//Изв. РАН. МЖГ.–2018.–№2. –С.62-76.
154. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Излучение электромагнитных волн осциллирующей сильно заряженной каплей//ЖТФ.–2016.–Т. 86. Вып. 8.–С. 68-75.
155. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Квадрупольное электромагнитное излучение осциллирующей заряженной капли//ЖТФ.–2017.–Т.87. Вып. 6.–С. 914-920.
156. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю. Асимптотический расчет интенсивности дипольного электромагнитного излучения от осциллирующей в электростатическом поле незаряженной капли//ЭОМ.–2017.–Т.53.–№4.–С.28-38.

Другие публикации:

157. Колбнева Н.Ю. Излучение электромагнитных волн незаряженной каплей, осциллирующей в слабом электростатическом поле//Дисперсные системы: материалы XXVI международной научной конференции.–Одесса: «Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова».–2014.–С. 82-83.
158. Колбнева Н.Ю. Электромагнитное излучение от заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле//Материалы международного молодежного научного форума «Ломоносов-2015». Секция «Математика и механика». Подсекция «Гидромеханика» [Электронный ресурс].–М.: МАКС Пресс.–2015. <http://lomonosov-msu.ru>
159. Колбнева Н.Ю. Электромагнитное излучение, генерируемое линейными колебаниями заряженной капли, осциллирующей во внешнем электрическом поле//Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики. Сборник докладов XI Международной научной конференции/Санкт-Петербург.–СПб.: ИД «Петроградский».–2015.–С. 266-269.

160. Колбнева Н.Ю. Дипольное электромагнитное излучение незаряженной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле//Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов-2016». Секция «Математика и механика». Подсекция «Гидромеханика» [Электронный ресурс]–М.: МАКС Пресс.–2016. <http://lomonosov-msu.ru>
161. Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Дипольное электромагнитное излучение незаряженной каплей, осциллирующей в однородном электростатическом поле//Сборник трудов XV Всероссийской школы-семинара «Волновые явления в неоднородных средах» имени профессора А.П. Сухорукова («Волны-2016»). Секция «Гидродинамические волны и течения»/Можайск.–2016.–С. 20-22. <http://waves.phys.msu.ru>

Приложение

Выражения для коэффициентов $V_1 - V_5$, $T_1 - T_8$ в (2.3.12):

$$V_1 = 5 \frac{(9\rho_1 + 4\rho_2)}{(3\rho_1 + 2\rho_2)}; \quad V_2 = 6 \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{(3\rho_1 + 2\rho_2)}; \quad V_3 = \frac{2}{21} \frac{(117\rho_1 + 68\rho_2)}{(3\rho_1 + 2\rho_2)};$$

$$V_4 = \frac{2}{21} \frac{(243\rho_1 + 152\rho_2)}{(3\rho_1 + 2\rho_2)}; \quad V_5 = \frac{1}{49} \frac{(3357\rho_1^2 + 4176\rho_1\rho_2 + 1492\rho_2^2)}{(3\rho_1 + 2\rho_2)^2};$$

$$T_1 = 3 \left(11 + \frac{2}{5} \left(14 G_{1_1}(kr) \Big|_{r=R} + 81 G_{1_3}(kr) \Big|_{r=R} \right) \right);$$

$$T_2 = -\frac{20\rho_2}{(3\rho_1 + 2\rho_2)} + 6 G_{1_2}(kr) \Big|_{r=R} \left(\frac{(9\rho_1 - 4\rho_2)}{(3\rho_1 + 2\rho_2)} + 6 G_{1_2}(kr) \Big|_{r=R} \right) +$$

$$+ 6R \left(G_{2_2}(kr) \Big|_{r=R} G_{1_2}(kr) \Big|_{r=R} - 2 G_{3_2}(kr) \Big|_{r=R} \right);$$

$$G_{2_n}(kr) \equiv \frac{\partial_{r^2}^2 \left(r h_n^{(2)}(kr) \right)}{\partial_r \left(r h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}}; \quad G_{3_n}(kr) \equiv \frac{\partial_r \left(h_n^{(2)}(kr) \right)}{\partial_r \left(r h_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}};$$

$$T_3 = \frac{2}{7} \left(\frac{(7167\rho_1 + 8078\rho_2)}{35(3\rho_1 + 2\rho_2)} + \frac{12}{25} \frac{(159\rho_1 + 206\rho_2)}{(3\rho_1 + 2\rho_2)} G_{1_1}(kr) \Big|_{r=R} - \right.$$

$$- \frac{144}{25} \left(7 \left(G_{1_1}(kr) \Big|_{r=R} \right)^2 - 9 G_{1_1}(kr) \Big|_{r=R} G_{1_3}(kr) \Big|_{r=R} + 27 \left(G_{1_3}(kr) \Big|_{r=R} \right)^2 \right) -$$

$$- \frac{972}{35} \frac{(9\rho_1 - 4\rho_2)}{(3\rho_1 + 2\rho_2)} G_{1_3}(kr) \Big|_{r=R} + 6R \left(11 G_{3_1}(kr) \Big|_{r=R} + 36 G_{3_3}(kr) \Big|_{r=R} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{7}{5} G_{2_2}(kr) \Big|_{r=R} \left(8 G_{1_1}(kr) \Big|_{r=R} + 27 G_{1_3}(kr) \Big|_{r=R} \right) \right) \right);$$

$$T_4 = 4 \left(3R \left(G_{3_2}(kr) \Big|_{r=R} - G_{2_2}(kr) \Big|_{r=R} G_{1_2}(kr) \Big|_{r=R} \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(18\rho_1+13\rho_2)}{(3\rho_1+2\rho_2)} - \frac{3(15\rho_1+11\rho_2)}{(3\rho_1+2\rho_2)} G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} \Big); \\
T_5 = & \frac{4}{7} \left(\frac{2(63\rho_1+37\rho_2)}{3(3\rho_1+2\rho_2)} + 2G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} \left(\frac{(18\rho_1+7\rho_2)}{(3\rho_1+2\rho_2)} + 9G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} \right) + \right. \\
& \left. + 3R \left(G_{2_2}(kr)\Big|_{r=R} G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} - 2G_{3_2}(kr)\Big|_{r=R} \right) \right); \\
T_6 = & \frac{4}{7} \left(\frac{(243\rho_1+172\rho_2)}{3(3\rho_1+2\rho_2)} - G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} \left(\frac{(9\rho_1-4\rho_2)}{(3\rho_1+2\rho_2)} + 60G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} \right) + \right. \\
& \left. + 2R \left(2G_{2_2}(kr)\Big|_{r=R} G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} + 3G_{3_2}(kr)\Big|_{r=R} \right) \right); \\
T_7 = & \frac{3}{7} \left(\frac{4}{5} \left(\frac{47}{7} + 36G_{1_1}(kr)\Big|_{r=R} \right) + \left(\frac{11}{7} - \frac{168}{5} G_{1_1}(kr)\Big|_{r=R} \right) \times \right. \\
& \times G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} + \frac{36}{5} \left(2 - 5G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} \right) G_{1_3}(kr)\Big|_{r=R} + \\
& \left. + \frac{3}{5} R G_{2_2}(kr)\Big|_{r=R} \left(2G_{1_1}(kr)\Big|_{r=R} - G_{1_3}(kr)\Big|_{r=R} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{5} R \left(-2G_{3_1}(kr)\Big|_{r=R} + 5G_{3_2}(kr)\Big|_{r=R} + 12G_{3_3}(kr)\Big|_{r=R} \right) \right); \\
T_8 = & \frac{2}{49} \left(-8 \frac{(33\rho_1+17\rho_2)(21\rho_1+19\rho_2)}{(3\rho_1+2\rho_2)^2} + 36G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} \times \right. \\
& \times \left(\left(6 \frac{(\rho_1-\rho_2)}{(3\rho_1+2\rho_2)} G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} - \frac{(2061\rho_1^2+2538\rho_1\rho_2+676\rho_2^2)}{6(3\rho_1+2\rho_2)^2} \right) + \right. \\
& \left. + 2 \left(3 \left(G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} \right)^2 + 8G_{1_4}(kr)\Big|_{r=R} \left(3G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} - 1 \right) \right) \right) + \\
& \times 6R \left(7G_{2_2}(kr)\Big|_{r=R} - 6 \frac{(2\rho_1+3\rho_2)}{(3\rho_1+2\rho_2)} G_{1_2}(kr)\Big|_{r=R} G_{2_2}(kr)\Big|_{r=R} - 2G_{3_2}(kr)\Big|_{r=R} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{(9\rho_1 - 4\rho_2)}{(3\rho_1 + 2\rho_2)} + 27G_{1_2}(kr) \Big|_{r=R} \right) + 6 \left(2 \left(G_{1_2}(kr) \Big|_{r=R} - 4G_{1_4}(kr) \Big|_{r=R} \right) \times \right. \\
& \quad \times G_{2_2}(kr) \Big|_{r=R} - G_{2_4}(kr) \Big|_{r=R} \Big) G_{1_2}(kr) \Big|_{r=R} - 24 \left(3G_{1_2}(kr) \Big|_{r=R} - 1 \right) \times \\
& \quad \times G_{3_4}(kr) \Big|_{r=R} \Big) + 3R^2 \left(7G_{4_2}(kr) \Big|_{r=R} + 2G_{2_2}(kr) \Big|_{r=R} \left(\left(G_{2_2}(kr) \Big|_{r=R} + 6G_{2_4}(kr) \Big|_{r=R} \right) \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \times G_{1_2}(kr) \Big|_{r=R} - 2G_{3_2}(kr) \Big|_{r=R} - 12G_{3_4}(kr) \Big|_{r=R} \right) + 21G_{5_2}(kr) \Big|_{r=R} \right) \Big); \\
& G_{4_n}(kr) \equiv \frac{\partial_{r^3}^3 \left(rh_n^{(2)}(kr) \right)}{\partial_r \left(rh_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}}; \quad G_{5_n}(kr) \equiv \frac{\partial_{r^2}^2 \left(h_n^{(2)}(kr) \right)}{\partial_r \left(rh_n^{(2)}(kr) \right) \Big|_{r=R}}.
\end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов $l_1(n)$ - $l_4(n)$ в (3.2.17):

$$\begin{aligned}
l_1(n) &= \frac{3n(n-2)(n-1)(n+1)}{2(2n-5)(2n-3)(2n-1)}; \quad l_2(n) = \frac{n(50n^4 + n^3 - 103n^2 + 39n - 27)}{10(4n^2 - 9)(2n-1)^2}; \\
l_3(n) &= \frac{n(n+1)(50n^4 + 321n^3 + 621n^2 + 278n - 180)}{10(4n^2 + 8n - 5)(2n+3)^2}; \\
l_4(n) &= \frac{3(n+5)(n+3)(n+2)(n+1)}{2(2n+7)(2n+5)(2n+3)}.
\end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов $G_1(j)$, $G_2(j)$ в (3.2.27):

$$\begin{aligned}
G_1(j) &= p_1 F_{j-1} + p_2 F_{j+1}; \quad p_1 = \frac{j^2}{(2j+1)}; \quad p_2 = \frac{(j+1)(j+2)}{(2j+1)}; \\
G_2(j) &= -\frac{2}{35} \delta_{j,3} + q_1 F_{j-3} + q_2 F_{j-1} + q_3 F_{j+1} + q_4 F_{j+3}; \\
q_1 &= \frac{5j(j-1)(j-2)^2}{2(2j+1)(2j-3)(2j-1)}; \quad q_2 = \frac{j^2(146j^3 + 73j^2 - 246j - 153)}{30(2j-3)(2j+1)^2(2j+3)}; \\
q_3 &= \frac{(j+1)(j+2)(26j^3 + 65j^2 + 46j - 20)}{30(2j-1)(2j+1)^2(2j+5)}; \quad q_4 = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)}{2(2j+1)(2j+3)(2j+5)};
\end{aligned}$$

$$F_j = \int_0^{\pi/2} P_j(\mu) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 1 & (j=0); \\ \frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}} (j-1)!}{2^{j-1} (j+1) \left(\left(\frac{j-1}{2} \right)! \right)^2} & (j=2k+1); \\ 0 & (j=2k). \end{cases}$$

Выражения для коэффициентов $G_1^+(j)$, $G_2^+(j)$, $G_3^+(j)$ в (3.2.28):

$$G_1^+(j) = \frac{2}{35} \delta_{j,3} F_0 + p_1^+ F_{j-3} + p_2^+ F_{j-1} + p_3^+ F_{j+1} + p_4^+ F_{j+3};$$

$$p_1^+ = \frac{3(j-1)(j-2)^2(j^3 - 7j^2 + 4j + 4)}{4(2j-3)(2j-1)(2j+1)(3j-4)};$$

$$p_2^+ = \frac{j(180j^7 - 1212j^6 + 251j^5 + 2985j^4 + 25j^3 - 3453j^2 + 324j + 540)}{60(2j-3)(2j-1)(2j+1)^2(2j+3)(3j-4)};$$

$$p_3^+ = -\frac{(j+1)(j+2)(180j^6 + 1572j^5 + 4771j^4 + 6319j^3 + 2816j^2 - 988j - 720)}{60(2j-1)(2j+1)^2(2j+3)(2j+5)(3j+2)};$$

$$p_4^+ = \frac{3(j+1)^2(j+2)(j+3)(j+4)^2}{4(2j+1)(2j+3)(2j+5)(3j+2)};$$

$$G_2^+(j) = q_1^+ F_{j-1} + q_2^+ F_{j-3};$$

$$q_1^+ = \frac{j(j-1)^2(3j^3 + 9j^2 - 28j + 12)}{4(2j-1)(2j+1)(3j-4)(2j-3)}; \quad q_2^+ = \frac{(j-1)(j-2)^2(3j^3 + 9j^2 - 28j + 12)}{4(2j-1)(2j+1)(3j-4)(2j-3)};$$

$$G_3^+(j) = m_1^+ F_{j+3} + m_2^+ F_{j+1};$$

$$m_1^+ = \frac{(j+1)(j+2)(j+4)(j+3)(3j^2 + 9j + 8)}{4(2j+1)(2j+3)(3j+2)(2j+5)};$$

$$m_2^+ = \frac{(j+1)(j+2)^3(3j^2 + 9j + 8)}{4(2j+1)(2j+3)(3j+2)(2j+5)}.$$

Выражения для коэффициентов $G_3(j)$, $G_4(j)$, $G_1^-(j)$, $G_2^-(j)$, $G_3^-(j)$ в (3.2.32):

$$G_3(j) = m_1 F_{j-2} + m_2 F_j + m_3 F_{j+2};$$

$$m_1 = \frac{j(j-1)(j+1)}{(2j-1)(2j+1)}; \quad m_2 = \frac{(j+1)(4j^3 + 10j^2 + 2j - 3)}{(2j+1)(2j-1)(2j+3)}; \quad m_3 = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)}{(2j+1)(2j+3)};$$

$$G_4(j) = -\frac{1}{35} \delta_{j,3} + k_1 F_{j-4} + k_2 F_{j-2} + k_3 F_j + k_4 F_{j+2} + k_5 F_{j+4}.$$

$$k_1 = \frac{3j(j-1)^2(j-2)(j-3)}{2(2j-5)(2j-3)(2j-1)(2j+1)};$$

$$k_2 = \frac{j(j-1)(376j^5 - 736j^4 - 1198j^3 + 154j^2 + 777j - 45)}{15(2j+1)^2(2j-5)(2j-3)(2j-1)(2j+3)};$$

$$k_3 = \frac{2(j+1)(136j^6 + 484j^5 + 106j^4 - 925j^3 - 809j^2 - 66j + 90)}{15(2j+1)^2(2j-5)(2j-3)(2j-1)(2j+3)};$$

$$k_4 = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(136j^4 + 936j^3 + 1606j^2 + 36j - 365)}{15(2j+1)^2(2j+7)(2j+5)(2j+3)(2j-1)};$$

$$k_5 = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)(j+5)}{(2j+7)(2j+5)(2j+3)(2j+1)}.$$

$$G_1^-(j) = -\frac{2}{35} \delta_{j,3} F_1 + p_1^- F_{j-4} + p_2^- F_{j-2} + p_3^- F_j + p_4^- F_{j+2} + p_5^- F_{j+4};$$

$$p_1^- = -\frac{3(j-1)^2(j-2)(j-3)(3j^3 - 27j^2 + 20j + 12)}{4(2j-5)(2j-3)(2j-1)(2j+1)(3j-4)};$$

$$p_2^- = -\frac{(j-1)}{60(2j-5)(2j-3)(2j-1)^2(2j+1)^2(2j+3)(3j-4)} \times$$

$$\times (720j^9 - 8664j^8 + 20468j^7 + 9762j^6 - 56530j^5 + 17109j^4 + 25712j^3 - 837j^2 - 4320j - 540);$$

$$p_3^- = \frac{(j+1)}{30(2j-3)(2j-1)^2(2j+1)^2(2j+3)^2(3j-4)(3j+2)} \times$$

$$\times(19584j^{10} + 84144j^9 + 17104j^8 - 327136j^7 - 329116j^6 + 317277j^5 + \\ + 517866j^4 + 9421j^3 - 176508j^2 - 19116j + 17280);$$

$$p_4^- = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)}{60(2j-1)(2j+1)^2(2j+3)^2(2j+5)(2j+7)(3j+2)} \times$$

$$\times(720j^7 + 11544j^6 + 65836j^5 + 166470j^4 + 180340j^3 + 47181j^2 - 38771j - 17520);$$

$$p_5^- = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)(j+5)(3j^2 + 21j + 16)}{4(2j+1)(2j+3)(2j+5)(2j+7)(3j+2)};$$

$$G_2^-(j) = q_1^- F_j + q_2^- F_{j-2} + q_3^- F_{j-4};$$

$$q_1^- = \frac{j(j-1)^2(j+1)(3j^3 + 9j^2 - 28j + 12)}{4(2j-1)^2(2j+1)(3j-4)(2j-3)};$$

$$q_2^- = \frac{(j-1)^2(3j^3 + 9j^2 - 28j + 12)(4j^3 - 14j^2 + 10j + 1)}{4(2j-1)^2(2j+1)(3j-4)(2j-3)(2j-5)};$$

$$q_3^- = \frac{(j-1)^2(j-2)(j-3)(3j^3 + 9j^2 - 28j + 12)}{4(2j-1)(2j+1)(3j-4)(2j-3)(2j-5)};$$

$$G_3^-(j) = m_1^- F_{j+4} + m_2^- F_{j+2} + m_3^- F_j;$$

$$m_1^- = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)(j+5)(3j^2 + 9j + 8)}{4(2j+1)(2j+3)(3j+2)(2j+5)(2j+7)};$$

$$m_2^- = \frac{(j+3)(j+1)(j+2)(4j^3 + 34j^2 + 90j + 73)(3j^2 + 9j + 8)}{4(2j+1)(2j+3)(3j+2)(2j+5)(2j+7)};$$

$$m_3^- = \frac{(j+1)^2(j+2)^2(j+3)(3j^2 + 9j + 8)}{4(2j+1)(2j+3)^2(3j+2)(2j+5)}.$$

Выражения для коэффициентов $J_1^* - J_4^*$ в (3.2.33):

$$J_1^* = 3K_3(j) + 2K_1(j); \quad J_2^* = \frac{8}{15}K_1(j) - \frac{1}{5}K_3(j) + 2K_1^+(j) + 3K_1^-(j);$$

$$J_3^* = -2K_3^+(j) - 3K_3^-(j); \quad J_4^* = 3K_2^-(j) + 2K_2^+(j);$$

$$K_1(j) = (-1)^{j-1} p_1 F_{j-1} + (-1)^{j+1} p_2 F_{j+1};$$

$$K_3(j) = (-1)^{j-2} m_1 F_{j-2} + (-1)^j m_2 F_j + (-1)^{j+2} m_3 F_{j+2};$$

$$K_1^+(j) = \frac{2}{35} \delta_{j,3} F_0 + (-1)^{j-3} p_1^+ F_{j-3} + (-1)^{j-1} p_2^+ F_{j-1} + (-1)^{j+1} p_3^+ F_{j+1} + (-1)^{j+3} p_4^+ F_{j+3};$$

$$K_1^-(j) = \frac{2}{35} \delta_{j,3} F_1 + (-1)^{j-4} p_1^- F_{j-4} + (-1)^{j-2} p_2^- F_{j-2} +$$

$$+ (-1)^j p_3^- F_j + (-1)^{j+2} p_4^- F_{j+2} + (-1)^{j+4} p_5^- F_{j+4};$$

$$K_2^+(j) = (-1)^{j-1} q_1^+ F_{j-1} + (-1)^{j-3} q_2^+ F_{j-3};$$

$$K_2^-(j) = (-1)^j q_1^- F_j + (-1)^{j-2} q_2^- F_{j-2} + (-1)^{j-4} q_3^- F_{j-4};$$

$$K_3^+(j) = (-1)^{j+3} m_1^+ F_{j+3} + (-1)^{j+1} m_2^+ F_{j+1};$$

$$K_3^-(j) = (-1)^{j+4} m_1^- F_{j+4} + (-1)^{j+2} m_2^- F_{j+2} + (-1)^j m_3^- F_j.$$

Выражения для коэффициентов $k_1 - k_6$ в (3.3.19):

$$k_1 = \frac{j(j-1)}{(2j-1)}; \quad k_2 = \frac{(j+1)(j-1)}{(2j+3)}; \quad k_3 = \frac{j(j-1)(j-2)(2j^2+3j+7)}{2(2j-1)(2j-3)(2j-5)};$$

$$k_4 = \frac{j(100j^5 + 116j^4 - 165j^3 - 205j^2 + 75j - 81)}{30(2j-1)^2(2j-3)(2j+3)};$$

$$k_5 = \frac{(j+1)(100j^5 + 756j^4 + 2159j^3 + 2591j^2 + 704j - 600)}{30(2j-1)(2j+3)^2(2j+5)};$$

$$k_6 = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(2j^2+11j+21)}{2(2j+3)(2j+5)(2j+7)}.$$

Выражения для коэффициентов $p_1 - p_6$ в (3.3.25):

$$p_1 = \frac{j(j+3)}{(2j-1)}; \quad p_2 = \frac{(j+1)(j+3)}{(2j+3)}; \quad p_3 = -\frac{j(j-1)(j-2)(9j-1)}{2(2j-1)(2j-3)(2j-5)};$$

$$p_4 = -\frac{j(40j^5 + 274j^4 - 265j^3 - 475j^2 + 375j - 9)}{30(2j-1)^2(2j-3)(2j+3)};$$

$$p_5 = \frac{(j+1)(135j^9 + 990j^8 + 2990j^7 + 4924j^6 + 6145j^5 + 8251j^4 + 7564j^3 + 1927j^2 - 886j - 360)}{30(2j-1)(2j+1)^2(2j+3)^2(2j+5)};$$

$$p_6 = -\frac{j(j+1)(j+2)(j+3)(4j^2 + 7j - 5)}{2(2j+3)(2j+5)(2j+7)}.$$

Выражения для коэффициентов χ_1 - χ_8 в (3.4.21):

$$\chi_1 = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}; \quad \chi_2 = \frac{n^2(n-1)^2(n+2)}{(2n-1)(2n-3)};$$

$$\chi_3 = -\frac{(n+1)(n+4)}{2(2n+3)(2n+5)}; \quad \chi_4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n^2 + 9n + 10)}{(2n+3)(2n+5)};$$

$$\chi_5 = -\frac{n^2(n-1)(n+1)}{2(2n-3)(2n-1)}; \quad \chi_6 = -\frac{n(n+1)(n+2)(n+7)}{2(2n+3)(2n+5)};$$

$$\chi_7 = \frac{6n^2(n-2)}{(2n-1)}; \quad \chi_8 = \frac{6n(n-1)(n+1)}{(2n+3)}.$$

Выражения для коэффициентов $\alpha_1(n)$ - $\alpha_5(n)$ в (3.4.23):

$$\alpha_1(n) = -\frac{n(n-1)(3n^2 - 3n + 2)}{4(2n-1)(2n-3)(3n-4)} - W \frac{(n-1)(5n^2 - 21n + 18)}{(2n-1)(2n-3)(3n-4)^2} +$$

$$+ W(1-W) \frac{64n^2(n-1)(n-3)}{(2n-3)(2n-1)(3n-1)(3n+2)};$$

$$\alpha_2(n) = -\frac{64W(1-W)(36n^9 + 30n^8 - 194n^7 - 186n^6 + 326n^5 + 357n^4 - 30n^3 - 27n + 4n + 4)}{n(n-1)(2n-1)(2n+1)(2n+3)(3n+2)^2(3n+5)^2};$$

$$\alpha_3(n) = \frac{(n+1)(3n^3 + 27n^2 + 44n + 16)}{4(2n+3)(2n+5)(3n+2)} + W \frac{n(n+1)(5n^2 - n - 4)}{(n+2)(2n+3)(2n+5)(3n+2)^2} +$$

$$+W(1-W)\frac{64n(n+1)(n-1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)(3n+5)(3n+8)};$$

$$\alpha_4(n) = -\frac{2n^2(n-2)}{(n-1)(2n-1)(3n+2)}; \quad \alpha_5(n) = \frac{2(n+1)(n-1)}{(2n+3)(3n+5)}; \quad W = \frac{Q^2}{16\pi}.$$

Выражения для коэффициентов $S_1(j)$ - $S_5(j)$ в (3.4.25):

$$S_1(j) = h_j e^2 \alpha_2(j) + \frac{3}{4\pi} Q E_0 (h_{j-1} \alpha_4(n) + h_{j+1} \alpha_5(n)) +$$

$$+ 16e^2 W (1-W) \left(h_{j-2} T_1(j) + \frac{1}{16} h_j \alpha_2(j) + h_{j+2} T_2(j) \right);$$

$$T_1(j) = \frac{4j^2(j-1)(j-3)}{(2j-3)(2j-1)(3j-1)(3j+2)}; \quad T_2(j) = \frac{4j(j+1)(j-1)(j+2)}{(2j+3)(2j+5)(3j+5)(3j+8)};$$

$$S_2(j) = e^2 h_{j-2} T_3(j); \quad S_3(j) = e^2 h_{j+2} T_4(j);$$

$$T_3(j) = \frac{j(j-1)(3j^2-3j+2)}{4(2j-1)(2j-3)(3j-4)} + W \frac{(j-1)(5j^2-21j+18)}{(2j-1)(2j-3)(3j-4)^2};$$

$$T_4(j) = \frac{(j+1)(3j^3+27j^2+44j+16)}{4(2j+3)(2j+5)(3j+2)} + W \frac{j(j+1)(5j^2-j-4)}{(j+2)(2j+3)(2j+5)(3j+2)^2};$$

$$S_4(j) = -\alpha_4(n) \left(\frac{3}{4\pi} Q E_0 h_{j-1} + 8e^2 W (1-W) \times \right.$$

$$\left. \times \left(-h_{j-2} \frac{(j-1)^2(j-3)}{(j-2)(2j-3)(3j-1)} + h_j \frac{j(j-2)}{(2j+1)(3j+2)} \right) \right);$$

$$S_5(j) = -\alpha_5(n) \left(\frac{3}{4\pi} Q E_0 h_{j+1} + 8e^2 W (1-W) \times \right.$$

$$\left. \times \left(-h_j \frac{(j+1)^2(j-1)}{j(2j+1)(3j+5)} + h_{j+2} \frac{j(j+2)}{(2j+5)(3j+8)} \right) \right); \quad (j \in \Xi);$$

$$e^2 = \frac{9w}{1-W}; \quad w = \frac{E_0^2}{16\pi}; \quad W = \frac{Q^2}{16\pi}.$$

Выражения для коэффициентов $N_0(j)$ - $N_5(j)$ в (3.4.28):

$$N_0(j) = \frac{1}{(2j+1)} \left(j^2 F_{j-1} + (j+1)(j+2) F_{j+1} \right);$$

$$N_1(j) = -\frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \alpha_4(j+1) N_0(j+1) - \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \alpha_5(j-1) N_0(j-1) + \\ + e^2 \left(\alpha_2(j) N_0(j) + T_3(j+2) N_0(j+2) + T_4(j-2) N_0(j-2) + (1-W) \nu_1(j) \right);$$

$$N_2(j) = \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \alpha_4(j+1) N_0(j+1) + \\ - e^2 \left(T_1(j+2) N_0(j+2) + 16W(1-W) \alpha_4(j+1) \alpha_5(j) N_0(j) \right);$$

$$N_3(j) = \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \alpha_5(j-1) N_0(j-1) - \\ - e^2 \left(T_2(j-2) N_0(j-2) + 16W(1-W) \alpha_4(j) \alpha_5(j-1) N_0(j) \right);$$

$$N_4(j) = e^2 \left(T_1(j+2) - T_3(j+2) \right) N_0(j+2);$$

$$N_5(j) = e^2 \left(T_2(j+2) + T_4(j-2) \right) N_0(j-2);$$

$$\nu_1(j) = -\frac{2}{35} \delta_{j,3} + \frac{1}{(2j+1)} \left(\frac{5j(j-1)(j-2)^2}{2(2j-3)(2j-1)} F_{j-3} + \frac{j^2(146j^3 + 73j^2 - 246j - 153)}{30(2j-3)(2j+1)(2j+3)} F_{j-1} + \right. \\ \left. + \frac{(j+1)(j+2)(26j^3 + 65j^2 + 46j - 20)}{30(2j-1)(2j+1)(2j+5)} F_{j+1} + \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)}{2(2j+3)(2j+5)} F_{j+3} \right);$$

$$F_j = \int_0^{\pi/2} P_j(\mu) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 1 & (j=0); \\ \frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}} (j-1)!}{2^{j-1} (j+1) \left(\left(\frac{j-1}{2} \right)! \right)^2} & (j=2k+1); \\ 0 & (j=2k); \end{cases}$$

$$e^2 = \frac{9w}{1-W}; \quad w = \frac{E_0^2 R}{16\pi\sigma}; \quad W = \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}.$$

Выражения для коэффициентов $\eta_0(j)$ - $\eta_5(j)$ в (3.4.29):

$$\begin{aligned} \eta_0(j) &= -2N_0(j) + 3v_2(j); \\ \eta_1(j) &= e^2 \alpha_2(j) (-2N_0(j) + 3v_2(j)) + \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \times \\ &\times (\alpha_4(j+1) (-2N_0(j+1) + 3v_2(j+1)) + T_4(j-1) (-2N_0(j-1) + 3v_2(j-1))) - \\ &- e^2 (1-W) \left(\frac{8}{15} N_0(j) + 2v_1(j) + \frac{1}{5} v_2(j) - 3v_3(j) \right); \\ \eta_2(j) &= e^2 T_3(j+2) (-2N_0(j+2) + v_2(j+2)); \\ \eta_3(j) &= e^2 T_4(j-2) (-2N_0(j-2) + 3v_2(j-2)); \\ \eta_4(j) &= \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \alpha_4(j+1) (-2N_0(j+1) + 3v_2(j+1)) + 16 \frac{(j+1)^2 (2j-1)}{j(2j+1)(3j+5)} e^2 W \times \\ &\times (1-W) (\alpha_4(j+2) (-2N_0(j+2) + 3v_2(j+2)) + \alpha_5(j) (-2N_0(j) + 3v_2(j))); \\ \eta_5(j) &= \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \alpha_5(j-1) (-2N_0(j-1) + 3v_2(j-1)) - 16 \frac{j(2j-3)}{(2j+1)(3j+2)} e^2 W \times \\ &\times (1-W) (\alpha_4(j) (-2N_0(j) + 3v_2(j)) + \alpha_5(j-2) (-2N_0(j-2) + 3v_2(j-2))); \\ \eta_6(j) &= 16e^2 W (1-W) T_2(j-2) (-2N_0(j-2) + 3v_2(j-2)); \\ \eta_7(j) &= 16W (1-W) e^2 T_1(j+2) (-2N_0(j+2) + 3v_2(j+2)); \\ v_2(j) &= \frac{(j+1)}{(2j+1)} \left(\frac{j(j-1)}{(2j-1)} F_{j-2} + \frac{(4j^3 + 10j^2 + 2j - 3)}{(2j-1)(2j+3)} F_j + \frac{(j+2)(j+3)}{(2j+3)} F_{j+2} \right); \\ v_3(j) &= -\frac{1}{35} \delta_{j,3} + \gamma_1 F_{j-4} + \gamma_2 F_{j-2} + \gamma_3 F_j + \gamma_4 F_{j+2} + \gamma_5 F_{j+4}; \\ \gamma_1 &= \frac{3j(j-1)^2 (j-2)(j-3)}{2(2j-5)(2j-3)(2j-1)(2j+1)}; \\ \gamma_2 &= \frac{j(j-1)(376j^5 - 736j^4 - 1198j^3 + 154j^2 + 777j - 45)}{15(2j-5)(2j-3)(2j-1)(2j+1)(2j+3)(2j+1)}; \end{aligned}$$

$$\gamma_3 = \frac{2(j+1)(136j^6 + 484j^5 + 106j^4 - 925j^3 - 809j^2 - 66j + 90)}{15(2j-5)(2j-3)(2j-1)(2j+1)^2(2j+3)};$$

$$\gamma_4 = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(136j^4 + 936j^3 + 1606j^2 + 36j - 365)}{15(2j+7)(2j+5)(2j+3)(2j+1)^2(2j-1)};$$

$$\gamma_5 = \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)(j+5)}{(2j+7)(2j+5)(2j+3)(2j+1)};$$

$$e^2 = \frac{9w}{1-W}; \quad w = \frac{E_0^2 R}{16\pi\sigma}; \quad W = \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}.$$

Выражения для коэффициентов $\eta_0^*(j) - \eta_7^*(j)$ в (3.4.29):

$$\eta_0^*(j) = (2N_0^*(j) + 3v_2^*(j));$$

$$\eta_1^*(j) = e^2 \alpha_2(j) (2N_0^*(j) + 3v_2^*(j)) + \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \times$$

$$\times (\alpha_4(j+1) (2N_0^*(j+1) + 3v_2^*(j+1)) + \alpha_5(j-1) (2N_0^*(j-1) + 3v_2^*(j-1))) +$$

$$+ e^2 (1-W) \left(\frac{8}{15} N_0^*(j) + 2v_1^*(j) - \frac{1}{5} v_2^*(j) + 3v_3^*(j) \right);$$

$$\eta_2^*(j) = e^2 T_3(j+2) (2N_0^*(j+2) + v_2^*(j+2));$$

$$\eta_3^*(j) = e^2 T_4(j-2) (2N_0^*(j-2) + 3v_2^*(j-2));$$

$$\eta_4^*(j) = \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \alpha_4(j+1) (2N_0^*(j+1) + 3v_2^*(j+1)) + 16 \frac{(j+1)^2 (2j-1)}{j(2j+1)(3j+5)} e^2 W \times$$

$$\times (1-W) (\alpha_4(j+2) (2N_0^*(j+2) + 3v_2^*(j+2)) + \alpha_5(j) (2N_0^*(j) + 3v_2^*(j)));$$

$$\eta_5^*(j) = \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \alpha_5(j-1) (2N_0^*(j-1) + 3v_2^*(j-1)) - 16 \frac{j(2j-3)}{(2j+1)(3j+2)} e^2 W \times$$

$$\times (1-W) (\alpha_4(j) (2N_0^*(j) + 3v_2^*(j)) + \alpha_5(j-2) (2N_0^*(j-2) + 3v_2^*(j-2)));$$

$$\eta_6^*(j) = 16W(1-W) e^2 T_2(j-2) (2N_0^*(j-2) + 3v_2^*(j-2));$$

$$\begin{aligned} \eta_7^*(j) &= 16W(1-W)e^2 T_1(j+2) \left(2N_0^*(j+2) + 3v_2^*(j+2) \right); \\ N_0^*(j) &= \frac{1}{(2j+1)} \left(j^2 (-1)^{j-1} F_{j-1} + (j+1)(j+2)(-1)^{j+1} F_{j+1} \right); \\ v_1^*(j) &= -\frac{2}{35} \delta_{j,3} + \frac{1}{(2j+1)} \left(\frac{5j(j-1)(j-2)^2}{2(2j-3)(2j-1)} (-1)^{j-3} F_{j-3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{j^2(146j^3 + 73j^2 - 246j - 153)}{30(2j-3)(2j+1)(2j+3)} (-1)^{j-1} F_{j-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(j+1)(j+2)(26j^3 + 65j^2 + 46j - 20)}{30(2j-1)(2j+1)(2j+5)} (-1)^{j+1} F_{j+1} + \frac{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)}{2(2j+3)(2j+5)} (-1)^{j+3} F_{j+3} \right); \\ v_2^*(j) &= \frac{(j+1)}{(2j+1)} \left(\frac{j(j-1)}{(2j-1)} (-1)^{j-2} F_{j-2} + \frac{(4j^3 + 10j^2 + 2j - 3)}{(2j-1)(2j+3)} (-1)^j F_j + \frac{(j+2)(j+3)}{(2j+3)} (-1)^{j+2} F_{j+2} \right); \\ v_3^*(j) &= \frac{1}{35} \delta_{j,3} + \gamma_1 (-1)^{j-4} F_{j-4} + \gamma_2 (-1)^{j-2} F_{j-2} + \gamma_3 (-1)^j F_j + \\ &\quad + \gamma_4 (-1)^{j+2} F_{j+2} + \gamma_5 (-1)^{j+4} F_{j+4}; \\ e^2 &= \frac{9w}{1-W}; \quad w = \frac{E_0^2 R}{16\pi\sigma}; \quad W = \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}. \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов $\beta_1(j) - \beta_{11}(j)$ в (3.4.31):

$$\begin{aligned} \beta_1(j) &= \frac{j}{2(2j+1)} + \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \mu_1(j) + e^2 (\mu_2(j) + W\mu_3(j)) + 32e^2 W(1-W)\mu_4(j); \\ \mu_1(j) &= \frac{72j^6 + 12j^5 - 210j^4 + 17j^3 + 36j^2 + 23j + 2}{(2j+1)^2 (2j-1)(j-1)(3j-1)(3j+2)(3j+5)}; \\ \mu_2(j) &= -\frac{j}{6(2j+1)^2 (2j-1)^2 (2j-3)(2j+3)(3j-7)(3j-4)(3j-1)(3j+2)} \times \\ &\quad \times (1296j^{10} - 3672j^9 - 7128j^8 + 27348j^7 + 3292j^6 - 71017j^5 + \\ &\quad + 52992j^4 + 15577j^3 - 23623j^2 + 8979j - 1494); \end{aligned}$$

$$\mu_3(j) = \frac{2}{(3j-7)^2(3j-4)^2(3j-1)^2(3j+2)^2(2j+1)^2(2j-1)(2j-3)(2j+3)(j-1)} \times \\ \times (14580j^{12} - 104490j^{11} + 196263j^{10} + 227475j^9 - 1200816j^8 + \\ + 1258572j^7 + 48795j^6 - 906793j^5 + 643502j^4 - 78812j^3 - 205028j^2 + 109128j - 15876);$$

$$\mu_4(j) = -\frac{1}{(3j+5)^2(3j+2)^2(3j-1)^2(2j+1)^2(2j+3)(2j-1)(2j-3)(j-2)(j-1)} \times \\ \times (1620j^{13} - 5400j^{12} - 10341j^{11} + 40206j^{10} + 27608j^9 - 109254j^8 - \\ - 38422j^7 + 123350j^6 + 40960j^5 - 54330j^4 - 34781j^3 + 21076j^2 + 3884j - 1056);$$

$$\beta_2(j) = \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \mu_5(j) + 64e^2W(1-W)\mu_6(j);$$

$$\mu_5(j) = -\frac{(j+1)^2(j-1)}{(2j+1)^2(3j+5)};$$

$$\mu_6(j) = -\frac{(j+1)(108j^7 + 468j^6 + 291j^5 - 942j^4 - 1483j^3 - 330j^2 + 656j + 352)}{(2j+1)^2(3j+5)^2(2j-1)(2j+3)(3j-1)(3j+2)(3j+8)};$$

$$\beta_3(j) = \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \mu_7(j) + 64e^2W(1-W)\mu_8(j);$$

$$\mu_7(j) = -\frac{j^3(j-2)}{(j-1)(2j-1)(2j+1)(3j+2)};$$

$$\mu_8(j) = -\frac{j^2(j-2)(6j^3 + 9j^2 - 5j - 2)}{(2j+1)^2(3j+2)^2(j-1)(2j-1)(3j+5)};$$

$$\beta_4(j) = \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \mu_9(j) + 64e^2W(1-W)\mu_{10}(j);$$

$$\mu_9(j) = \frac{j^2(j-2)}{(2j+1)^2(3j+2)};$$

$$\mu_{10}(j) = \frac{j^2(j-2)(6j^3 - 9j^2 - 5j + 6)}{(2j+1)^2(3j+2)^2(j-1)(2j-1)(3j-1)};$$

$$\beta_5(j) = e^2(\mu_{11}(j) + W\mu_{12}(j)) + 32e^2W(1-W)\mu_{13}(j);$$

$$\mu_{11}(j) = -\frac{j(j+1)(j+2)(3j^2 + 9j + 8)}{8(2j+1)^2(2j+3)(3j+2)};$$

$$\mu_{12}(j) = -\frac{j(j+1)(j-1)(5j+4)}{2(2j+1)^2(3j+2)^2(2j+3)};$$

$$\mu_{13}(j) = \frac{j(j+2)^2(j+1)(j-1)}{(2j+1)^2(2j+3)(3j+5)(3j+8)};$$

$$\beta_6(j) = e^2(\mu_{14}(j) + W\mu_{15}(j)) + 64e^2W(1-W)\mu_{16}(j);$$

$$\mu_{14}(j) = \frac{j(j-1)(j+2)(3j^3 + 9j^2 - 28j + 12)}{8(2j+1)^2(2j-1)(3j-4)};$$

$$\mu_{15}(j) = \frac{(j-3)(j-2)(j-1)(5j-6)}{2(2j+1)^2(3j-4)^2(2j-1)};$$

$$\mu_{16}(j) = \frac{j^2(j-1)(j-2)(j-3)}{(2j+1)^2(2j-1)(3j-1)(3j+2)};$$

$$\beta_7(j) = e^2(\mu_{17}(j) + W\mu_{18}(j)) + 96e^2W(1-W)\mu_{19}(j);$$

$$\mu_{17}(j) = -\frac{j^2(j+1)(3j^2 + 3j + 2)}{8(2j+1)^2(2j-1)(3j-1)};$$

$$\mu_{18}(j) = -\frac{j^2(j-2)(5j-1)}{2(2j+1)^2(3j-1)^2(2j-1)};$$

$$\mu_{19}(j) = \frac{j^2(j+1)^2(j-2)}{(2j+1)^2(2j-1)(3j+2)(3j+5)};$$

$$\beta_8(j) = e^2(\mu_{20}(j) + W\mu_{21}(j)) + 32e^2W(1-W)\mu_{22}(j);$$

$$\mu_{20}(j) = \frac{j(j-2)(3j^2 - 37j + 46)}{8(2j+1)(2j-1)(2j-3)(3j-7)};$$

$$\mu_{21}(j) = \frac{j(j-2)(j-3)(j-4)(5j-11)}{2(3j-7)^2(j-1)(2j-3)(2j-1)(2j+1)};$$

$$\mu_{22}(j) = \frac{j(j-1)(j-2)(j-3)(j-4)}{(2j+1)(2j-1)(2j-3)(3j-1)(3j-4)};$$

$$\beta_9(j) = \frac{3}{4\pi} \frac{QE_0}{R\sigma} \mu_{23}(j) + 64e^2W(1-W)\mu_{24}(j);$$

$$\mu_{23}(j) = \frac{j(j-1)(j-3)}{(2j-1)(2j+1)(3j-1)};$$

$$\begin{aligned} \mu_{24}(j) &= \frac{(j-1)(j-3)}{(3j-1)^2(2j+1)^2(j-2)(2j-1)(2j-3)(3j-4)(3j+2)(3j+5)} \times \\ &\times (108j^7 - 288j^6 - 249j^5 + 843j^4 - 385j^3 + 309j^2 + 38j - 24); \end{aligned}$$

$$\beta_{10}(j) = -32e^2W(1-W) \frac{(j+1)^2(j-1)^2(j-3)}{(2j+1)^2(2j-1)(3j-1)(3j+5)};$$

$$\beta_{11}(j) = e^2 \frac{2j(j-1)(j-2)(j-3)}{(2j+1)(2j-1)(2j-3)(2j-5)};$$

$$e^2 = \frac{9w}{1-W}; \quad w = \frac{E_0^2 R}{16\pi\sigma}; \quad W = \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}.$$