

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ
МЕХАНИКИ ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО РОССИЙСКОЙ
АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



ЛЕБЕДЕВ ИВАН МИХАЙЛОВИЧ

**Идентификация поперечных трещин и
трещиноподобных дефектов в стержне по
собственным частотам продольных и поперечных
колебаний**

Специальность 1.1.8 -

«Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Шифрин Ефим Ильич

Москва - 2023

Оглавление

Введение	3
ГЛАВА 1 Идентификация дефектов в стержне по собственным частотам продольных колебаний.	16
1.1 Введение	16
1.2 Численный алгоритм решения обратной задачи	21
1.2.1 Конечно-элементная модель поврежденного стержня	22
1.2.2 Алгоритм оптимизации	28
1.2.3 Метод вычисления производных от собственных значений	31
1.2.4 Алгоритм локализации повреждений	32
1.2.5 Оценка размеров выявленных повреждений	34
1.3 Численные примеры	37
ГЛАВА 2 Идентификация дефектов в стержне по собственным частотам поперечных колебаний.	52
2.1 Введение	52
2.2 Численный алгоритм решения обратной задачи	58
2.2.1 Конечно-элементная модель поврежденного стержня	59
2.2.2 Алгоритм оптимизации	67
2.3 Численные примеры	68
2.3.1 Результаты вычисления по трем спектрам	69
2.3.2 Результаты вычисления по двум спектрам	90

ГЛАВА 3 Экспериментальная верификация метода идентификации дефектов в стержне по собственным частотам продольных колебаний	99
3.1 Постановка эксперимента	99
3.2 Экспериментальные данные и их использование для идентификации повреждений	104
Заключение	115
Список литературы	117

Введение

Одной из важнейших задач науки и техники является разработка методов диагностики повреждений материалов и конструкций. Ведь возникновение даже самых незначительных дефектов в процессе производства или эксплуатации конструкции может спровоцировать ее внезапное разрушение. Именно поэтому столь актуально создание новых и усовершенствование имеющихся методов неразрушающего контроля.

Среди методов обнаружения и идентификации повреждений в конструкциях распространены методы, основанные на анализе их вибрационных характеристик. Основная идея данных методов состоит в том, что наличие дефектов, влияя на физические свойства конструкции, изменяет ее модальные параметры. К модальным параметрам относятся, например, собственные частоты и формы колебаний. Поэтому измеренные в ходе эксперимента модальные параметры конструкции могут быть использованы для диагностики имеющихся повреждений.

Для анализа повреждений в основном используется сопоставление модальных параметров поврежденных и целых компонентов конструкций. Еще с конца 1970-х вибрационные методы начали успешно использовать для диагностики усталостных повреждений элементов и узлов космических шаттлов, покрытых теплозащитой [24]. Примерно в то же время данный подход начал применяться для диагностики бурового оборудования и нефтяных насосов, используемых на нефтедобывающих платформах [32]. Однако, в последнем случае сравнение модальных параметров было сопряжено с различными трудностями (шум платформы, необходимость проводить измерения в агрессивных средах, изменение массы платформы, вызываемое приливом, ограниченность диапазона мод, возбуждаемых морскими волнами и т.д.), что несколько снижало эффективность такого подхода. Большого

успеха удалось добиться при диагностике турбин [24]. В данном случае методология контроля состояла в распознавании образов сигналов во временной области. Были созданы базы данных, которые позволяли выявлять не только сам дефект, но и его тип. В сфере гражданского строительства большинство работ было посвящено мониторингу мостов и их систем управления [1–3; 13; 27].

Как правило, диагностика всей конструкции целиком является достаточно сложной задачей, поэтому возникает необходимость разработки методов контроля ее составных частей. Среди конструктивных элементов наиболее распространены балки и стержни. Простота геометрической формы и возможность проводить испытания в лабораторных условиях позволили за последние несколько десятилетий создать большое количество аналитических и экспериментальных методов идентификации дефектов в таких элементах [12; 19; 20; 23; 37; 82; 95].

Среди разработанных методов, применяемых для идентификации поврежденных в стержнях и балках, можно выделить три основных подхода. Первый - объединяет методы, основанные на совместном использовании собственных форм колебаний и соответствующих им собственных частот [22; 40; 63; 90],[93](Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В.). Второй подход связан с анализом кривизны форм колебаний [14; 21; 35; 36; 59; 68; 69; 83; 88]. Наконец, в рамках третьего подхода для выявления дефектов используются только резонансные частоты. Рассмотрим такие методы более подробно.

Развитие методов идентификации дефектов по резонансным частотам колебаний, полученным экспериментально, началось с изучения влияния на частоты различных типов дефектов, а также их положения. Оценка изменений частот осуществлялась путем сравнения экспериментальных данных с частотами, полученными в рамках построенной математической модели поврежденного стержня. Так, например, в работе [33] собственные частоты балки, ослабленной одиночной поперечной трещиной, моделировались при помощи статической матрицы подат-

ливости. Для ее определения были предложены два подхода - аналитический и численный. В результате, для случая открытой трещины предсказываемые частоты совпадали с экспериментальными. Для трещины, берега которой в процессе колебаний балки смыкались, результаты получились менее корректными. В дальнейшем было экспериментально установлено [39], что закрывающаяся трещина влияет на собственные частоты колебаний намного меньше открытой. В работе [80] параметры одиночной трещины определялись минимизацией целевой функции, сравнивающей частоты стержня в поврежденном и целом состояниях. Минимизация проводилась перебором всевозможных комбинаций положения и размера трещины. В работе [92] (Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В.) исследовалось изменение форм колебаний и собственных частот при углублении одиночного дефекта. Влиянию на резонансные частоты консольной балки, ослабленной двумя поперечными открытыми трещинами, была посвящена работа [58]. Исследовались как односторонние, так и двусторонние трещины, которые моделировались пружинами, работающими на поворот.

Более эффективные методы диагностики повреждений в стержнях позволяют по резонансным частотам колебаний определить положение и размеры имеющихся дефектов. Так, например, в работе [85] был разработан метод идентификации дефектов, который связывает изменение резонансных частот с изменением жесткости, на некотором участке стержня. В случае продольных колебаний повреждение участка моделировалось уменьшением жесткости на растяжение. В случае поперечных колебаний уменьшалась жесткость балки на изгиб. В результате, размер и положение одиночного поврежденного участка определялось точно, но иногда обнаруживались небольшие паразитные повреждения в местах, к нему примыкающих. Для множественных дефектов результаты получились аналогичными, но в одном из примеров второй поврежденный участок не обнаружился. В последующей работе [84] разработанный подход проверялся экспериментально. Частоты

в балке возбуждались ударным взаимодействием. Определялись резонансные частоты с помощью параболического приближения пиков Фурье-спектра частотного сигнала. Полученные в этой работе результаты аналогичны результатам из работы [85]. Стоит отметить, что метод, рассмотренный в работах [84; 85], дает хорошие результаты только при условии, что количество используемых в расчете мод значительно превышает число вводимых параметров повреждения балки. Позже, в работе [4] для метода из [85] была предложена процедура локализации дефекта. Другой подход был предложен в работе [52], где необходимая для падения заданной частоты локальная жесткость представлена в виде функции от положения одиночной трещины. Эта функция строилась для нескольких мод, полученных на основе измеренных собственных частот, а пересечение построенных кривых отвечало положению одиночной трещины. В работе [15] был предложен метод определения одиночной трещины в балке переменного сечения. Метод был протестирован на двух примерах, с использованием трех первых собственных частот. В результате, положение одиночного дефекта определялось достаточно точно, в то время как его размер - со значительной погрешностью. В статье [38], используя принцип Гамильтона и концепцию эффективных напряжений, были получены уравнения эквивалентные соотношениям из [85]. Был рассмотрен пример идентификации двух трещин по первым пяти собственным частотам. Метод определения множественных трещин был предложен в работе [16]. Однако, для работы алгоритма идентификации количество трещин должно быть заранее известно. Кроме того, метод не дает однозначного решения в случае симметрично расположенных дефектов. В работах [70; 71] был предложен метод идентификации множественных дефектов в балках, основанный на комбинации двух оптимизационных процедур - генетического алгоритма и алгоритма имитации отжига. Оптимизируемая функция определялась разницей между измеренными и вычисленными частотами и формами колебаний. Работа метода была протестирована на численных и экспе-

риментальных данных. Рассмотренные подходы позволяли в некоторых частных случаях выявлять имеющиеся в образцах повреждения, однако, полученные с их помощью результаты нельзя считать однозначными, так как эти методы не имеют под собой строгих математических обоснований.

В работе [54] был предложен метод идентификации дефектов по собственным частотам продольных колебаний стержня. В рамках предложенного подхода, исходная задача сводилась к решению нелинейной системы уравнений. В случае малых дефектов полученная система может быть линеаризована и решена итерационным способом. В работе была проведена экспериментальная верификация предложенного метода, оказалось, что данный метод эффективен при использовании первых четырех частот. Использование большего количества измеренных частот лишь ухудшало результат. В работе [47] был предложен численный алгоритм идентификации трещин, основанный на многократном решении прямой задачи. Решение прямой задачи реализовано с помощью метода граничных элементов. В качестве примера рассмотрена балка, ослабленная одиночной трещиной. Обнаружению множественных дефектов в неоднородной балке была посвящена публикация [89]. Для вычисления собственных частот в статье используется метод конечных элементов с адаптивной сеткой, а для поиска решения итерационный алгоритм. В работе приводится множество численных примеров. В работах [94; 96—98; 101—103] представлены методы обнаружения полостей по собственным частотам колебаний стержня.

Широко распространенной является модель балки, в которой трещины заменяются невесомыми пружинами. В случае продольных колебаний стержня они работают на растяжение-сжатие, а в случае поперечных колебаний - на поворот. В рамках этой модели идентификация дефектов сводится к обнаружению положения пружин и их податливостей. Так, например, в работах [48; 60; 81] предлагаются различные численные подходы к решению этой задачи. Среди аналитических

подходов можно выделить работы, рассматривающие задачу в предположении о малости трещин. Так как малые трещины соответствуют малым податливостям пружин, то появляется возможность линеаризовать рассматриваемую задачу и тем самым значительно ее упростить. Например, работы [55; 57] посвящены задаче обнаружения одиночной малой трещины в стержне по первым двум собственным частотам его колебаний. В работе [18] для идентификации одиночной трещины использовались резонансные и антирезонансные частоты. В работе [17] помимо одиночной малой трещины восстанавливалось неизвестное граничное условие, на одном из краев балки (методы идентификации граничных условий можно найти в книгах [99; 100]). В работе [56] был предложен метод определения двух малых трещин одинаковой глубины в свободно опертой балке по ее первым трем собственным частотам. Авторам удалось установить, что различное взаимное расположение двух малых трещин может индуцировать одни и те же изменения в первых трех собственных частотах. В работе [66] тоже рассматривалась задача о балке, ослабленной двумя малыми двусторонними трещинами, но уже различной длины. Был предложен метод их идентификации по первым четырем собственным частотам. Кроме того, рассматривалась аналогичная задача для продольных колебаний стержня. Для ее решения использовались две резонансные и две антирезонансные частоты. Случай с трещинами одинаковой длины был рассмотрен в работе [65]. Методам идентификации множественных малых трещин были посвящены работы [42],[76](Шифрин Е.И.),[34; 45]. Аналитические подходы к обнаружению произвольной одиночной трещины были предложены в работах [25; 64].

Анализируя перечисленные публикации, можно заметить, что используемые аналитические подходы не позволяют решать задачу идентификации дефектов в наиболее общем виде, когда отсутствуют какие-либо ограничения на количество возможных дефектов и их размеры. Для решения такой задачи прежде всего необходимо установить какие исходные данные однозначно определяют искомые

величины, а затем разработать эффективный алгоритм для восстановления этих величин по исходным данным. Впервые этот вопрос для случая продольных колебаний стержня был рассмотрен в работах [77; 78](Шифрин Е.И.). В них было строго доказано, что любое число открытых трещин произвольного размера однозначно восстанавливается по двум спектрам продольных колебаний, отвечающим следующим условиям на концах: свободный-свободный и закрепленный-свободный. Результат получен путем сведения исходной задачи к обратной задаче Штурма-Лиувилля на отрезке. Вследствие этого удалось воспользоваться известными классическими результатами [107; 108](Крейн М.Г.), [9; 10; 87]. Для случая поперечных колебаний аналогичный результат был получен в статье [79](Шифрин Е.И.). Было доказано, что любое количество трещин произвольного размера однозначно восстанавливается по трем спектрам, отвечающим трем специальным типам краевых условий. Этот результат также был получен сведением исходной задачи к обратной спектральной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка на отрезке. Благодаря этому появляется возможность воспользоваться известными результатами [6–8](Барсилон В.), [30; 104](Гладвелл Г.).

В упомянутых выше статьях по обратным спектральным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений как второго, так и четвертого порядков приведены конструктивные процедуры восстановления неизвестных функций. К сожалению, применительно к рассматриваемым в диссертации задачам они оказались малоэффективны, поскольку обладают низкой устойчивостью как к шуму в исходных данных, так и к количеству используемых при реализации алгоритмов собственных частот колебаний. Таким образом, имеется необходимость в разработке численных методов и алгоритмов, устойчивых к погрешностям в исходных данных, неминуемо возникающих при проведении экспериментов. Разработка таких методов и алгоритмов и является целью диссертации. Для достижения цели были сформулированы и решены следующие задачи:

1. Для случаев продольных и поперечных колебаний построить математические модели бездефектного стержня, жесткость которого зависит от координаты. Модели должны содержать неизвестную функцию, характеризующую поврежденность стержня, а процедура идентификации поперечных трещин должна сводиться к восстановлению введенной функции.
2. Для случаев продольных и поперечных колебаний стержня ввести соответствующие функционалы и сформулировать задачи их минимизации. Решением поставленных задач должна быть введенная функция поврежденности.
3. Для случаев продольных и поперечных колебаний стержня переменной жесткости построить конечно-элементные модели, обеспечивающие необходимую точность при вычислении собственных значений.
4. Разработать метод дифференцирования собственных значений по введенным в конечно-элементную модель стержня переменным.
5. Разработать алгоритм локализации, выявляемых в стержне повреждений.
6. Реализовать необходимые для идентификации рассматриваемых дефектов стержня алгоритмы в собственном пакете программ.

Научная новизна полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем:

1. На основе конечно-элементной модели стержня переменной жесткости разработан устойчивый численный алгоритм, позволяющий однозначно идентифицировать поперечные хорошо локализованные дефекты в стержне по двум спектрам собственных частот продольных колебаний. Количество таких дефектов, а также их размеры при этом могут быть произвольными.

2. Разработанный численный алгоритм адаптирован для случая поперечных колебаний стержня. В результате, модифицированный алгоритм позволяет идентифицировать произвольное количество поперечных хорошо локализованных дефектов в стержне по трем спектрам собственных частот поперечных колебаний. Размеры выявляемых дефектов также могут быть произвольными.
3. Для случая поперечных колебаний сделано предположение о том, что для однозначного обнаружения дефектов достаточно двух спектров. Для проверки этой гипотезы разработана модификация исходного численного алгоритма. Полученные результаты дают основание полагать, что высказанное предположение справедливо.
4. Для случая продольных колебаний работа и устойчивость алгоритма протестированы на частотах, полученных в ходе эксперимента. Обработка экспериментальных данных показала, что модель, на которой основан алгоритм, достаточно хорошо описывает продольные колебания стержня с локальными повреждениями в широком диапазоне частот. С помощью разработанного алгоритма можно обнаружить и локализовать существующие дефекты даже относительно небольшого размера.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгим математическим аппаратом, лежащим в основе предложенного численного алгоритма, а также верификацией работы алгоритма на частотах, полученных в ходе эксперимента, для случая продольных колебаний стержня.

Положения, выносимые на защиту:

1. Численный алгоритм, разработанный на основе известных фундаментальных результатов из теории обратных задач Штурма-Лиувилля на отрезке, а

также построенной конечно-элементной модели стержня переменной жесткости, позволяет однозначно идентифицировать поперечные хорошо локализованные дефекты в стержне по двум спектрам собственных частот продольных колебаний. Количество таких дефектов, а также их размеры при этом могут быть произвольными.

2. Разработанная для случая поперечных колебаний стержня модификация алгоритма, основанная на использовании известных фундаментальных результатов из теории обратных спектральных задач для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка на отрезке, позволяет однозначно идентифицировать произвольное число поперечных хорошо локализованных дефектов произвольного размера по трем спектрам собственных частот.
3. С помощью разработанного алгоритма для случая поперечных колебаний численно подтверждена гипотеза о том, что для однозначного обнаружения дефектов достаточно двух спектров.
4. Для случая продольных колебаний устойчивость разработанного алгоритма верифицирована с помощью частот, измеренных для алюминиевого стержня. Обработка полученных данных показала, что алгоритм позволяет обнаружить и локализовать существующие дефекты даже относительно небольшого размера.

Результаты настоящей работы докладывались на: Международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" (Воронеж, ВГУ, 2018), XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, БашГУ, 2019), а также на научных семинарах лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций ИПМех РАН. Исследования были выполнены при поддержке

гранта РФФИ 19-01-00100 "Разработка теоретических и экспериментальных методов решения геометрических и спектральных обратных задач теории упругости и термоупругости"(2019-2021 гг.)

Список трудов по диссертационной работе составляет 7 публикаций, 4 из которых входят в базу Web of Science, 5 из них - в рецензируемые научные издания и журналы из списка ВАК РФ.

Личный вклад автора. Ранее Е.И. Шифриным было строго доказано, что любое число открытых трещин произвольного размера однозначно восстанавливается по двум спектрам продольных колебаний стержня, отвечающим следующим условиям на концах: свободный-свободный и закрепленный-свободный. Для случая поперечных колебаний было доказано, что любое количество трещин произвольного размера однозначно восстанавливается по трем спектрам, отвечающим трем специальным типам краевых условий. Эти результаты были получены путем сведения исходных задач к обратным спектральным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков соответственно. В данных публикациях были приведены конструктивные процедуры восстановления неизвестных функций. К сожалению, применительно к рассматриваемым в диссертации задачам они оказались малоэффективны, поскольку обладают низкой устойчивостью как к шуму в исходных данных, так и к количеству используемых при реализации алгоритмов собственных частот колебаний. И.М. Лебедеву удалось разработать и реализовать алгоритм численного решения рассматриваемых задач, устойчивый к погрешностям в исходных данных и количеству используемых в реализации частот. В совместных с Е.И. Шифриным публикациях алгоритм был протестирован на модельных данных, в том числе искусственно зашумленных. В совместной публикации с А.Л. Поповым, Д.А. Челюбеевым, В.М. Козинцевым работа алгоритма была протестирована на экспериментальных данных, полученных для случая продольных колебаний стержня.

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Во введении формулируются актуальность темы, цель работы, научная новизна полученных результатов, приводятся обзор литературы, список публикаций и докладов по теме диссертации. В первой главе формулируется математическая постановка задачи идентификации поперечных трещин в стержне по собственным частотам продольных колебаний, описываются алгоритмы идентификации дефектов в стержне по двум спектрам частот продольных колебаний и локализации выявляемых повреждений. Демонстрируются примеры идентификации как одиночного, так и множественных дефектов, в качестве которых выступают поперечные двусторонние трещины. Во второй главе формулируется математическая постановка задачи идентификации поперечных трещин в балке по собственным частотам поперечных колебаний, описывается алгоритм идентификации дефектов в стержне по трем спектрам частот поперечных колебаний. Приводятся примеры идентификации дефектов по трем возможным комбинациям спектров. Кроме того, рассматриваются результаты расчета при использовании только двух спектров. В рассмотренных примерах дефектами являются поперечные односторонние трещины. Приводятся результаты восстановления выявленных трещин. В обеих главах в качестве исходных данных используются частоты, полученные в ходе решения прямой задачи для модели, в рамках которой трещины заменяются пружинами. Третья глава посвящена проверке работоспособности описанного в первой главе алгоритма, при использовании в качестве исходных данных частот, полученных в ходе эксперимента. Приводится описание постановки эксперимента и результаты расчетов. Численно проверено, что разработанный алгоритм позволяет обнаружить и точно локализовать имеющиеся поперечные дефекты даже относительно небольшого размера. В заключении формулируются основные результаты настоящей диссертационной работы.

Глава 1

Идентификация дефектов в стержне по собственным частотам продольных колебаний

1.1 Введение

Данная глава посвящена задаче идентификации поперечных трещиноподобных дефектов в стержне по собственным частотам продольных колебаний. Среди моделей, описывающих колебания стержней, ослабленных трещиноподобными дефектами, наибольшее распространение получила модель, в которой трещины моделируются невесомыми пружинами [19], работающими в случае продольных колебаний на растяжение сжатие. В большинстве работ, где использовался данный подход, постановка задачи упрощалась введением дополнительных условий на размеры и количество трещин. Например, в работах [18; 53; 55; 57] рассматривалась задача идентификации одиночной малой трещины. Аналогичной задаче для двух малых трещин были посвящены публикации [34; 56; 65; 66]. В статьях [42],[76](Шифрин Е.И.) предложен метод выявления произвольного числа малых трещин. Строгий алгоритм обнаружения одиночной трещины произвольного размера был разработан в работе [67].

В диссертации задача о продольных колебаниях стержня с трещинами рассматривается в общей постановке, в рамках которой не вводятся никаких предположений относительно количества трещин и их размеров. Математическая постановка прямой задачи в рамках указанной модели выглядит следующим образом. Пусть имеется упругий однородный стержень постоянного сечения A , ослабленный открытыми поперечными трещинами. Число трещин заранее неизвестно и

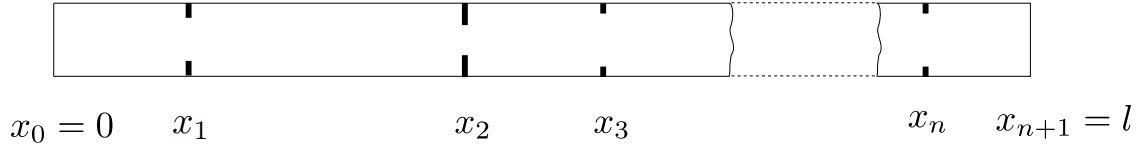


Рис. 1.1: Модель стержня, ослабленного поперечными двусторонними трещинами равно n . Левый конец стержня расположен в точке с координатой $x_0 = 0$, правый конец - в точке $x_{n+1} = l$, а трещины расположены в точках с координатами x_1, x_2, \dots, x_n , причем $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ (Рис. 1.1). Поставим в соответствие каждой имеющейся в стержне трещине пружину, работающую на растяжение-сжатие. Тогда исходный стержень можно разбить на $n + 1$ стержней, связанных пружинами. Уравнение продольных гармонических колебаний каждого такого стержня имеет вид [11; 72]

$$u_j''(x) + \lambda u_j(x) = 0, \quad x_{j-1} < x < x_j, \quad j = 1, \dots, n + 1, \quad (1.1)$$

где $\lambda = \rho\omega^2/E$, ρ - плотность, E - модуль Юнга, ω - круговая частота. Для каждой пружины справедливы два условия сопряжения [11; 72]

$$u_j'(x_j) = u_{j+1}'(x_j), \quad u_{j+1}(x_j) - u_j(x_j) = \Delta_j = EAc_j u_j'(x_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

где c_j - податливость j -й пружины, связанная с длиной соответствующей трещины (подробнее см. 1.2.5). Податливость каждой из n пружин считается строго положительной величиной. Первое условие в (1.2) означает равенство усилий и вытекает из закона Ньютона. Второе условие означает, что растяжение пружины пропорционально действующей на нее силе.

В работе [78] (Шифрин Е.И.) уравнения (1.1) и (1.2) рассматривались с двумя наборами граничных условий. Первый набор

$$u_1'(0) = 0, \quad u_{n+1}'(l) = 0, \quad (1.3)$$

соответствует стержню, концы которого свободны от усилий. Ненулевые собственные значения задачи (1.1),(1.2),(1.3) обозначим $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$. Вторым набором граничных условий

$$u_1(0) = 0, \quad u'_{n+1}(l) = 0 \quad (1.4)$$

соответствует стержню, один из концов которого (в данном случае левый) жестко закреплен, а второй свободен. Собственные значения задачи (1.1),(1.2),(1.4) обозначим $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$. Обозначенные собственные значения удовлетворяют условию

$$\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \dots < \mu_n < \lambda_n < \dots \quad (1.5)$$

В работе [78](Шифрин Е.И.) была решена обратная задача в наиболее общей постановке. Было доказано, что по двум указанным спектрам однозначно определяются количество пружин, их положение и податливости. Этот результат был получен путем сведения исходной задачи к обратной спектральной задаче Штурма-Лиувилля на отрезке. Переход к обратной задаче Штурма-Лиувилля осуществлялся с помощью подхода, предложенного в работе [74](Шифрин Е.И.) для случая поперечных колебаний и примененного к случаю продольных колебаний в статье [72]. Напомним этот результат, объединим амплитуды смещений стержней $u_j(x)$, введя новую функцию

$$u(x) = u_j(x), \quad x_{j-1} < x < x_j, \quad j = 1, \dots, n+1 \quad (1.6)$$

С учетом условий (1.1),(1.2) получим

$$u''(x) + \lambda u(x) - \sum_{k=1}^n \Delta_k \delta'(x - x_k) = 0 \quad 0 < x < l, \quad (1.7)$$

где $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

Учитывая (1.6) граничные условия (1.3),(1.4) переходят в условия для функции $u(x)$

$$u'(0) = 0, \quad u'(l) = 0, \quad (1.8)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(l) = 0 \quad (1.9)$$

Функция $u(x)$ является разрывной в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Выделим особенности, представив $u(x)$ в следующем виде

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^n \Delta_k H(x - x_k), \quad (1.10)$$

где $u_0(x)$ есть некоторая гладкая функция, а $H(x)$ - функция Хевисайда

$$H(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Подставляя (1.10) в (1.7), получим уравнение относительно гладкой функции $u_0(x)$

$$u_0''(x) + \lambda u_0(x) + \lambda \sum_{k=1}^n \Delta_k H(x - x_k) = 0 \quad (1.12)$$

С учетом (1.10), граничные условия (1.8),(1.9) перейдут в условия

$$u_0'(0) = 0, \quad u_0'(l) = 0, \quad (1.13)$$

$$u_0(0) = 0, \quad u_0(l) = 0 \quad (1.14)$$

Далее введем обозначение $w(x) = u_0'(x)$. Тогда, дифференцируя уравнение (1.12) и используя условия сопряжения (1.2), получим

$$w''(x) + \lambda w(x) + \lambda \sum_{k=1}^n EAc_k w(x_k) \delta(x - x_k) = 0 \quad (1.15)$$

Применяя хорошо известное свойство дельта-функции $w(x_k) \delta(x - x_k) = w(x) \delta(x - x_k)$, окончательно получим

$$w''(x) + \lambda \left[1 + \sum_{k=1}^n EAc_k \delta(x - x_k) \right] w(x) = 0 \quad (1.16)$$

При этом граничные условия для свободных концов стержня (1.13) перейдут в условия для закрепленных

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad (1.17)$$

Из (1.12) следует, что $w'(0) = -\lambda u_0(0)$, поэтому для функции $w(x)$ вторая пара граничных условий (1.14) перейдет в условия

$$w'(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad (1.18)$$

то есть свободный и закрепленный концы стержня поменяются местами.

Таким образом, была получена формулировка обратной спектральной задачи Штурма-Лиувилля на отрезке, в рамках которой по известным спектрам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ и $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$ необходимо восстановить неизвестную функцию, содержащую параметры c_i и x_i , где $i = 1, 2, \dots, n$, а n -произвольное неизвестное число имеющихся в стержне трещин. Фундаментальные результаты по обратным задачам Штурма-Лиувилля на отрезке были получены еще в пятидесятых годах прошлого века, главным образом, в работах представителей советской научной школы (М.Г. Крейн, И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан, В.А. Марченко и др.). Опираясь на известные результаты [106—108] (Крейн М.Г.), [9; 10; 87], в работе [78] (Шифрин Е.И.) было строго доказано, что рассматриваемые спектры позволяют однозначно восстановить искомые параметры без предварительных предположений о количестве пружин и величинах их податливостей. Кроме того, был предложен алгоритм восстановления трещин по конечному числу частот. Однако, он оказался весьма чувствительным к шуму в данных. Помимо этого, использование в нем большого количества частот также приводило к некорректным результатам. В данной главе предлагается другая, менее чувствительная к погрешностям в заданных собственных числах, процедура идентификации трещин. Ее описание будет дано в следующем разделе.

1.2 Численный алгоритм решения обратной задачи

При построении модели поврежденного стержня будем считать, что наличие поперечной трещины влияет на его локальную жесткость, но не влияет на плотность. Поэтому модель стержня с пружинами можно заменить моделью бездефектного стержня, модуль Юнга которого $E^*(x)$ зависит от координаты. Пусть нам известен модуль Юнга E целого однородного стержня, тогда для неоднородного стержня уравнение продольных гармонических колебаний примет вид

$$(p(x)u'(x))' + \lambda u(x) = 0, \quad p(x) = \frac{E^*(x)}{E}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.19)$$

Значение функции $p(x)$ в точке x характеризует степень повреждения стержня и принадлежит отрезку $[0, 1]$.

В предлагаемом алгоритме процедура идентификации поперечных трещин будет сведена к восстановлению функции поврежденности $p(x)$. Как следует из предыдущего пункта, трещиноподобные дефекты можно однозначно идентифицировать по двум спектрам $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и μ_1, μ_2, \dots , поэтому для определения функции $p(x)$ будем рассматривать уравнение (1.19) совместно с граничными условиями (1.3) и (1.4).

Теоретически для решения обратной задачи необходимо бесконечное количество частот. С учетом того, что в ходе эксперимента можно определить лишь конечное число частот, рассмотрим задачу восстановления функции $p(x)$ по усеченным данным. Пусть из эксперимента нам известно m первых собственных частот стержня с граничными условиями (1.3) и такое же их количество для стержня с граничными условиями (1.4). Тогда введем следующий функционал

$$F_m(p(x)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\lambda_i^* - \lambda_i(p(x))}{\lambda_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\mu_i^* - \mu_i(p(x))}{\mu_i^*} \right)^2 \right], \quad (1.20)$$

в котором $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ и μ_1^*, \dots, μ_m^* - комплексы, определенные в (1.1) и построенные по экспериментально измеренным частотам, а $\lambda_1(p(x)), \dots, \lambda_m(p(x))$ и $\mu_1(p(x)), \dots, \mu_m(p(x))$ - собственные числа задач (1.19),(1.3) и (1.19),(1.4) соответственно. Чтобы вычислять значения функционала (1.20), в задачах (1.19),(1.3) и (1.19),(1.4) из всего спектра достаточно находить лишь первые m собственных чисел. Для их вычисления будем использовать конечно-элементную аппроксимацию.

1.2.1 Конечно-элементная модель поврежденного стержня

Метод конечных элементов(МКЭ) позволяет найти требуемое количество собственных чисел задач (1.19),(1.3) и (1.19),(1.4) с достаточно высокой точностью.

Запишем слабую формулировку уравнения (1.19), для этого домножим его на тестовую функцию $v(x)$ и проинтегрируем по всей длине стержня

$$\int_0^l (p(x)u'(x))'v(x)dx + \int_0^l \lambda u(x)v(x)dx = 0 \quad (1.21)$$

Для того, чтобы требования к гладкости пробных и тестовых функций совпадали, проинтегрируем первое слагаемое по частям

$$\int_0^l p(x)u'(x)v'(x)dx - p(x)u'(x)v(x)\Big|_0^l - \int_0^l \lambda u(x)v(x)dx = 0 \quad (1.22)$$

Введем обозначения

$$K(u, v) = \int_0^l p(x)u'(x)v'(x)dx, \quad M(u, v) = \int_0^l u(x)v(x)dx, \quad (1.23)$$

используя которые, уравнение (1.19) совместно с условиями (1.3) примет вид

$$K(u, v) = \lambda M(u, v), \quad u, v \in V_\lambda = H^1(0, l) \quad (1.24)$$

а с условиями (1.4)

$$K(u, v) = \lambda M(u, v) \quad (1.25)$$

$$u, v \in V_\mu = \{v \in H^1(0, l) : v(0) = 0\},$$

здесь $H^1(0, l)$ - пространство Соболева. Соотношения (1.24), (1.25) представляют собой задачи на собственные значения. Функция $u(x)$ является собственной функцией, удовлетворяющей требуемым граничным условиям, а параметр λ - собственным значением, соответствующим $u(x)$.

Рассмотрим сначала задачу (1.24). Так как пространство V_λ является сепарабельным, то любая принадлежащая ему функция может быть единственным образом представлена в виде сходящегося ряда

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \phi_j(x), \quad u(x) \in V_\lambda \quad (1.26)$$

где q_j - неизвестные коэффициенты разложения по базису $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$. Для численного решения задачи (1.24) необходимо свести ее к другой, дискретной, задаче, в рамках которой исходная функция (1.26) определяется суммой, содержащей конечное число членов

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{j=1}^z q_j \phi_j(x), \quad u^h(x) \in V_\lambda^{(z)} \subset V_\lambda, \quad (1.27)$$

здесь $V_\lambda^{(z)}$ - конечномерное линейное пространство размерности z . Используя представление функций u, v в форме (1.27), получим

$$K(u^h, v^h) = \lambda M(u^h, v^h), \quad u^h, v^h \in V_\lambda^{(z)} \quad (1.28)$$

В рамках МКЭ базисные функции разложения (1.27) выбираются в виде интерполяционных сплайнов. В свою очередь коэффициенты разложения q_1, q_2, \dots, q_z представляют собой значения функции $u(x)$ в заданном наборе точек, который определяется разбиением стержня на конечные элементы. Будем рассматривать разбиение стержня длины l на N элементов одинаковой длины h^e . В этом случае отрезок $[0, l]$ разбивается на N отрезков $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, N$. Точки $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{N+1}$ называются узлами и задаются следующей последовательностью

$$\tilde{x}_j = h^e(j - 1), \quad j = 1, 2, \dots, z, \quad z = N + 1, \quad (1.29)$$

здесь z - количество узлов.

Таким образом, разложение (1.27) примет вид

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^z u(\tilde{x}_j) \phi_j(x), \quad u^h(x) \in V_\lambda^{(z)}, \quad (1.30)$$

а дискретная формулировка (1.28) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений

$$(K - \lambda M) \vec{d} = 0, \quad \vec{d} = [u(\tilde{x}_1), u(\tilde{x}_2), \dots, u(\tilde{x}_z)], \quad (1.31)$$

где матрицы K и M называют глобальными матрицами жесткости и масс соответственно. Учитывая, что функции u^h, v^h раскладываются по одному и тому же базису $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_z(x)$, элементы системы (1.31) вычисляются по следующим формулам

$$K_{ij} = \int_0^l p(x) \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx, \quad M_{ij} = \int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (1.32)$$

Ясно, что вид системы (1.31) существенным образом зависит от выбора базисных функций. В рамках МКЭ они выбираются в виде локальных сплайнов, которые обращаются в ноль всюду, кроме фиксированного числа конечных элементов. Такой выбор обеспечивает разреженность и ленточную структуру матриц K и M .

Чтобы вычислять собственные числа с необходимой точностью, в разложении (1.30) в качестве базисных функций будем использовать кубические интерполяционные сплайны. Они должны быть выбраны таким образом, чтобы собственная функция $u(x)$ на каждом конечном элементе аппроксимировалась интерполяционным полиномом Лагранжа третьей степени. Такой полином можно построить по четырем точкам. Так как любой элемент из разбиения (1.29) обладает лишь двумя узлами, то необходимо внутри каждого конечного элемента ввести два дополнительных узла. Будем задавать их таким образом, чтобы они разбивали элемент на

три участка равной длины. В результате разбиение (1.29) примет вид

$$\tilde{x}_j = \frac{1}{3}h^e(j-1), \quad j = 1, 2, \dots, z, \quad z = 3N+1, \quad (1.33)$$

а аппроксимация функции $u(x)$ принимает вид кусочно-полиномиальной

$$u^h(x) = \sum_{k=1}^4 l_k^i(x)u(\tilde{x}_{3(i-1)+k}), \quad \tilde{x}_{3i-2} \leq x \leq \tilde{x}_{3i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.34)$$

где индекс i обозначает номер конечного элемента, на котором определена аппроксимация функции $u(x)$. Функции $l_k(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} l_1^i(x) &= 1 - 5.5 \left(\frac{x-\tilde{x}_{3i-2}}{h^e} \right) + 9 \left(\frac{x-\tilde{x}_{3i-2}}{h^e} \right)^2 - 4.5 \left(\frac{x-\tilde{x}_{3i-2}}{h^e} \right)^3, \\ l_2^i(x) &= 9 \left(\frac{x-\tilde{x}_{3i-1}}{h^e} \right) - 22.5 \left(\frac{x-\tilde{x}_{3i-1}}{h^e} \right)^2 + 13.5 \left(\frac{x-\tilde{x}_{3i-1}}{h^e} \right)^3, \\ l_3^i(x) &= -4.5 \left(\frac{x-\tilde{x}_{3i}}{h^e} \right) + 18 \left(\frac{x-\tilde{x}_{3i}}{h^e} \right)^2 - 13.5 \left(\frac{x-\tilde{x}_{3i}}{h^e} \right)^3, \\ l_4^i(x) &= \frac{x-\tilde{x}_{3i+1}}{h^e} - 4.5 \left(\frac{x-\tilde{x}_{3i+1}}{h^e} \right)^2 + 4.5 \left(\frac{x-\tilde{x}_{3i+1}}{h^e} \right)^3, \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\tilde{x}_{3i-2} \leq x \leq \tilde{x}_{3i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Таким образом, базис пространства $V_\lambda^{(z)}$ можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \phi_1 &= l_1^1(x) \\ \phi_{3i-2} &= \begin{cases} l_4^{i-1}(x), & x \leq \tilde{x}_{3i+1} \\ l_1^i(x), & x \geq \tilde{x}_{3i+1} \end{cases} \quad i = 2, \dots, N \\ \phi_{3i-1} &= l_2^i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \phi_{3i} &= l_3^i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \phi_{3N+1} &= l_4^N(x) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Приведем несколько примеров вычисления элементов матриц K и M , используя базисные функции (1.36). Рассмотрим элементы матрицы жесткости

$$K_{3j_1-2, 3j_2-2} = \int_0^l p(x) \phi'_{3j_1-2}(x) \phi'_{3j_2-2}(x) dx, \quad j_1, j_2 = 1, 2, \dots, N+1$$

Прежде всего, введем предположение, что каждый конечный элемент обладает собственной жесткостью, то есть функция $E^*(x)$ принимает некоторое постоянное значение на каждом элементе. Следовательно, функция $p(x)$, определенная в (1.19) будет кусочно-постоянной и ее можно представить в виде вектора $\vec{p} = [p_1, p_2, \dots, p_N]$. Кроме того, из (1.32) видно, что рассматриваемые матрицы симметричны, поэтому достаточно рассмотреть случай когда $j_2 \geq j_1$. Таким образом, подставляя в предыдущее уравнение первые производные от соответствующих базисных функций из (1.36), получим

$$K_{3j_1-2, 3j_2-2} = \begin{cases} p_{j_1-1} \frac{148}{40h^e} + p_{j_1} \frac{148}{40h^e}, & j_1 = j_2 \\ -p_{j_1} \frac{13}{40h^e}, & j_2 - j_1 = 1 \\ 0, & j_2 - j_1 \geq 2 \end{cases}, \quad j_1, j_2 = 2, \dots, N$$

$$K_{1,1} = p_1 \frac{148}{40h^e},$$

$$K_{3N+1, 3N+1} = p_N \frac{148}{40h^e}$$

Рассмотрим другой набор элементов матрицы жесткости

$$K_{3j_1-2, 3j_2-1} = \int_0^l p(x) \phi'_{3j_1-2}(x) \phi'_{3j_2-1}(x) dx, \quad j_1, j_2 = 1, 2, \dots, N+1$$

Действуя по аналогии с предыдущим случаем, получим

$$K_{3j_1-2, 3j_2-1} = \begin{cases} -p_{j_1} \frac{189}{40h^e}, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_2 - j_1 \geq 1 \end{cases}, \quad j_1, j_2 = 1, \dots, N$$

Для матрицы масс вычислим следующие элементы

$$M_{3j_1-1, 3j_2} = \int_0^l \phi_{3j_1-1}(x) \phi_{3j_2}(x) dx, \quad j_1, j_2 = 1, 2, \dots, N+1$$

Подставляя в предыдущее уравнение необходимые базисные функции из (1.36), получим

$$M_{3j_1-1, 3j_2} = \begin{cases} -p_{j_1} \frac{81h^e}{1680}, & j_1 = j_2 \\ 0, & j_2 - j_1 \geq 1 \end{cases}, \quad j_1, j_2 = 1, \dots, N$$

Все остальные элементы глобальных матриц K и M вычисляются аналогичным образом.

Учитывая свойства функции $p(x)$, система (1.31) примет вид

$$(K_1(\vec{p}) - \lambda(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0 \quad (1.37)$$

Ненулевые собственные числа этой системы соответствуют первым $z - 1$ собственным значениям задачи (1.19), (1.3) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{z-1}$. Аналогичным образом задачу (1.25) тоже можно свести к системе уравнений

$$(K_2(\vec{p}) - \lambda(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0 \quad (1.38)$$

Собственные числа этой системы соответствуют первым z собственным значениям задачи (1.19), (1.4) $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_z$. Оба спектра будут зависеть от степени поврежденности стержня, которая определяется функцией $p(x)$. Учет естественных граничных условий осуществляется посредством изменения коэффициентов глобальной матрицы жесткости. Отсюда вытекают различия между матрицами K_1 и K_2 . Исчерпывающее изложение вопросов, связанных с построением глобальных матриц, а также учетом граничных условий, можно найти в книгах [105; 114].

Используя системы (1.37) и (1.38) для вычисления функционала (1.20), получим функцию N переменных

$$F_m(\vec{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\lambda_i^* - \lambda_i(\vec{p})}{\lambda_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\mu_i^* - \mu_i(\vec{p})}{\mu_i^*} \right)^2 \right], \quad m \leq z - 1 \quad (1.39)$$

Теперь для идентификации дефектов требуется найти вектор \vec{p}_{min} , минимизирующий функцию суммы квадратов (1.39). Ясно, что искомый вектор \vec{p}_{min} зависит от количества используемых частот $2m$ и от числа конечных элементов N , на которые разбивается стержень. Причем заранее не известно какие значения этих параметров обеспечат устойчивость полученного решения. Поэтому при поиске дефектов будем рассматривать последовательность функций $F_1(\vec{p}), F_2(\vec{p}), \dots, F_m(\vec{p})$, за-

фиксировав N . Вычисления будут продолжаться до тех пор, пока не будет достигнута устойчивость результатов. Минимизация функций (1.39) будет осуществляться применением градиентных методов оптимизации.

1.2.2 Алгоритм оптимизации

Полученную в предыдущем пункте функцию (1.39) можно представить в другой форме. Для этого введем вектор невязок

$$\vec{r}(\vec{p}) = \left[\frac{\lambda_1^* - \lambda_1(\vec{p})}{\lambda_1^*}, \dots, \frac{\lambda_m^* - \lambda_m(\vec{p})}{\lambda_m^*}, \frac{\mu_1^* - \mu_1(\vec{p})}{\mu_1^*}, \dots, \frac{\mu_m^* - \mu_m(\vec{p})}{\mu_m^*} \right], \quad (1.40)$$

и тогда функция (1.39) примет вид

$$F(\vec{p}) = \frac{1}{2} \vec{r}(\vec{p})^T \vec{r}(\vec{p}) \quad (1.41)$$

Оптимизацию (1.41) можно произвести, используя метод Гаусса-Ньютона, в рамках которого используется линейное приближение невязки в окрестности некоторой фиксированной точки:

$$\vec{r}(\vec{p} + \vec{h}) \approx \vec{r}(\vec{p}) + J(\vec{p})\vec{h}, \quad (1.42)$$

здесь $J(\vec{p})$ - матрица Якоби, элементы которой вычисляются по формулам

$$J_{ij}(\vec{p}) = \frac{\partial \vec{r}_i(\vec{p})}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\lambda_i^* - \lambda_i(\vec{p})}{\lambda_i^*} \right) = -\frac{1}{\lambda_i^*} \frac{\partial \lambda_i(\vec{p})}{\partial p_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1.43)$$

$$J_{ij}(\vec{p}) = \frac{\partial \vec{r}_i(\vec{p})}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\mu_{i-m}^* - \mu_{i-m}(\vec{p})}{\mu_{i-m}^*} \right) = -\frac{1}{\mu_{i-m}^*} \frac{\partial \mu_{i-m}(\vec{p})}{\partial p_j}, \quad i = m + 1, m + 2, \dots, 2m, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (1.44)$$

\vec{h} - вектор приращения аргумента. Подставляя функцию (1.42) в (1.41), получим формулу приращения целевой функции

$$F(\vec{p} + \vec{h}) = \frac{1}{2} \left(\vec{r}(\vec{p})^T \vec{r}(\vec{p}) + 2\vec{r}(\vec{p})^T J(\vec{p})\vec{h} + \vec{h}^T J(\vec{p})^T J(\vec{p})\vec{h} \right) \quad (1.45)$$

Минимизируя полученную функцию по \vec{h} , получим следующую систему уравнений

$$(J(\vec{p})^T J(\vec{p}))\vec{h} = -J(\vec{p})^T \vec{r}(\vec{p}) \quad (1.46)$$

Решая эту систему для выбранного $\vec{p}^{(0)}$, получим вектор $\vec{h}^{(0)}$. Так как матрица $J^T J$ является положительно определенной, то $F(\vec{p}^{(0)} + \vec{h}^{(0)}) \leq F(\vec{p}^{(0)})$. Далее, подставляя вектор $\vec{p}^{(1)} = \vec{p}^{(0)} + \vec{h}^{(0)}$ в систему (1.46) и решая ее, получим новый вектор $\vec{h}^{(1)}$ и $\vec{p}^{(2)} = \vec{p}^{(1)} + \vec{h}^{(1)}$. Повторяя процедуру требуемое количество раз, получим минимизирующий вектор \vec{p}_{min} .

Недостаток метода Гаусса-Ньютона состоит в том, что вычисляемая в (1.46) матрица Якоби $J(\vec{p})$ может быть плохо обусловлена, то есть близка к вырожденной. В работах [49; 51] было предложено заменить систему (1.46) другой

$$(J(\vec{p})^T J(\vec{p}) + \kappa I)\vec{h} = -J(\vec{p})^T \vec{r}(\vec{p}), \quad \vec{p}_{new} = \vec{p} + \vec{h}, \quad (1.47)$$

здесь I - единичная матрица, κ - параметр регуляризации, который пересчитывается на каждом шаге итерации. Если оказывается, что $F(\vec{p}_{new}) < F(\vec{p})$, то \vec{p} заменяется на \vec{p}_{new} , а при поиске следующего шага параметр κ заменяется на $\alpha\kappa$, причем $0 < \alpha < 1$. Уменьшение параметра κ приводит к тому, что алгоритм приближается к методу Гаусса-Ньютона. В случае когда $F(\vec{p}_{new}) > F(\vec{p})$ решение системы (1.47) находится заново, но уже с увеличенным параметром κ , который заменяется на $\beta\kappa$, $\beta > 1$. Увеличение параметра κ приводит к тому, что алгоритм приближается к методу градиентного спуска. В реализации алгоритма используются параметры $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$. Начальное значение параметра регуляризации, согласно [50], часто выбирается в виде $\kappa = \tau \max \{ \text{diag}(J(\vec{p})^T J(\vec{p})) \}$, где $\tau = 1 \cdot 10^{-3}$.

В реализованном алгоритме используется два критерия остановки:

$\|J(\vec{p})^T \vec{r}(\vec{p})\|_\infty > \epsilon_1$ и $\|\vec{h}\|_2 < \epsilon_2 (\|\vec{p}\|_2 + \epsilon_2)$. Согласно [46; 50] оптимальный диапазон параметров ϵ_1 и ϵ_2 лежит в пределах $1 \cdot 10^{-15} - 1 \cdot 10^{-12}$. К перечисленным

критериям можно также добавить критерий на максимальное количество итераций, но практика использования алгоритма показала, что решение находится за весьма ограниченное число шагов. В качестве начального вектора $\vec{p}^{(0)}$ был выбран вектор, соответствующий целому стержню. Каждая компонента такого вектора $p_i^{(0)}$ равна единице, $i = 1, 2, \dots, N$.

Описанный алгоритм носит название метода Левенберга-Марквардта. Примеры его использования для численного решения обратных задач можно найти в публикациях [62; 73]. Ниже представлен псевдокод алгоритма.

Алгоритм 1.1. Алгоритм Левенберга-Марквардта

Require: $\vec{p}_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \tau$

```

1:  $\vec{p} = \vec{p}_0, \kappa = \tau \max \{diag(J^T J)\}, \beta = 2$ 
2: while  $\|J^T \vec{r}\|_\infty > \epsilon_1$  do
3:   Solve  $(J^T J + \kappa I) \vec{h} = -J^T \vec{r}$ 
4:   if  $\|\vec{h}\|_2 < \epsilon_2 (\|\vec{p}\|_2 + \epsilon_2)$  then
5:     return  $\vec{p}$ 
6:   else
7:      $\vec{p}_{new} = \vec{p} + \vec{h}$ 
8:     if  $F(\vec{p}_{new}) < F(\vec{p})$  then
9:        $\vec{p} = \vec{p}_{new}, \kappa = \frac{\kappa}{\beta}$ 
10:    else
11:       $\kappa = \beta \kappa,$ 
12:    end if
13:  end if
14: end while
15: return  $\vec{p}$ 

```

Стоит отметить, что алгоритм Левенберга-Марквардта может быть применен

как к задачам без ограничений, так и с ограничениями. В рассматриваемой задаче параметры p_i находятся внутри параллелепипеда $0 \leq p_i \leq 1$. Чтобы учесть это ограничение, на каждом шаге итерации алгоритма все параметры $p_i > 1$ заменяются на $p_i = 1$. Такой подход близок к проекционному методу Левенберга-Марквардта, описанному в статье [41].

Для работы алгоритма необходимо вычислять матрицу Якоби J , элементами которой являются производные от собственных значений λ и μ по параметрам p_i . Поскольку сами собственные значения, определяются численно с помощью метода конечных элементов, то вычисление производных становится непростой задачей. Численное дифференцирование, как известно, является некорректной задачей, в том смысле что малые возмущения функции могут приводить к большим ошибкам в вычисленных производных. Метод вычисления производных, позволяющий избежать указанные трудности, представлен в следующем разделе.

1.2.3 Метод вычисления производных от собственных значений

Для вычисления искомых производных представим задачу на собственные значения (1.37) в следующем виде

$$(K_1(\vec{p}) - \lambda(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0 \quad (1.48)$$

Матрицы $K_1(\vec{p})$, M являются вещественными симметричными и положительно определенными, поэтому все ненулевые собственные числа системы (1.48) являются положительными. Пусть $\lambda_m(\vec{p})$ одно из них, а $\vec{d}_m(\vec{p})$ соответствующий собственный вектор. Тогда, для выбранного $\lambda_m(\vec{p})$ система (1.48) примет вид

$$(K_1(\vec{p}) - \lambda_m(\vec{p})M) \vec{d}_m(\vec{p}) = 0 \quad (1.49)$$

Следуя подходу, предложенному в работе [26], домножим (1.49) слева на собственный вектор $\vec{d}_m(\vec{p})$

$$\vec{d}_m^T(\vec{p}) (K_1(\vec{p}) - \lambda_m(\vec{p})M) \vec{d}_m(\vec{p}) = 0 \quad (1.50)$$

Дифференцируя полученное равенство по j -й компоненте вектора \vec{p} , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{d}_m^T(\vec{p})}{\partial p_j} (K_1(\vec{p}) - \lambda_m(\vec{p})M) \vec{d}_m(\vec{p}) + \vec{d}_m^T(\vec{p}) (K_1(\vec{p}) - \lambda_m(\vec{p})M) \frac{\partial \vec{d}_m(\vec{p})}{\partial p_j} + \\ + \vec{d}_m^T(\vec{p}) \left(\frac{\partial K_1(\vec{p})}{\partial p_j} - \frac{\lambda_m(\vec{p})}{\partial p_j} M \right) \vec{d}_m(\vec{p}) = 0 \end{aligned} \quad (1.51)$$

Первое слагаемое равно нулю в силу (1.49), второе слагаемое равно нулю в силу симметрии матриц $K_1(\vec{p})$, M и учета (1.49). Из оставшегося слагаемого выразим искомую производную

$$\frac{\partial \lambda_m(\vec{p})}{\partial p_j} = \frac{\vec{d}_m^T(\vec{p}) \frac{\partial K_1(\vec{p})}{\partial p_j} \vec{d}_m(\vec{p})}{\vec{d}_m^T(\vec{p}) M \vec{d}_m(\vec{p})} \quad (1.52)$$

Если для собственных векторов выполнено условие нормировки

$$\vec{d}_m^T(\vec{p}) M \vec{d}_m(\vec{p}) = 1, \quad (1.53)$$

то окончательно получим

$$\frac{\partial \lambda_m(\vec{p})}{\partial p_j} = \vec{d}_m^T(\vec{p}) \frac{\partial K_1(\vec{p})}{\partial p_j} \vec{d}_m(\vec{p}) \quad (1.54)$$

Аналогично, для задачи (1.38) получим

$$\frac{\partial \mu_m(\vec{p})}{\partial p_j} = \vec{d}_m^T(\vec{p}) \frac{\partial K_2(\vec{p})}{\partial p_j} \vec{d}_m(\vec{p}) \quad (1.55)$$

1.2.4 Алгоритм локализации повреждений

Как следует из выше изложенного, отыскание функции $p(x)$, описывающей повреждения стержня, осуществляется путем минимизации функции (1.39). Эта

функция соответствует системе $2m$ уравнений относительно N неизвестных. Практика показывает, что устойчивость решения обеспечивается условием $\frac{2m}{N} \geq 1.5$. Величина m зависит от числа экспериментально измеренных частот, а N есть число конечных элементов, на которое разбит рассматриваемый стержень. Как правило, эксперимент не позволяет получить большое количество данных, необходимой точности, поэтому число уравнений системы будет существенно ограничено. Учитывая условие переопределения, мы получаем еще более жесткие ограничения на число элементов N . В свою очередь при малом N вычисляемые собственные числа будут обладать высокой погрешностью.

Разобьем стержень на s частей так, чтобы каждая часть содержала в себе одинаковое количество конечных элементов. Каждой такой части поставим в соответствие свое значение модуля Юнга E_i^* , где $i = (1, 2, \dots, s)$. В результате, функция $p(x)$ примет вид

$$p(x) = \begin{cases} p_1, & 0 \leq x \leq \frac{l}{s} \\ p_2, & \frac{l}{s} \leq x \leq \frac{2l}{s} \\ \dots & \\ p_s, & \frac{(s-1)l}{s} \leq x \leq l \end{cases}, \quad p_i = \frac{E_i^*}{E} \quad (1.56)$$

и ее можно представить в виде вектора $\vec{p} = [p_1, p_2, \dots, p_s]$, $s \leq N$. Теперь переопределенность системы может быть обеспечена и в случае разбиения на большое число конечных элементов.

С другой стороны, уменьшение числа компонент вектора \vec{p} приводит к плохой локализации выявляемых повреждений. Для устранения этого недостатка был разработан алгоритм локализации.

На вход алгоритму подается вектор \vec{p}_{lm} , который вычисляется с помощью алгоритма Левенберга-Марквардта при начальном разбиении стержня на s частей. Поскольку никаких предположений о количестве и местоположении дефектов не

используется, то поиск решения ведется по всей длине стержня. Затем определяются индексы поврежденных участков $inds = \{k : p_k < 1.0\}$, все прочие участки считаются целыми и далее не рассматриваются. Чтобы улучшить локализацию найденных повреждений, исходное число участков разбиения s удваивается, с учетом этого удвоения индексы поврежденных участков заменяются на новые $inds_{new} = \{2 \cdot inds\} \cup \{2 \cdot inds - 1\}$. Затем снова запускается алгоритм минимизации, но поиск решения осуществляется уже не по всему стержню, а только для участков, номера которых содержатся во множестве $inds_{new}$. Получив с помощью алгоритма Левенберга-Марквардта решение для выбранных участков, список индексов поврежденных участков формируется заново $inds = \{k : p_k < 1.0\}$. Для лучшей локализации описанную процедуру можно повторить нужное количество раз.

В рассмотренных численных примерах использовались параметры $s = 10$, $N = 80$. В этом случае можно провести три этапа локализации и получить оценку местоположения дефектов с точностью до 1 % от длины стержня. Практика реализации алгоритма показывает, что увеличение параметра N позволяет немного улучшить эту оценку, но добиться существенного увеличения точности локализации повреждений таким способом не удастся.

1.2.5 Оценка размеров выявленных повреждений

По завершении работы алгоритма, каждому конечному элементу будет сопоставлен параметр p_i , характеризующий его жесткость. Индекс i соответствует номеру элемента. Сам по себе параметр p_i не определяет размеры имеющихся в элементе дефектов, но это становится возможным при наличии ряда предположений.

Предположим, что стержень имеет прямоугольное сечение. Рассмотрим эле-

мент стержня длины h^e . Напряжение в этом элементе обозначим σ . Энергия деформации неповрежденного элемента стержня равна

$$W = \frac{\sigma^2}{2E} Ah^e \quad (1.57)$$

Если элемент содержит одну пружину, податливость которой равна c , то энергия деформации элемента увеличится на величину

$$\Delta W = \frac{\sigma^2 A^2 c}{2} \quad (1.58)$$

Следовательно, энергия деформации элемента стержня с пружиной равна

$$W + \Delta W = \frac{\sigma^2 A}{2} \left(\frac{h^e}{E} + Ac \right) \quad (1.59)$$

Если поврежденность моделируется изменением модуля Юнга элемента, то энергия деформации неповрежденного элемента с модулем Юнга E^* будет иметь вид аналогичный (1.57)

$$W + \Delta W = \frac{\sigma^2}{2E^*} Ah^e \quad (1.60)$$

Из равенств (1.59) и (1.60), учитывая при этом, что $E^*/E = p$, имеем

$$c = \frac{h^e}{EA} \frac{1-p}{p} \quad (1.61)$$

Формула (1.61) позволяет вычислять податливость попавшей в элемент пружинки по известному из расчета параметру p .

С другой стороны, предположение о том, что элемент содержит только одну пружину, позволяет связать податливость пружины c с длиной соответствующей трещины. Для этого необходимо воспользоваться известными соотношениями механики разрушения.

Пусть к краям образца, ослабленного одиночной поперечной трещиной, приложена растягивающая нагрузка P . Тогда скорость изменения потенциальной

энергии образца по мере роста трещины определяется соотношением [113; 115]

$$G(a) = \frac{1}{2} \frac{P^2}{b} \frac{\partial c}{\partial a} \quad (1.62)$$

где b - глубина образца, a - длина трещины, c - податливость образца. Поскольку при растяжении образца поперечная трещина является трещиной нормального отрыва, то для случая плоской деформации справедлива формула Ирвина

$$G(a) = \frac{(1 - \nu^2) K_I^2(a)}{E}, \quad (1.63)$$

где ν - коэффициент Пуассона, K_I - коэффициент интенсивности напряжений. С помощью (1.63) можно определить увеличение податливости образца за счет образования поперечной трещины длины a

$$c = \frac{2b(1 - \nu^2)}{E} \int_0^a \left(\frac{K_I(a)}{P} \right)^2 da \quad (1.64)$$

Рассмотрим применение (1.64) на следующем примере.

Пусть рассматриваемый образец является стержнем постоянного прямоугольного сечения, содержащим двустороннюю краевую поперечную трещину. Аппроксимация коэффициента интенсивности напряжений в этом случае имеет вид [86]

$$K_I = \frac{P\sqrt{\pi a}}{A\sqrt{2}} \left(1.12 + 0.203 \frac{a}{b_h} - 1.197 \left(\frac{a}{b_h} \right)^2 + 1.93 \left(\frac{a}{b_h} \right)^3 \right), \quad (1.65)$$

где b_h - высота стержня, P - растягивающая нагрузка, A - площадь сечения стержня. Подставляя последнее уравнение в формулу (1.64), получим

$$c = \frac{2b_h(1 - \nu^2)}{EA} f(s_{cr}), \quad s_{cr} = \frac{a}{b_h} \quad (1.66)$$

$$f(s_{cr}) = 0.9852s_{cr}^2 + 0.2381s_{cr}^3 - 1.0368s_{cr}^4 + 1.2055s_{cr}^5 + 0.5803s_{cr}^6 - 1.0368s_{cr}^7 + 0.7314s_{cr}^8 \quad (1.67)$$

Таким образом, зная тип дефекта и свойства материала образца, становится возможным связать параметр податливости c с размерами дефектов. Замена трещины пружиной позволяет отождествить формулы (1.61) и (1.66), в результате

получим функцию

$$f(s_{cr}) - \frac{h^e}{2b_h(1-\nu^2)} \frac{1-p_i}{p_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.68)$$

Для $p_i < 1$ и $s_{cr} = 0$ функция (1.68) принимает отрицательное значение. Поскольку с увеличением s_{cr} данная функция монотонно возрастает, то имеется только одно положительное значение s_{cr} при котором она обращается в нуль. Это значение s_{cr} и будет соответствовать относительной длине попавшей в i -й элемент двусторонней трещины.

1.3 Численные примеры

Во всех рассмотренных ниже примерах приняты следующие параметры стержня: длина 1 м, прямоугольное поперечное сечение высоты 0.02 м и ширины 0.02 м, модуль Юнга $2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м², коэффициент Пуассона 0.27, плотность 7800 кг/м³. Для определения собственных частот колебаний стержень разбивался на 80 конечных элементов. В качестве начального шага процесса локализации использовалось разбиение стержня на 10 участков, то есть вектор $\vec{p}^{(0)}$ состоял из 10 компонент. При дальнейшей локализации дефектов путем последовательного удвоения числа участков, стержень разбивался на 20, 40 и 80 участков.

Собственные значения $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ и μ_1^*, \dots, μ_m^* , являющиеся входными данными для решения обратной задачи, получены численно путем решения прямой задачи. Подчеркнем, что прямая задача решалась не методом конечных элементов, а с помощью решения задачи в исходной постановке, представленной в разделе 1.1, методом, предложенным в [74] (Шифрин Е.И.) для решения прямой задачи о поперечных колебаниях стержня с трещинами и примененным к задаче о продольных колебаниях в [72]. Независимое от техники решения обратной задачи получение исходных данных в какой-то мере моделирует использование входных данных,

полученных экспериментально.

Пример 1. Рассмотрим стержень с одиночной трещиной, расположенной в точке $x = 0.67$ м и имеющей относительную длину $s_{cr} = 0.1$. Результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 20$ собственным числам λ_i и μ_i представлены на (Рис. 1.2). По оси x отложены номера компонент вектора $\vec{p} = [p_1, p_2, \dots, p_s]$, а по оси y величины $1 - p$, соответствующие податливостям элементов. Результаты представлены для $s = 20, 40$ и 80 . В случае $s = 20$ падение жесткости возникает на участке под номером 14. Этот участок занимает положение $0.65 - 0.70$ м, то есть действительно содержит имеющийся дефект. В случае $s = 40$ падение жесткости возникает уже на двух соседних участках с номерами 27 и 28, которые соответствуют отрезкам $0.650 - 0.675$ м и $0.675 - 0.70$ м соответственно. Из рисунка видно, что падение жесткости на 27-м участке, содержащим дефект, больше, чем на соседнем 28-м. Небольшое падение жесткости на соседнем от поврежденного участке будет встречаться довольно часто и возникать в тех случаях, когда координата имеющегося дефекта будет близка к точке, разделяющей два соседних участка. Поэтому небольшой паразитный всплеск может возникать как справа от поврежденного элемента, так и слева. В случае $s = 80$ число компонент вектора \vec{p} совпадает с количеством конечных элементов N . Результат расчета показывает увеличение податливости в 54-м и 55-м элементах, причем в первом из них податливость увеличилась намного сильнее. Этот элемент занимает отрезок $0.6625 - 0.6750$ м и действительно содержит имеющийся дефект. Данный пример показывает, что процедура локализации позволяет определять местоположение дефекта в метровом стержне с точностью до сантиметра. Во всех последующих примерах будем рассматривать результаты расчета только для случая $s = 80$, опуская предыдущие этапы локализации.

На (Рис. 1.3а) для данного примера показано относительное отклонение между собственными частотами поврежденного стержня со свободными концами λ^*

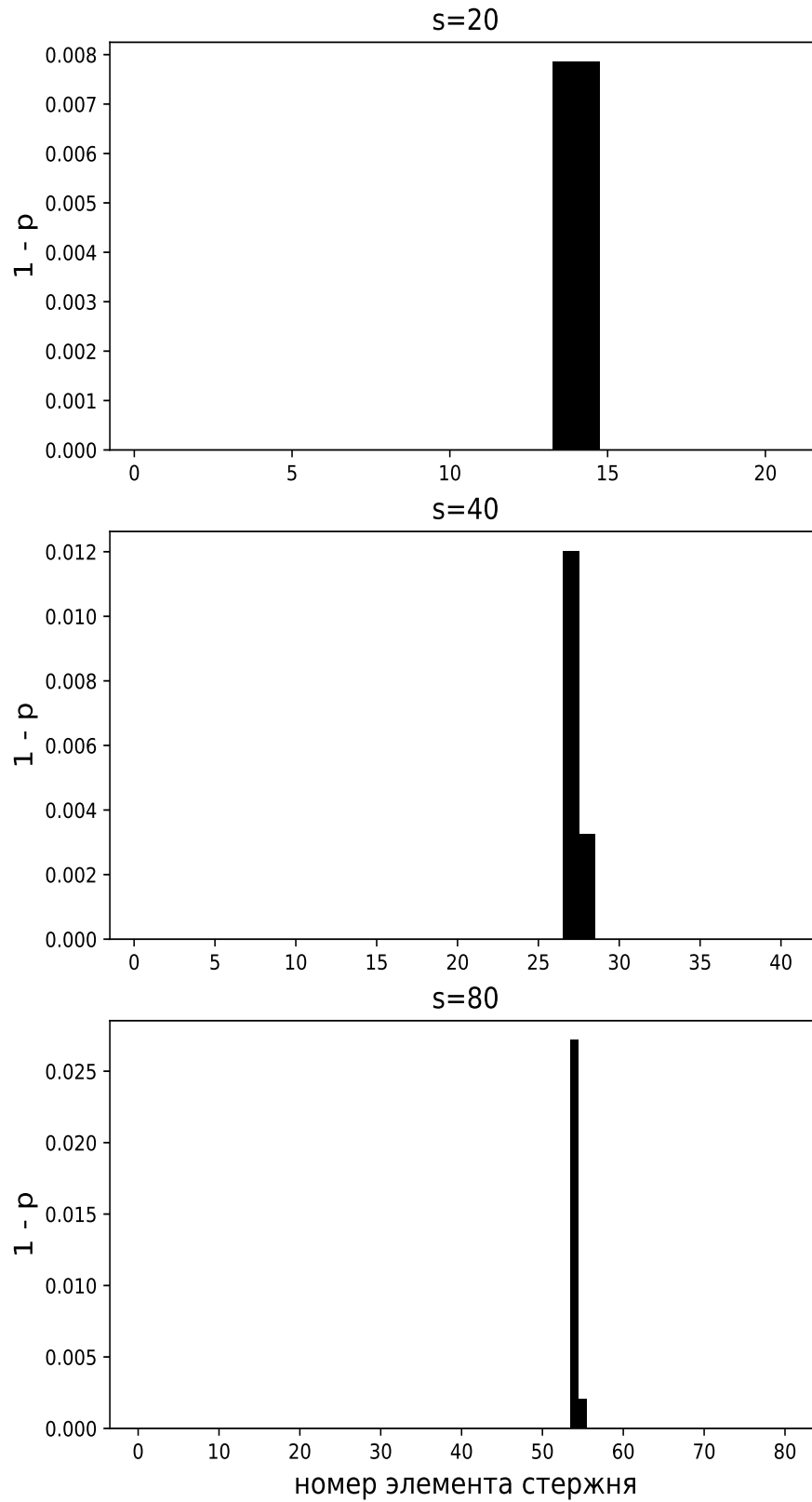


Рис. 1.2: Идентификация одиночной трещины

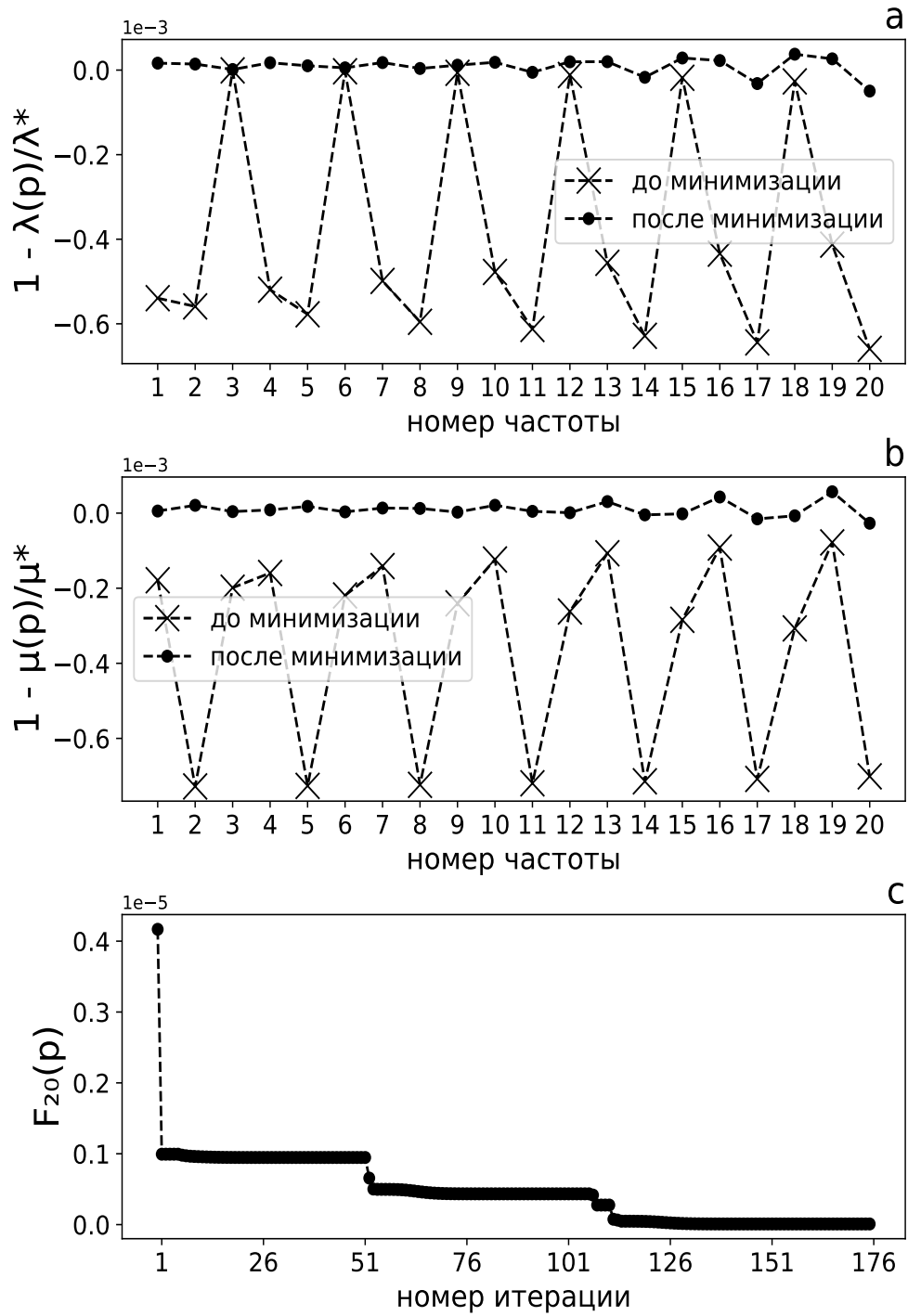


Рис. 1.3: а, b - компоненты вектора невязки \vec{r} из примера 1, с - зависимость целевой функции $F_{20}(\vec{p})$ из примера 1 от номера итерации

и аналогичными частотами для целого стержня $\lambda(\vec{p}^{(0)})$. Все компоненты вектора $\vec{p}^{(0)}$ равны единице. Соответствующие точки на графике обозначены символом \times . На этом же рисунке показано относительное отклонение между λ^* и $\lambda(\vec{p}_{min})$, где \vec{p}_{min} соответствует решению, представленному на (Рис. 1.2) при $s = 80$, то есть решению, полученному после завершения процедуры восстановления повреждений. Соответствующие точки на графике обозначены символом \bullet . Из (Рис. 1.3а) можно видеть, что частоты $\lambda(\vec{p}_{min})$ фактически совпадают с исходными частотами λ^* , при этом, начиная с 11-й частоты, график $1 - \lambda(\vec{p}_{min})/\lambda^*$ колеблется вокруг нулевого значения. Аналогичные графики для спектра μ представлены на (Рис. 1.3б).

На (Рис. 1.3с) показана зависимость величины целевой функции $F_{20}(\vec{p})$, определенной в (1.39), от номера итерации. Все скачки на этом графике (за исключением самого первого) связаны с переходом к очередному этапу локализации повреждений. Таким образом, значение функции $F_{20}(\vec{p})$ после минимизации существенно зависит от точности локализации имеющейся трещины.

Пример 2. Рассмотрим стержень, содержащий две трещины. Здесь к трещине, рассмотренной в примере 1, добавлена трещина с параметрами: $x = 0.22$ м, $s_{cr} = 0.15$. В данном примере исследуется устойчивость результатов по отношению к количеству используемых экспериментальных собственных частот продольных колебаний стержня. Для этого были получены результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 8, 14$ и 20 собственным числам λ_i и μ_i (Рис. 1.4).

Во всех трех расчетах отчетливо проявились два крупных всплеска и несколько паразитных всплесков в соседних элементах. Крупные всплески соответствуют росту податливости в 18-м и 54-м элементах, занимающих области $0.2125 - 0.2250$ м и $0.6625 - 0.6750$ м соответственно, то есть каждый из этих элементов содержит по одному из имеющихся дефектов. Всплеск в 18-м элементе выше, чем в 54-м так как содержит более крупный дефект, что приводит к большему возрастанию податливости этого элемента. Таким образом, предлагаемый алгоритм

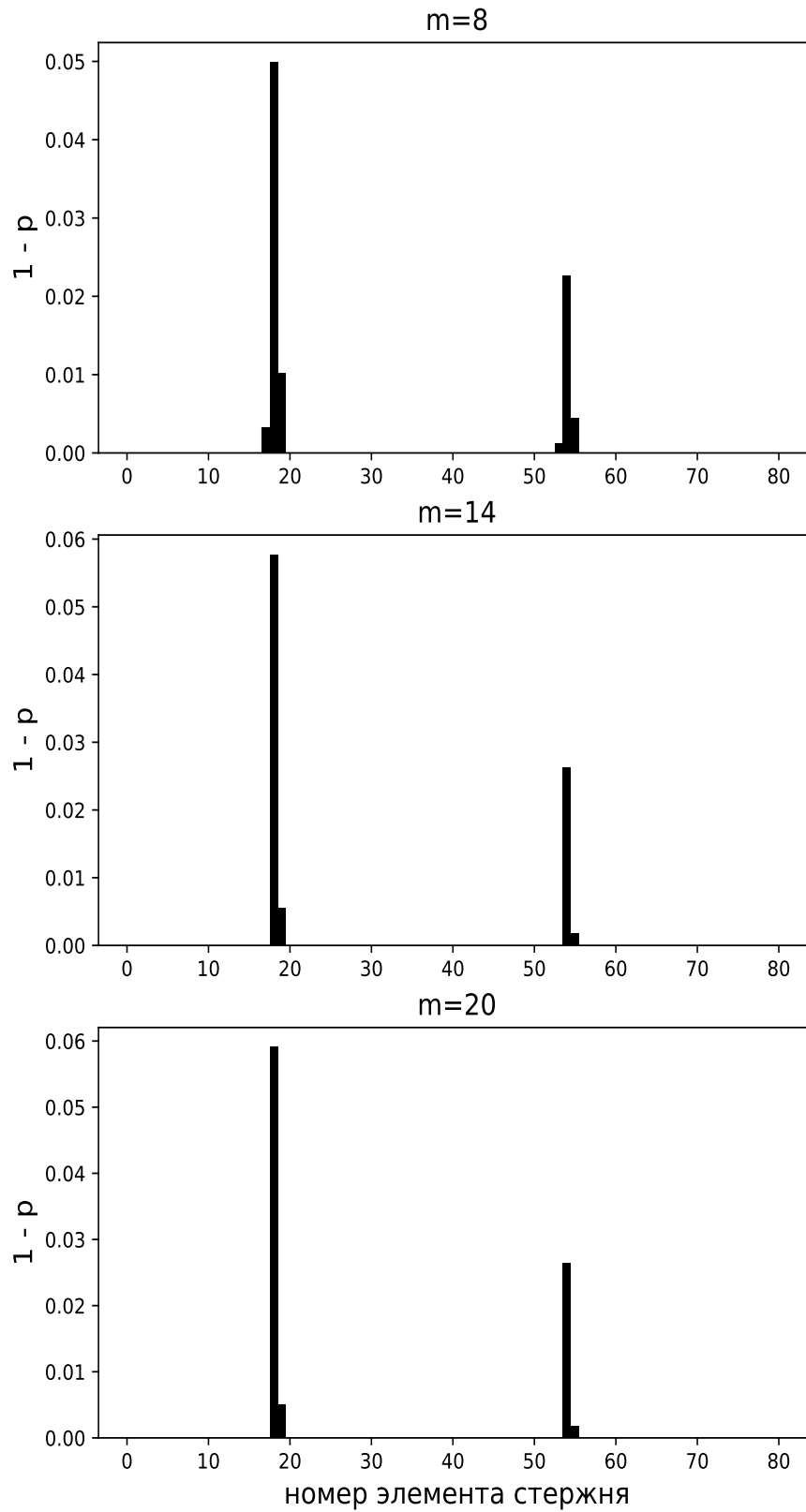


Рис. 1.4: Идентификация двух трещин

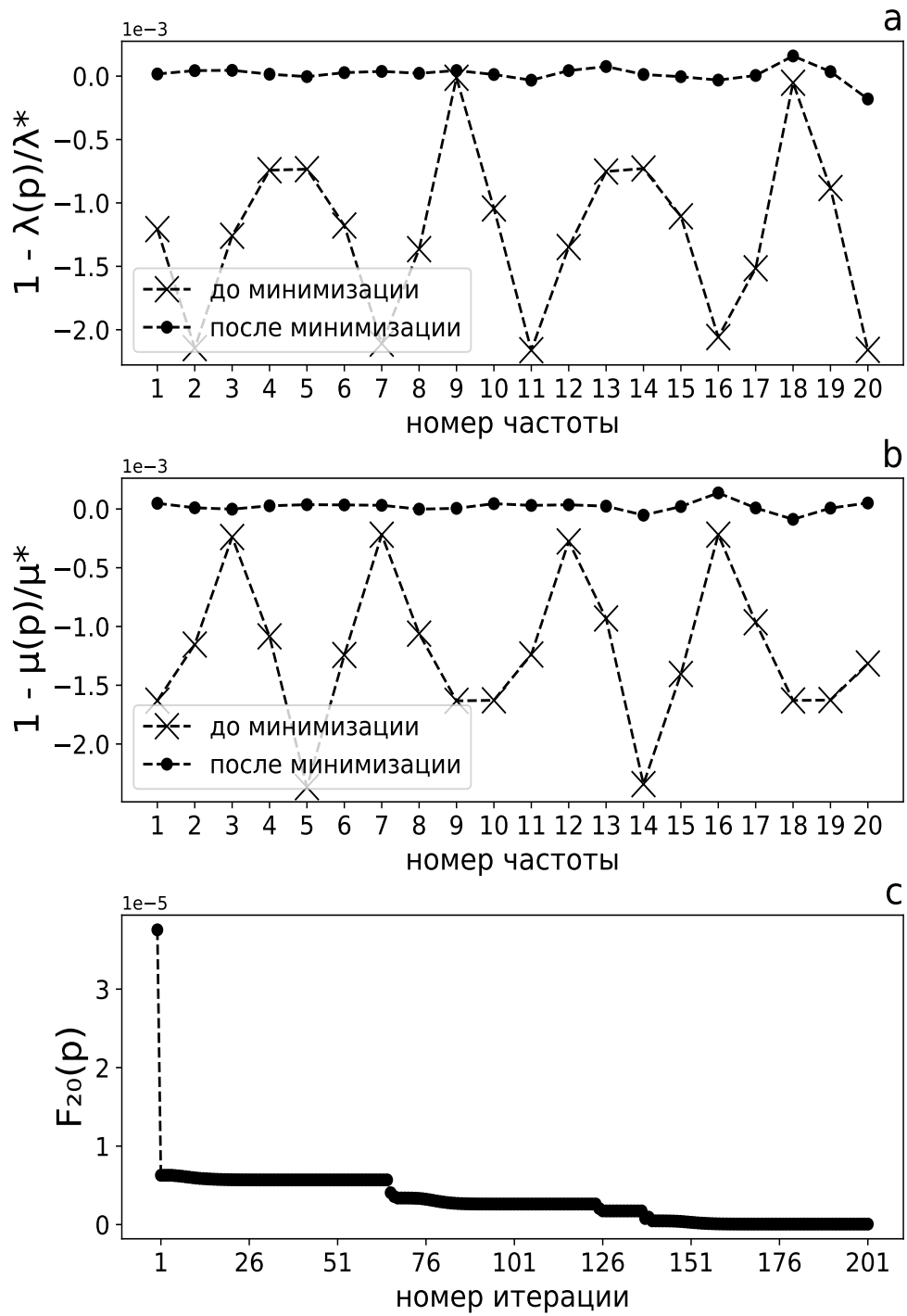


Рис. 1.5: а, b - компоненты вектора невязки \vec{r} из примера 2, с - зависимость целевой функции $F_{20}(\vec{p})$ из примера 2 от номера итерации

не только позволяет локализовать повреждения, но и сопоставлять между собой их относительные размеры. Из рисунка (Рис. 1.4) также видно, что предлагаемый алгоритм позволил обнаружить обе трещины, причем, увеличение количества используемых в расчете частот способствует стабилизации результатов. Так, для случаев $m = 8$ и $m = 14$ результаты немного отличаются (при $m = 8$ паразитные всплески появляются справа и слева от поврежденного участка, а при $m = 14$ только справа), в то время как для случаев $m = 14$ и $m = 20$ результаты фактически совпадают.

На (Рис. 1.5а,b) показаны относительные отклонения между собственными частотами $\lambda(\vec{p}^{(0)})$, $\mu(\vec{p}^{(0)})$ и исходными данными для поврежденного стержня λ^* и μ^* соответственно. Как и в предыдущем примере частоты $\lambda(\vec{p}_{min})$ и $\mu(\vec{p}_{min})$ хорошо согласуются с исходными частотами. В данном случае вектор \vec{p}_{min} соответствует решению из (Рис. 1.4) при $m = 20$. Изменение значений функции $F_{20}(\vec{p})$ по ходу ее минимизации можно проследить на (Рис. 1.5с). Здесь, как и в предыдущем примере, график имеет характерные скачки, каждый из которых соответствует переходу к очередному этапу локализации дефектов.

Пример 3. Рассмотрим стержень, содержащий три трещины. Здесь к трещинам, рассмотренным в примере 2, добавлена малая трещина с параметрами: $x = 0.46$ м, $s_{cr} = 0.07$. Как и во втором примере, исследуется устойчивость результатов по отношению к количеству используемых в расчете частот. Результаты идентификации повреждений представлены на (Рис. 1.6).

Из рисунка видно, что крупные всплески в 18-м и 54-м элементах, соответствующие двум трещинам из предыдущего примера, сохранились. Кроме того, проявился небольшой всплеск в 37-м элементе, который занимает область 0.4500 – 0.4625 м. Таким образом, предлагаемый алгоритм позволил обнаружить как малые, так и более крупные трещины. Как и во втором примере, использование в расчете большего количества частот повышает стабильность итоговых

результатов. Графики относительных отклонений между собственными частотами стержня в поврежденном и целом состояниях, а также график зависимости значений целевой функции $F_{20}(\vec{p})$ от шага итерации, представлены на (Рис. 1.7).

На (Рис. 1.7a,b) показаны относительные отклонения между собственными частотами $\lambda(\vec{p}^{(0)})$, $\mu(\vec{p}^{(0)})$ и исходными данными для поврежденного стержня λ^* и μ^* соответственно. В данном случае вектор \vec{p}_{min} соответствует решению из (Рис. 1.6) при $m = 20$. Изменение значений функции $F_{20}(\vec{p})$ по ходу ее минимизации можно проследить на (Рис. 1.7c). Здесь, как и в предыдущих примерах, переход к очередному этапу локализации дефектов сопровождается скачкообразным падением значения рассматриваемой целевой функции $F_{20}(\vec{p})$.

Пример 4. Рассмотрим стержень, содержащий четыре трещины. Здесь к трещинам, рассмотренным в примере 3, добавлена малая трещина с параметрами: $x = 0.71$ м, $s_{cr} = 0.09$. Результаты идентификации повреждений представлены на (Рис. 1.8). В данном примере имеются две близко расположенные трещины, из рисунка видно, что они хорошо локализуются при увеличении количества используемых в расчете частот. Добавленная трещина проявилась в виде всплеска в 57-м элементе, который занимает участок $0.7000 - 0.7125$ м. Графики относительных отклонений между собственными частотами стержня в поврежденном и целом состояниях, а также график зависимости значений целевой функции $F_{20}(\vec{p})$ от шага итерации, представлены на (Рис. 1.9).

На (Рис. 1.9a,b) показаны относительные отклонения между собственными частотами $\lambda(\vec{p}^{(0)})$, $\mu(\vec{p}^{(0)})$ и исходными данными для поврежденного стержня λ^* и μ^* соответственно. В данном случае вектор \vec{p}_{min} соответствует решению из (Рис. 1.8) при $m = 20$. Изменение значений функции $F_{20}(\vec{p})$ по ходу ее минимизации можно проследить на (Рис. 1.9c). Здесь, как и в предыдущих примерах, переход к очередному этапу локализации дефектов сопровождается скачкообразным падением значения рассматриваемой целевой функции $F_{20}(\vec{p})$.

На (Рис. 1.10) показано сравнение полученных результатов для двух трех и четырех трещин с ожидаемым результатом. Ожидаемый результат вычисляется с помощью формулы (1.68) и обозначен на рисунке в виде белых всплесков. В каждом примере использовалось максимальное количество частот $m = 20$. Из рисунка видно, что результаты расчетов хорошо согласуются с ожидаемыми для каждого рассматриваемого случая.

Основные результаты, включенные в эту главу, опубликованы в работах [111; 112; 116].

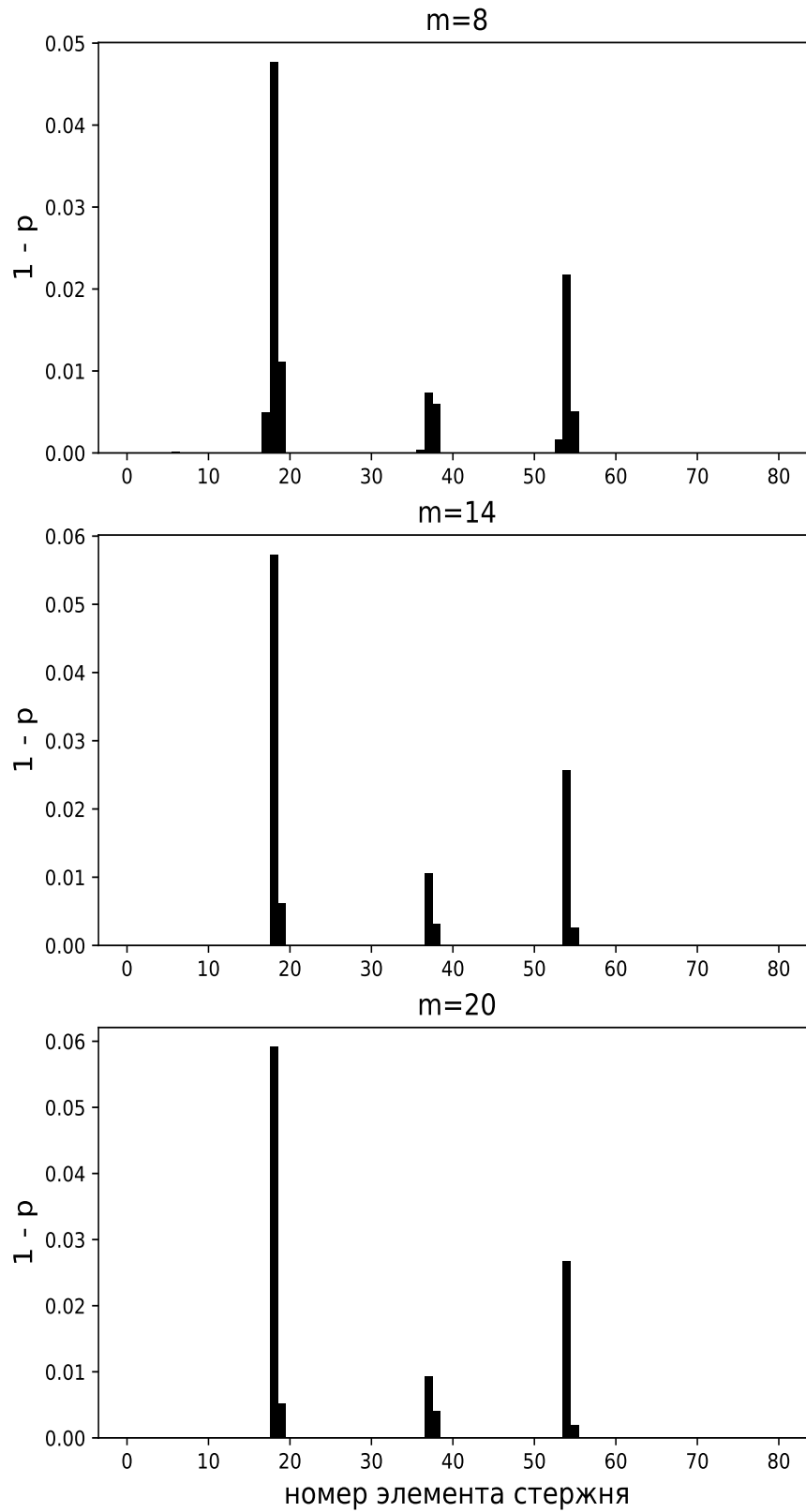


Рис. 1.6: Идентификация трех трещин

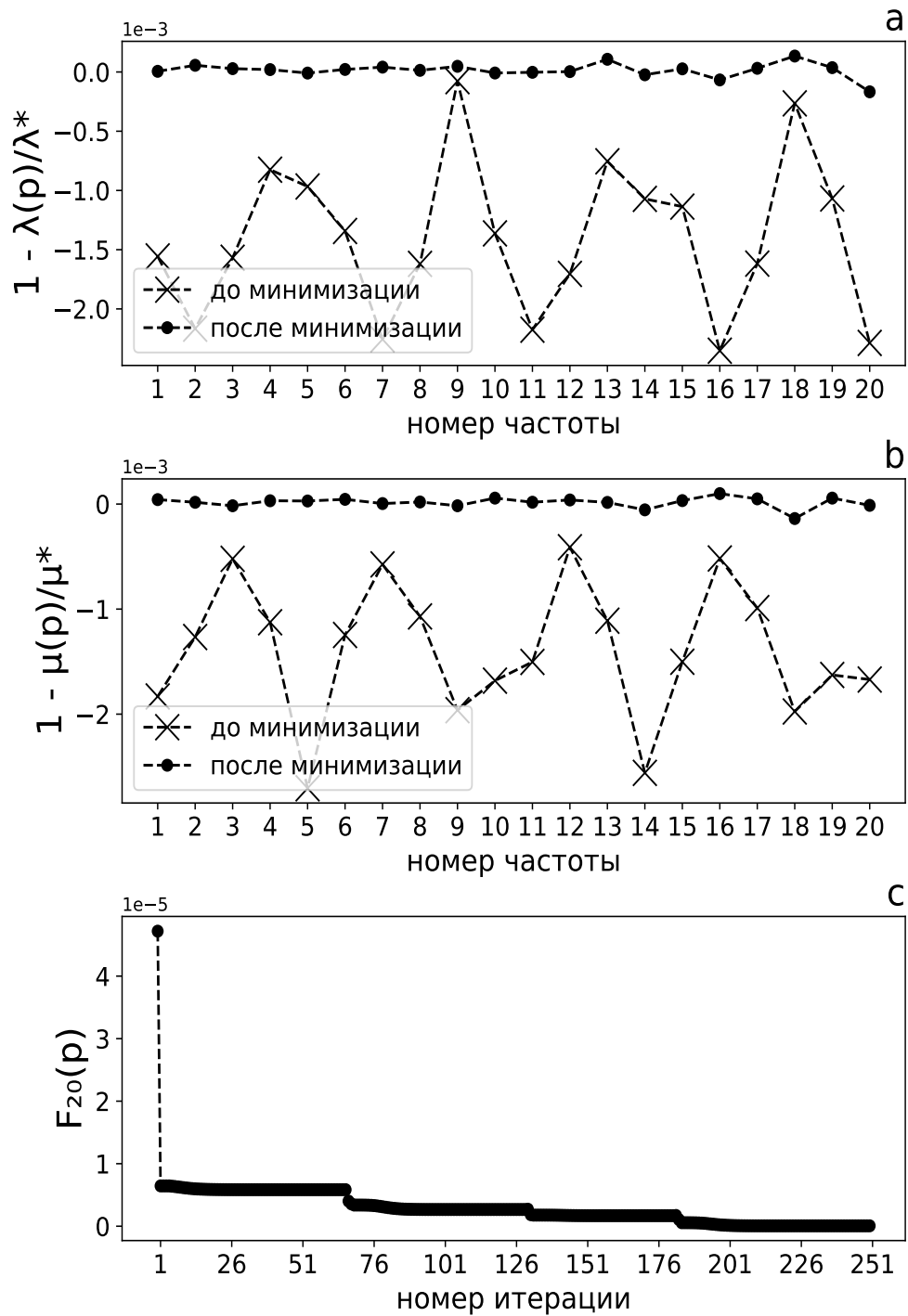


Рис. 1.7: а, b - компоненты вектора невязки \vec{r} из примера 3, с - зависимость целевой функции $F_{20}(\vec{p})$ из примера 3 от номера итерации

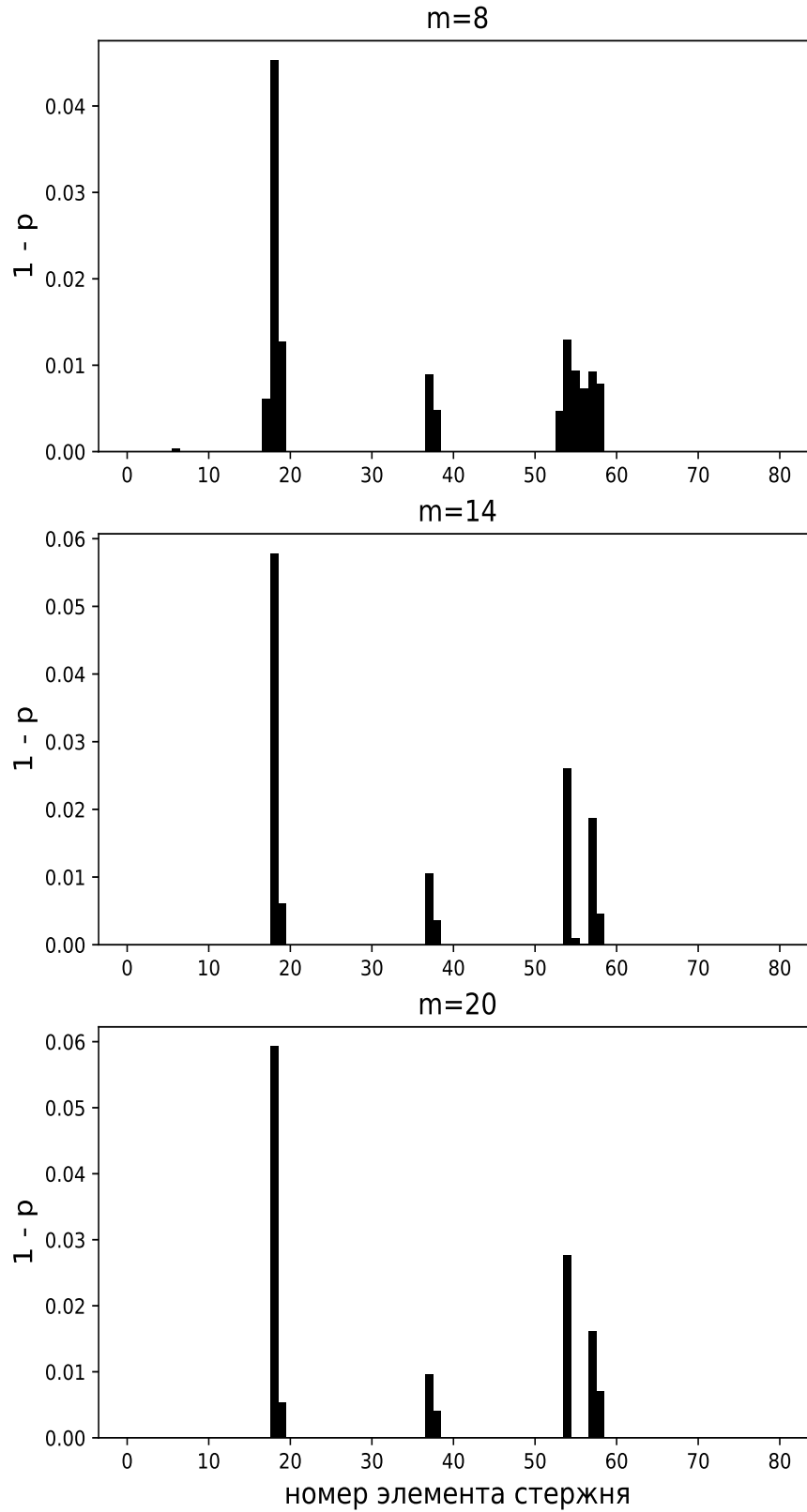


Рис. 1.8: Идентификация четырех трещин

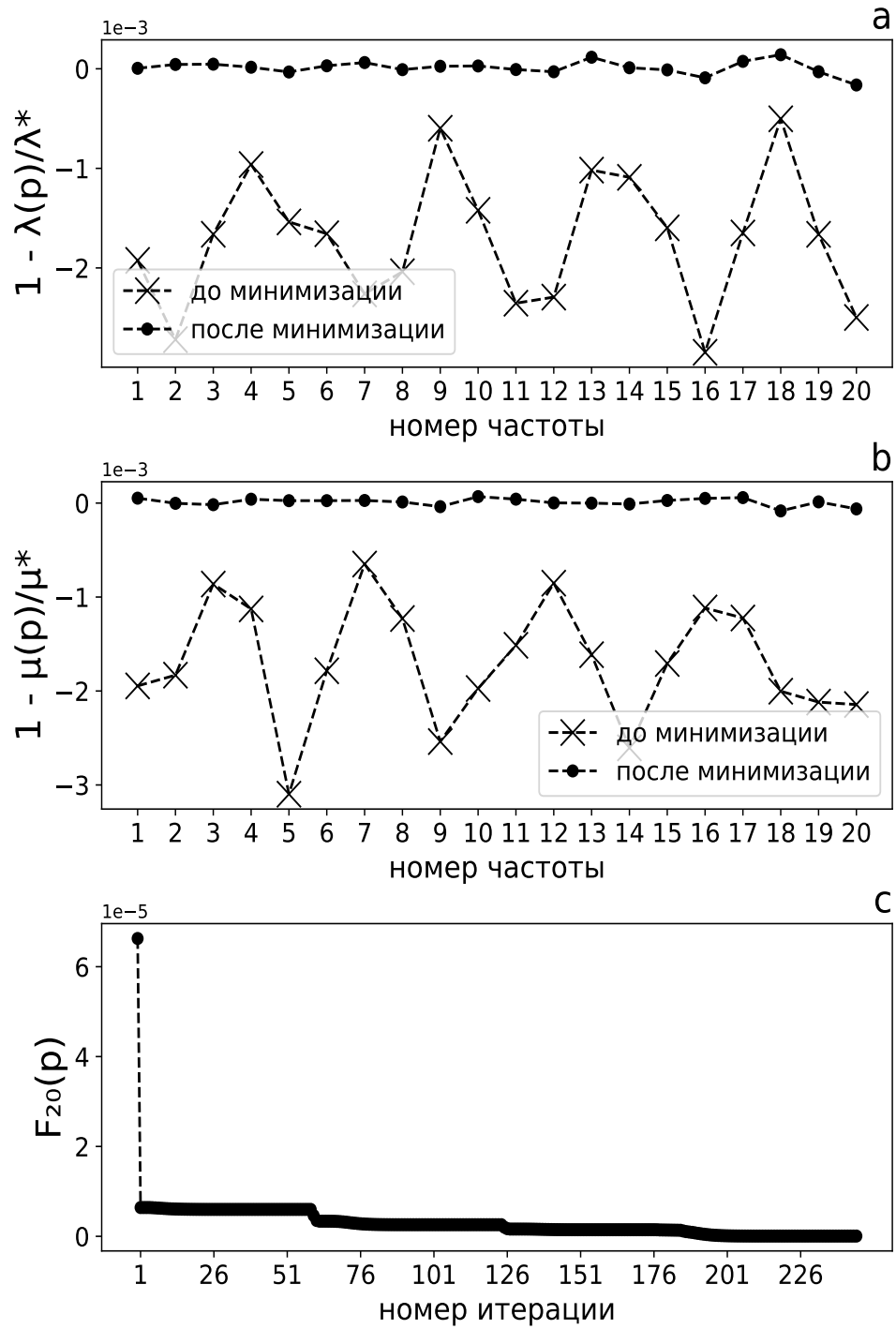


Рис. 1.9: а, b - компоненты вектора невязки \vec{r} из примера 4, с - зависимость целевой функции $F_{20}(\vec{p})$ из примера 4 от номера итерации

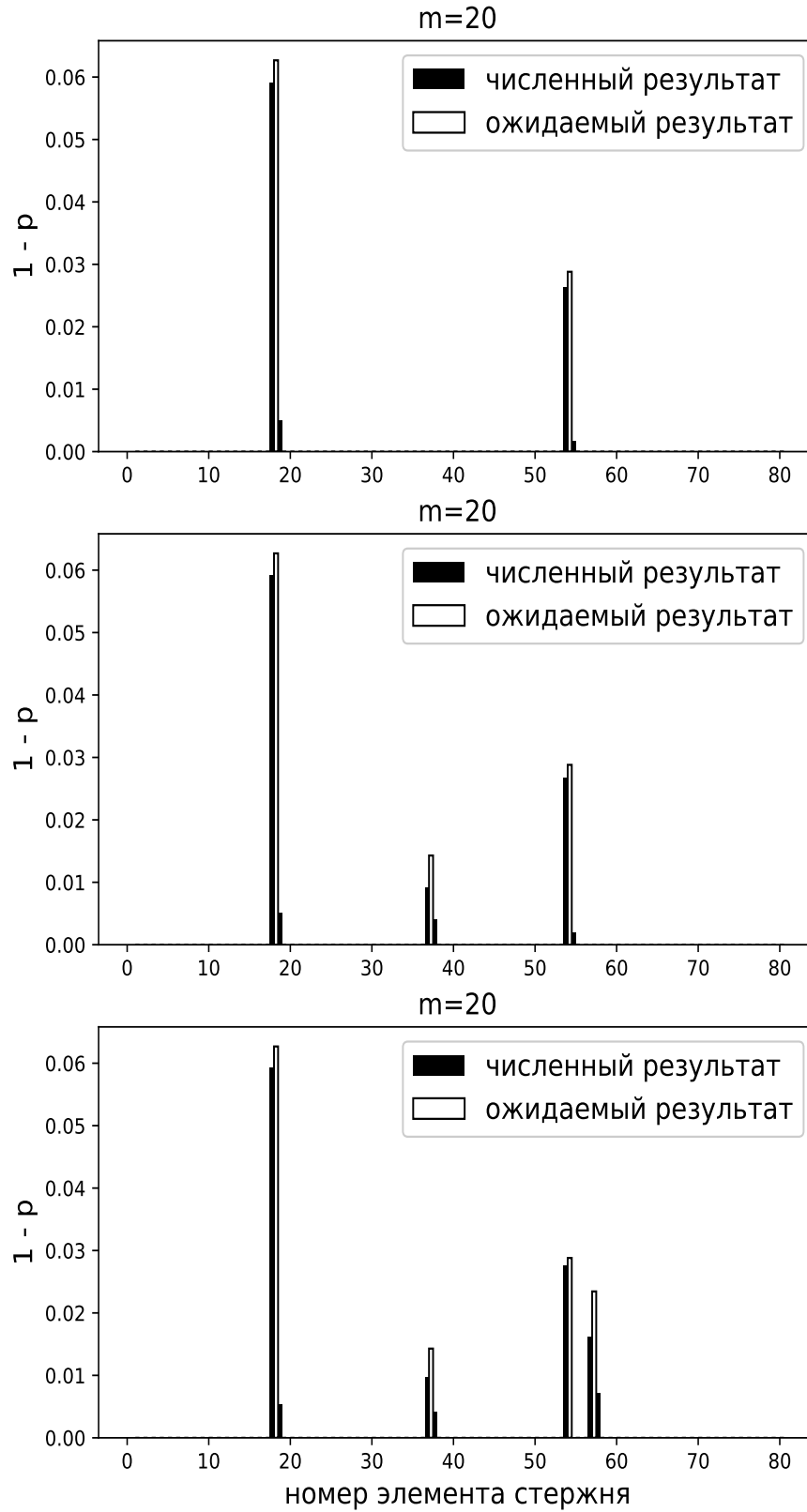


Рис. 1.10: Сравнение полученных решений с ожидаемым результатом

Глава 2

Идентификация дефектов в стержне по собственным частотам поперечных колебаний

2.1 Введение

Данная глава посвящена задаче идентификации поперечных трещиноподобных дефектов в стержне по собственным частотам поперечных колебаний. Среди моделей, описывающих колебания стержней, ослабленных трещиноподобными дефектами, наибольшее распространение получила модель, в которой трещины моделируются невесомыми пружинами [19], работающими в случае поперечных колебаний на поворот. В большинстве работ, где использовался данный подход, постановка задачи упрощалась введением дополнительных условий на размеры и количество трещин. Например, в работах [17; 18; 55; 57] рассматривалась задача идентификации одиночной малой трещины. Аналогичной задаче для двух малых трещин были посвящены публикации [56; 65; 66]. В статьях [42; 43], [76] (Шифрин Е.И.), [45] предложен метод выявления произвольного числа малых трещин. Методы обнаружения одиночной трещины произвольного размера были разработаны в публикациях [25; 64].

В диссертации задача о поперечных колебаниях стержня с трещинами рассматривается в общей постановке, в рамках которой не вводится никаких предположений относительно количества трещин и их размеров. Математическая постановка прямой задачи в рамках указанной модели выглядит следующим образом. Пусть имеется упругий однородный стержень постоянного сечения A , ослабленный открытыми поперечными трещинами. Левый конец стержня расположен в

точке с координатой $x_0 = 0$, правый конец - в точке $x_{n+1} = l$, а трещины расположены в точках с координатами x_1, x_2, \dots, x_n , причем $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ (Рис. 1.1). Поставим в соответствие каждой имеющейся в стержне трещине пружину, работающую на поворот. Тогда исходный стержень можно разбить на $n + 1$ стержней, связанных пружинами. Уравнение поперечных гармонических колебаний каждого такого стержня имеет вид [63],[74](Шифрин Е.И.)

$$y_j^{(4)}(x) = \lambda y_j(x), \quad x_{j-1} < x < x_j, \quad j = 1, \dots, n + 1, \quad (2.1)$$

где $\lambda = \rho \omega^2 A / (EI)$, ρ - плотность, E - модуль Юнга, ω - круговая частота, I - момент инерции поперечного сечения. Для каждой пружины справедливы четыре условия сопряжения [63; 74]

$$\begin{aligned} y_j(x_j) &= y_{j+1}(x_j) \\ y_j''(x_j) &= y_{j+1}''(x_j) \\ y_j'''(x_j) &= y_{j+1}'''(x_j) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$y'_{j+1}(x_j) - y'_j(x_j) = \Delta_j = c_j y_j''(x_j), \quad c_j > 0, \quad j = 1, \dots, n$$

где c_j - податливость j -й пружины, связанная с длиной соответствующей трещины. Податливость каждой из n пружин считается строго положительной величиной. Первое условие в (2.2) означает равенство перемещений, второе условие означает равенство изгибающих моментов, третье условие означает равенство перерезывающих сил, а четвертое условие означает, что поворот пружины пропорционален действующему на нее изгибающему моменту.

В работе [79](Шифрин Е.И.) уравнения (2.1) и (2.2) рассматривались с шестью наборами граничных условий. В каждом из них правый конец балки предполагается свободным. В случае консольной балки граничные условия имеют вид

$$y_1(0) = y_1'(0) = 0, \quad y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0 \quad (2.3)$$

Когда левый конец стержня является свободно-опертым, условия имеют вид

$$y_1(0) = y_1''(0) = 0, \quad y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0 \quad (2.4)$$

Несимметричные условия для левого конца приводят к условиям

$$y_1'(0) = y_1''(0) = 0, \quad y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0 \quad (2.5)$$

Другой тип несимметричных условий для левого конца имеет вид

$$y_1(0) = y_1'''(0) = 0, \quad y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0 \quad (2.6)$$

Условия Рэлея(плавающей заделки) для левого конца имеет вид

$$y_1'(0) = y_1'''(0) = 0, \quad y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0 \quad (2.7)$$

Наконец условия для стержня со свободными концами имеют вид

$$y_1''(0) = y_1'''(0) = 0, \quad y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0 \quad (2.8)$$

Собственные значения задач (2.1) и (2.2) совместно с граничными условиями (2.3), (2.4),(2.5), (2.6),(2.7) и (2.8) обозначим $\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \nu_i, \sigma_i$ и ζ_i соответственно. Важно отметить, что собственные значения задач (2.1),(2.2),(2.5) и (2.1),(2.2),(2.6) совпадают, поэтому обозначены одним символом.

В работах [79; 111](Шифрин Е.И.) была решена обратная задача в наиболее общей постановке. Было доказано, что по трем известным спектрам однозначно определяются количество пружин, их положение и податливости. Этот результат был получен путем сведения исходной задачи к обратной спектральной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка на отрезке. Переход к обратной задаче осуществлялся с помощью подхода, предложенного

в работе [74](Шифрин Е.И.). Напомним этот результат, объединим амплитуды смещений стержней $y_j(x)$, введя новую функцию

$$y(x) = y_j(x), \quad x_{j-1} < x < x_j, \quad j = 1, \dots, n+1 \quad (2.9)$$

С учетом условий (2.1),(2.2) получим

$$y^{(4)}(x) = \lambda y(x) + \sum_{j=1}^n \Delta_j \delta''(x - x_j), \quad 0 < x < l, \quad (2.10)$$

где $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака. Граничные условия (2.3) - (2.8) переходят в условия (2.11) - (2.16), соответственно.

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(l) = y'''(l) = 0 \quad (2.11)$$

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y''(l) = y'''(l) = 0 \quad (2.12)$$

$$y'(0) = y''(0) = 0, \quad y''(l) = y'''(l) = 0 \quad (2.13)$$

$$y(0) = y'''(0) = 0, \quad y''(l) = y'''(l) = 0 \quad (2.14)$$

$$y'(0) = y'''(0) = 0, \quad y''(l) = y'''(l) = 0 \quad (2.15)$$

$$y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y''(l) = y'''(l) = 0 \quad (2.16)$$

Функция $y'(x)$ является разрывной в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Выделим особенности, представив $y(x)$ в следующем виде

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{j=1}^n \Delta_k T(x - x_j), \quad (2.17)$$

где $y_0(x)$ есть некоторая гладкая функция, а $T(x)$ определяется как

$$T(s) = \begin{cases} s, & s > 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Производная функции $T(x)$ есть

$$T'(x) = H(x), \quad (2.19)$$

где $H(x)$ есть функция Хевисайда.

Из уравнений (2.10) и (2.17) имеем

$$y_0^{(4)}(x) = \lambda \left[y_0(x) + \sum_{j=1}^n \Delta_j T(x - x_j) \right] \quad (2.20)$$

Граничные условия для функции $y_0(x)$ совпадают с условиями (2.11) - (2.16) для функции $y(x)$. Следовательно, граничные условия (2.11) - (2.16) переходят в условия (2.21) - (2.26), соответственно.

$$y_0(0) = y_0'(0) = 0, \quad y_0''(l) = y_0'''(l) = 0 \quad (2.21)$$

$$y_0(0) = y_0''(0) = 0, \quad y_0''(l) = y_0'''(l) = 0 \quad (2.22)$$

$$y_0'(0) = y_0''(0) = 0, \quad y_0''(l) = y_0'''(l) = 0 \quad (2.23)$$

$$y_0(0) = y_0'''(0) = 0, \quad y_0''(l) = y_0'''(l) = 0 \quad (2.24)$$

$$y_0'(0) = y_0'''(0) = 0, \quad y_0''(l) = y_0'''(l) = 0 \quad (2.25)$$

$$y_0''(0) = y_0'''(0) = 0, \quad y_0''(l) = y_0'''(l) = 0 \quad (2.26)$$

Дифференцируя дважды уравнение (2.20), получим

$$y_0^{(6)}(x) = \lambda \left[y_0''(x) + \sum_{j=1}^n \Delta_j \delta(x - x_j) \right] \quad (2.27)$$

Используя условия сопряжения (2.2) и уравнение (2.17), последнее соотношение преобразуется к виду

$$y_0^{(6)}(x) = \lambda \left[y_0''(x) + \sum_{j=1}^n c_j y_0''(x_j) \delta(x - x_j) \right] \quad (2.28)$$

Используя известное свойство дельта-функции $y_0''(x_j)\delta(x - x_j) = y_0''(x)\delta(x - x_j)$, получим

$$y_0^{(6)}(x) = \lambda \left[1 + \sum_{j=1}^n c_j \delta(x - x_j) \right] y_0''(x) \quad (2.29)$$

Введем новую функцию

$$w(x) = y_0''(x), \quad (2.30)$$

используя которую, уравнение (2.30) преобразуется к виду

$$w^{(4)}(x) = \lambda m(x)w(x), \quad m(x) = \left[1 + \sum_{j=1}^n c_j \delta(x - x_j) \right], \quad (2.31)$$

где $m(x)$ - неизвестная функция, определяемая податливостями и местоположением искомых пружин, моделирующих дефекты. Используя соотношения (2.20), (2.30), граничные условия (2.21) - (2.26) переходят в следующие

$$w''(0) = w'''(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (2.32)$$

$$w(0) = w''(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (2.33)$$

$$w(0) = w'''(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (2.34)$$

$$w'(0) = w''(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (2.35)$$

$$w'(0) = w'''(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (2.36)$$

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0, \quad (2.37)$$

то есть свободный и закрепленный концы стержня поменяются местами.

Таким образом, была получена формулировка обратной спектральной задачи для однородного дифференциального уравнения четвертого порядка на отрезке, в рамках которой по трем известным спектрам необходимо восстановить неизвестную функцию $m(x)$, содержащую параметры c_i и x_i , где $i = 1, 2, \dots, n$, а n -произвольное неизвестное число имеющихся в стержне трещин. Опираясь

на известные результаты [5—8; 29—31; 104](Барсилон В.,Гладвелл Г.), в работе [79](Шифрин Е.И.) было строго доказано, что рассматриваемые спектры позволяют однозначно восстановить искомые параметры без предварительных предположений о количестве пружин и величинах их податливостей. Причем существует три набора спектров, позволяющих получить однозначное решение задачи: первый - $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_i\}$, $\{\nu_i\}$, второй - $\{\lambda_i\}$, $\{\sigma_i\}$, $\{\nu_i\}$ и третий - $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_i\}$, $\{\sigma_i\}$. В публикациях [6—8; 30; 104](Барсилон В.,Гладвелл Г.) был разработан конструктивный алгоритм восстановления неизвестной функции по трем спектрам. Однако он оказался очень чувствительным к погрешностям в исходных данных. В данной главе предлагается другая, более устойчивая к погрешностям в заданных собственных числах, процедура идентификации трещин. Ее описание будет дано в следующем разделе.

2.2 Численный алгоритм решения обратной задачи

Как и в случае продольных колебаний, при построении модели поврежденного стержня будем считать, что наличие поперечной трещины влияет на его локальную жесткость, но не влияет на плотность. Поэтому модель стержня с пружинами можно заменить моделью бездефектного стержня, модуль Юнга которого $E^*(x)$ зависит от координаты. Пусть нам известен модуль Юнга E целого однородного стержня, тогда для неоднородного стержня уравнение поперечных гармонических колебаний примет вид

$$(p(x)y''(x))'' = \lambda y(x), \quad p(x) = \frac{E^*(x)}{E}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.38)$$

Значение функции $p(x)$ в точке x характеризует степень повреждения стержня и принадлежит отрезку $[0, 1]$.

Теоретически для решения обратной задачи необходимо бесконечное количество частот. С учетом того, что в ходе эксперимента можно определить лишь конечное число частот, рассмотрим задачу восстановления функции $p(x)$ по усеченным данным. В данной главе метод определения функции $p(x)$, предложенный для случая продольных колебаний поврежденного стержня, будет адаптирован и применен к случаю поперечных колебаний. Для этого введем следующий функционал

$$F_m(p(x)) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^3 \sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i^{(q^*)} - \lambda_i^{(q)}(p(x))}{\lambda_i^{(q^*)}} \right)^2, \quad (2.39)$$

здесь $\{\lambda_i^{(q)}\}$ - собственные числа, соответствующие трем различным видам граничных условий, $\{\lambda_i^{(q^*)}\}$ - соответствующие комплексы, определенные в (2.1) и построенные по экспериментально измеренным частотам. Чтобы вычислять значения функционала (2.39), в каждом из используемых спектров достаточно находить лишь первые m собственных чисел. Как и в случае продольных колебаний для их вычисления будем использовать конечно-элементную аппроксимацию.

2.2.1 Конечно-элементная модель поврежденного стержня

Запишем слабую формулировку уравнения (2.38), для этого домножим его на тестовую функцию $v(x)$ и проинтегрируем по всей длине стержня

$$\int_0^l (p(x)y''(x))''v(x)dx = \int_0^l \lambda y(x)v(x)dx \quad (2.40)$$

Для того чтобы требования к гладкости пробных и тестовых функций совпадали, дважды проинтегрируем первое слагаемое по частям

$$\int_0^l p(x)y''(x)v''(x)dx - p(x)y''(x)v'(x) \Big|_0^l + (p(x)y''(x))'v(x) \Big|_0^l = \int_0^l \lambda y(x)v(x)dx \quad (2.41)$$

Введем обозначения

$$K(y, v) = \int_0^l p(x)y''(x)v''(x)dx, \quad M(y, v) = \int_0^l y(x)v(x)dx, \quad (2.42)$$

используя которые, уравнение (2.41) совместно с условиями (2.3) примет вид

$$K(y, v) = \lambda M(y, v), \quad y, v \in V_\lambda = \{v \in H^2(0, l) : v(0) = v'(0) = 0\}, \quad (2.43)$$

с условиями (2.4)

$$K(y, v) = \lambda M(y, v), \quad y, v \in V_\mu = \{v \in H^2(0, l) : v(0) = 0\}, \quad (2.44)$$

с условиями (2.5)

$$K(y, v) = \lambda M(y, v), \quad (2.45)$$

$$y \in Y_\nu = \{y \in H^2(0, l) : y'(0) = 0\}, \quad v \in V_\nu = \{v \in H^2(0, l) : v(0) = 0\},$$

с условиями (2.6)

$$K(y, v) = \lambda M(y, v), \quad (2.46)$$

$$y \in Y_\nu = \{y \in H^2(0, l) : y(0) = 0\}, \quad v \in V_\nu = \{v \in H^2(0, l) : v'(0) = 0\},$$

с условиями (2.7)

$$K(y, v) = \lambda M(y, v), \quad y, v \in V_\sigma = \{v \in H^2(0, l) : v'(0) = 0\}, \quad (2.47)$$

наконец, с условиями (2.8)

$$K(y, v) = \lambda M(y, v), \quad y, v \in V_\zeta = H^2(0, l), \quad (2.48)$$

здесь $H^2(0, l)$ - пространство Соболева. Соотношения (2.43)-(2.48) представляют собой задачи на собственные значения. Функция $y(x)$ является собственной функцией, удовлетворяющей требуемым граничным условиям, а параметр λ - собственным значением, соответствующим $y(x)$.

Рассмотрим сначала задачу (2.48). Для ее численного решения, как и в случае продольных колебаний, запишем аппроксимацию собственной функции $y(x)$ в виде следующей суммы

$$y(x) \approx y^h(x) = \sum_{j=1}^z q_j \phi_j(x), \quad y^h(x) \in V_\zeta^{(z)} \subset V_\zeta, \quad (2.49)$$

здесь $V_\zeta^{(z)}$ - конечномерное линейное пространство размерности z , q_j - неизвестные коэффициенты разложения по базису $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_z(x)$. Используя представление функций y, v в форме (2.49), получим

$$K(y^h, v^h) = \lambda M(y^h, v^h), \quad y^h, v^h \in V_\zeta^{(z)} \quad (2.50)$$

Поперечные колебания стержня описываются обыкновенным дифференциальным уравнением четвертого порядка и для моделирования рассматриваемых спектров требуется задавать граничные условия не только для самой собственной функции $y(x)$, но и для ее первой производной $y'(x)$. Поэтому базисные функции разложения (2.49) выбираются в виде интерполяционных сплайнов, таких, что коэффициенты разложения q_1, q_2, \dots, q_z представляют собой значения функций $y(x)$ и $y'(x)$ в заданном наборе точек, который определяется разбиением стержня на конечные элементы. Будем рассматривать разбиение стержня длины l на N элементов одинаковой длины h^e . В этом случае отрезок $[0, l]$ разбивается на N отрезков $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, N$. Узлы $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{N+1}$ задаются следующей последовательностью

$$\tilde{x}_j = h^e(j - 1), \quad j = 1, 2, \dots, z, \quad z = N + 1, \quad (2.51)$$

здесь z - количество узлов.

Таким образом, разложение (2.49) примет вид

$$y^h(x) = \sum_{j=1}^{\frac{z}{2}} y(\tilde{x}_j) \phi_{2j-1}(x) + \sum_{j=1}^{\frac{z}{2}} y'(\tilde{x}_j) \phi_{2j}(x), \quad y^h(x) \in V_\zeta^{(z)}, \quad (2.52)$$

а дискретная формулировка (2.50) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений

$$(K - \lambda M) \vec{d} = 0, \quad \vec{d} = [y(\tilde{x}_1), y'(\tilde{x}_1), \dots, y(\tilde{x}_z), y'(\tilde{x}_z)], \quad (2.53)$$

Учитывая, что функции y^h , v^h раскладываются по одному и тому же базису $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_z(x)$, элементы системы (2.53) вычисляются по следующим формулам

$$K_{ij} = \int_0^l p(x) \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx, \quad M_{ij} = \int_0^l \phi_i(x) \phi_j(x) dx \quad (2.54)$$

Как и в случае продольных колебаний базисные функции $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_z(x)$ выбираются в виде локальных сплайнов, но теперь они должны быть выбраны таким образом, чтобы собственная функция $y(x)$ на каждом конечном элементе аппроксимировалась интерполяционным полиномом вида:

$$y^h(x) = c_1^i(x)y(\tilde{x}_i) + c_2^i(x)y'(\tilde{x}_i) + c_3^i(x)y(\tilde{x}_{i+1}) + c_4^i(x)y'(\tilde{x}_{i+1}), \quad (2.55)$$

$$\tilde{x}_i \leq x \leq \tilde{x}_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где i - номер элемента. Здесь в узловых точках \tilde{x}_i и \tilde{x}_{i+1} заданы значения самой функции $y(x)$, а также ее производной. Полином (2.55) называют многочленом с кратными узлами, или интерполяционным многочленом Эрмита.

Чтобы найти вид функций $c_1^i(x), c_2^i(x), c_3^i(x), c_4^i(x)$ из разложения (2.55), запишем аппроксимацию $y^h(x)$ в виде полинома третьей степени

$$y^h(x) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 x^2 + \gamma_4 x^3, \quad (2.56)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ - неизвестные вещественные коэффициенты. Пользуясь (2.56), составим следующую линейную систему

$$\begin{pmatrix} y(\tilde{x}_i) \\ y'(\tilde{x}_i) \\ y(\tilde{x}_{i+1}) \\ y'(\tilde{x}_{i+1}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{x}_i & \tilde{x}_i^2 & \tilde{x}_i^3 \\ 0 & 1 & 2\tilde{x}_i & 3\tilde{x}_i^2 \\ 1 & \tilde{x}_{i+1} & \tilde{x}_{i+1}^2 & \tilde{x}_{i+1}^3 \\ 0 & 1 & 2\tilde{x}_{i+1} & 3\tilde{x}_{i+1}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = A\vec{\gamma} \quad (2.57)$$

Выражая из (2.57) неизвестные коэффициенты $\vec{\gamma}$ и подставляя их в (2.56), получим

$$y^h(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} y(\tilde{x}_i) \\ y'(\tilde{x}_i) \\ y(\tilde{x}_{i+1}) \\ y'(\tilde{x}_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Сравнивая полученное соотношение с (2.55), имеем

$$\begin{bmatrix} c_1^i(x) & c_2^i(x) & c_3^i(x) & c_4^i(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} A^{-1} \quad (2.59)$$

Таким образом, искомые функции разложения на рассматриваемом отрезке имеют вид

$$\begin{aligned} c_1^i(x) &= 1 - 3 \left(\frac{x-\tilde{x}_i}{h^e} \right)^2 + 2 \left(\frac{x-\tilde{x}_i}{h^e} \right)^3, \\ c_2^i(x) &= h^e \left(\left(\frac{x-\tilde{x}_i}{h^e} \right) - 2 \left(\frac{x-\tilde{x}_i}{h^e} \right)^2 + \left(\frac{x-\tilde{x}_i}{h^e} \right)^3 \right), \\ c_3^i(x) &= 3 \left(\frac{x-\tilde{x}_i}{h^e} \right)^2 - 2 \left(\frac{x-\tilde{x}_i}{h^e} \right)^3, \\ c_4^i(x) &= h^e \left(- \left(\frac{x-\tilde{x}_i}{h^e} \right)^2 + \left(\frac{x-\tilde{x}_i}{h^e} \right)^3 \right), \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\tilde{x}_i \leq x \leq \tilde{x}_{i+1}$$

Используя (2.60), базисные функции из (2.52) запишем в следующем виде

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= c_1^1(x), \quad \tilde{x}_1 \leq x \leq \tilde{x}_2 \\
\phi_2 &= c_2^1(x), \quad \tilde{x}_1 \leq x \leq \tilde{x}_2 \\
\phi_{2i-1}(x) &= \begin{cases} c_3^{i-1}(x), & \tilde{x}_{i-1} \leq x \leq \tilde{x}_i \\ c_1^i(x), & \tilde{x}_i \leq x \leq \tilde{x}_{i+1} \\ 0, & \tilde{x}_{i-1} > x > \tilde{x}_{i+1} \end{cases} \quad i = 2, \dots, N \\
\phi_{2i}(x) &= \begin{cases} c_4^{i-1}(x), & \tilde{x}_{i-1} \leq x \leq \tilde{x}_i \\ c_2^i(x), & \tilde{x}_i \leq x \leq \tilde{x}_{i+1} \\ 0, & \tilde{x}_{i-1} > x > \tilde{x}_{i+1} \end{cases} \quad i = 2, \dots, N \\
\phi_{2N+1}(x) &= c_3^N(x), \quad \tilde{x}_N \leq x \leq \tilde{x}_{N+1} \\
\phi_{2N+2}(x) &= c_4^N(x), \quad \tilde{x}_N \leq x \leq \tilde{x}_{N+1}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Приведем несколько примеров вычисления элементов матриц K и M , используя базисные функции (2.61). Рассмотрим элементы матрицы жесткости

$$K_{2i-1, 2j-1} = \int_0^l p(x) \phi_{2i-1}''(x) \phi_{2j-1}''(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, N+1$$

Как и в случае продольных колебаний будем предполагать, что каждый конечный элемент обладает собственной жесткостью, то есть функция $p(x)$ будет кусочно-постоянной и ее можно представить в виде вектора $\vec{p} = [p_1, p_2, \dots, p_s]$, $s \leq N$. При этом количество переменных Так как рассматриваемые матрицы симметричны, то достаточно рассмотреть случай когда $j \geq i$. Подставляя в предыдущее уравнение

вторые производные от соответствующих базисных функций из (2.61), получим

$$K_{2i-1,2j-1} = \begin{cases} p_1 \frac{12}{(h^e)^3}, & j = i = 1 \\ p_N \frac{12}{(h^e)^3}, & j = i = N + 1 \\ p_{j-1} \frac{12}{(h^e)^3} + p_j \frac{12}{(h^e)^3}, & j = i, \quad j = 2, 3, \dots, N \\ -p_{j-1} \frac{12}{(h^e)^3}, & j - i = 1, \quad j = 2, 3, \dots, N + 1 \\ 0, & j - i \geq 2, \quad j = 3, 4, \dots, N + 1 \end{cases}$$

Рассмотрим пример вычисления другого набора элементов матрицы жесткости

$$K_{2i,2j} = \begin{cases} p_1 \frac{4}{h^e}, & j = i = 1 \\ p_N \frac{4}{h^e}, & j = i = N + 1 \\ p_{j-1} \frac{4}{h^e} + p_j \frac{4}{h^e}, & j = i, \quad j = 2, 3, \dots, N \\ p_{j-1} \frac{2}{h^e}, & j - i = 1, \quad j = 2, 3, \dots, N + 1 \\ 0, & j - i \geq 2, \quad j = 3, 4, \dots, N + 1 \end{cases}$$

Для матрицы масс вычислим следующий набор элементов

$$M_{2i-1,2j} = \int_0^l \phi_{2i-1}(x) \phi_{2j}(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, N + 1, \quad j \geq i$$

Подставляя в предыдущее уравнение необходимые базисные функции из (2.61), получим

$$M_{2i-1,2j} = \begin{cases} \frac{11(h^e)^2}{210}, & j = i = 1 \\ -\frac{11(h^e)^2}{210}, & j = i = N + 1 \\ 0, & j = i, \quad j = 2, 3, \dots, N \\ -\frac{13(h^e)^2}{210}, & j - i = 1, \quad j = 2, 3, \dots, N + 1 \\ 0, & j - i \geq 2, \quad j = 3, 4, \dots, N + 1 \end{cases}$$

Все остальные элементы глобальных матриц K и M вычисляются аналогичным образом. Т.к. граничные условия не входят в определение пространства V_ζ , то система (2.53) принимает вид

$$(K_\zeta(\vec{p}) - \lambda(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0, \quad (2.62)$$

где элементы матриц K_ζ и M определяются формулами (2.54). Собственные числа этой системы соответствуют первым $2N + 2$ собственным значениям задачи (2.48) $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2N+2}$.

Чтобы построить системы уравнений для задач (2.43)-(2.47), необходимо учесть естественные граничные условия. Сделать это можно, занулив соответствующие коэффициенты в матрице K_ζ . Например, для задачи (2.43) достаточно занулить все элементы первых двух строк и столбцов, за исключением диагональных. Тем самым мы обеспечим условия $y(\tilde{x}_1) = 0$, $y'(\tilde{x}_1) = 0$ и $v(\tilde{x}_1) = 0$, $v'(\tilde{x}_1) = 0$, в результате согласно (2.52) имеем $y^h(0) = 0$, $y'^h(0) = 0$ и $v^h(0) = 0$, $v'^h(0) = 0$. Следовательно, $y^h(x), v^h(x) \in V_\lambda^{(z)} \subset V_\lambda$. Полученную после учета граничных условий матрицу жесткости обозначим K_λ , собственные числа системы

$$(K_\lambda(\vec{p}) - \lambda(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0 \quad (2.63)$$

соответствуют первым $2N+2$ собственным значениям задачи (2.43) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N+2}$.

Аналогичным образом задачи (2.44)-(2.47) тоже сводятся к соответствующим системам уравнений

$$(K_\mu(\vec{p}) - \lambda(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0, \quad (2.64)$$

$$(K_\nu(\vec{p}) - \lambda(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0, \quad (2.65)$$

$$(K_\sigma(\vec{p}) - \lambda(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0, \quad (2.66)$$

Важно отметить, что в задаче (2.45) функции $y(x)$ и $v(x)$ принадлежат разным пространствам, поэтому после учета граничных условий мы получаем несимметричную матрицу K_ν . Кроме того, после учета граничных условий для задачи (2.46)

получим матрицу жесткости, которая соответствует K_ν^T . Тем не менее обе полученные системы обладают одним и тем же набором собственных чисел, поэтому достаточно рассмотреть только одну из них (2.65).

Используя системы (2.62)-(2.66) для вычисления функционала (2.39), получим функцию N переменных

$$F_m(\vec{p}) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^3 \sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_i^{(q^*)} - \lambda_i^{(q)}(\vec{p})}{\lambda_i^{(q^*)}} \right)^2, \quad (2.67)$$

здесь $\{\lambda_i^{(q)}\}$ - собственные числа, соответствующие трем различным видам граничных условий, $\{\lambda_i^{(q^*)}\}$ - соответствующие комплексы, определенные в (2.1) и построенные по экспериментально измеренным частотам. Описание алгоритма минимизации функции (2.67) будет приведено в следующем разделе.

2.2.2 Алгоритм оптимизации

В работе [79](Шифрин Е.И.) было показано, что существует три набора спектров, позволяющих однозначно определить местоположение и размеры поперечных дефектов стержня. Поэтому будем рассматривать три целевые функции, каждая из которых содержит необходимые для однозначного решения спектры:

$$F_m^{(\lambda, \mu, \nu)}(\vec{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\lambda_i^* - \lambda_i(\vec{p})}{\lambda_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\mu_i^* - \mu_i(\vec{p})}{\mu_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\nu_i^* - \nu_i(\vec{p})}{\nu_i^*} \right)^2 \right], \quad (2.68)$$

$$F_m^{(\lambda, \sigma, \nu)}(\vec{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\lambda_i^* - \lambda_i(\vec{p})}{\lambda_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_i^* - \sigma_i(\vec{p})}{\sigma_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\nu_i^* - \nu_i(\vec{p})}{\nu_i^*} \right)^2 \right], \quad (2.69)$$

$$F_m^{(\lambda, \mu, \sigma)}(\vec{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\lambda_i^* - \lambda_i(\vec{p})}{\lambda_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\mu_i^* - \mu_i(\vec{p})}{\mu_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_i^* - \sigma_i(\vec{p})}{\sigma_i^*} \right)^2 \right] \quad (2.70)$$

Минимизировать функции (2.68)-(2.70) будем при помощи алгоритма Левенберга-Марквардта, описание которого приведено в разделе 1.2.2. Для реализации алгоритма необходимо вычисление производных от собственных чисел по компонентам

вектора \vec{p} . Производные $\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j}, \frac{\partial \mu_i}{\partial p_j}, \frac{\partial \sigma_i}{\partial p_j}$ могут быть вычислены методом, описанным в разделе 1.2.3. В то же время производные $\frac{\partial \nu_i}{\partial p_j}$ не могут быть вычислены этим способом, так как матрица жесткости K_ν не является симметричной. В этом случае можно использовать подход, предложенный в работе [61].

Пусть $\vec{g}_i(\vec{p})$ - собственный вектор, соответствующий следующей задаче на собственные значения

$$(K_\nu^T(\vec{p}) - \nu_i(\vec{p})M) \vec{g}_i(\vec{p}) = 0, \quad (2.71)$$

при этом для собственных векторов $\vec{g}_i(\vec{p})$ и $\vec{d}_i(\vec{p})$ выполняется условие нормировки

$$\vec{g}_i^T(\vec{p})M\vec{d}_i(\vec{p}) = 1 \quad (2.72)$$

Домножим (2.65) слева на вектор $\vec{g}_i^T(\vec{p})$ и продифференцируем по j -й компоненте вектора \vec{p} , в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{g}_i^T(\vec{p})}{\partial p_j} (K_\nu(\vec{p}) - \nu_i(\vec{p})M) \vec{d}_i(\vec{p}) + \vec{g}_i^T(\vec{p}) (K_\nu(\vec{p}) - \nu_i(\vec{p})M) \frac{\partial \vec{d}_i(\vec{p})}{\partial p_j} + \\ + \vec{g}_i^T(\vec{p}) \left(\frac{\partial K_\nu(\vec{p})}{\partial p_j} - \frac{\nu_i(\vec{p})}{\partial p_j} M \right) \vec{d}_i(\vec{p}) = 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

В силу (2.65), (2.71) и (2.72) уравнение (2.73) принимает вид

$$\vec{g}_i^T(\vec{p}) \left(\frac{\partial K_\nu(\vec{p})}{\partial p_j} - \frac{\nu_i(\vec{p})}{\partial p_j} M \right) \vec{d}_i(\vec{p}) = 0, \quad (2.74)$$

таким образом, окончательно получим

$$\frac{\partial \nu_i(\vec{p})}{\partial p_j} = \vec{g}_i^T(\vec{p}) \frac{\partial K_\nu(\vec{p})}{\partial p_j} \vec{d}_i(\vec{p}) \quad (2.75)$$

Локализация повреждений осуществляется методом, описанным в разделе 1.2.4.

2.3 Численные примеры

Для численных примеров в предыдущей главе использовался стержень со следующими параметрами: длина 1 м, прямоугольное поперечное сечение высоты

0.02 м и ширины 0.02 м, модуль Юнга $2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м², коэффициент Пуассона 0.27, плотность 7800 кг/м³. В этой главе будем использовать тот же самый стержень, но в качестве дефектов рассматривать поперечные односторонние трещины.

Собственные значения λ_i^* , μ_i^* , ν_i^* и σ_i^* , являющиеся входными данными для решения обратной задачи, получены численно путем решения прямой задачи. Как и в случае продольных колебаний прямая задача решалась не методом конечных элементов, а с помощью решения задачи в исходной постановке, представленной в разделе 2.1, методом, предложенным в работах [44; 74] для решения прямой задачи о поперечных колебаниях стержня с трещинами.

2.3.1 Результаты вычисления по трем спектрам

Пример 1.1. Рассмотрим стержень, ослабленный одиночной трещиной, расположенной в точке $x_1 = 0.36$ м. Относительная длина трещины $s_1 = 0.14$. Для вычисления численных собственных частот стержень разбивался на 96 конечных элементов. Количество участков s на начальном этапе расчета составляло 12 и последовательным удвоением доводилось до 96-ти. Результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ собственным числам λ_i , μ_i и ν_i представлены на (Рис. 2.1).

Здесь на горизонтальной оси изображены номера конечных элементов, а на вертикальной оси изображена величина $1 - p$, характеризующая податливость элемента. Податливости представлены в виде столбцов: черным цветом обозначены результаты расчета с помощью предложенного численного алгоритма, белым цветом обозначен теоретический результат, рассчитанный по формуле

$$p = \frac{E^*}{E} = \frac{h^e}{h^e + c}, \quad (2.76)$$

где c - податливость пружины. Ее связь с длиной трещины для указанных пара-

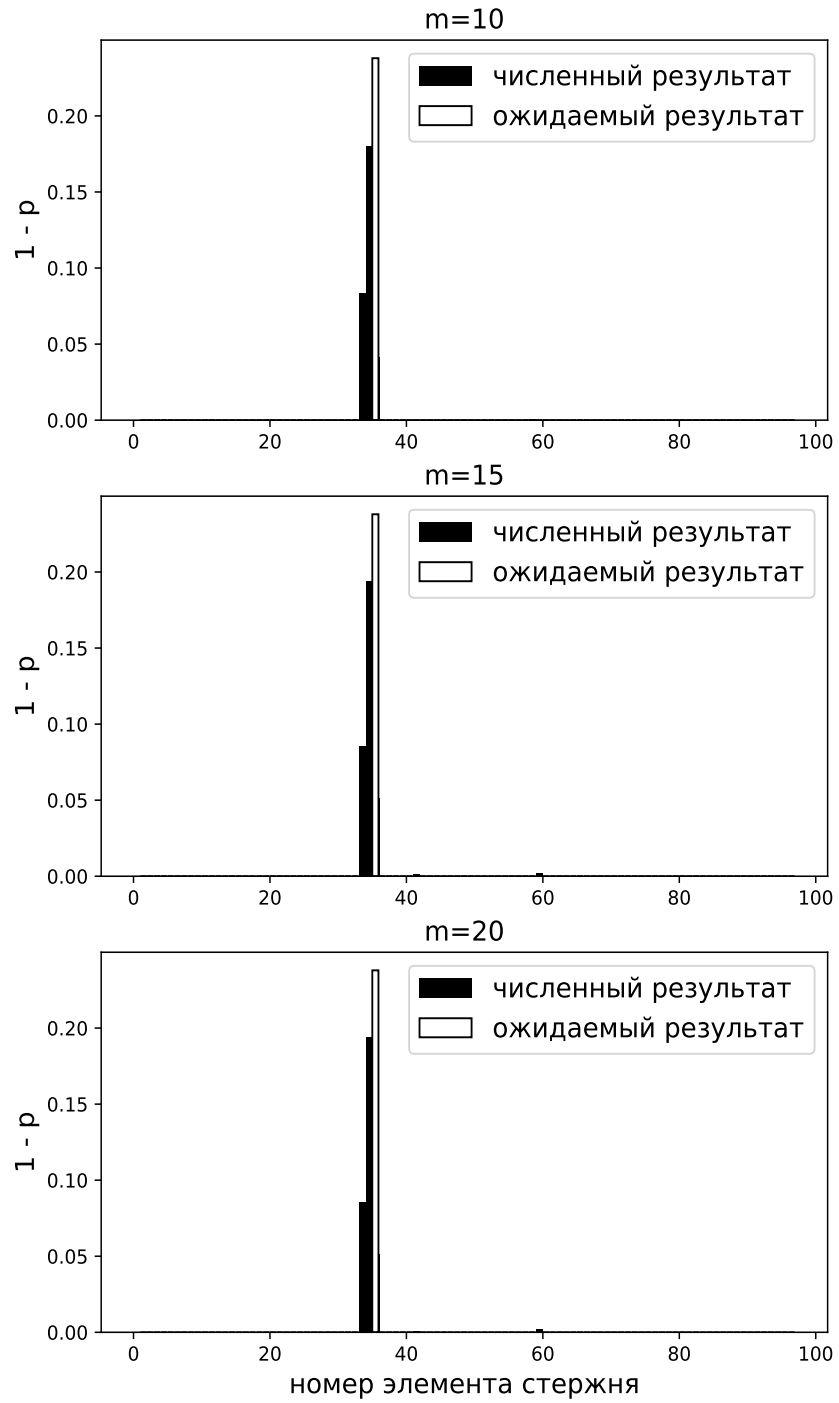
λ, μ, ν


Рис. 2.1: Идентификация одиночной трещины по спектрам λ , μ и ν

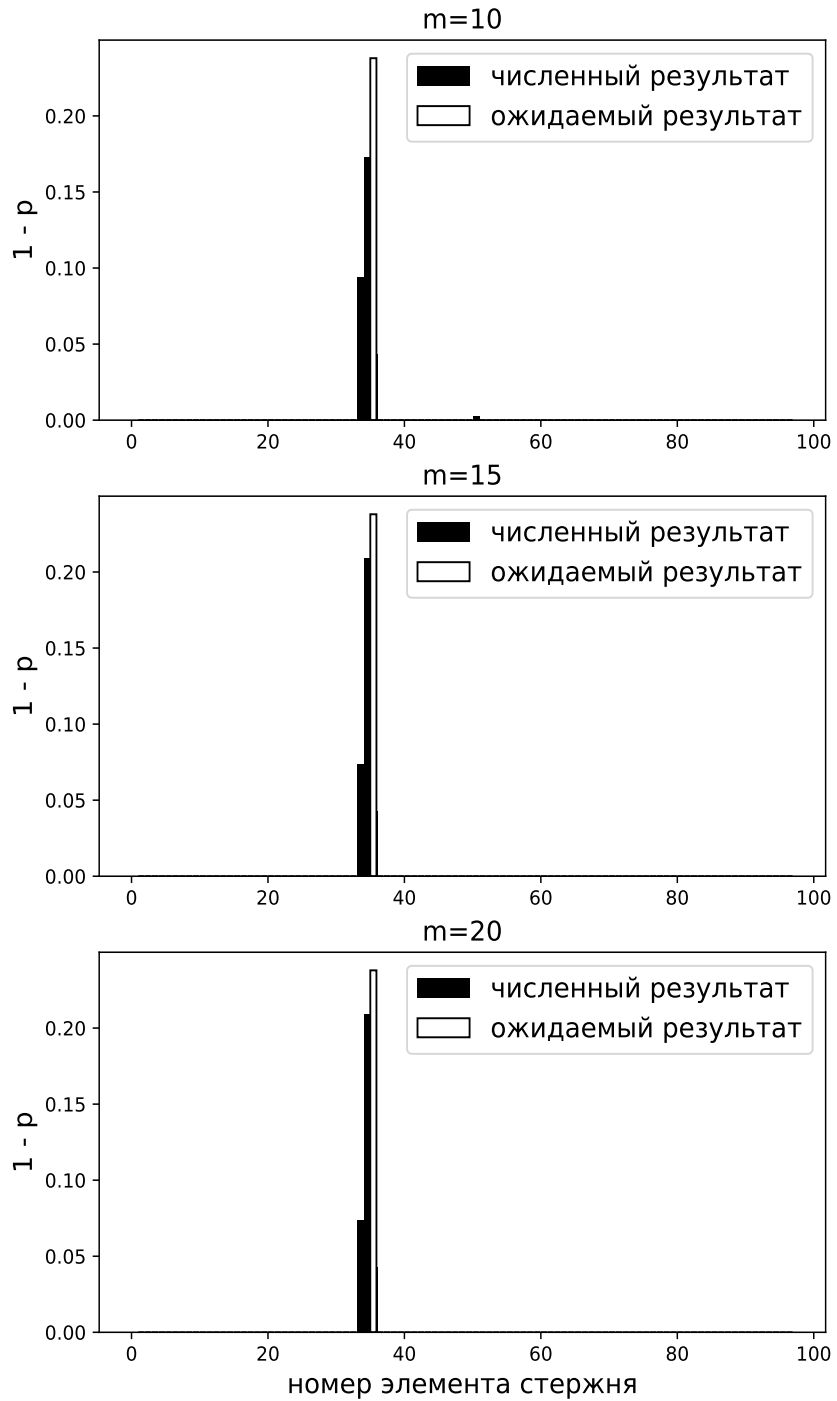
λ, σ, ν


Рис. 2.2: Идентификация одиночной трещины по спектрам λ , σ и ν

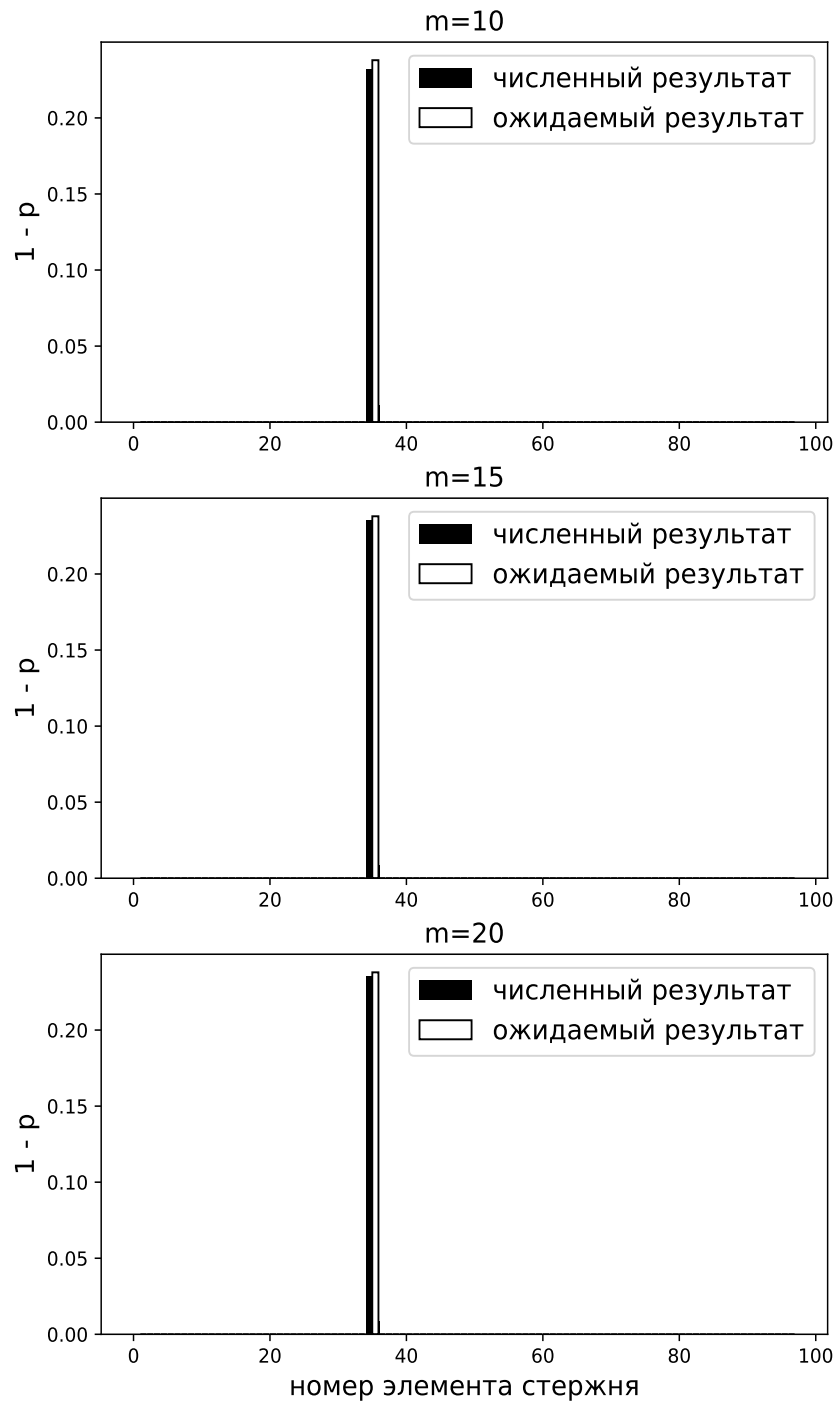
λ, μ, σ


Рис. 2.3: Идентификация одиночной трещины по спектрам λ , σ и μ

метров стержня имеет вид [19]

$$c = 5.346hf(s_{cr}), \quad s_{cr} = \frac{a}{b_h} \quad (2.77)$$

$$f(s_{cr}) = 1.8624s_{cr}^2 - 3.95s_{cr}^3 + 16.375s_{cr}^4 - 37.226s_{cr}^5 + 76.81s_{cr}^6 - \\ - 126.9s_{cr}^7 + 172s_{cr}^8 - 143.97s_{cr}^9 + 66.56s_{cr}^{10} \quad (2.78)$$

Результаты расчета таковы, что при $m = 10$ численный алгоритм показывает падение жесткости в трех соседних элементах - 34-м, 35-м и 36-м. Причем в 35-м элементе падение жесткости намного выше, чем в остальных. Элемент занимает отрезок 0.354 – 0.365 м и имеющаяся трещина попадает именно в него. Данная картина сохраняется при увеличении числа используемых в расчете частот до 45 и 60 соответственно.

Теперь рассмотрим результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ собственным числам λ_i , σ_i и ν_i (Рис. 2.2). Результаты расчета фактически совпадают с предыдущим случаем.

Наконец рассмотрим результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ собственным числам λ_i , σ_i и μ_i (Рис. 2.3). В данном случае результаты несколько улучшились, по сравнению с предыдущими расчетами, так как теперь вместо трех поврежденных элементов алгоритм показывает только два - 35-й и 36-й. Причем падение жесткости в 35-м элементе намного сильнее, чем в соседнем 36-м. При этом результаты этого расчета при $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ никак не различаются.

Пример 1.2. В данном примере добавим к имеющейся трещине относительной длины $s_1 = 0.14$, расположенной в точке $x_1 = 0.36$ м, другую трещину с параметрами $x_2 = 0.59$ м, $s_2 = 0.08$. Результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ собственным числам λ_i , μ_i и ν_i представлены на (Рис. 2.4). В случае $m = 10$ проявляется два крупных всплеска - в 35-м элементе и в 57-м. Последний занимает участок 0.583 – 0.594 м и содержит добавленную тре-

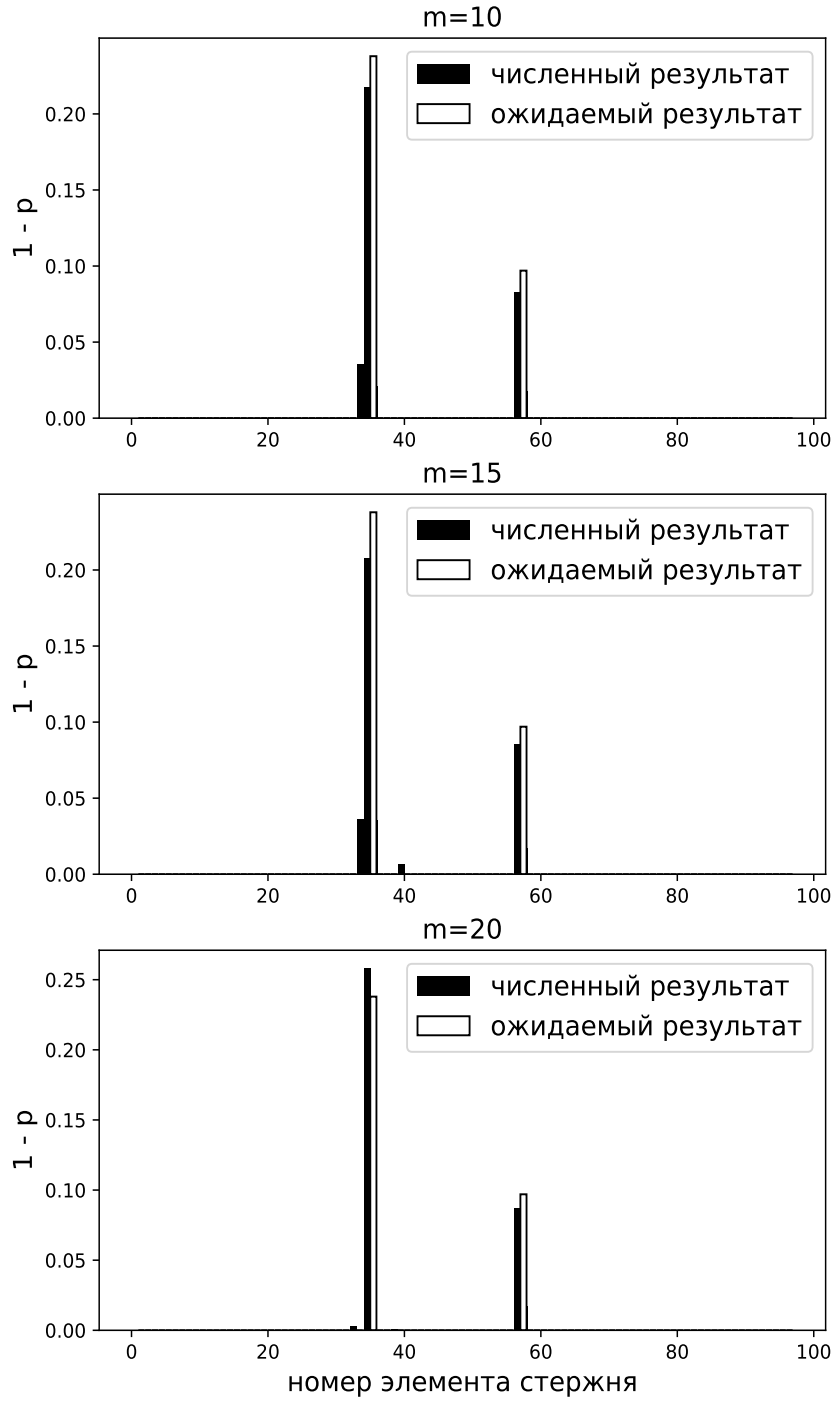
λ, μ, ν


Рис. 2.4: Идентификация двух трещин по спектрам λ , μ и ν

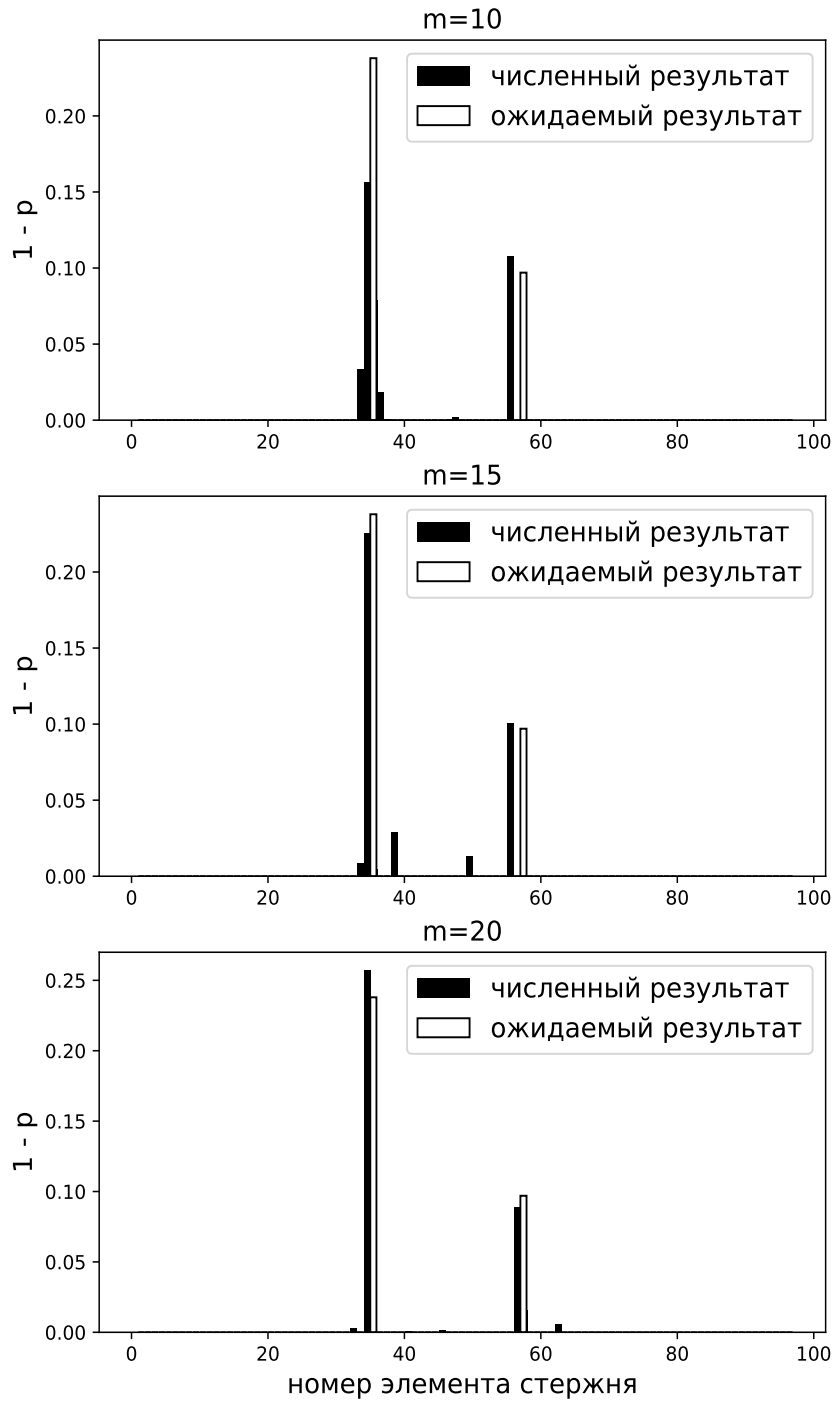
λ, σ, ν


Рис. 2.5: Идентификация двух трещин по спектрам λ , σ и ν

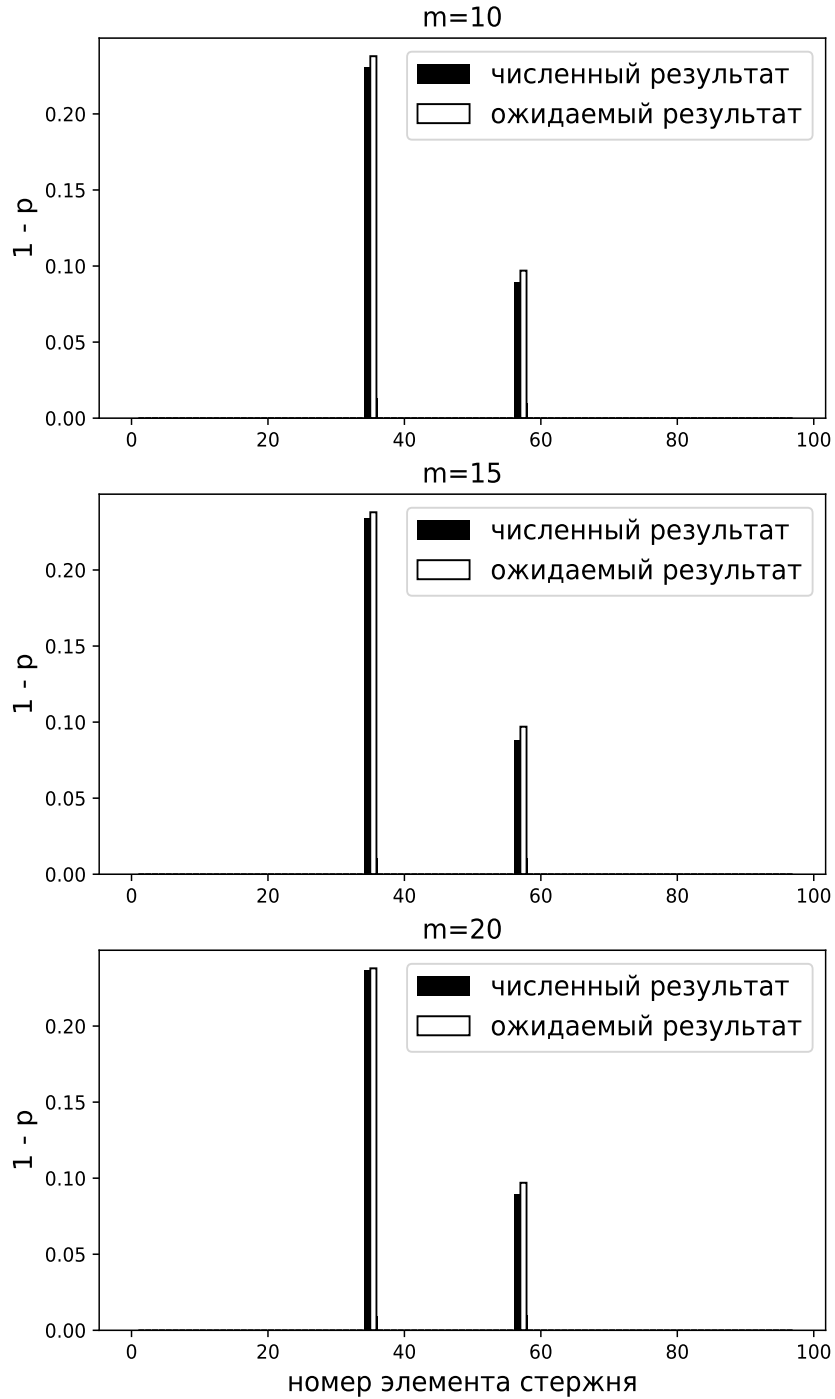
λ, σ, μ


Рис. 2.6: Идентификация двух трещин по спектрам λ , σ и μ

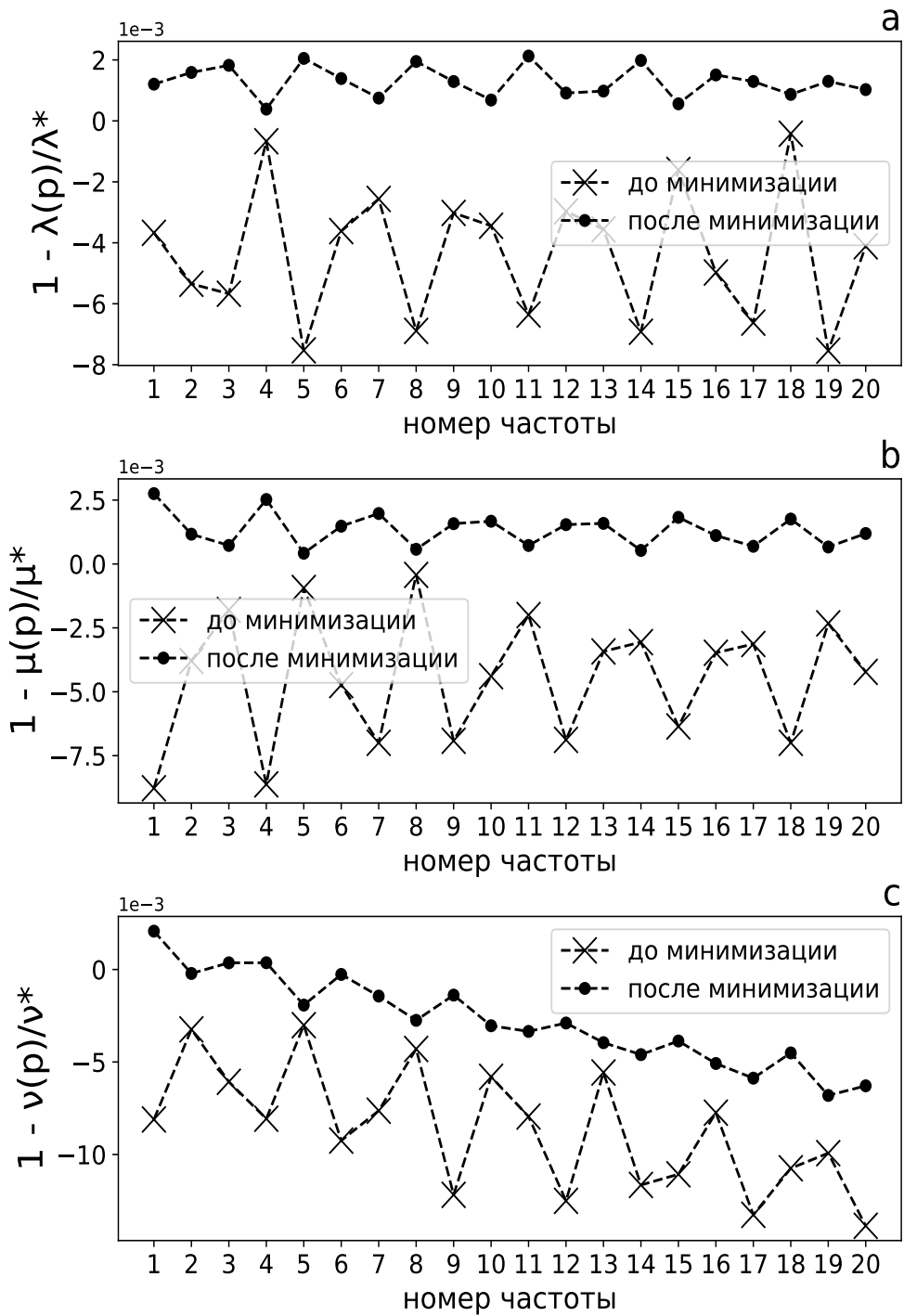


Рис. 2.7: а,б,с - компоненты вектора невязки \vec{r} из примера 1.2 для спектров λ , μ и ν

щину. При $m = 15$ появляется дополнительный небольшой паразитный всплеск в 40-м элементе. При $m = 20$ улучшается локализация первой трещины, но в тоже время появляется небольшой паразитный всплеск в 33-м элементе. В целом, обе трещины определяются достаточно четко и с ростом параметра m улучшается их локализация. Как и случае продольных колебаний меньшей трещине соответствует меньшее падение жесткости в содержащем трещину элементе.

На (Рис. 2.5) представлены результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ собственным числам λ_i , σ_i и ν_i . Здесь уже более заметно влияние количества используемых в расчете частот. Так при $m = 10$ первая трещина определяется, но достаточно плохо локализована. Вторая трещина тоже определяется, но в соседнем от ожидаемого элементе. Кроме того, между трещинами возникает небольшой паразитный всплеск. При $m = 20$ обе трещины идентифицируются в нужных элементах и достаточно неплохо локализованы. Хотя пара малых паразитных всплесков все еще присутствует, очевидно, что с ростом параметра m численное решение сходится к ожидаемому.

Результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ собственным числам λ_i , σ_i и μ_i представлены на (Рис. 2.6). Здесь для каждого рассматриваемого случая обе трещины определяются корректно и хорошо локализованы.

На (Рис. 2.7а) для данного примера показано относительное отклонение между собственными частотами поврежденной консольной балки λ^* и аналогичными частотами для целого стержня $\lambda(\vec{p}^{(0)})$. Все компоненты вектора $\vec{p}^{(0)}$ равны единице. Соответствующие точки на графике обозначены символом \times . На этом же рисунке показано относительное отклонение между λ^* и $\lambda(\vec{p}_{min})$, где \vec{p}_{min} соответствует решению, представленному на (Рис. 2.4) при $m = 20$. Соответствующие точки на графике обозначены символом \bullet . Из (Рис. 2.7а) можно видеть, что график $1 - \lambda(\vec{p}_{min})/\lambda^*$ колеблется вокруг нулевого значения не только при высоких

собственных частотах, но и при низких. На аналогичном графике для спектра μ (Рис. 2.7b) можно видеть похожий эффект. На аналогичном графике для спектра ν (Рис. 2.7c) можно видеть, что точки $1 - \nu(\vec{p}_{min})/\nu^*$ с ростом частоты все сильнее отклоняются от нулевого значения. Такой результат может быть вызван эффектом накопления погрешностей при вычислении частот $\nu(\vec{p})$.

Сравнивая полученные решения для каждого из наборов спектров, можно отметить, что самый стабильный результат получается для набора λ_i , σ_i и μ_i , то есть при минимизации целевой функции (2.70). Две другие целевые функции (2.68), (2.69) показывают наилучший результат при использовании максимального количества частот.

Пример 1.3. В предыдущем примере была рассмотрена задача идентификации двух трещин. Добавим теперь к ним еще одну трещину, расположенную в точке $x_3 = 0.19$ и имеющую относительную длину $s_3 = 0.21$. Результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ собственным числам λ_i , μ_i и ν_i представлены на (Рис. 2.8). При $m = 10$ в 19-м элементе появляется крупный всплеск, который занимает участок $0.1875 - 0.198$ м, то есть является носителем добавленной третьей трещины. Так как она расположена вблизи левой границы элемента, то в соседнем 18-м элементе тоже возникает достаточно крупный сопутствующий всплеск. Два других крупных всплеска, примерно одной высоты, проявляются в 35-м и 36-м элементах. Еще один крупный всплеск возникает в 57-м элементе. Кроме того, имеется небольшой паразитный всплеск в 76-м элементе. С ростом количества используемых в расчете частот результаты улучшаются: паразитные всплески исчезают, а сами трещины лучше локализируются.

На (Рис. 2.9) представлены результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ собственным числам λ_i , σ_i и ν_i . Для $m = 10$ результат похож на аналогичный из предыдущего расчета. Отличие лишь в том, что вторая трещина лучше локализована, а небольшой паразитный всплеск располагается

чуть левее. При $m = 15$ результат ухудшается (третья трещина определяется в соседнем от ожидаемого элемента, а вторая трещина хуже локализуется). Для $m = 20$ все трещины определяются корректно и хорошо локализируются. Остается лишь один небольшой паразитный всплеск, но его размер меньше, чем в расчетах для $m = 10$ и $m = 15$.

Результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ собственным числам λ_i , μ_i и σ_i представлены на (Рис. 2.10). При $m = 10$ второй дефект локализуется чуть хуже остальных, но при $m = 15$ и $m = 20$ идентифицируется уже идеально. Первая и третья трещины определяются одинаково хорошо при всех вариантах расчета.

На (Рис. 2.11а) для данного примера показано относительное отклонение между собственными частотами поврежденной консольной балки λ^* и аналогичными частотами для целого стержня $\lambda(\vec{p}^{(0)})$. Все компоненты вектора $\vec{p}^{(0)}$ равны единице. Соответствующие точки на графике обозначены символом \times . На этом же рисунке показано относительное отклонение между λ^* и $\lambda(\vec{p}_{min})$, где \vec{p}_{min} соответствует решению, представленному на (Рис. 2.9) при $m = 20$. Соответствующие точки на графике обозначены символом \bullet . Из (Рис. 2.11а), (Рис. 2.11б) можно видеть, что графики $1 - \lambda(\vec{p}_{min})/\lambda^*$, $1 - \mu(\vec{p}_{min})/\mu^*$, в отличие от примера 1.2, колеблются вокруг нулевого значения не столь сильно. На аналогичном графике для спектра ν (Рис. 2.11с) можно видеть, что как и в примере 1.2 точки $1 - \nu(\vec{p}_{min})/\nu^*$ с ростом частоты все сильнее отклоняются от нулевого значения.

Как и в предыдущем примере 1.2, для трех рассматриваемых вариантов параметра m наиболее стабильный результат был получен после минимизации функции (2.70). Минимизация функций (2.68), (2.69) оказалась наиболее успешной при $m = 20$.

Пример 1.4. Добавим к трем трещинам из предыдущего примера еще одну с параметрами $x_4 = 0.89$ м, $s_4 = 0.15$. Результаты восстановления жесткостей эле-

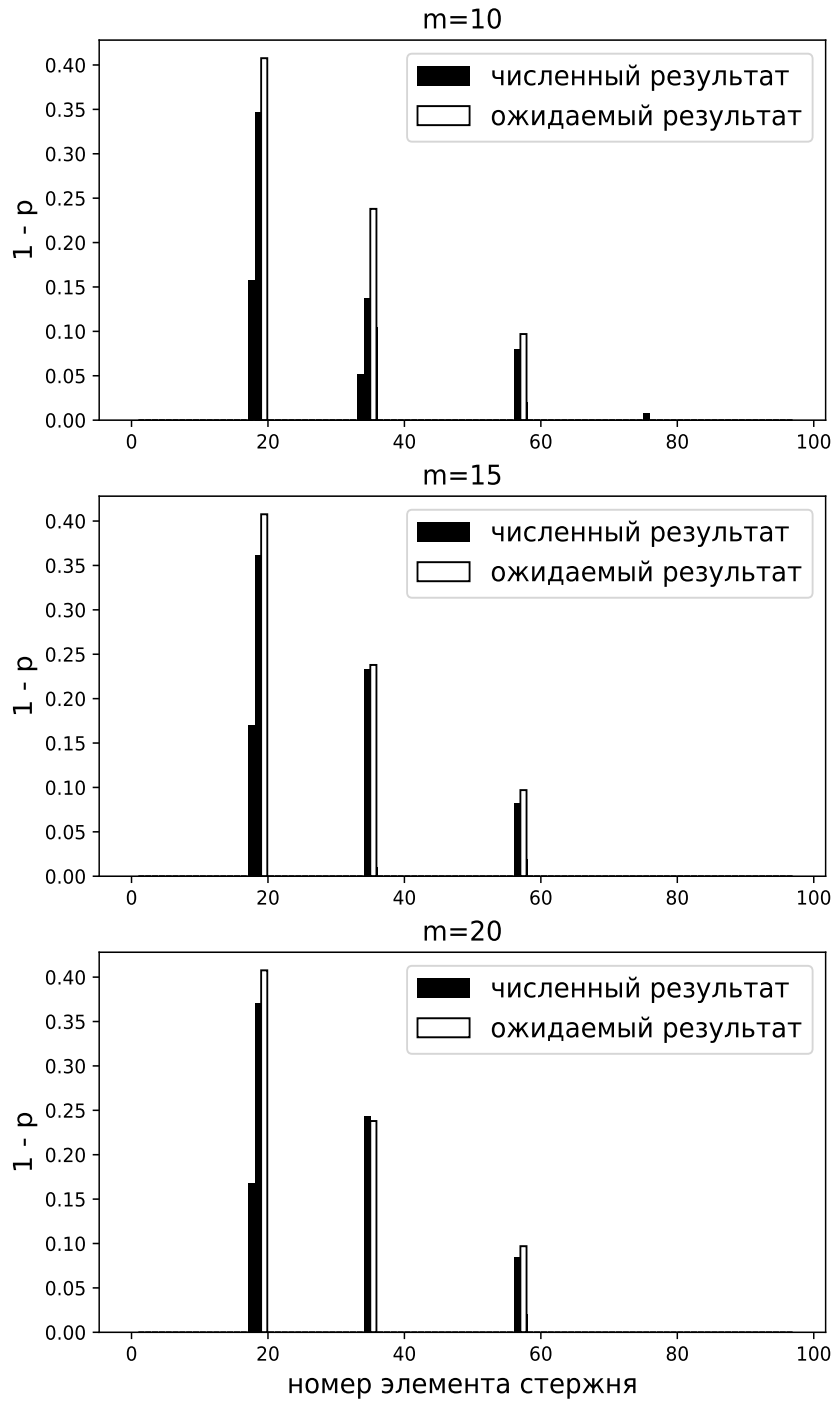
λ, μ, ν


Рис. 2.8: Идентификация трех трещин по спектрам λ , μ и ν

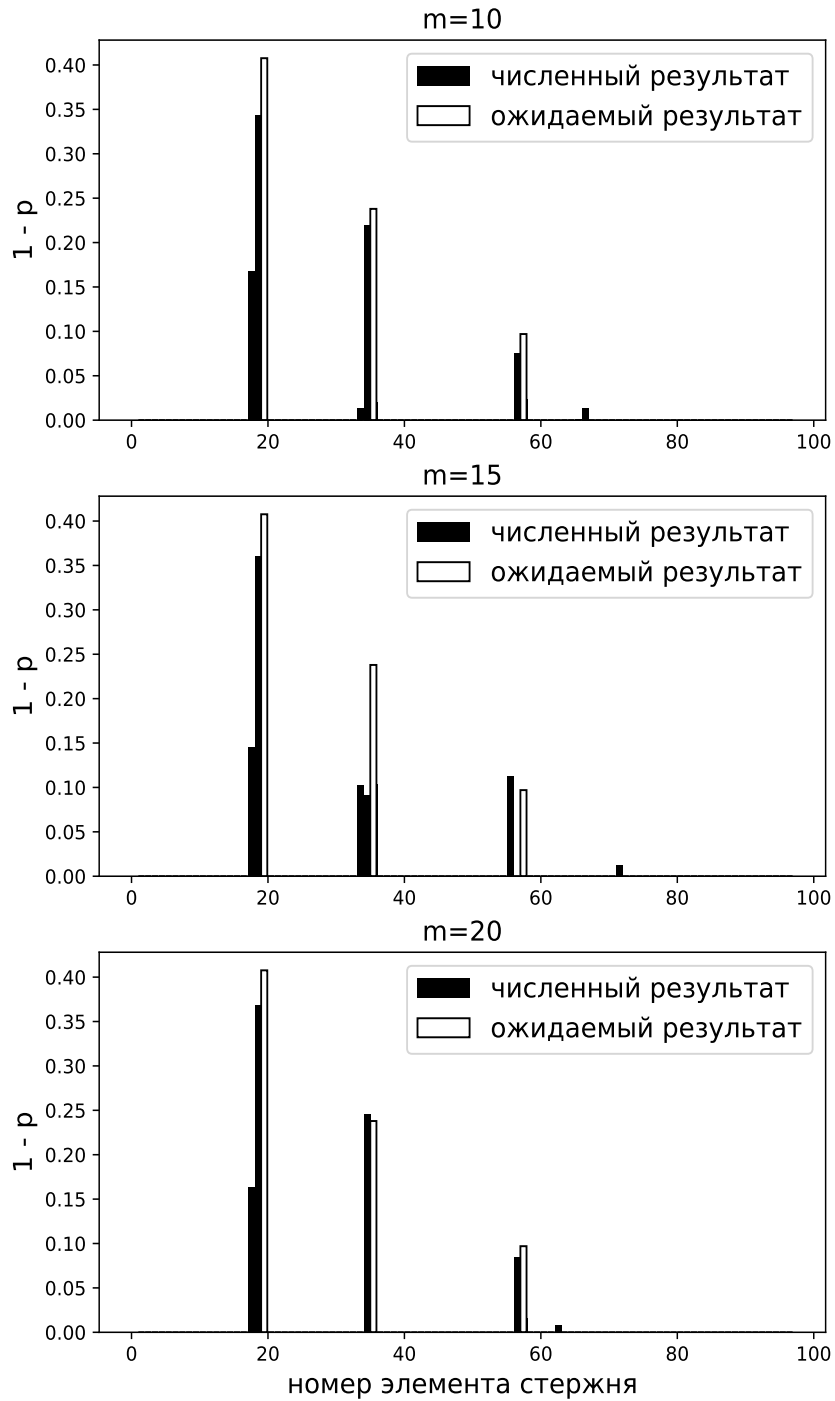
λ, σ, ν


Рис. 2.9: Идентификация трех трещин по спектрам λ , σ и ν

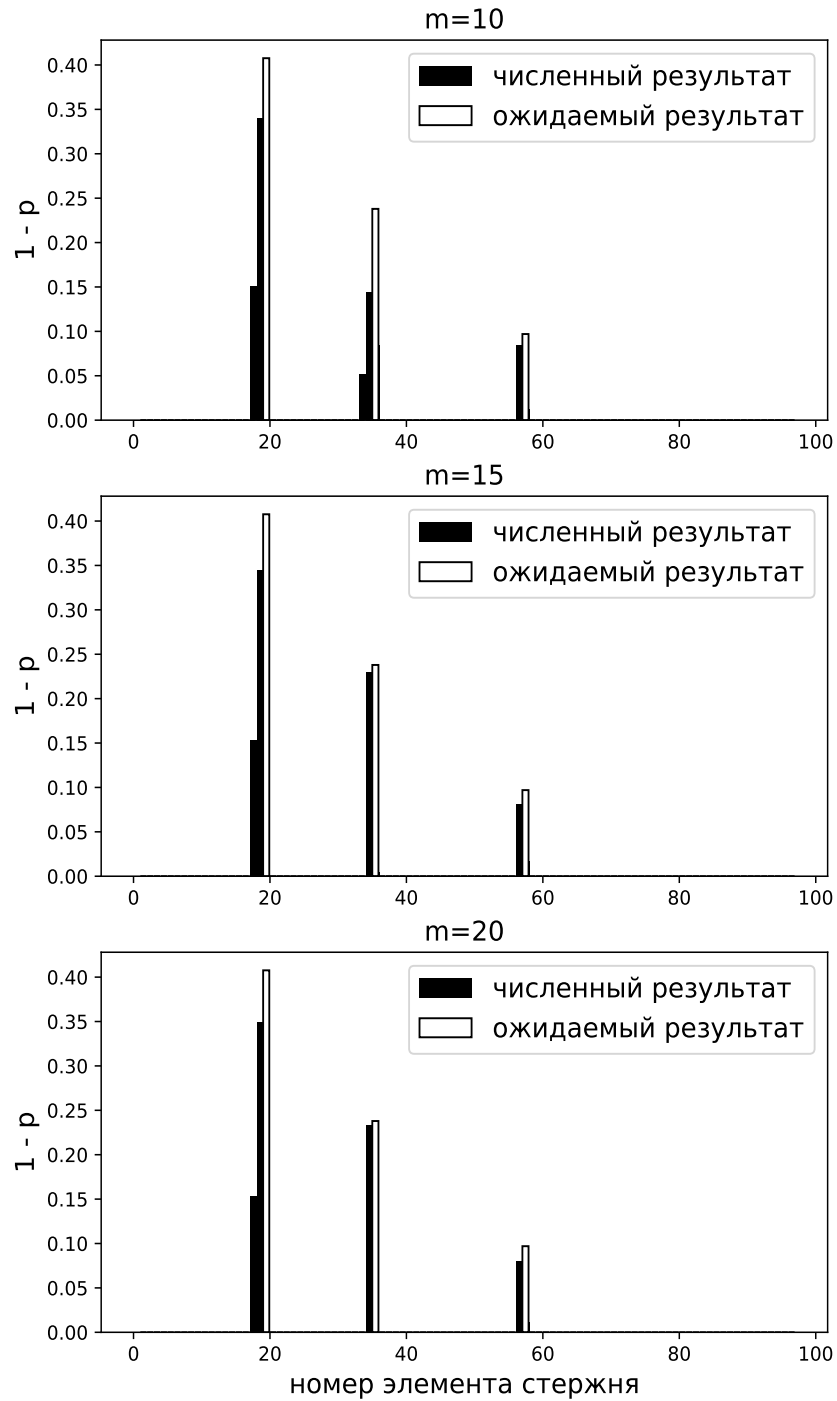
λ, σ, μ


Рис. 2.10: Идентификация трех трещин по спектрам λ , σ и μ

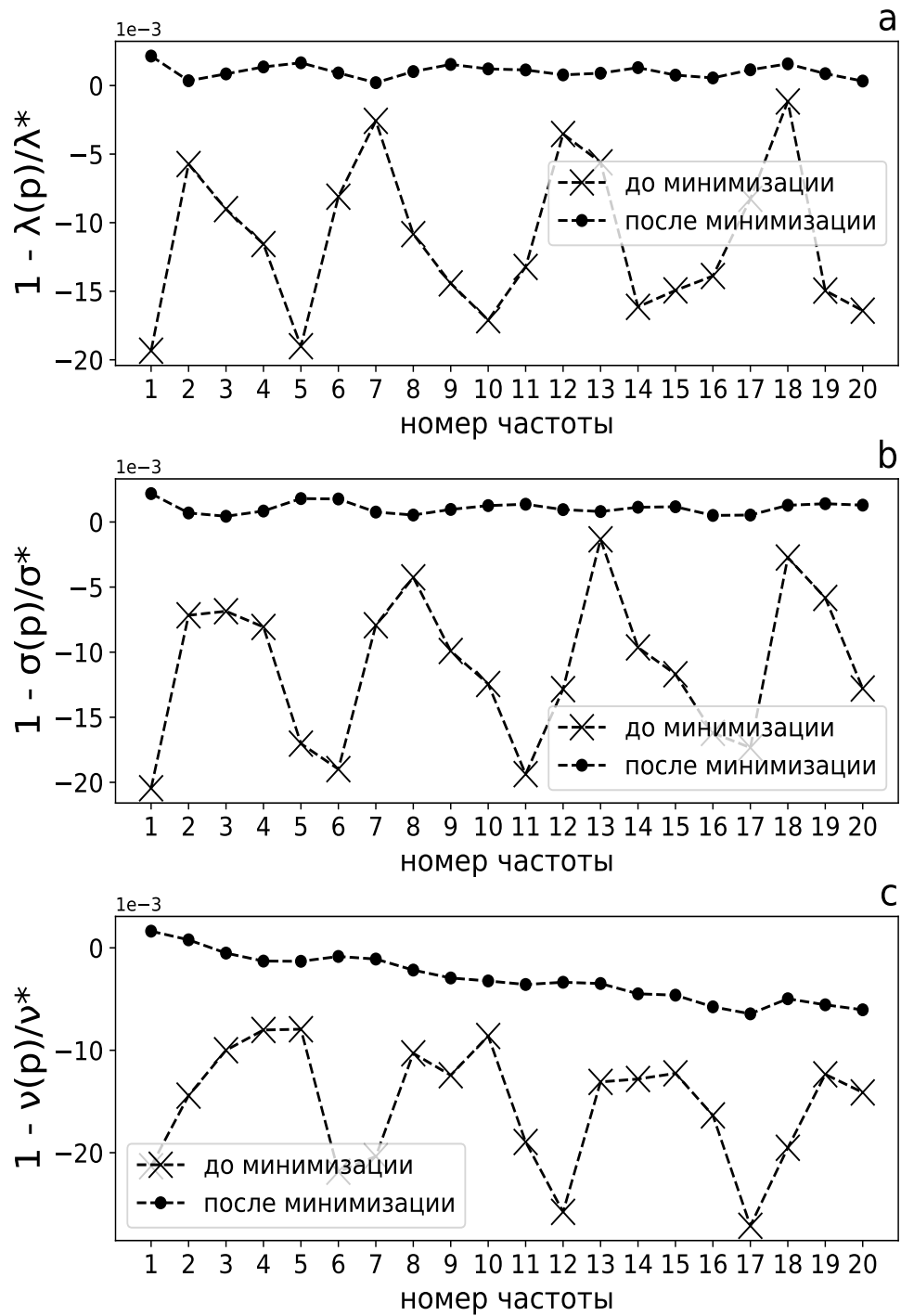


Рис. 2.11: а,б,с - компоненты вектора невязки \vec{r} из примера 1.3 для спектров λ , σ и ν

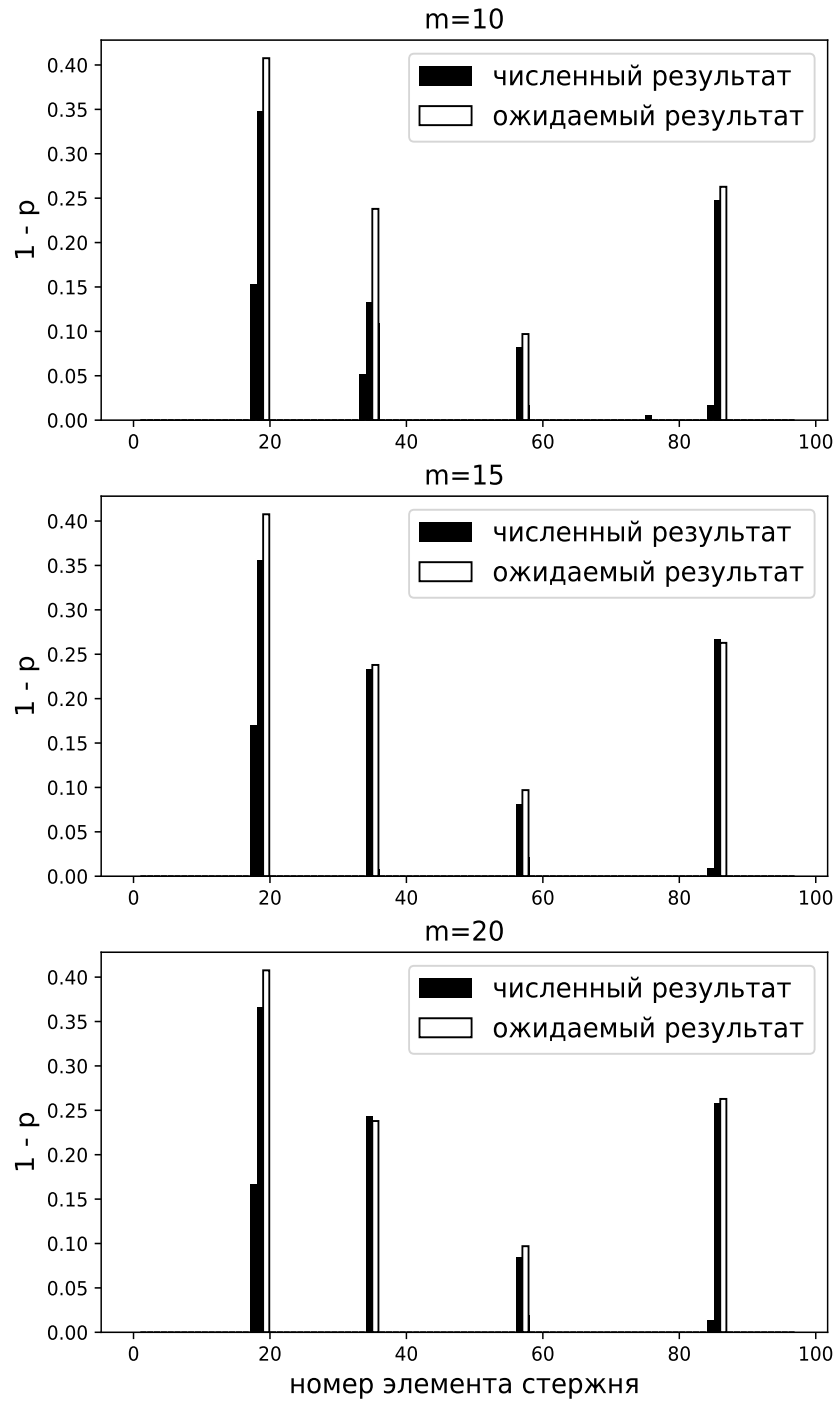
λ, μ, ν


Рис. 2.12: Идентификация четырех трещин по спектрам λ , μ и ν

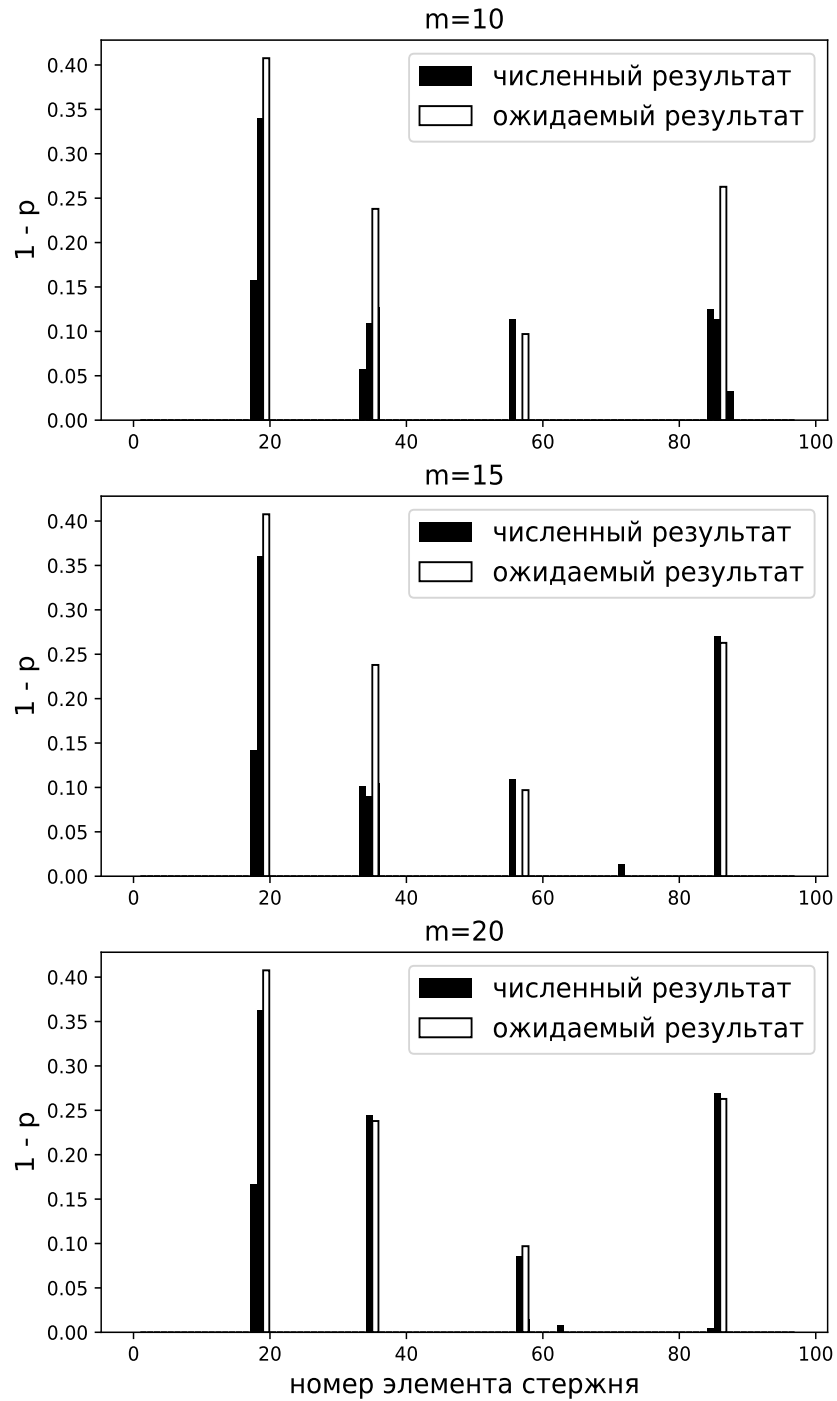
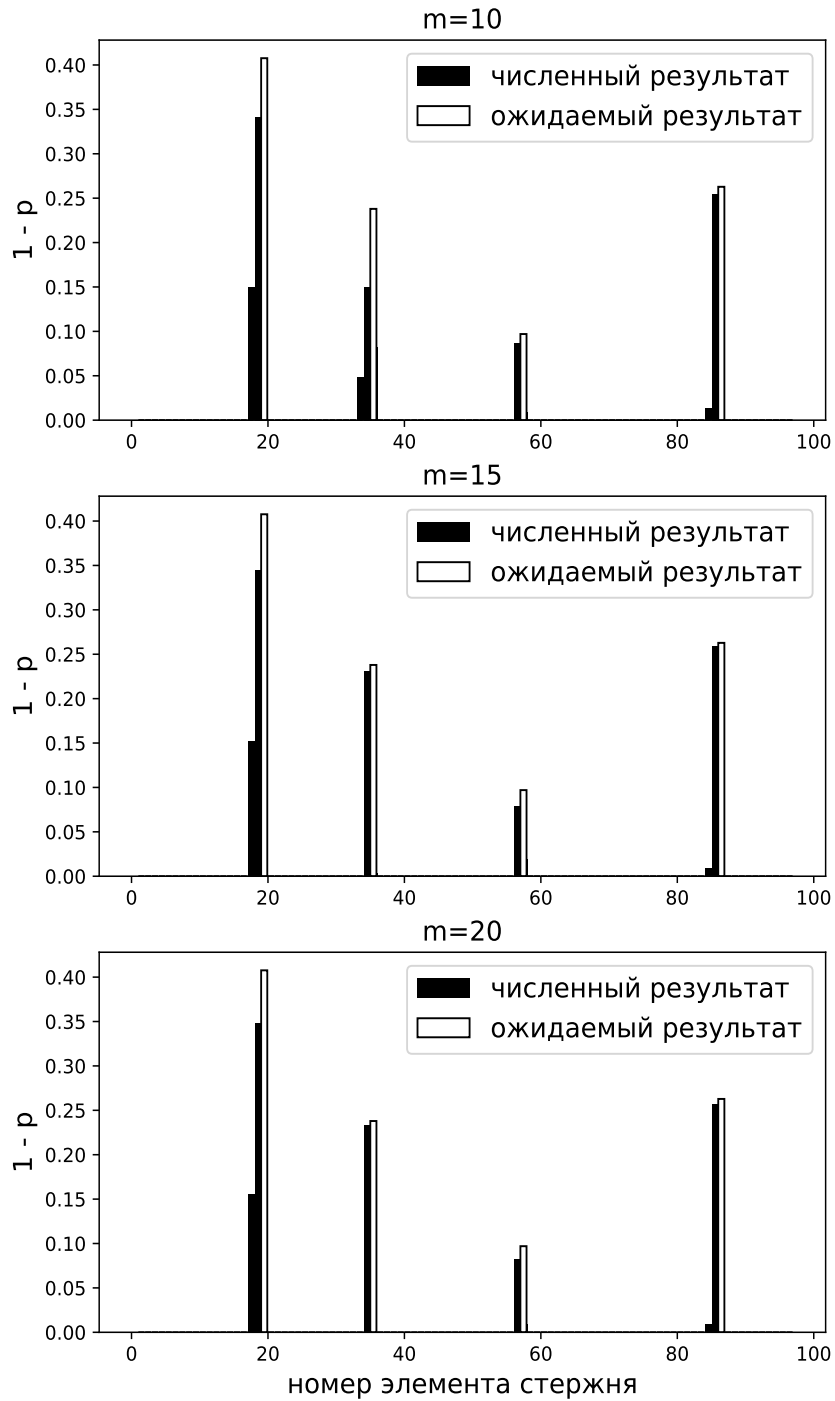
λ, σ, ν


Рис. 2.13: Идентификация четырех трещин по спектрам λ , σ и ν

λ, σ, μ Рис. 2.14: Идентификация четырех трещин по спектрам λ , σ и μ

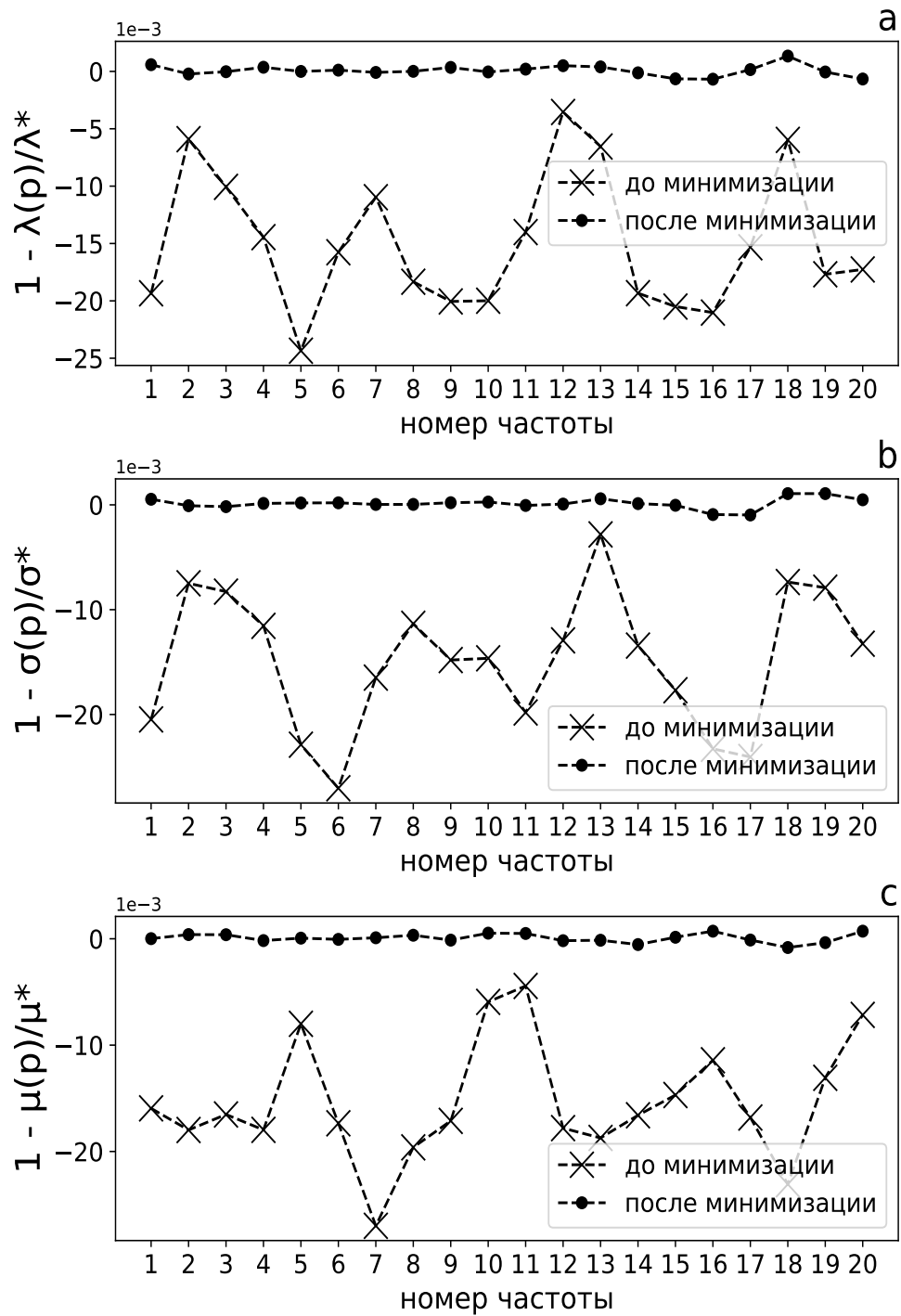


Рис. 2.15: а,б,с - компоненты вектора невязки \vec{r} из примера 1.4 для спектров λ , σ и μ

ментов по $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ собственным числам λ_i , μ_i и ν_i представлены на (Рис. 2.12). При $m = 10$ решение фактически совпадает с результатом расчета для трех трещин. Отличие состоит в том, что появляется еще один крупный всплеск в 86-м элементе. Данный элемент расположен на отрезке 0.885 – 0.896 м и содержит добавленную четвертую трещину. В расчетах для $m = 15$ и $m = 20$ вторая трещина лучше локализуется, а также исчезают паразитные мелкие всплески.

На (Рис. 2.13) представлены результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ собственным числам λ_i , σ_i и ν_i . Здесь, при $m = 10$ вторая и четвертая трещина плохо локализируются, кроме того третья трещина появляется в соседнем от ожидаемого элементе. При $m = 15$ четвертая трещина определяется идеально, но между ней и соседней трещиной появляется небольшой паразитный всплеск. При $m = 20$ уже все трещины хорошо локализируются, но небольшой паразитный всплеск между третьей и четвертой трещинами все же остается.

Для набора λ_i , σ_i и μ_i вновь получаем качественное восстановление трещин для $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$. Исключение составляет лишь вторая трещина при $m = 10$, которая локализуется хуже остальных (Рис. 2.14).

На (Рис. 2.15а) для данного примера показано относительное отклонение между собственными частотами поврежденной консольной балки λ^* и аналогичными частотами для целого стержня $\lambda(\vec{p}^{(0)})$. Все компоненты вектора $\vec{p}^{(0)}$ равны единице. Соответствующие точки на графике обозначены символом \times . На этом же рисунке показано относительное отклонение между λ^* и $\lambda(\vec{p}_{min})$, где \vec{p}_{min} соответствует решению, представленному на (Рис. 2.14) при $m = 20$. Соответствующие точки на графике обозначены символом \bullet . Из (Рис. 2.15а), (Рис. 2.15b), (Рис. 2.15с) можно видеть, что частоты $\lambda(\vec{p}_{min})$, $\mu(\vec{p}_{min})$, $\sigma(\vec{p}_{min})$ фактически совпадают с исходными частотами λ^* , μ^* и σ^* соответственно.

Таким образом, минимизация целевых функций (2.68)-(2.70) позволяет иден-

тифицировать четыре имеющиеся в стержне трещины. Как и в предыдущих примерах наиболее стабильный результат получается при минимизации функции (2.70). Функции (2.68), (2.69) показывают наилучший результат при максимальной переопределенности, то есть когда $m = 20$.

Обобщая полученные в рассмотренных примерах результаты, можно отметить, что с для введенных целевых функций (2.68)-(2.70) с ростом числа используемых в расчете частот, определяемого параметром m , результат численного расчета сходится к ожидаемому. Причем для функции (2.70) во всех рассмотренных примерах достаточно взять $m = 10$. Чтобы получить сопоставимый по качеству результат при минимизации функций (2.68), (2.69), как правило, требуется большее количество исходных данных. Функция (2.69) показывает наименее стабильный результат в том смысле, что увеличение параметра m далеко не всегда гарантирует улучшение качества решения. Например, во многих примерах для этой функции результат при $m = 15$ оказывается хуже, чем при $m = 10$. Зато результат при $m = 20$ для всех примеров получается лучше, чем при $m = 10$ и $m = 15$. Такие отличия в поведении рассматриваемых целевых функций могут быть связаны, например, с различной устойчивостью этих функций к шуму в исходных данных.

2.3.2 Результаты вычисления по двум спектрам

В [6; 8; 30] рассмотрено уравнение более общего вида

$$[r(x)w''(x)]'' = \lambda m(x)w(x), \quad (2.79)$$

где $m(x)$ и $r(x)$ регулярные, но неизвестные функции. Доказано, что эти функции однозначно восстанавливаются по трем наборам спектров: первый - $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_i\}$, $\{\nu_i\}$, второй - $\{\lambda_i\}$, $\{\sigma_i\}$, $\{\nu_i\}$ и третий - $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_i\}$, $\{\sigma_i\}$. Хотя функция $m(x)$, определяемая уравнением (2.31) является сингулярной, доказательство, приведенное в

[6; 8; 30] полностью проходит и для этого случая. Вместе с тем, уравнение (2.31) содержит только одну неизвестную функцию, что дает основание полагать, что для ее восстановления достаточно знать только два спектра. Это предположение мы проверим численно с помощью предложенного алгоритма.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу идентификации трех трещин из раздела 2.3.1 и сравним решение, полученное по спектрам λ_i , μ_i и ν_i , с решениями, построенными по трем возможными комбинациям из двух спектров: λ_i, ν_i , μ_i, ν_i и λ_i, μ_i . Численные решения, построенные по спектрам λ_i, ν_i и μ_i, ν_i , плохо согласуются с исходным результатом. Однако решение, построенное по спектрам λ_i, μ_i , не просто повторяет решения, полученное по трем спектрам при $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$, но и немного улучшает эти результаты (Рис. 2.16). Как видно из рисунка в решениях по двум спектрам отсутствуют паразитные всплески. Это может быть связано с тем, что при вычислении спектра ν_i конечными элементами матрица жесткости K теряет симметричность, что ухудшает сходимость решения. Поэтому использование этого спектра может привносить некоторый шум в данные.

Сравним теперь решение, полученное по спектрам λ_i , σ_i и ν_i , с решениями, построенными по трем возможными комбинациям из двух спектров: λ_i, ν_i , σ_i, ν_i и λ_i, σ_i . Как и в случае с парами спектров λ_i, ν_i и μ_i, ν_i , комбинация σ_i, ν_i не дает хорошего согласования с исходным результатом. Однако пара спектров λ_i, σ_i точно воспроизводит численные решения, полученные по трем спектрам $\lambda_i, \sigma_i, \nu_i$ (Рис. 2.17) при $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$.

Наконец, сравним решение, полученное по трем спектрам λ_i , μ_i , σ_i , с парой спектров μ_i , σ_i , поскольку остальные пары уже были рассмотрены ранее. Результаты сравнения приведены на (Рис. 2.18), из которого видно, что решение по двум выбранным спектрам точно воспроизводит результат, полученный по трем спектрам.

Таким образом, численные эксперименты показывают, что решение рассмат-

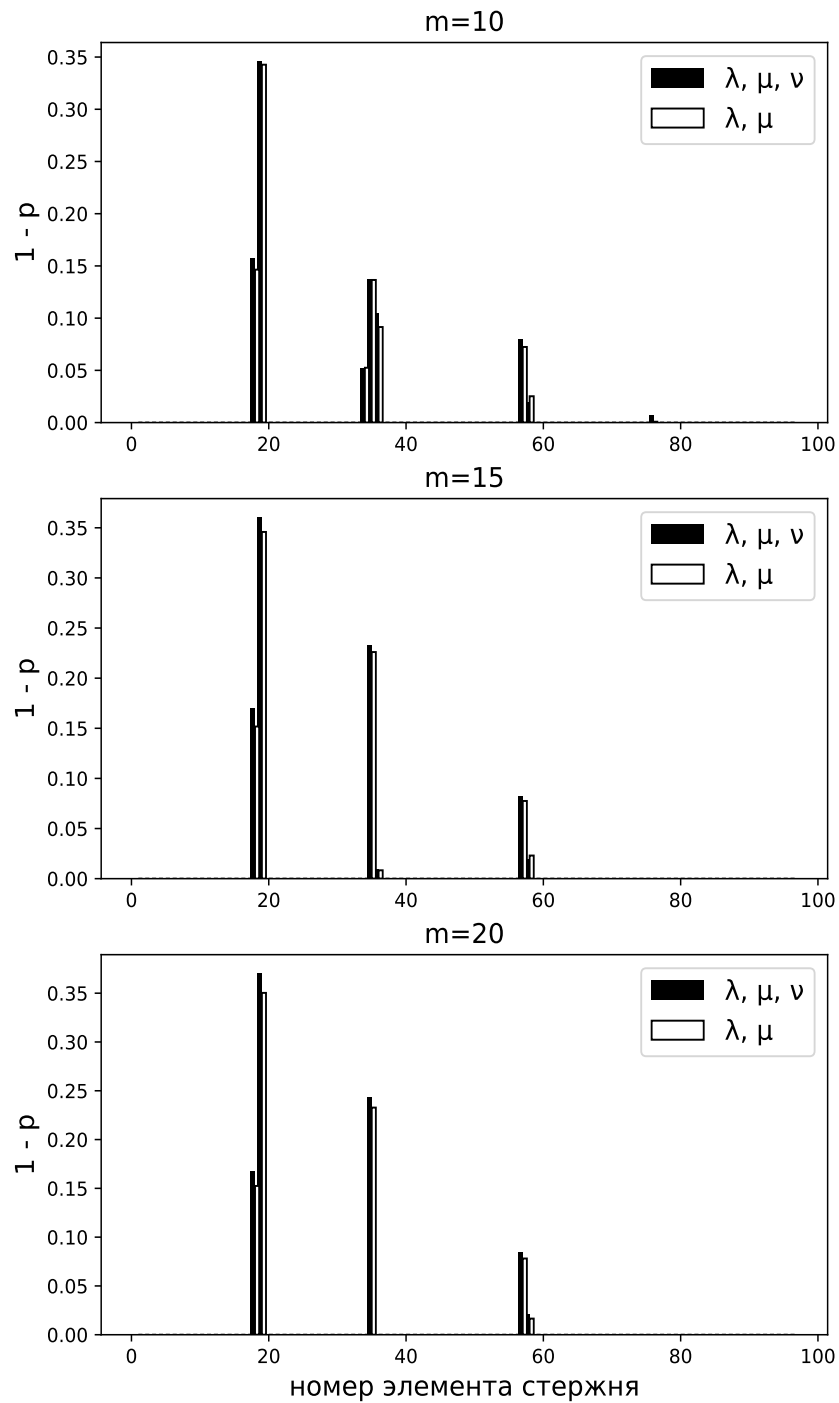


Рис. 2.16: Сравнение результатов идентификации трех трещин по спектрам λ, μ, ν и λ, μ

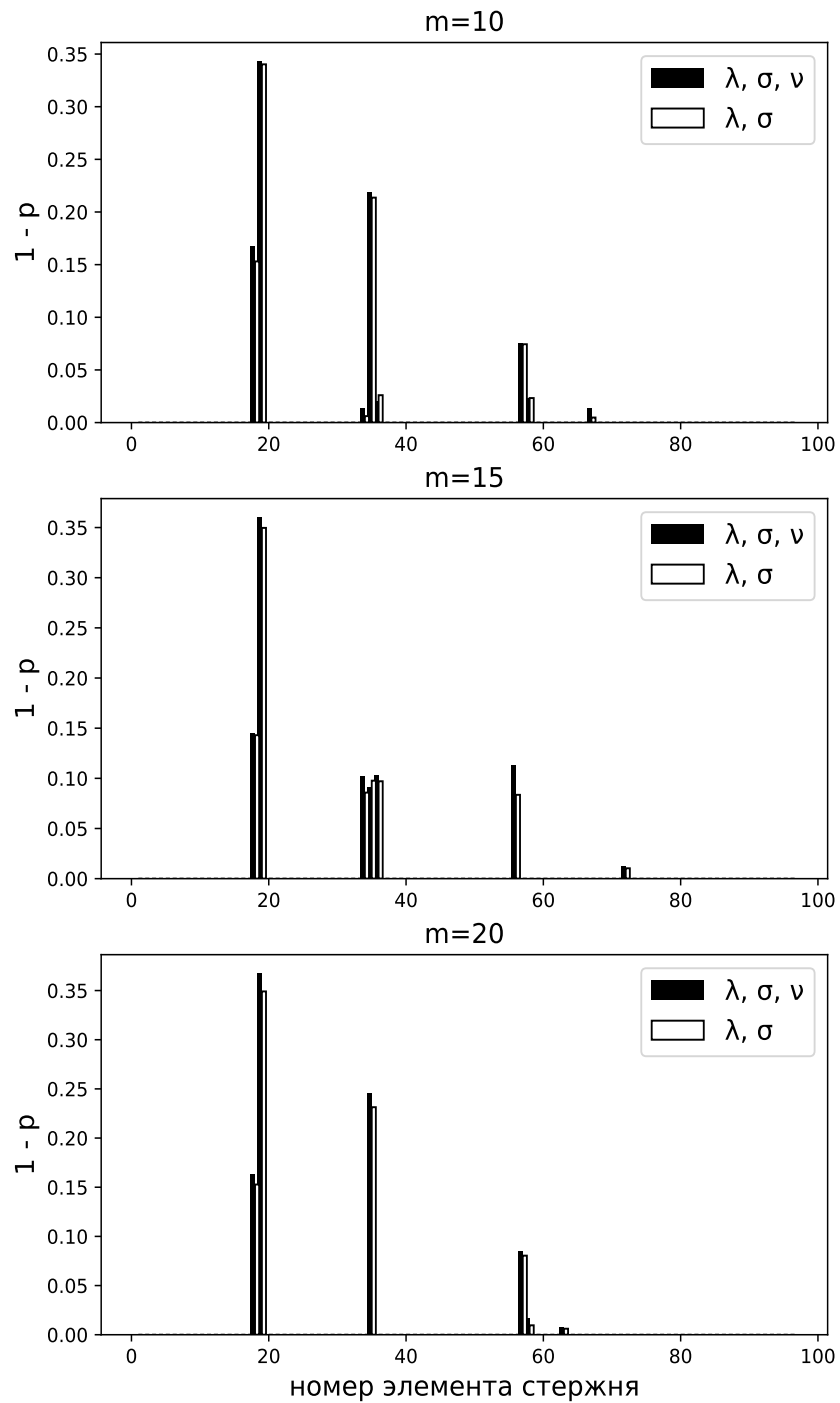


Рис. 2.17: Сравнение результатов идентификации трех трещин по спектрам λ, σ, ν и λ, σ

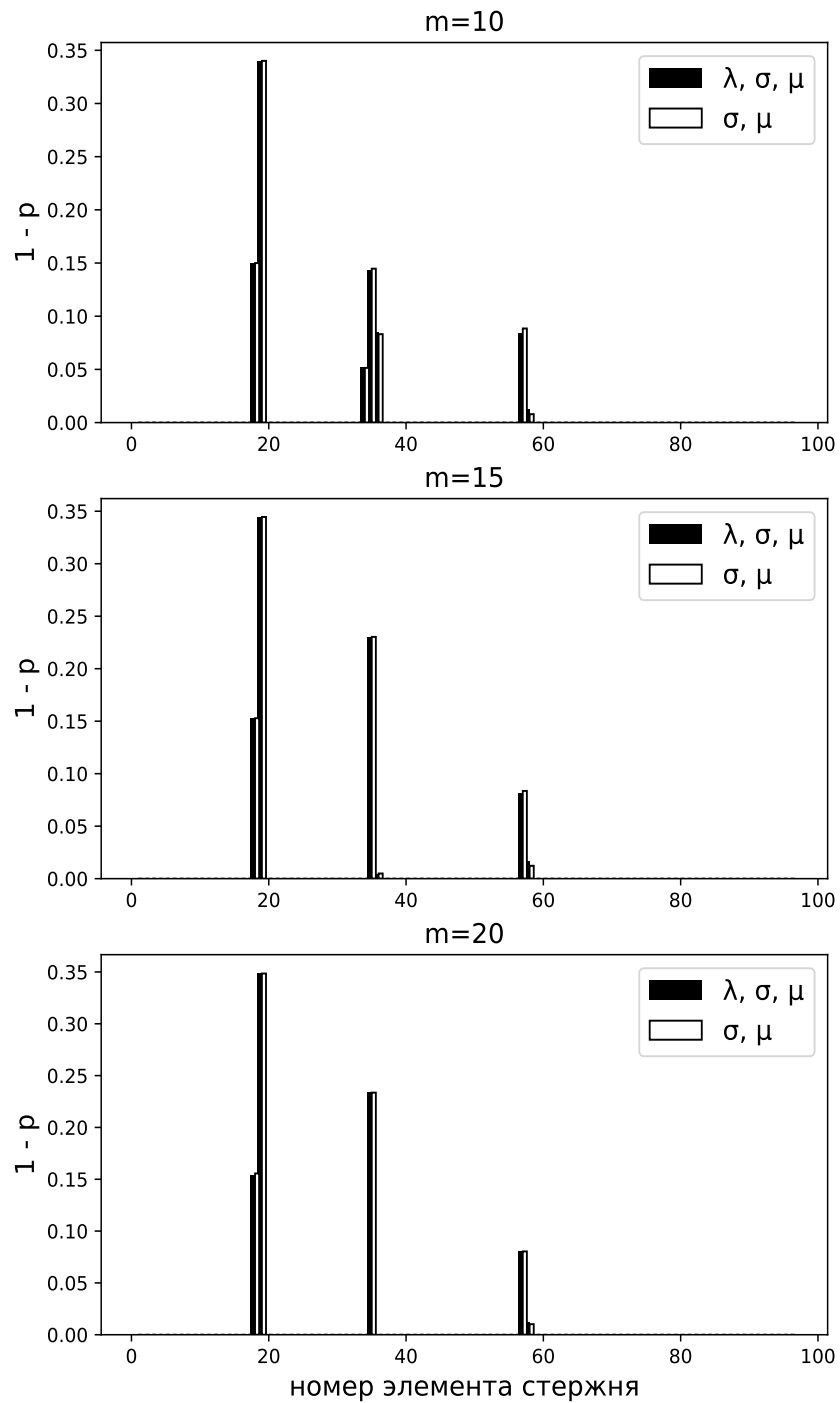


Рис. 2.18: Сравнение результатов идентификации трех трещин по спектрам λ, σ, μ и σ, μ

риваемой в данном примере задачи, полученное по спектрам λ_i , μ_i и ν_i , не изменится, если использовать спектры λ_i, μ_i ; решение, полученное по спектрам λ_i , σ_i и ν_i , не изменится, если использовать спектры λ_i, σ_i ; решение, полученное по спектрам λ_i , σ_i и μ_i , не изменится, если использовать спектры μ_i, σ_i . То есть, если в качестве исходных данных нам известны спектры λ_i , σ_i и μ_i , то любая пара из этой тройки может быть использована для идентификации дефектов.

Пример 2.2. Рассмотрим задачу идентификации четырех трещин из раздела 2.3.1 и сравним решение, полученное по трем спектрам, с решениями, полученными по двум спектрам. Результаты сравнения представлены на (Рис. 2.19)-(Рис. 2.21), из которых видно, что решения полученные по выбранным парам спектров хорошо согласуются с решениями, полученными по трем спектрам. Исключение составляют только результаты для $m = 10$ и $m = 15$, где вторая и третья трещина плохо локализуются. Кроме того, при $m = 15$ появляется небольшой паразитный всплеск. Однако при $m = 20$ согласование решений получается практически идеальным, хотя и остается небольшой паразитный всплеск.

Таким образом, рассмотренные пары спектров λ_i, μ_i , λ_i, σ_i и μ_i, σ_i в точности воспроизводят результаты, полученные с помощью соответствующих им троек λ_i, μ_i, ν_i , $\lambda_i, \sigma_i, \nu_i$ и $\lambda_i, \sigma_i, \mu_i$. Следовательно, все выявленные закономерности в примерах из раздела 2.3.1, будут справедливы и в отношении рассмотренных пар спектров. Например, что пара μ_i, σ_i будет показывать наиболее стабильные результаты, по сравнению с двумя другими парами. В свою очередь пары λ_i, μ_i и λ_i, σ_i будут давать наилучшие результаты только при большом количестве используемых в расчете частот.

Основные результаты, включенные в эту главу, опубликованы в работах [79; 109; 110].

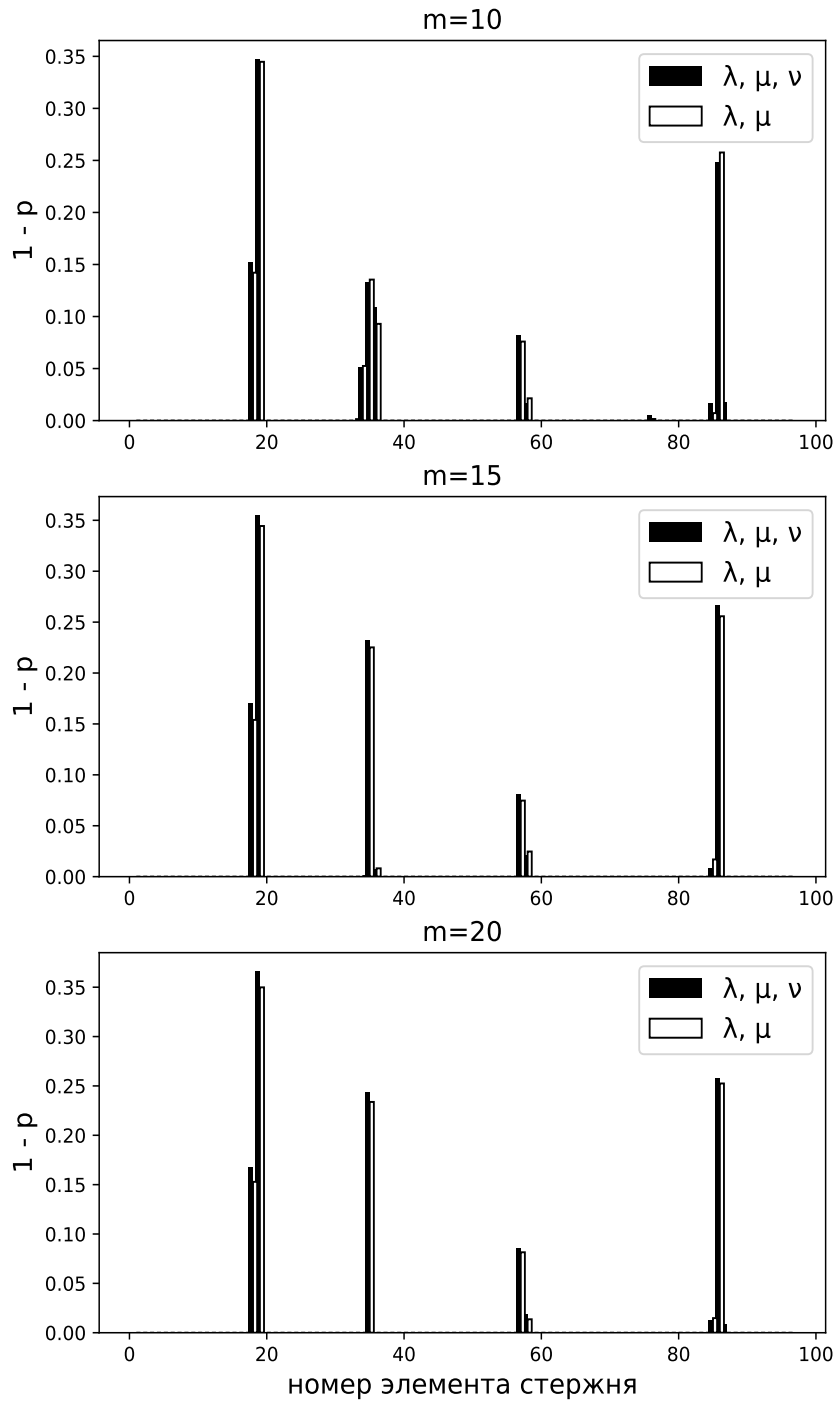


Рис. 2.19: Сравнение результатов идентификации четырех трещин по спектрам λ, μ, ν и λ, μ

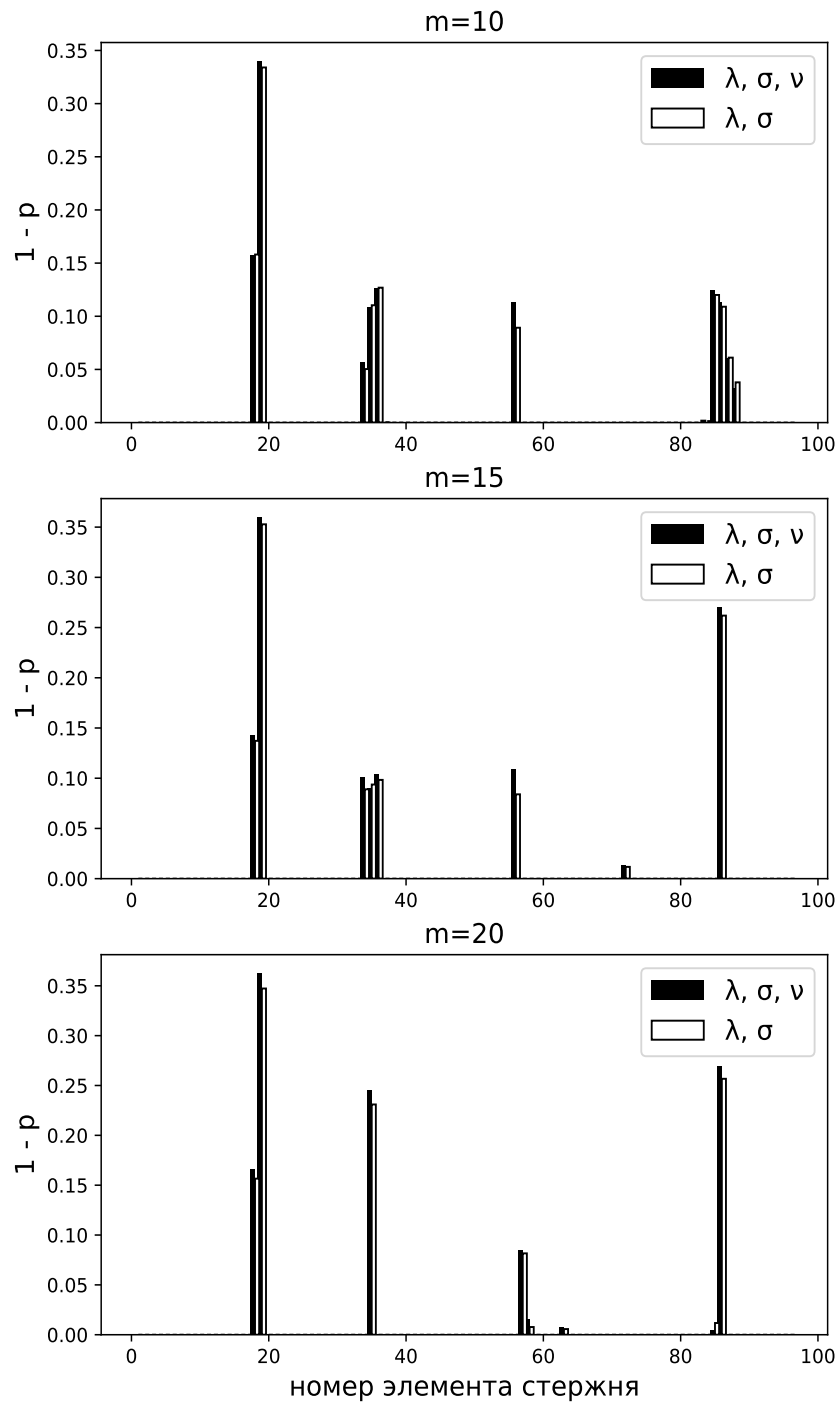


Рис. 2.20: Сравнение результатов идентификации четырех трещин по спектрам λ, σ, ν и λ, σ

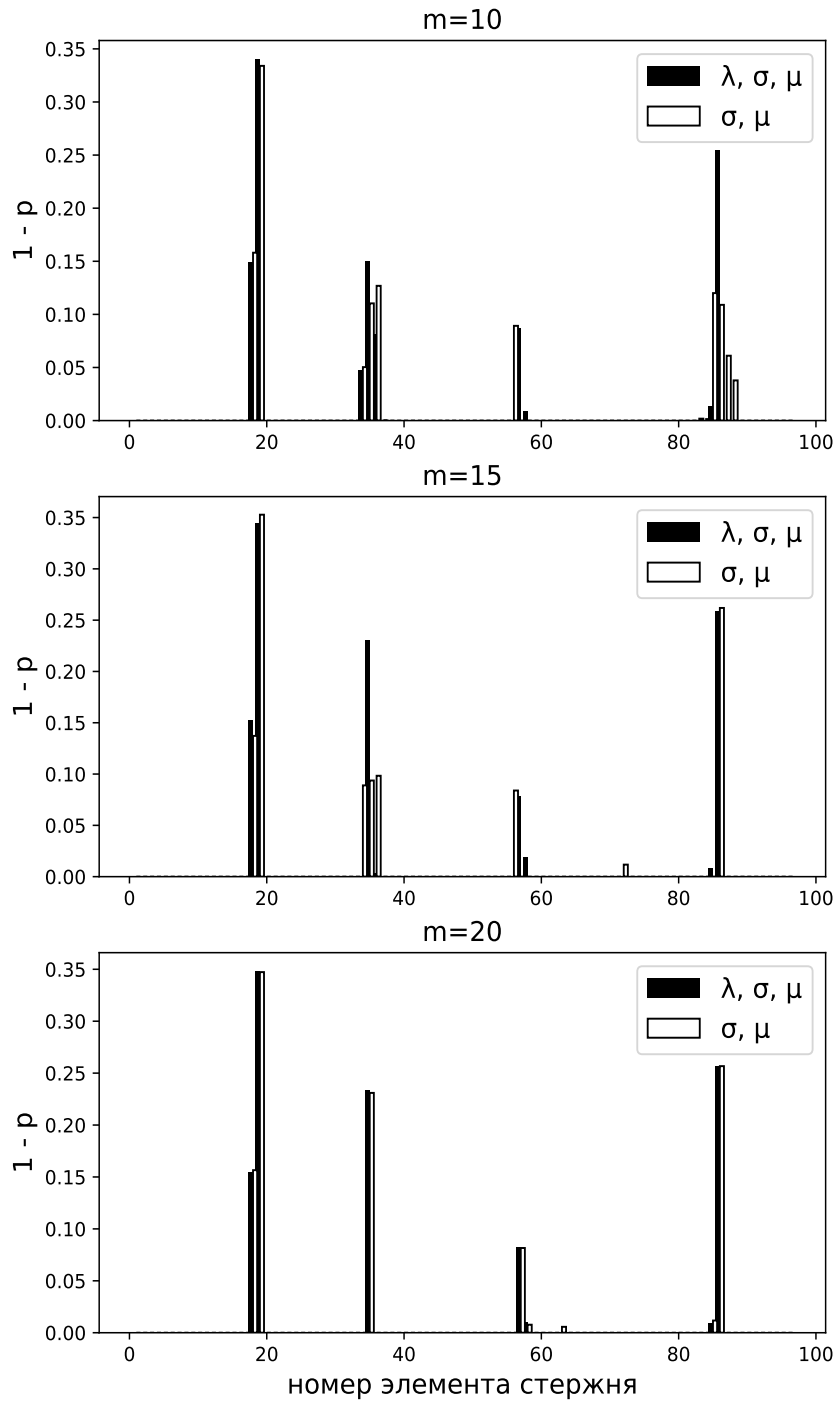


Рис. 2.21: Сравнение результатов идентификации четырех трещин по спектрам λ , σ, μ и σ, μ

Глава 3

Экспериментальная верификация метода идентификации дефектов в стержне по собственным частотам продольных колебаний

В первой главе настоящей диссертации было приведено описание разработанного алгоритма выявления трещиноподобных дефектов в стержнях, использующего в качестве входных данных два спектра собственных частот продольных колебаний. Данный алгоритм позволяет выявлять произвольное число трещин, но для этого необходимо большое количество частот. Ранее, в основном, разрабатывались методы выявления одной-двух трещин, не требовавшие знания большого количества входных данных. В связи с этим возникает вопрос, можно ли использовать разработанный алгоритм для поиска множественных трещин используя большое количество частот, полученных в ходе эксперимента. Чтобы ответить на этот вопрос была собрана экспериментальная установка, позволяющая определять частотный спектр поврежденного стержня. Описанию постановки данного эксперимента, а также результатов обработки измеренных частот и посвящена данная глава.

3.1 Постановка эксперимента

В качестве образца для исследования был выбран прямолинейный стержень круглого сечения из алюминиевого сплава D16 длиной 2006 мм и диаметром 24.8 мм, эскиз которого представлен на (Рис. 3.1). На нем пунктирными линиями показано расположение искусственных дефектов - кольцевых проточек ширины

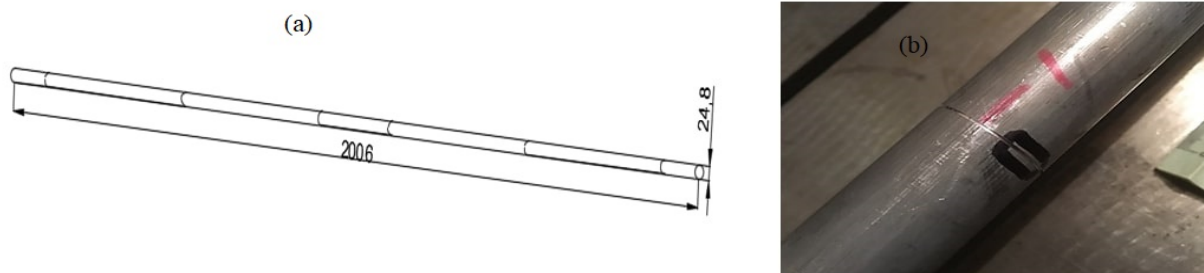


Рис. 3.1: Эскиз стержня с размерами в мм(слева) и фотография одной из проточек(справа)

0.6 мм и различной глубины от 1 до 1.5 мм. Фотография одной из таких проточек показана на (Рис. 3.1).

Провести эксперименты по продольным колебаниям стержня со свободными концами проще, чем эксперименты со стержнем, один конец которого жестко закреплен. Целью экспериментов является проверка адекватности использованной численной модели, описанной в разделе 1.2.1, в достаточно широком диапазоне частот и эффективности разработанного метода идентификации и локализации дефектов. В связи с этим были проведены более простые эксперименты со стержнем со свободными концами и парами дефектов, симметрично расположенными относительно середины стержня. Такое расположение дефектов позволило получить необходимые для работы предложенного алгоритма собственные частоты двух типов для стержня половинной длины. Частоты, соответствующие формам колебаний, симметричным относительно середины оси исходного стержня, равны собственным частотам половины стержня со свободными концами. Частоты, соответствующие формам колебаний, антисимметричным относительно середины оси исходного стержня, в свою очередь эквивалентны собственным частотам половины стержня, один из концов которого жестко закреплен, а другой свободен. В ходе экспериментов сначала измерялся спектр колебаний бездефектного стержня, затем выполнялись проточки и измерялся спектр колебаний стержня с дефектами.

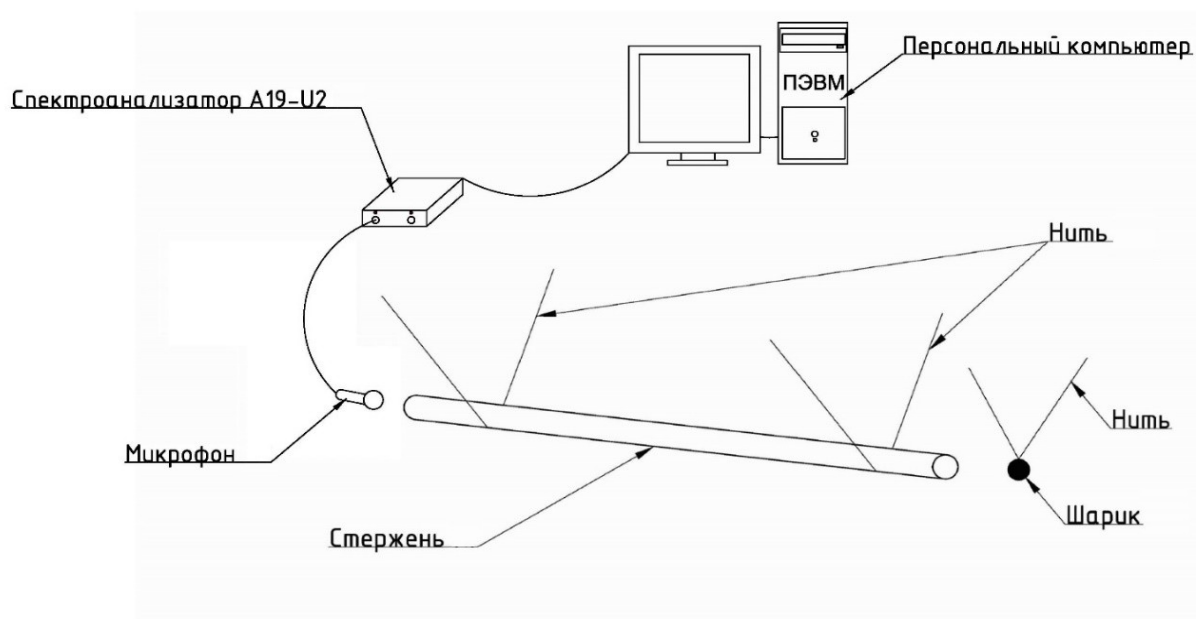


Рис. 3.2: Схема экспериментальной установки

Для возбуждения свободно затухающих продольных колебаний стержня и регистрации их спектра после удара была собрана экспериментальная установка, схема которой представлена на (Рис. 3.2).

Колебания создавались однократным ударом шарика из закаленной стали по одному из концов стержня и регистрировались с помощью направленного микрофона типа BSWA MA231, который имеет однородную частотную характеристику в диапазоне звуковых частот и достаточную осевую чувствительность для выделения дискретных составляющих сигнала в диапазоне до 50 кГц. Микрофон был установлен у противоположного конца стержня. Сигнал с микрофона передавался на спектроанализатор ZETLab A19-U2, а затем на компьютер, где он обрабатывался с помощью программного пакета ZETLab [91]. На (Рис. 3.3) показан фрагмент записи микрофоном многочастотного сигнала звукового излучения от стержня до

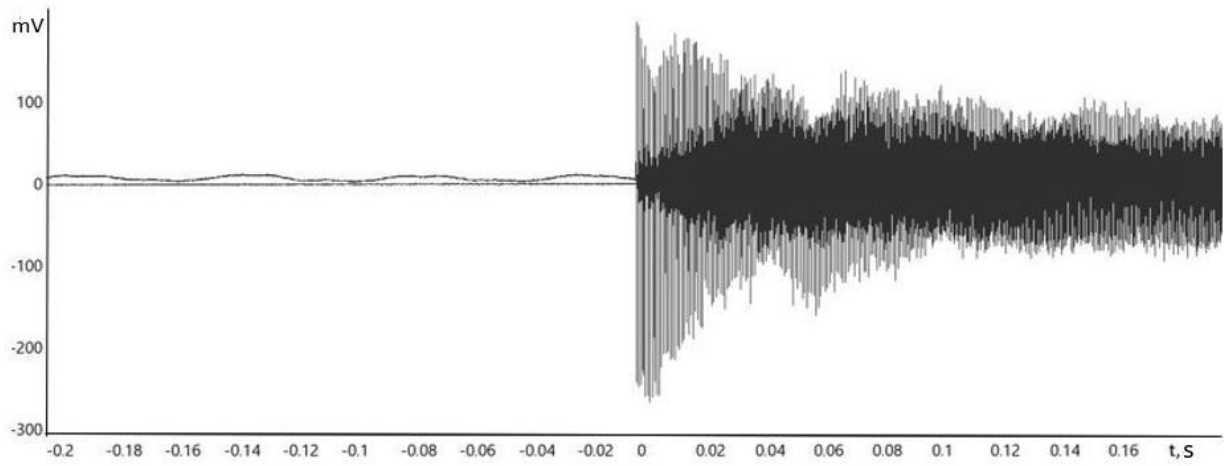


Рис. 3.3: Запись сигнала микрофоном длительностью 0.4 с

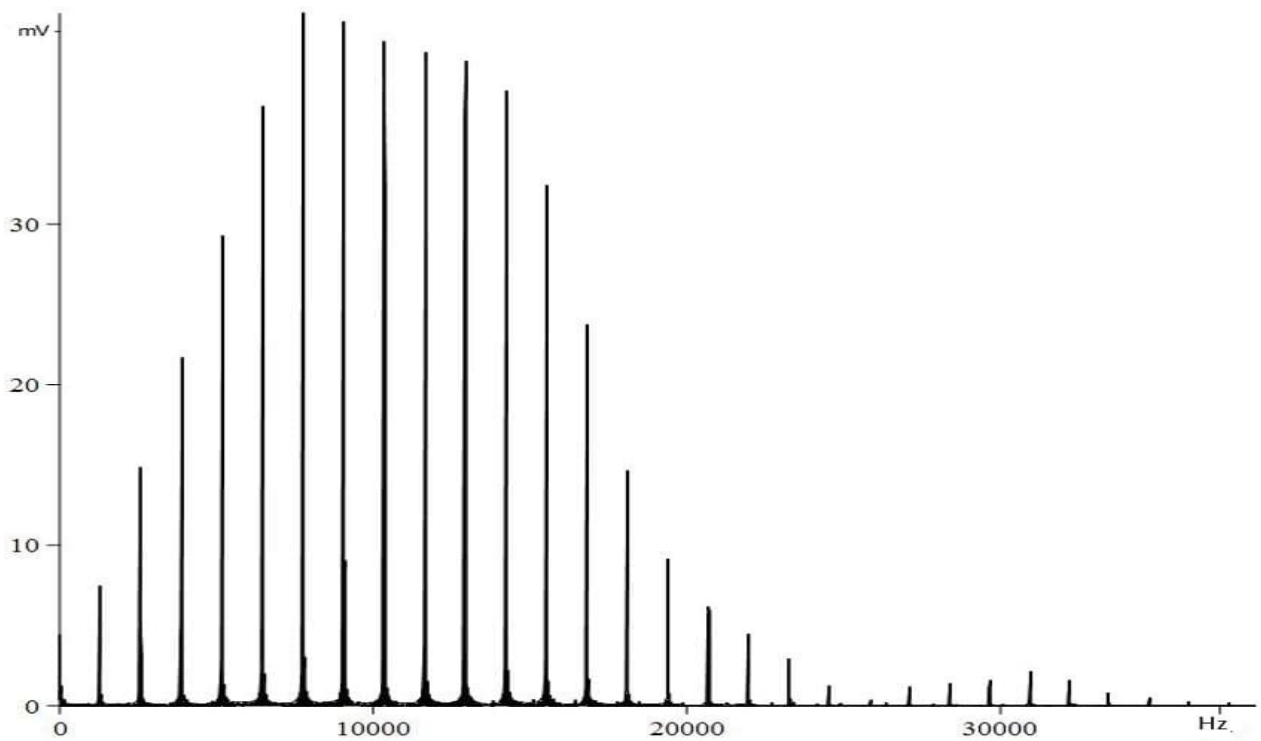


Рис. 3.4: Спектр сигнала в Гц

Таблица 3.1: Собственные частоты неповрежденного стержня

$f_{1-7}(Hz)$	1297.86	2595.97	3893.23	5191.1	6488.47	7785.06	9080.93
$f_{8-14}(Hz)$	10377.11	11672.12	12965.28	14259.93	15551.00	16842.81	18133.02
$f_{15-20}(Hz)$	19422.66	20710.95	21997.13	23282.28	24566.94	25849.37	

и после удара длительностью 0.4 с, а на (Рис. 3.4) - спектр этого сигнала в Гц (амплитуды по ординатам отложены в милливольтках, передаваемых с микрофона и спектроанализатора на компьютер).

Из (Рис. 3.4) видно, что расстояние между пиками в спектре частот колебаний стержня практически одинаково, что характерно для однородного спектра свободных продольных колебаний стержня. Однако, при автоматическом определении частот с помощью спектроанализатора, иногда около основной частоты определялись фантомные частоты.

Появление фантомных частот объясняется появлением дополнительных пиков в окрестности основного максимума, вызванного «эффектом размытия» спектра из-за того, что быстрое преобразование Фурье, используемое в анализаторе спектра, применяется к ограниченному интервалу амплитудно-временной зависимости исходного сигнала. В качестве иллюстрации на (Рис. 3.5) показана окрестность второй собственной частоты. Для повышения точности определения собственных частот продольных колебаний стержня по амплитудно-частотной зависимости стандартная программа, используемая в анализаторе спектра, была дополнена определением абсолютного максимума амплитуды в частотном интервале, включающем только одну собственную частоту, с помощью параболической интерполяции, близкой к методике [28]. Такая процедура в окрестности рассматриваемой частоты обеспечивает ее определение с точностью 0,03 Гц.

По полученным амплитудно-частотным зависимостям было определено до 28

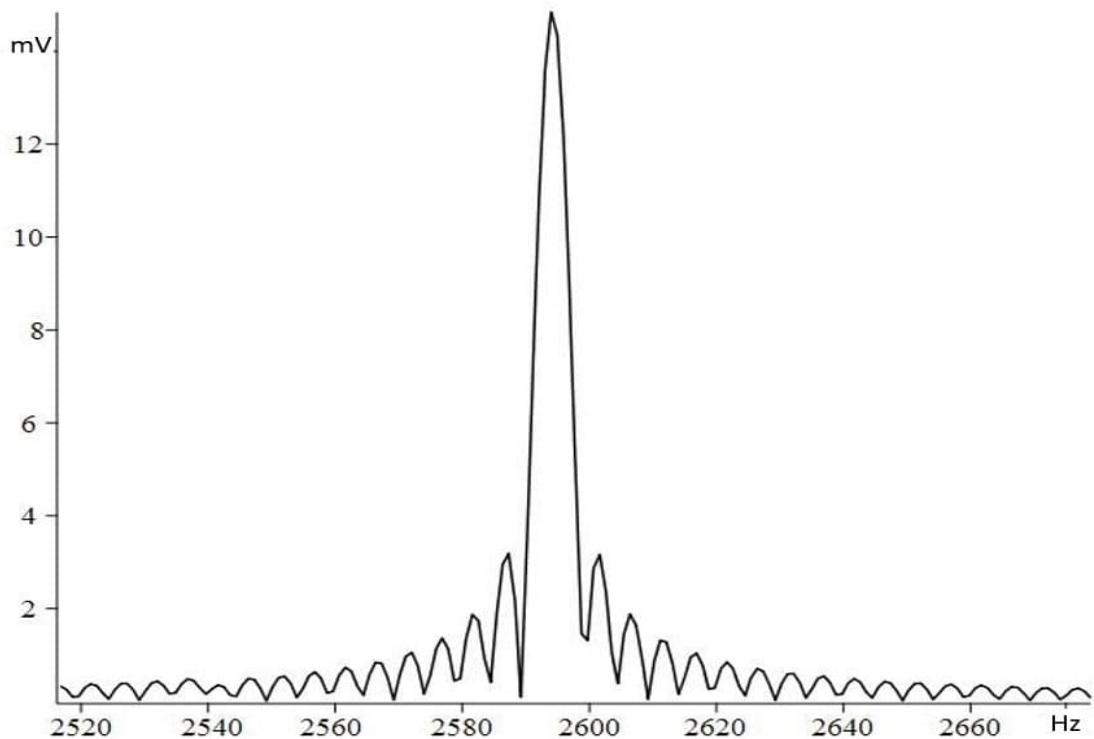


Рис. 3.5: Окрестность второй собственной частоты

собственных частот продольных колебаний выбранного стержня. Сначала определялись собственные частоты неповрежденного стержня. Полученные значения собственных частот $f_i = \omega_i / (2\pi)$ представлены в таблице 3.1. Затем по величине f_2 определялась скорость распространения продольной волны. Оказалось, что эта скорость равна $c = 5207,52$ м/с. Скорость нужна для вычисления собственных значений λ_i и μ_i из f_i .

3.2 Экспериментальные данные и их использование для идентификации повреждений

Сначала протестируем разработанный алгоритм на данных, представленных в таблице 3.1. Собственные частоты из таблицы 3.1 с четными индексами являются собственными частотами стержня половинной длины со свободными кон-

цами. Собственные частоты с нечетными индексами соответствуют собственным частотам стержня половинной длины с граничными условиями закрепленный-свободный. Изначально половинный стержень, состоящий из 80-ти конечных элементов, был разбит на 10 частей ($s = 10$). Далее по нашему алгоритму локализации количество частей было увеличено вдвое ($s = 20$). Эта процедура повторялась трижды. В результате количество частей было доведено до 80, т.е. совпало с числом конечных элементов. Результаты поиска дефектов при таком разбиении половины стержня показаны на (Рис. 3.6). Здесь по оси абсцисс указаны номера элементов. Элементы нумеруются слева направо. Точка 0 на оси x соответствует середине исходного стержня, а последний элемент - его правому концу. По оси ординат отложены значения $1 - p_k$, соответствующие податливостям элементов. Значения податливостей элементов показаны черными столбцами. Высота столбика соответствует значению податливости.

Как показано на (Рис. 3.6), на свободном конце стержня половинной длины обнаружен паразитный всплеск. Вероятно, это следствие того, что согласно данным, представленным в Таблице 3.1, отношение $f_n/(nf_1)$ с ростом n медленно уменьшается, хотя в соответствии с используемой моделью оно должно быть равно единице. В остальной части стержня, как и следовало ожидать, никаких повреждений алгоритм не обнаружил. Графически отличие экспериментально определенных собственных частот от теоретических показано на (Рис. 3.7а). По оси абсцисс отложены порядковые номера собственных частот колебаний стержня со свободными концами. По оси ординат отложены значения $\frac{\lambda_k^* - \lambda_k(\vec{p})}{\lambda_k^*}$, где величины $\lambda_k(\vec{p})$ и λ_k^* были определены в формуле (1.39). Для кривой, отмеченной знаком \times , значения $\lambda_k(\vec{p})$ соответствуют теоретическим значениям для неповрежденного стержня. Для кривой, отмеченной \bullet , значения $\lambda_k(\vec{p})$ получены после процедуры восстановления повреждений.

Зависимость целевой функции от количества итераций представлена на

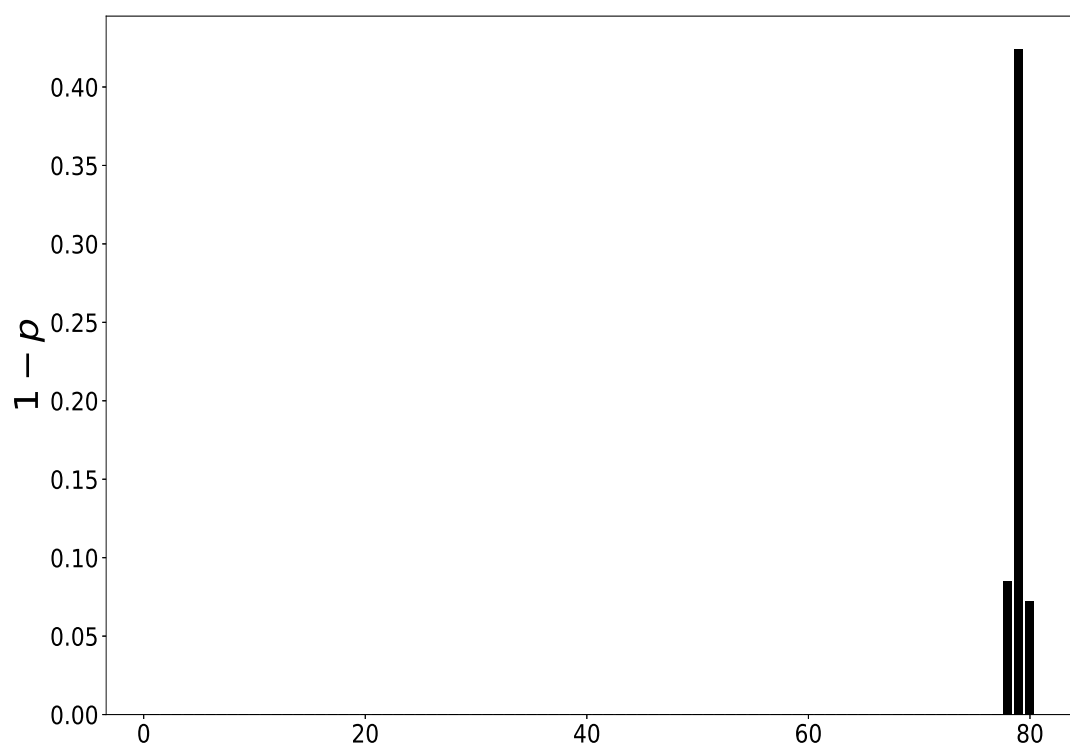


Рис. 3.6: Результат работы алгоритма для неповрежденного стержня

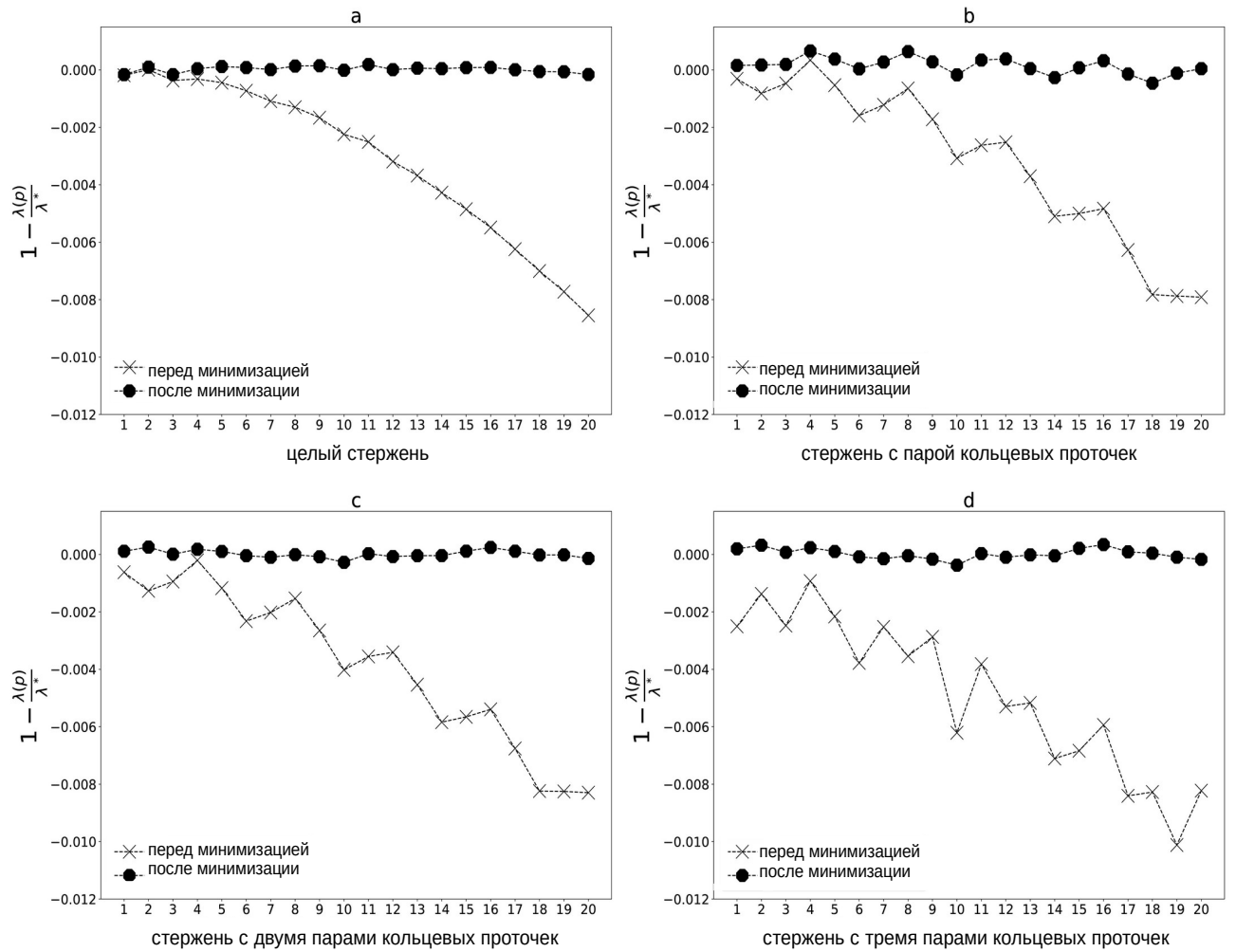


Рис. 3.7: Относительное отклонение экспериментальных собственных частот от вычисляемых в случае целого и поврежденного стержня.

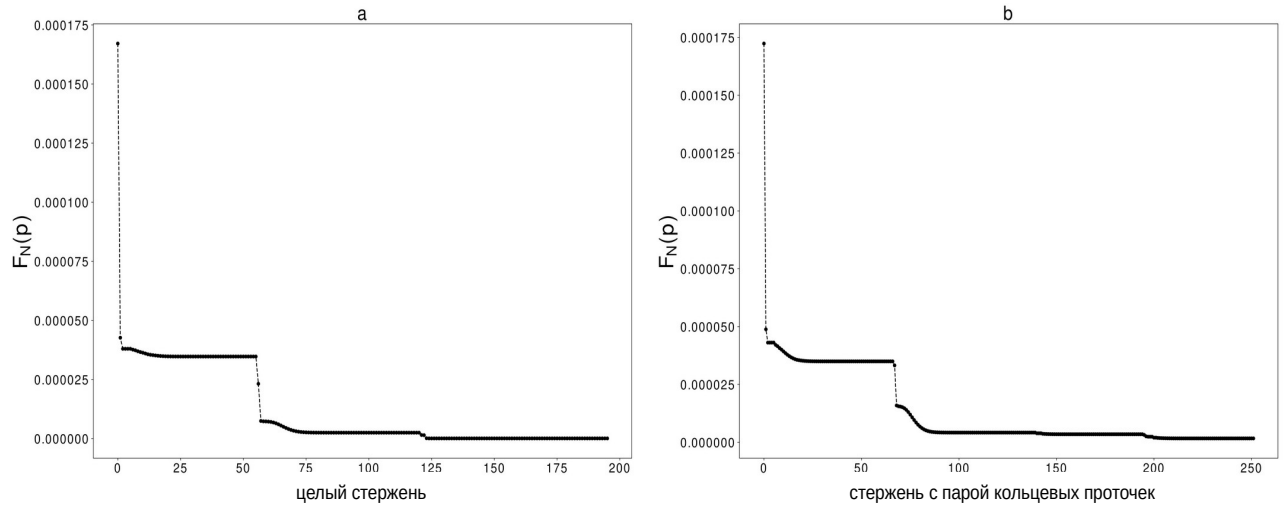


Рис. 3.8: Зависимость целевой функции от номера итерации

(Рис. 3.8а). Скачки на графике функции, показанном на (Рис. 3.8а), соответствуют удвоению числа s интервалов в разбиении (1.56). В случае неповрежденного стержня удвоение количества интервалов в разбиении (1.56) приводит к уменьшению целевой функции из-за появления паразитного всплеска.

На следующем этапе на образец наносили пару кольцевых проточек шириной 0.6 мм и глубиной 1 мм. Проточки расположены симметрично относительно середины стержня на расстоянии 500 мм от концов исходного стержня. Такое расположение дефектов соответствует одной проточке в стержне половинной длины. Собственные частоты исходного стержня с парой проточек представлены в таблице 3.2.

Графически отличие экспериментально определенных собственных частот от теоретических показано на (Рис. 3.7b). Зависимость целевой функции от количества итераций представлена на (Рис. 3.8b). На (Рис. 3.9) показаны результаты восстановления дефекта стержня половинной длины для случаев, когда стержень половинной длины разделен на 20, 40 и 80 участков.

Как видно из рисунка, дефект, расположенный примерно посередине половинного стержня, четко определяется для любого из представленных разбиений.

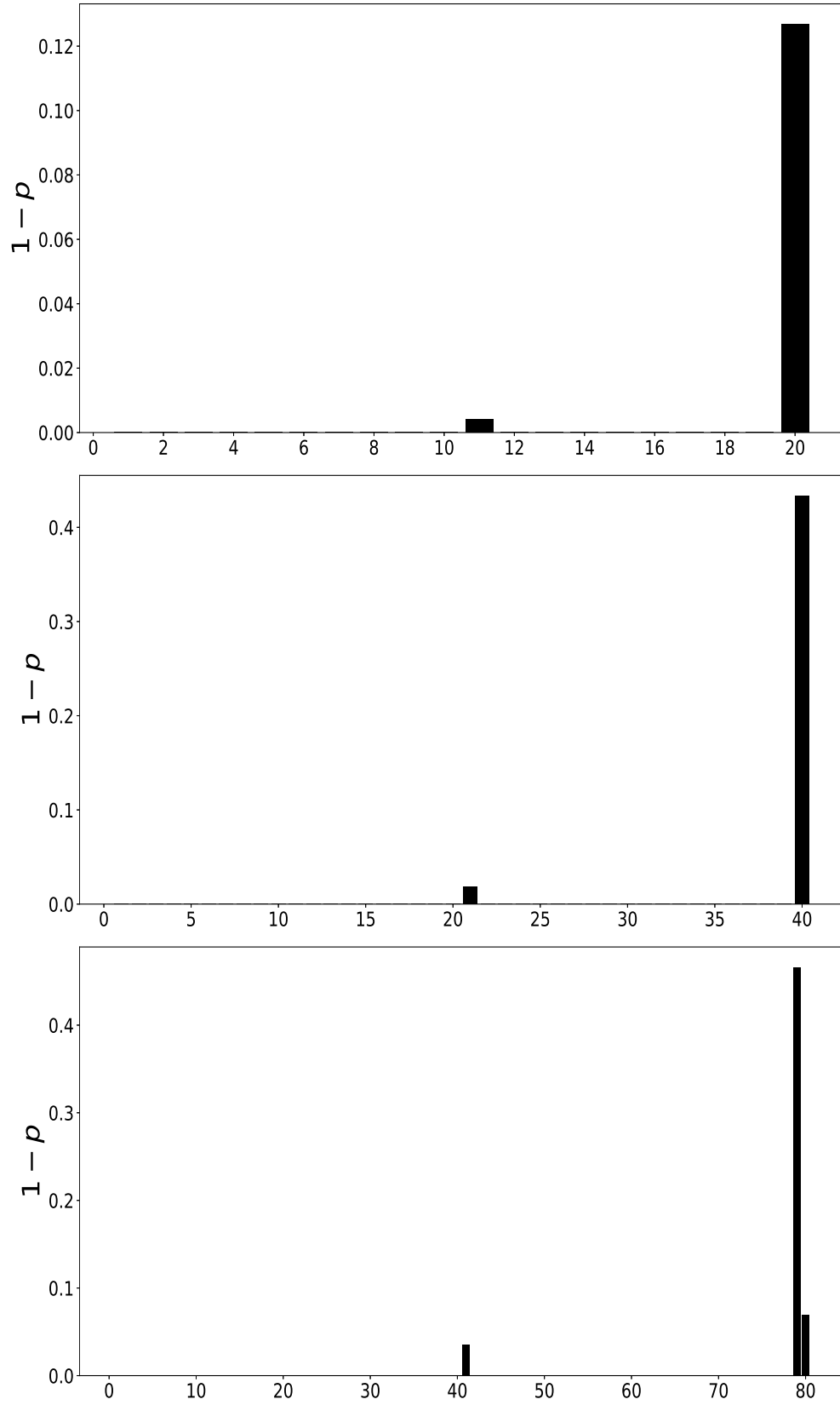


Рис. 3.9: Идентификация одиночного дефекта половинного стержня

Таблица 3.2: Собственные частоты стержня с парой симметричных кольцевых проточек

$f_{1-7}(Hz)$	1297.78	2594.90	3893.03	5192.81	6488.18	7781.71	9080.34
$f_{8-14}(Hz)$	10380.51	11671.76	12959.86	14259.11	15556.23	16842.64	18125.61
$f_{15-21}(Hz)$	19421.21	20717.67	21996.85	23272.82	24565.13	25857.51	27131.27
$f_{21-28}(Hz)$	28396.33	29682.21	30969.38	32232.40	33488.83	34766.42	36046.22

Таблица 3.3: Собственные частоты стержня с двумя парами симметричных кольцевых проточек

$f_{1-7}(Hz)$	1297.58	2594.32	3892.11	5191.39	6486.1	7778.86	9076.7
$f_{8-14}(Hz)$	10375.9	11666.4	12953.8	14252.5	15549.3	16835.6	18118.9
$f_{15-21}(Hz)$	19414.9	20711.9	21996.85	23268.0	24560.5	25852.6	27125.8
$f_{21-28}(Hz)$	28390.5	29675.3	30969.38	32221.8	33476.5	34752.7	36031.0

Кроме того, как и в случае неповрежденного стержня, у свободного конца стержня обнаруживается паразитный всплеск. Отметим, что податливость элемента, содержащего дефект, увеличивается с уменьшением длины элемента.

На следующем этапе эксперимента к первой паре проточек была добавлена вторая пара шириной 0.6 мм и глубиной 1 мм, расположенных на расстоянии 100 мм от концов исходного стержня. Итак, в этом эксперименте у нас есть два дефекта на каждой половине стержня. Экспериментально полученные значения собственных частот продольных колебаний стержня с двумя парами проточек представлены в таблице 3.3. Отличие экспериментально определенных собственных частот от теоретических показано на (Рис. 3.7с).

Использование экспериментально полученных собственных частот для исход-

ного стержня позволило идентифицировать дефекты в правой половине стержня. На (Рис. 3.10) представлены результаты, соответствующие разбиению только на 80 элементов, поскольку характер изменения результатов при разделении на 20, 40 и 80 элементов примерно соответствует изменению результатов, представленных для одиночной трещины (Рис. 3.9).

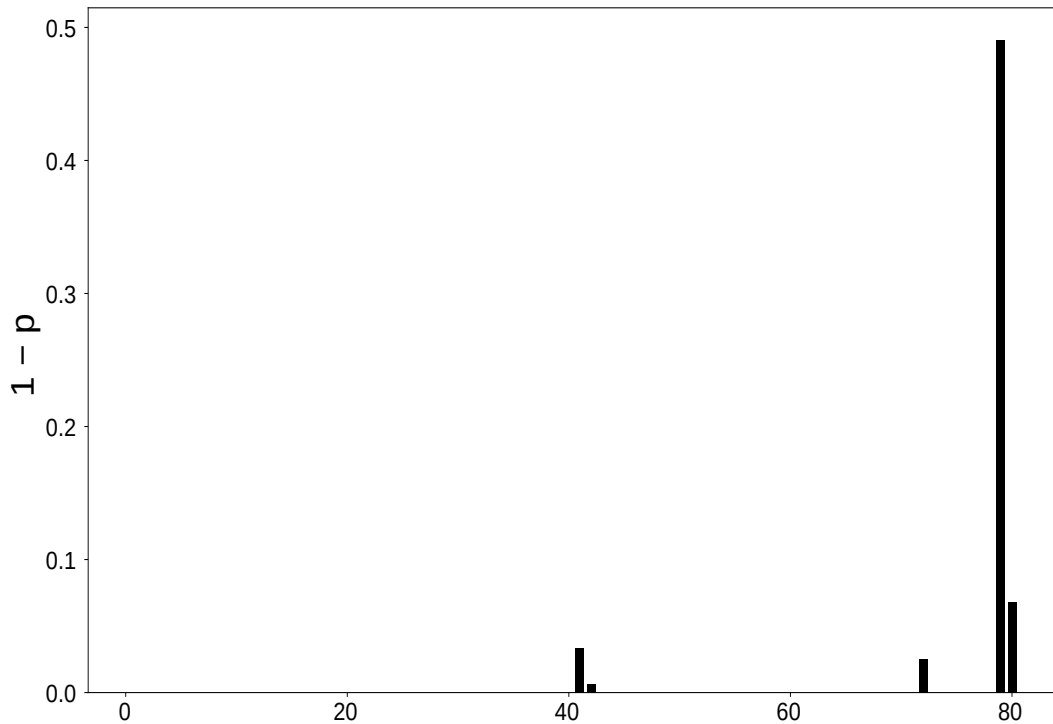


Рис. 3.10: Идентификация двух дефектов половинного стержня

Как показано на (Рис. 3.10), несмотря на то, что второй дефект находится рядом с паразитным всплеском, расположение обоих дефектов устанавливается с достаточно высокой точностью. В то же время можно отметить некоторую разницу в значениях податливости поврежденных элементов, хотя глубина прорезанных проточек одинакова, а значит, теоретически податливость поврежденных элементов также должна быть одинаковой.

Следующий эксперимент был проведен с тремя парами кольцевых проточек. Третья пара дефектов наносилась на расстоянии 900 мм от концов исходного

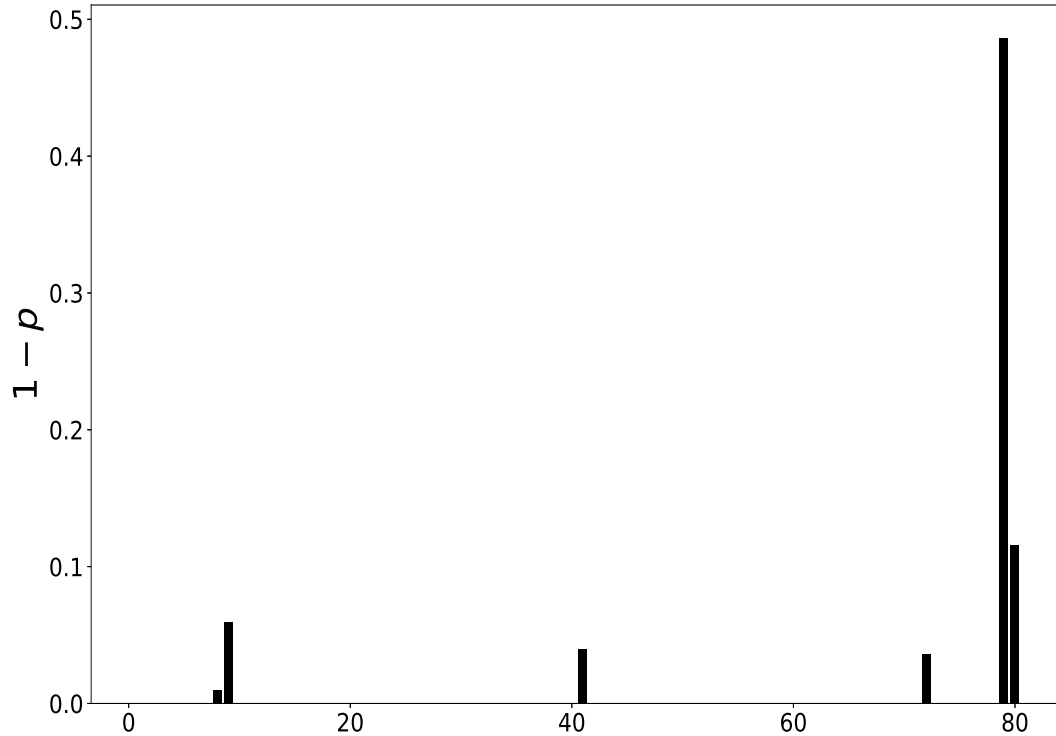


Рис. 3.11: Идентификация трех дефектов половинного стержня

стержня. Ширина и глубина этих проточек такие же, как у первой и второй пары проточек. Соответствующие значения собственных частот представлены в таблице 3.4. Разница между экспериментальными и теоретическими значениями собственных частот показана на (Рис. 3.7d). Обработка экспериментальных данных привела к результатам, представленным на (Рис. 3.11).

На (Рис. 3.11) видно, что расположение всех трех дефектов установлено с достаточно высокой точностью. При определении податливости поврежденных элементов возникает некоторая погрешность, так как податливость элементов несколько различается, несмотря на одинаковую глубину проточек.

В последнем эксперименте первая пара кольцевых проточек была углублена до 1,5 мм. Соответствующие значения собственных частот представлены в

Таблица 3.4: Собственные частоты стержня с тремя парами симметричных кольцевых проточек

$f_{1-7}(Hz)$	1296.36	2594.18	3889.13	5189.52	6482.91	7773.22	9074.42
$f_{8-14}(Hz)$	10365.5	11665.1	12939.7	14250.6	15534.7	16830.3	18107.5
$f_{15-21}(Hz)$	19403.5	20706.3	21973.5	23267.6	24537.8	25853.5	27102.7
$f_{21-28}(Hz)$	28387.3	29656.0	30947.3	32209.3	33450.8	34746.6	35995.0

таблице 3.5. Результаты обработки экспериментальных данных представлены на (Рис. 3.12).

Таблица 3.5: Собственные частоты стержня с тремя парами симметричных кольцевых проточек различной глубины

$f_{1-7}(Hz)$	1295.693	2591.787	3887.05	5188.642	6479.374	7765.925	9069.323
$f_{8-14}(Hz)$	10363.74	11658.79	12927.63	14242.55	15532.19	16821.34	18090.56
$f_{15-21}(Hz)$	19392.25	20702.74	21962.14	23246.2	24523.47	25849.16	27088.93
$f_{21-28}(Hz)$	28361.3	29638.49	30942.16	32193.41	33420.63	34726.27	35988.73

Здесь можно отметить, что по сравнению с (Рис. 3.11) соотношение высот столбцов, указывающих степень податливости элементов, изменилось. Высота столбика, соответствующая центральному дефекту, после его углубления стала максимальной. Таким образом, с помощью разработанного алгоритма можно не только точно определить положение дефектов, но и приближенно оценить их глубину.

Результаты, включенные в эту главу опубликованы в работе [75].

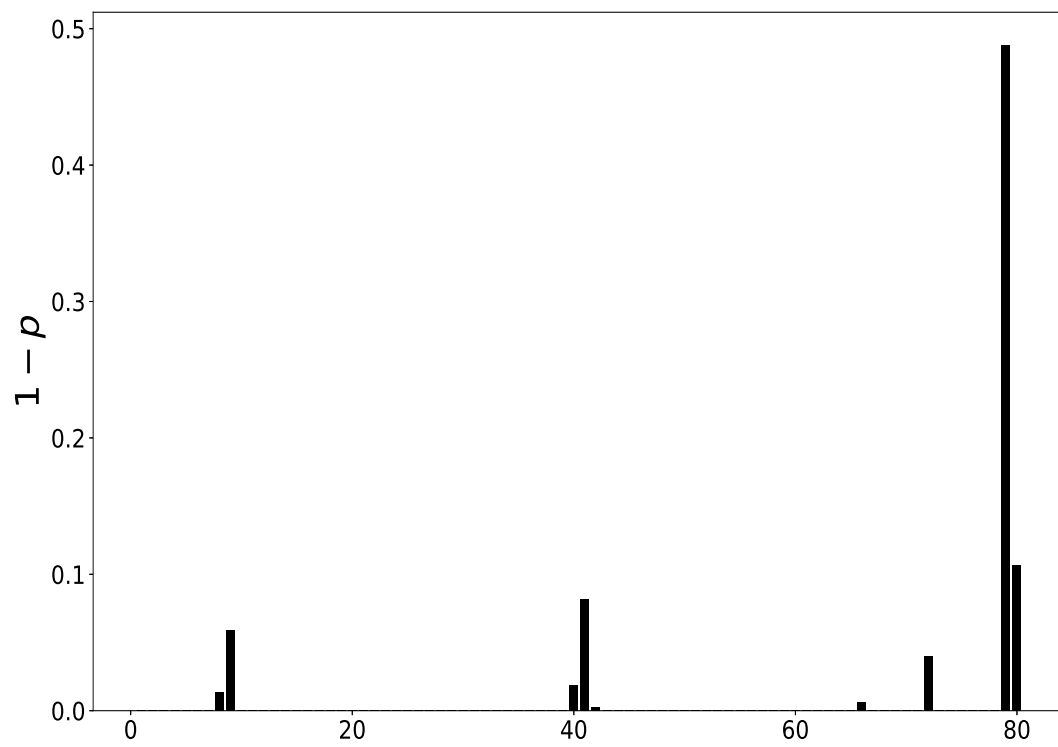


Рис. 3.12: Идентификация трех дефектов различной глубины половинного стержня

Заключение

Основные результаты настоящей диссертационной работы заключаются в следующем:

1. На основе конечно-элементной модели стержня переменной жесткости разработан устойчивый численный алгоритм, позволяющий однозначно идентифицировать поперечные хорошо локализованные дефекты в стержне по двум спектрам собственных частот продольных колебаний. Количество таких дефектов, а также их размеры при этом могут быть произвольными.
2. Разработанный численный алгоритм адаптирован для случая поперечных колебаний стержня. В результате, модифицированный алгоритм позволяет идентифицировать произвольное количество поперечных хорошо локализованных дефектов в стержне по трем спектрам собственных частот поперечных колебаний. Размеры выявляемых дефектов также могут быть произвольными.
3. Для случая поперечных колебаний сделано предположение о том, что для однозначного обнаружения дефектов достаточно двух спектров. Для проверки этой гипотезы разработана модификация исходного численного алгоритма. Полученные результаты дают основание полагать, что высказанное предположение справедливо.
4. Для случая продольных колебаний работа и устойчивость алгоритма протестированы на частотах, полученных в ходе эксперимента. Обработка экспериментальных данных показала, что модель, на которой основан алгоритм, достаточно хорошо описывает продольные колебания стержня с локальными повреждениями в широком диапазоне частот. С помощью разработанного

алгоритма можно обнаружить и локализовать существующие дефекты даже относительно небольшого размера.

Список литературы

1. *Aktan A., Catbas F., Grimmelman K.* [и др.]. Issues in infrastructure health monitoring for management // Journal of Engineering Mechanics. — 2000.
2. *Aktan A., Farhey D., Helmicki A.* [и др.]. Structural identification for condition assessment: experimental arts // Journal of Structural Engineering. — 1997.
3. *Alaylioglu H., Alaylioglu A.* Finite element and experimental bases of a practical bridge management and maintenance system // Computers and Structures. — 1999.
4. *Balis Crema L., Castellani A., Coppotelli G.* Generalization of Non Destructive Damage Evaluation Using Modal Parameters // Proc. of the 13th International Modal Analysis Conference. — 1995. — с. 428—431.
5. *Barcilon V.* Inverse problem for a vibrating beam // J. Appl. Math. Phys. — 1976. — т. 27. — с. 347—358.
6. *Barcilon V.* Inverse problem for the vibrating beam in the free-clamped configuration // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. — 1982. — т. 304. — с. 211—251. — DOI: 10.1098/rsta.1982.0012.
7. *Barcilon V.* On the solution of the inverse problem with amplitude and natural frequency data, part I // Phys. Earth Planet. In. — 1976. — т. 13. — с. 1—8. — DOI: 10.1016/0031-9201(76)90100-X.
8. *Barcilon V.* Sufficient conditions for the solution of the inverse problem for a vibrating beam // Inverse Probl. — 1987. — т. 3. — с. 181—193.
9. *Beals R., Sattinger D. H., Szmigielski J.* Multipoleakons and the Classical Moment Problem // Advances in Mathematics. — 2000. — т. 154, № 2. — с. 229—257. — DOI: 10.1006/aima.1999.1883.

10. *Beals R., Sattinger D. H., Szmigielski J.* The string density problem and the Camassa-Holm equation // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2007. — т. 365, № 1858. — с. 2299—2312. — DOI: 10.1098/rsta.2007.2010.
11. *Biscontin G., Morassi A., Wendel P.* Asymptotic separation of the spectrum in notched rods // Journal of Vibration and Control. — 1998. — т. 4. — с. 237—251. — DOI: 10.1177/107754639800400302.
12. *Carden E.* Vibration Based Condition Monitoring: A Review // Structural Health Monitoring-an International Journal - STRUCT HEALTH MONIT. — 2004. — дек. — т. 3. — с. 355—377. — DOI: 10.1177/1475921704047500.
13. *Catbas F., Aktan A.* Condition and damage assessment: issues and some promising indices // Journal of Structural Engineering. — 2002.
14. *Chance J., Tomlinson G., K. W.* A Simplified Approach to the Numerical and Experimental Modeling of the Dynamics of a Cracked Beam // Proc. of the 12th International Modal Analysis Conference / под ред. editor. — 1994.
15. *Chaudhari T., Maiti S.* Crack Detection in Geometrically Segmented Beams // Damage Assessment of Structures, Proceedings of the International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS 99). — 1999. — с. 343—353.
16. *Choy F., Liang R., Xu P.* Fault Identification of Beams on Elastic Foundation // Computers and Geotechnics. — 1995. — т. 17. — с. 157—176.
17. *Dilena M., Dell'Oste M. F., Morassi A.* Crack identification in rods and beams under uncertain boundary conditions // International Journal of Mechanical Sciences. — 2017. — т. 133. — с. 651—661. — DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.09.017.

18. *Dilena M., Morassi A.* The use of antiresonances for crack detection in beams // J. Sound Vib. — 2004. — т. 276. — с. 195—214. — DOI: 10.1016/j.jsv.2003.07.021.
19. *Dimarogonas A. D.* Vibration of cracked structures: A state of the art review // Engineering Fracture Mechanics. — 1996. — т. 55, вып. 8. — с. 831—857. — DOI: 10.1016/0013-7944(94)00175-8.
20. *Doebling S., Farrar C., Prime M.* [и др.]. Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems From Changes in their Vibration Characteristics: A Literature Review // Technical Report No. LA-13070-MS. — 1996. — т. 30. — DOI: 10.2172/249299.
21. *Dong C., Zhang P., Feng W.* [и др.]. The Sensitivity Study of the Modal Parameters of a Cracked Beam // Proc. of the 12th International Modal Analysis Conference. — 1994. — с. 98—104.
22. *Ettouney M., Daddazio R., Hapij A.* [и др.]. Health monitoring of complex structures // Smart Structures and Materials 1998: Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies. т. 3326. — SPIE, 1998. — с. 368—379. — DOI: 10.1117/12.310651.
23. *Fan W., Qiao P.* Vibration-based damage identification methods: a review and comparative study // Struct. Hlth. Monit. — 2011. — т. 10, вып. 1. — с. 83—111. — DOI: 10.1177/1475921710365419.
24. *Farrar C. R., Doebling S. W.* Damage Detection and Evaluation II // Modal Analysis and Testing / под ред. J. M. M. Silva, N. M. M. Maia. — Dordrecht : Springer Netherlands, 1999. — с. 345—378. — DOI: 10.1007/978-94-011-4503-9_17.

25. *Fernandez-Saez J., Morassi A., Pressacco M.* [и др.]. Unique determination of a single crack in a uniform simply supported beam in bending vibration // J. Sound Vib. — 2016. — т. 371. — с. 94—109. — DOI: 10.1016/j.jsv.2016.02.010.
26. *Fox R., Kapoor M.* Rates of change eigenvalues and eigenvectors // AIAA Journal. — 1968. — т. 6, № 12. — с. 2426—2429.
27. *Frýba L., Pirner M.* Load tests and modal analysis of bridges // Engineering Structures. — 2001.
28. *Gasior M., Gonzalez J. L.* Improving FFT frequency measurement resolution by parabolic and Gaussian spectrum interpolation // Proc. AIP Conf. т. 732. — 2004. — с. 276—285.
29. *Gladwell G.* The inverse problem for the Euler-Bernoulli beam // Proc. Roy. Soc. Lond. — 1986. — т. 407. — с. 199—218.
30. *Gladwell G.* The inverse problem for the vibrating beam // Proc. Roy. Soc. Lond. — 1984. — т. 393. — с. 277—295.
31. *Gladwell G., England A., Wang D.* Examples of reconstruction of an Euler-Bernoulli beam from spectral data // J. Sound Vib. — 1987. — т. 119. — с. 81—94.
32. *Grafe H.* Model updating of large structural dynamics models using measured response functions : Ph.D. Dissertation / Grafe H. — Imperial College of Science, Technology, Medicine, University of London, 1998.
33. *Gudmundson P.* Eigenfrequency Changes of Structures Due to Cracks, Notches, or other Geometrical Changes // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1982. — т. 30, вып. 5. — с. 339—353.

34. *Hai T., Khiem N., Lien P.* Characteristic equation for antiresonant frequencies of multiple cracked bars and application for crack detection // *Nondestr. Test. Eval.* — 2019. — т. 34. — с. 299—323. — DOI: 10.1080/10589759.2019.1605604.
35. *Ho Y., Ewins D.* Numerical Evaluation of the Damage Index // *Structural Health Monitoring* 2000. — 1999. — с. 995—1011.
36. *Ho Y., Ewins D.* On the Structural Damage Identification with Mode Shapes // *European COST F3 Conference on System Identification and Structural Health Monitoring.* — 2000. — с. 677—686.
37. *Hou R., Xia Y.* Review on the new development of vibration-based damage identification for civil engineering structures: 2010–2019 // *Journal of Sound and Vibration.* — 2021. — т. 491, № 115741. — DOI: 10.1016/0013-7944(94)00175-8.
38. *Hu J., Liang R.* An integrated approach to detection of cracks using vibration characteristics // *Journal of the Franklin Institute.* — 1993. — т. 330, вып. 5. — с. 841—853.
39. *Ismail F., Ibrahim A., Martin H.* Identification of Fatigue Cracks from Vibration Testing // *Journal of Sound and Vibration.* — 1990. — т. 140. — с. 305—317.
40. *Kam T., Lee T.* Detection of Cracks in Structures Using Modal Test Data // *Engineering Fracture Mechanics.* — 1992. — т. 42, вып. 2. — с. 381—387. — DOI: 10.1016/0013-7944(92)90227-6.
41. *Kanzow C., Yamashita N., Fukushima M.* Levenberg–Marquardt methods with strong local convergence properties for solving nonlinear equations with convex constraints // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* — 2004. — т. 172, № 2. — с. 375—397. — DOI: 10.1016/j.cam.2004.02.013.

42. *Khiem N. T., Toan L. K.* A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements of natural frequencies // J. Sound Vib. — 2014. — т. 333. — с. 4084—4103. — DOI: 10.1016/j.jsv.2014.04.031.
43. *Khiem N. T., Tran T. H.* A procedure for multiple crack identification in beam-like structures from natural vibration mode // Journal of Vibration and Control. — 2014. — т. 20, № 9. — с. 1417—1427. — DOI: 10.1177/1077546312470478.
44. *Khiem N., Lien T.* A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam // Journal of Sound and Vibration. — 2001. — т. 245, № 4. — с. 737—751. — DOI: 10.1006/jsvi.2001.3585.
45. *Khiem N., Tran T., Ninh V.* A closed-form solution to the problem of crack identification for a multistep beam on Rayleigh quotient // Int. J. Solid Struct. — 2018. — т. 150. — с. 154—165. — DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.06.010.
46. *Lampton M.* Damping-undamping strategies for Levenberg-Marquardt nonlinear least-squares method // Computers in Physics. — 1997. — т. 11, № 1. — с. 110—115. — DOI: 10.1063/1.168600.
47. *Lee J.* Identification of a crack in a beam by the boundary element method // J. Mech. Sci. Technol. — 2010. — т. 24. — с. 801—804. — DOI: 10.1007/s12206-010-0119-8.
48. *Lee J.* Identification of multiple cracks in a beam using natural frequencies // J. Sound Vib. — 2009. — т. 320. — с. 482—490. — DOI: 10.1016/j.jsv.2008.10.033.
49. *Levenberg K.* A method for the solution of certain non-linear problems in least squares // Quarterly of Applied Mathematics. — 1944. — т. 2, № 2. — с. 164—168.

50. *Lourakis M. I. A.* A brief description of the Levenberg- Marquardt algorithm implemented by levmar // Foundation of Research and Technology. — 2005. — т. 4, № 1. — с. 1—6.
51. *Marquardt D. W.* An algorithm for the least-squares estimation of nonlinear parameters // SIAM Journal of Applied Mathematics. — 1963. — т. 11, № 2. — с. 431—441.
52. *Meneghetti U., Maggiore A.* Crack Detection by Sensitivity Analysis // Proc. of the 12th International Modal Analysis Conference. — 1994. — с. 1292—1298.
53. *Morassi A.* A uniqueness result on crack location in vibrating rods // Inverse Problems in Engineering. — 1997. — т. 4, № 3. — с. 231—254. — DOI: 10.1080/174159797088027642.
54. *Morassi A.* Damage Detection and Fourier Coefficients // Structural Damage Assessment Using Advanced Signal Processing Procedures : Proceedings of DAMAS '97. — 1997. — с. 387—397.
55. *Morassi A.* Identification of a crack in a rod based on changes in a pair of natural frequencies // J. Sound Vib. — 2001. — т. 242. — с. 577—596. — DOI: 10.1006/jsvi.2000.3380.
56. *Morassi A., Rollo M.* Identification of two cracks in a simply supported beam from minimal frequency measurements // J. Vib. Contr. — 2001. — т. 7. — с. 729—739. — DOI: 10.1177/107754630100700507.
57. *Narkis Y.* Identification of Crack Location in Vibrating Simply Supported Beams // Journal of Sound and Vibration. — 1994. — т. 172, вып. 4. — с. 549—558.
58. *Ostachowicz W., Krawczuk M.* Analysis of the effects of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam // Journal of Sound and Vibration. — 1991. — т. 150, вып. 2. — с. 191—201.

59. *Pandey A., M. B., M.M. S.* Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes // Journal of Sound and Vibration. — 1991.
60. *Patil D., Maiti S.* Detection of multiple cracks using frequency measurements // Eng. Fract. Mech. — 2003. — т. 70. — с. 1553—1572. — DOI: 10.1016/S0013-7944(02)00121-2.
61. *Plaut R. H., Huseyin K.* Derivatives of eigenvalues and eigenvectors in non-self-adjoint systems. // AIAA Journal. — 1973. — т. 11. — с. 250—251.
62. *Pujol J.* The solution of nonlinear inverse problems and the Levenberg-Marquardt method // Geophysics. — 2007. — т. 72, № 4. — W1—W16. — DOI: 10.1190/1.2732552.
63. *Rizos P., Aspragathos N., Dimarogonas A.* Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes // Journal of Sound and Vibration. — 1990. — т. 138, вып. 3. — с. 381—388. — DOI: 10.1016/0022-460X(90)90593-0.
64. *Rubio L., Fernandez-Saez J., Morassi A.* Identification of an open crack in a beam with variable profile by two resonant frequencies // J. Vib. Contr. — 2018. — т. 24. — с. 839—859. — DOI: 10.1177/1077546316671483.
65. *Rubio L., Fernandez-Saez J., Morassi A.* Identification of two cracks in a rod by minimal resonant and antiresonant frequency data // Mech. Syst. Signal Process. — 2015. — т. 60/61. — с. 1—13. — DOI: 10.1016/j.ymsp.2015.01.025.
66. *Rubio L., Fernandez-Saez J., Morassi A.* Identification of two cracks with different severity in beams and rods from minimal frequency data // J. Vib. Contr. — 2016. — т. 22. — с. 3102—3117. — DOI: 10.1177/1077546314557690.

67. *Rubio L., Fernandez-Saez J., Morassi A.* The full nonlinear crack detection problem in uniform vibrating rods // *Journal of Sound and Vibration*. — 2015. — т. 339. — с. 99—111. — DOI: 10.1016/j.jsv.2014.11.011.
68. *Rucevskis S., Sumbatyan M., Akishin P.* [и др.]. Tikhonov's regularization approach in mode shape curvature analysis applied to damage detection // *Mechanics Research Communications*. — 2015. — т. 65. — с. 9—16.
69. *Rucevskis S., Wesolowski M.* Identification of damage in a beam structure by using mode shape curvature squares // *Shock and Vibration*. — 2010. — т. 17, ВЫП. 4/5. — с. 601—610.
70. *Ruotolo R., Surace C.* Damage Assessment of Multi-Cracked Beams Using Combinatorial Optimisation // *Structural Damage Assessment Using Advanced Signal Processing Procedures : Proceedings of DAMAS '97*. — 1997. — с. 77—86.
71. *Ruotolo R., Surace C.* Damage Assessment of Multiple Cracked Beams: Results and Experimental Validation // *Journal of Sound and Vibration*. — 1997. — т. 206, ВЫП. 4. — с. 567—588. — DOI: 10.1006/jsvi.1997.1109.
72. *Ruotolo R., Surace C.* Natural frequencies of a bar with multiple cracks // *Journal of Sound and Vibration*. — 2004. — т. 272, № 1. — с. 301—316. — DOI: 10.1016/S0022-460X(03)00761-2.
73. *Sarvi F., Shojaee S., Torkzadeh P.* Damage identification of trusses by finite element model updating using an enhanced Levenberg-Marquardt algorithm // *International Journal of Optimization in Civil Engineering*. — 2014. — т. 4, № 2. — с. 207—231.
74. *Shifrin E., Ruotolo R.* Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks // *Journal of Sound and Vibration*. — 1999. — т. 222, № 3. — с. 409—423. — DOI: 10.1006/jsvi.1998.2083.

75. *Shifrin E. I., Popov A. L., Lebedev I. M.* [и др.]. Numerical and experimental verification of a method of identification of localized damages in a rod by natural frequencies of longitudinal vibration // *Acta Mechanica*. — Germany, 2021. — т. 232, № 5. — с. 1797—1808. — DOI: 10.1007/s00707-020-02919-w.
76. *Shifrin E.* Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies // *Mech. Syst. Signal Process.* — 2016. — т. 70/71. — с. 613—624. — DOI: 10.1016/j.ymsp.2015.09.023.
77. *Shifrin E.* Inverse spectral problem for a non-uniform rod with multiple cracks // *Mech. Syst. Signal Process.* — 2017. — т. 96. — с. 348—365. — DOI: 10.1016/j.ymsp.2017.04.029.
78. *Shifrin E.* Inverse spectral problem for a rod with multiple cracks // *Mech. Syst. Signal Process.* — 2015. — т. 56/57. — с. 181—196. — DOI: 10.1016/j.ymsp.2014.11.004.
79. *Shifrin E., Lebedev I.* Identification of multiple cracks in a beam by natural frequencies // *European Journal of Mechanics, A/Solids*. — 2020. — т. 84. — с. 104076. — DOI: 10.1016/j.euromechsol.2020.104076.
80. *Silva J., Gomes A.* Crack Identification of Simple Structural Elements Through the use of Natural Frequency Variations: The Inverse Problem // *Proc. of the 12th International Modal Analysis Conference*. — 1994. — с. 1728—1735.
81. *Singh K.* Transcendental inverse eigenvalue problems in damage parameter estimation // *Mech. Syst. Signal Process.* — 2009. — т. 23. — с. 1870—1883. — DOI: 10.1016/j.ymsp.2008.05.009.
82. *Sohn H., Farrar C. R., Hemez F. M.* [и др.]. A Review of Structural Health Monitoring Literature 1996-2001 // *Technical Report No. LA-13976-MS*. — 2004. — янв.

83. *Stubbs N., Kim J.-T., Farrar C.* Field Verification of a Nondestructive Damage Localization and Severity Estimation Algorithm // Proc. of the 13th International Modal Analysis Conference. — 1995. — с. 210—218.
84. *Stubbs N., Osegueda R.* Global Damage Detection in Solids—Experimental Verification Modal Analysis: The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis. — 1990. — т. 5, вып. 2. — с. 81—97.
85. *Stubbs N., Osegueda R.* Global Non-Destructive Damage Evaluation in Solids // Modal Analysis: The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis. — 1990. — т. 5, вып. 2. — с. 67—79.
86. *Tada H., Paris P. C., Irwin G. R.* The Stress Analysis of Cracks Handbook. — Third Edition. — Москва : ASME Press, 2000. — 698 с. — DOI: 10.1115/1.801535.
87. *Tourigny Y.* Continued fraction solution of Krein’s inverse problem // Inverse Problems. — 2011. — т. 27, № 8. — с. 085008. — DOI: 10.1088/0266-5611/27/8/085008.
88. *Wahab M.* Effect of modal curvatures on damage detection using model updating // Mechanical Systems and Signal Processing. — 2001. — т. 15, вып. 2. — с. 439—445.
89. *Wang Y., Ju Y., Zhuang Z.* [и др.]. Adaptive finite element analysis for damage detection of non-uniform Euler-Bernoulli beams with multiple cracks based on natural frequencies // Eng. Comput. — 2018. — т. 35. — с. 1203—1229. — DOI: 10.1108/EC-05-2017-0176.
90. *Yuen M.* A Numerical Study of the Eigenparameters of a Damaged Cantilever // Journal of Sound and Vibration. — 1985.

91. Zetlab functions. — URL: <https://zetlab.com/product-category/programmnoe-obespechenie/funktsii-zetlab>.
92. *Акуленко Л., Байдулов В., Георгиевский Д.* [и др.]. Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2017. — вып. 6. — с. 136—144.
93. *Акуленко Л., Гавриков А., Нестеров С.* Идентификация дефектов поперечного сечения стержня по собственным частотам и особенностям формы продольных колебаний // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2019. — вып. 6. — с. 98—107. — DOI: 10.1134/S0572329919060023.
94. *Ахтямов А. М., И. С. Э.* Определение местоположения и объема полости в упругом стержне по двум собственным частотам его колебаний // Дефектоскопия. — 2012. — вып. 5. — с. 78.
95. *Ахтямов А. М., Ильгамов М. А.* Обзор исследований по идентификации локальных дефектов стержней // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2020. — вып. 2. — с. 3—15. — DOI: 10.31857/S0235711920020042.
96. *Ахтямов А. М., Р. А. А.* О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журнал Средневолжского математического общества. — 2010. — т. 12, вып. 3. — с. 38.
97. *Ахтямов А. М., Р. А. А.* Определение полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. — 2010. — вып. 5. — с. 29.
98. *Ахтямов А. М., Р. К. А.* Диагностирование полости в призматической балке // Дефектоскопия. — 2013. — вып. 3. — с. 15.

99. *Ахтямов А.* Теория идентификации краевых условий. — Уфа : Гилем, 2008. — 300 с.
100. *Ахтямов А.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. — М. : Физматлит, 2009. — 272 с.
101. *Ватульян А., Бочарова О., Жарков Р.* Реконструкция малых полостей в упругих стержнях // Изв вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. естеств. науки. — 2006. — вып. 2. — с. 28—32.
102. *Ватульян А., Солуянов Н.* Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // ПМТФ. — 2008. — т. 49, вып. 6. — с. 152—158.
103. *Ватульян А., Солуянов Н.* Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. — 2005. — вып. 9. — с. 44—56.
104. *Гладвелл Г.* Обратные задачи теории колебаний : пер. с англ. — М.—Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. — 608 с.
105. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация : пер. с англ. — Москва : Мир, 1986. — 320 с.
106. *Крейн М.* Об обратных задачах для неоднородной струны // ДАН. — 1952. — с. 669—672.
107. *Крейн М.* Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // ДАН. — 1954. — с. 767—770.
108. *Крейн М.* Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот // ДАН. — 1951. — т. 76, вып. 3. — с. 345—348.

109. *Лебедев И. М., Шифрин Е. И.* Идентификация поперечных трещин в стержне по собственным частотам поперечных колебаний // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2020. — т. 4. — с. 50—70. — DOI: 10.31857/s057232992004008x.
110. *Лебедев И. М., Шифрин Е. И.* Обнаружение множественных трещин в балке с помощью собственных частот поперечных колебаний // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния. — 2020. — т. 44, № 2. — с. 19—26. — DOI: 10.37972/chgru.2020.44.2.002.
111. *Лебедев И. М., Шифрин Е. И.* Решение обратной спектральной задачи для стержня, ослабленного поперечными трещинами, с помощью оптимизационного алгоритма Левенберга-Марквардта // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2019. — т. 4. — с. 8—26. — DOI: 10.1134/S0572329919040056.
112. *Лебедев И. М., Шифрин Е. И.* Численный алгоритм идентификации множественных трещин в стержне по собственным частотам колебаний // Сборник трудов Международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики". Воронеж, 17-19 декабря 2018 г. — 2019. — с. 1183—1190.
113. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. — Киев : Наукова думка, 1968. — 393 с.
114. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов : пер. с англ. — Москва : Мир, 1979. — 393 с.
115. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. — Москва : Наука, 1974. — 640 с.

116. *Шифрин Е. И., Лебедев И. М.* Идентификация трещин с помощью собственных частот продольных и поперечных колебаний // Сборник Трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. т. 3. — Уфа, 2019. — с. 223—225. — ISBN 978-5-7477-4953-5. — DOI: 10.22226/2410-3535-2019-congress-v3.