

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

На правах рукописи

Проскураков Александр Игоревич

**ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ ВЫВЕДЕНИЯ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ЦЕЛЕВУЮ ОРБИТУ СО СБРОСОМ
ОТДЕЛЯЕМЫХ ЧАСТЕЙ СРЕДСТВ ВЫВЕДЕНИЯ В АТМОСФЕРУ
ЗЕМЛИ**

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук,
доцент Григорьев Илья Сергеевич

Москва — 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Основные обозначения и константы	5
Введение	6
1 Обзор литературы	17
1.1 Современное состояние исследований по проблемам, связанным с космическим мусором	17
1.2 Современное состояние исследований по проблемам решения задач оптимального управления движением КА с реактивным двигателем большой ограниченной тяги и методика «лестница задач» . .	21
1.3 Выводы по главе 1	23
2 Апсидальные импульсные перелеты	24
2.1 Постановка задачи	24
2.2 Формализация постановки задачи	24
2.3 Определение и анализ траекторий с малыми накладными расходами на сброс отработавших средств выведения космического аппарата в атмосферу	27
2.4 Выводы по главе 2	38
3 Неапсидальные импульсные перелеты	40
3.1 Постановка задачи	40
3.2 Формализация постановки задачи	42
3.3 Необходимые условия оптимальности первого порядка	51
3.4 Функция переключения и экстремаль в задаче без априорного предположения об апсидальности импульсных воздействий	64
3.5 Выводы по главе 3	64
4 Модифицированная импульсная постановка	67
4.1 Постановка задачи	67
4.2 Формализация постановки задачи	68
4.3 Необходимые условия оптимальности первого порядка	74

4.4	Модифицированный орбитальный базис и вычислительная схема метода стрельбы	76
4.5	Экстремаль в задаче в модифицированной импульсной постановке	79
4.6	Выводы по главе 4	79
5	Задача с ограниченной тягой	80
5.1	Постановка задачи	80
5.2	Формализация постановки задачи	81
5.3	Необходимые условия оптимальности первого порядка	86
5.4	Структура траектории и вычислительная схема метода стрельбы . .	92
5.5	Экстремали Понтрягина в задаче с большой ограниченной тягой с малыми накладными расходами на сброс отработавших средств выведения космического аппарата в атмосферу	96
5.6	Выводы по главе 5	98
6	Упрощенная модель	100
6.1	Постановка задачи	100
6.2	Формализация постановки задачи	100
6.3	Необходимые условия оптимальности первого порядка	103
6.4	Структура траектории и вычислительная схема метода стрельбы . .	107
6.5	Экстремаль упрощенной модели	112
6.6	Выводы по главе 6	113
	Заключение	115
	Литература	117
	Приложение	132
A	Экстремаль в задаче без априорного предположения об апсидальности импульсных воздействий	132
B	Экстремаль в задаче в модифицированной импульсной постановке	135
C	Экстремаль Понтрягина в первой постановке задачи с большой ограниченной тягой без учета второй зональной гармонике	138
D	Экстремаль Понтрягина в первой постановке задачи с большой ограниченной тягой с учетом второй зональной гармонике	143

E	Экстремаль Понтрягина во второй постановке задачи с большой ограниченной тягой без учета второй зональной гармоника	149
F	Экстремаль Понтрягина во второй постановке задачи с большой ограниченной тягой с учетом второй зональной гармоника	155
G	Экстремаль во второй постановке задачи в упрощенной модели с учетом второй зональной гармоника	160

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И КОНСТАНТЫ

ГСО — геостационарная орбита,
ДТБ — дополнительный топливный бак,
ИСЗ — искусственный спутник Земли,
КА — космический аппарат,
КМ — космический мусор,
РБ — разгонный блок,
РН — ракета-носитель,
ЦБ — центральный блок.

Константы

$\alpha = 0.08$ — коэффициент пропорциональности сухой массы бака массе вмещающегося в него топлива,

$\beta = 0.01$ — коэффициент пропорциональности массы двигателя и тяговооруженности,

$\mu = 398601.3 \text{ км}^3/\text{с}^2$ — гравитационный параметр Земли,

$P_{\text{уд}}=350 \text{ с}$ — удельная тяга,

$g_3 = 9.80665 \text{ м}/\text{с}^2$ — ускорение свободного падения на поверхности Земли,

$i_0 = 0.9 \text{ рад.}$ — угол наклона опорной круговой орбиты ИСЗ,

$R_3 = 6378.155 \text{ км}$ — радиус Земли,

$h_0 = 200 \text{ км}$ — высота опорной круговой орбиты ИСЗ,

$h_{\text{атм}} = 100 \text{ км}$ — высота орбиты, касающейся условной границы атмосферы Земли,

$R_{\text{ГСО}} = 42164 \text{ км}$ — радиус геостационарной орбиты,

$R_{\text{max}} = 280000 \text{ км}$ — величина максимально возможного удаления КА от Земли.

$J_2 = 1082.628 \cdot 10^{-6}$ — коэффициент второй зональной гармоники.

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация является исследованием в области вычислительной оптимизации в механике космического полета.

В работе рассматривается идея сокращения замусоренности околоземного пространства за счет сброса отработавшего дополнительного топливного бака (ДТБ) и центрального блока (ЦБ) разгонного блока (РБ) в атмосферу Земли на этапе выведения космического аппарата (КА) на геопереходную (целевую) орбиту. Решаются задачи оптимизации траекторий выведения космического аппарата, оснащенного двигателем большой ограниченной тяги, с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) заданного радиуса и наклона на целевую эллиптическую орбиту.

Проблемы численного решения оптимизационных задач рассматривались в работах Васильева Ф.П., Моисеева Н.Н., Федоренко Р.П., Черноусько Ф.Л., Баничука Н.В. Оптимизацией траекторий космического аппарата занимались такие исследователи, как Бреквелл Дж.В., Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В., Ильин В.А., Кузмак Г.Е., Лоуден Д.Ф., Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Прорыв для траекторий космического аппарата с двигателями большой ограниченной тяги произошел в начале 1990-х годов благодаря работам Григорьева К.Г. и его учеников.

Актуальность работы. Официальный статус на международном уровне проблема космического мусора получила в 1993 г. (доклад Генерального Секретаря ООН «Воздействие космической деятельности на окружающую среду») и в настоящее время остается актуальной [55]. Согласно проведенному NASA исследованию, один из наиболее эффективных подходов решения проблемы космического мусора — сокращение времени для сведения космического аппарата с орбиты в атмосферу Земли после вывода из эксплуатации [120]. Формализация прикладной задачи построения траекторий перелета космического аппарата со сбросом средств выведения в атмосферу Земли как задачи оптимального управления движением космического аппарата нетривиальна. Полученные оптимизационные задачи механики космического полета являются сложными, содержат промежуточные и фазовые ограничения. Решение таких задач в настоящее время требует серьезных усилий на стыке теоретической механики, оптимального управления и

численных методов. Таким образом проведенное исследование является актуальным.

Целью диссертационной работы является решение задачи оптимального управления перелетом космического аппарата с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли на геопереходную орбиту со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли.

Задачи исследования:

1. формализация рассматриваемой задачи как задачи оптимального управления перелетом космического аппарата;
2. определение и анализ структуры траекторий перелета космического аппарата с опорной на целевую орбиту в импульсной постановке с малыми накладными расходами на сброс отработавших частей космического аппарата в атмосферу;
3. построение и решение серии вспомогательных оптимизационных задач, позволяющих в итоге выбрать эффективную вычислительную схему метода стрельбы и соответствующее хорошее начальное приближение, входящее в область эффективной сходимости метода Ньютона;
4. оптимизация траекторий перелета космического аппарата, оснащенного двигателем большой ограниченной тяги, с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли на целевую эллиптическую орбиту без учета и с учетом влияния второй зональной гармоники.

Методы исследования. Для сведения поставленных задач оптимизации перелетов космического аппарата с большой ограниченной тягой к краевым задачам используется принцип максимума Понтрягина [4, 70] (принцип Лагранжа [4] — для задач в импульсной постановке и задач с простыми схемами управления). Краевые задачи принципа максимума Понтрягина (принципа Лагранжа) на основе метода стрельбы [35, 36] сводятся к системам нелинейных уравнений. Задачи решаются на основе методики «лестница задач» [30] — найденные в импульсной постановке решения используются в качестве начального приближения в задачах с большой ограниченной тягой. Метод продолжения решения по параметру [114] используется для перехода от задачи в модифицированной импульсной постановке

ке к задаче с большой ограниченной тягой и между разными постановками задач с большой ограниченной тягой.

Прямые методы оптимизации [13] используются для получения стартовой точки для метода Ньютона в апсидальной импульсной постановке, задача Коши решается методом Дормана-Принса 8(7) с автоматическим выбором шага [109], система нелинейных уравнений — методом Ньютона в модификации Исаева-Сонина [49] с использованием в условиях сходимости нормировки Федоренко [108], входящая в него система линейных уравнений — методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу и повторным пересчетом [62]. Специально разработанная (А.И. Проскураковым и И.С. Григорьевым) технология численно-аналитического дифференцирования [112] используется для вычисления с высокой точностью громоздких производных в условиях трансверсальности и условиях стационарности по фазовым переменным.

Положения, выносимые на защиту:

1. Постановка трехмерной задачи оптимизации траектории перелета космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги с опорной орбиты на целевую эллиптическую со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли.
2. Успешная реализация методики “лестница задач” — предложение серии вспомогательных задач, последовательное решение которых с использованием продолжения решения по параметру привело к решению целевой задачи.
3. Аналитическое исследование и численное решение задачи в импульсной постановке с фазовыми ограничениями и промежуточными условиями.
4. Численное построение экстремалей Понтрягина — решение краевых задач принципа максимума Л.С. Понтрягина сложной структуры с промежуточными условиями.
5. Определение параметров траектории перелета и целевой орбиты, при которых накладные расходы на сброс дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу малы.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Формализована задача оптимизации перелета космического аппарата в импульсной постановке с опорной орбиты искусственного спутника Земли на целевую орбиту со сбросом ступеней в атмосферу Земли. На основе принципа Лагранжа задача решена численно и получены траектории с малыми накладными расходами на сброс ступеней в атмосферу.
2. Формализована задача оптимального управления космическим аппаратом с реактивным двигателем большой ограниченной тяги с опорной орбиты искусственного спутника Земли на целевую орбиту со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли. На основе принципа максимума Л.С.Понтрягина нелинейная задача оптимального управления с разрывным управлением и промежуточными условиями сведена к многоточечной краевой задаче, численно построены экстремали и проведен их анализ.
3. На основе известных моделей движения космического аппарата в центральном ньютоновском гравитационном поле и в гравитационном поле с учетом второй гармоники сформирована и решена серия вспомогательных задач (реализующая методику «лестница задач»), последовательное решение которых приводит к решению целевой задачи.

Достоверность полученных результатов основывается на строгой математической постановке задач, применении хорошо изученных методов. Результаты диссертации являются оригинальными и опубликованы в открытой печати.

Теоретическая значимость. Задачи оптимального управления движением космических аппаратов нетривиальны и требуют для своего решения синтеза методов теоретической механики, оптимизации и вычислительной математики. Решение каждой новой сложной (нелинейной, с промежуточными условиями, разрывными управлениями и разрывами фазовых переменных) задачи оптимального управления развивает методику численного решения такого рода задач. Построенные экстремали Понтрягина могут использоваться при отработке методик проверки условий второго порядка локальной оптимальности и условий оптимальности на основе принципа Кротова.

Практическая значимость. Полученная в работе информация об оптимальных траекториях выведения космического аппарата с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли на целевую геопереходную орбиту со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли может быть использована при создании и оценке реальных систем управления движением центра масс космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги; методика численного решения может быть применена при решении других актуальных и требующих решения оптимизационных задач; построенные экстремали Понтрягина могут использоваться в качестве известных решений при оценке оптимальности траекторий, построенных с использованием простых схем управления и других упрощающих предположений.

Личный вклад соискателя. Идея и постановка задачи принадлежат научному руководителю. Численные расчеты и основные результаты работы принадлежат соискателю.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются оптимальные траектории перелетов космического аппарата и способы их построения.

Предметом исследования является методика «лестница задач», заключающаяся в последовательной формализации набора оптимизационных задач с постепенным уточнением и усложнением постановки и решении этих задач, с использованием полученных решений более простых задач для решения следующих по сложности задач, в том числе с различными формализациями одной и той же задачи для включения в параметрические семейства методов продолжения решения по параметру. Изучаемая методика «лестница задач» применяется к решению задачи оптимального управления перелетом космического аппарата с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли на геопереходную орбиту со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли.

Апробация работы. Автор выступал с докладами по результатам работы на научных семинарах: спецсеминар «Прикладные задачи оптимального управления и численные методы их решения» под руководством доц. И.С. Григорьева, доц. М.П. Заплетина, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова (2016–2025); семинар имени В.А. Егорова по механике космического полета под руководством проф. В.В. Сазонова, механико-математический

факультет МГУ имени М.В.Ломоносова (2021); научно-исследовательский семинар «Фундаментальная математика и ее приложения в космических исследованиях» под руководством декана факультета космических исследований МГУ имени М.В.Ломоносова В.В. Сазонова (2019, 2021); семинар «Механика космического полета» под руководством член-корреспондента РАН В.Г. Петухова, Московский авиационный институт (2024); семинар «Механика и управление движением космических аппаратов» под руководством д.ф.-м.н. А.Г. Тучина, Баллистический центр ИПМ имени М.В. Келдыша РАН (2024); семинар имени В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости под руководством проф. А.А. Зобовой и проф. Е.И. Кугушева, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова (2024); семинар по теории управления и динамике систем под руководством академика Ф.Л. Черноушко, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского (2024); семинар по прикладной механике и управлению имени А.Ю.Ишлинского под руководством проф. В.В. Александрова, проф. Н.А. Парусникова, проф. Ю.В. Болотина, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова (2024).

Кроме того автором были сделаны следующие доклады по теме диссертации на следующих конференциях:

1. Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики, г. Москва, Россия, 31 марта — 4 апреля 2025 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
2. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2025» (площадка конференции в Азербайджане), г. Баку, Азербайджан, 11–25 апреля 2025;
3. Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики, г. Москва, Россия, 20 марта — 2 апреля 2024 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
4. Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики, г. Москва, Россия, 4–13 апреля 2023 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
5. Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики, г. Москва,

- Россия, 20–28 апреля 2021 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
6. Евразийский молодежный форум, посвященный 20-летнему юбилею Казахского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова, г. Нур-Султан, Казахстан, 13–15 апреля 2021;
 7. XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, г. Москва, Россия, 30 марта — 2 апреля 2021 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
 8. XXVII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», г. Москва, Россия, 10–27 ноября 2020;
 9. Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики, г. Москва, Россия, 19–30 октября 2020 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
 10. XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, г. Москва, Россия, 28–31 января 2020 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
 11. 54-е Научные чтения памяти К.Э. Циолковского, г. Калуга, Россия, 17–19 сентября 2019;
 12. XLIII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, г. Москва, Россия, 29 января — 1 февраля 2019;
 13. 53-и Научные чтения памяти К.Э. Циолковского, г. Калуга, Россия, 18–19 сентября 2018 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
 14. II Международная научная конференция молодых исследователей, посвященная 95-й годовщине общенационального лидера Азербайджана Гейдара Алиева, г. Баку, Азербайджан, 27–28 апреля 2018;

15. XLIV Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения», г. Москва, Россия, 17–20 апреля 2018;
16. Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики, г. Москва, Россия, 16–27 апреля 2018 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
17. XXV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2018», г. Москва, Россия, 9–13 апреля 2018;
18. XLII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, г. Москва, Россия, 23–26 января 2018 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
19. 52-е Научные чтения памяти К.Э. Циолковского, г. Калуга, Россия, 19–21 сентября 2017 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
20. Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики, г. Москва, Россия, 17–26 апреля 2017 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
21. XXIV Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2017», г. Москва, Россия, 10–14 апреля 2017;
22. XLIII Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения», г. Москва, Россия, 5–19 апреля 2017;
23. II научно-практическая конференция с международным участием «Творческий потенциал молодежи в решении авиакосмических проблем», г. Баку, Азербайджан, 21–23 февраля 2017;
24. XLI Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, г. Москва, Россия, 24–27 января 2017 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым);
25. 51-е Научные чтения памяти К.Э. Циолковского, г. Калуга, Россия, 20–22 сентября 2016 (совместно с научным руководителем И.С. Григорьевым).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 27 научных работах автора [71–96, 126], в том числе 5 статей опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ (из которых 2 статьи — в изданиях, входящих в базу цитирования Scopus и Web of Science).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка использованных источников и приложения. Текст диссертации содержит 167 страниц, включая 18 рисунков. Список литературы состоит из 127 наименований.

В **первой** главе представлен обзор литературы современного состояния исследований по вопросам, связанным с космическим мусором, по проблемам решения задач оптимального управления движением космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги, а также по методике «лестница задач».

Во **второй** главе рассматриваются апсидальные импульсные перелеты космического аппарата с опорной орбиты на целевую со сбросом отработавших частей средств выведения в атмосферу Земли. Проводится анализ схем перелета, определяются схемы перелета с малыми накладными расходами.

В **третьей** главе рассматриваются перелеты космического аппарата без априорного предположения об апсидальности импульсных воздействий. В результате проведенных расчетов установлено, что при неограниченном заранее времени перелета и фазовом ограничении на максимально возможное удаление космического аппарата от Земли решения задач без априорного предположения об апсидальности импульсных воздействий совпадают с соответствующими решениями задач с априорным предположением об апсидальности импульсов. Проводится сравнение полученных условий трансверсальности с известными ранее результатами в задаче без ступенчатости космического аппарата.

В **четвертой** главе рассматривается задача в модифицированной импульсной постановке. В отличие от модели космического аппарата, состоящего из двух ступеней и спутника (рассмотренной в двух предыдущих главах), здесь предполагается, что космический аппарат состоит из разгонного блока, дополнительного топливного бака и спутника. Данная постановка задачи является еще одним шагом методики «лестница задач». Необходимость этого шага методики «лестница задач» связана с тем, что при прямом переходе от задачи в импульсной постановке из предыдущего шага к задаче с большой ограниченной тягой не удастся построить экстремаль — модифицированный метод Ньютона не сходится.

В **пятой** главе рассматривается задача с большой ограниченной тягой. На основе проведенных ранее исследований структуры траектории и полученного хорошего начального приближения строятся траектории перелета космического аппарата с опорной орбиты на целевую эллиптическую с малыми накладными расходами на сброс дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли в задаче с большой ограниченной тягой. Рассматриваются две разные, но близкие постановки задачи. В первой постановке предполагается, что сухая масса дополнительного топливного бака и масса основного бака разгонного блока пропорциональны массе вмещающегося топлива с коэффициентом α , а масса двигателя пропорциональна тяговооруженности с коэффициентом β . Во второй постановке предполагается, что заданы массовые характеристики разгонного блока. Переход от первой постановки задачи ко второй осуществляется на основе метода продолжения решения по параметру. Вначале строятся траектории в центральном ньютоновском гравитационном поле, далее учитывается влияние второй зональной гармоники.

В **шестой** главе рассматривается упрощенная модель, в которой направление вектора тяги определяется двумя углами — склонением вектора тяги θ (отсчитывается от плоскости экватора к северному полюсу) и прямого восхождения вектора тяги ϕ (отсчитывается в плоскости экватора от оси Ox в сторону Oy). Предполагается, что на каждом из активных участков углы склонения и прямого восхождения вектора тяги изменяются по линейному закону. Было проведено сравнение полученного решения с аналогичным решением задачи с большой ограниченной тягой. Отличие по функционалу (обезразмеренной полезной массе) во второй постановке задачи с учетом влияния второй зональной гармоники составляет 0.0001121. Экстремали в задаче оптимального управления и в задаче с простой схемой управления на активных участках близки и с точки зрения сходимости метода Ньютона — для получения экстремали в задаче оптимального управления потребовалось 3 итерации метода Ньютона.

В заключении приводятся основные результаты проведенных исследований. В приложении представлены полученные оптимальные траектории.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю кандидату физико-математических наук, доценту Григорьеву Илье Сергеевичу за постановку задачи и внимание к работе.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, про-

фессору Кобелькову Георгию Михайловичу и всем сотрудникам кафедры вычислительной математики за внимание и поддержку.

Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук, доценту Заплетину Максиму Петровичу и кандидату физико-математических наук Самохину Александру Сергеевичу за проявленный интерес к работе.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1. Современное состояние исследований по проблемам, связанным с космическим мусором

С начала космической эры в околоземном пространстве скопилось значительное количество космического мусора (КМ) — объектов искусственного происхождения и их фрагментов, которые уже неисправны, не функционируют и не могут служить никаким полезным целям, но являются опасным фактором воздействия на функционирующие КА. Причем с каждым годом количество объектов КМ непрерывно растет.

Официальный статус на международном уровне проблема КМ получила в 1993 г. (доклад Генерального Секретаря ООН «Воздействие космической деятельности на окружающую среду») и в настоящее время остается актуальной. Согласно проведенному NASA исследованию, один из наиболее эффективных подходов решения проблемы космического мусора — сокращение времени для сведения КА с орбиты в атмосферу Земли после вывода из эксплуатации [120].

Наибольшее скопление КМ наблюдается на низких околоземных орбитах и в зоне ГСО [115]. Столкновение крупногабаритных объектов КМ друг с другом и взрывы остатков топлива в баках могут стать причиной значительного увеличения мелких объектов КМ. Описанные процессы могут привести к цепной реакции — так называемому эффекту Кесслера [122].

Большое число работ посвящено составлению каталогов нефункционирующих космических аппаратов и мониторингу состояния околоземного пространства [10, 14, 57, 59, 61, 65, 104, 106].

В [10] дается описание математического и программного обеспечения, предназначенного для исследования совокупностей объектов искусственного происхождения. Предлагаемое программно-математическое обеспечение позволяет прогнозировать вероятность столкновения объектов КМ с функционирующими КА и моделировать процесс образования КМ в результате взрывов и столкновений.

В [14] рассмотрено влияние проблемы засорения околоземного пространства на безопасность полетов ИСЗ, пилотируемых космических кораблей и орбитальных космических станций, а также вопросы международно-правового регулиро-

вания проблемы КМ.

В [57] проводится анализ сложившейся техногенной обстановки в околоземном пространстве на основе имеющегося каталога космических объектов, приводится перечень основных мер, направленных на сокращение КМ, дается описание автоматизированной системы для предупреждения об опасных ситуациях в околоземном космическом пространстве.

В [59] рассматриваются организационно-методические и технологические проблемы построения системы информационного мониторинга, направленной на сокращение замусоренности околоземного пространства, описываются базы данных, на основе которых строится система.

В [61] рассматриваются риски космических миссий в текущих условиях скопления техногенных объектов в околоземном космическом пространстве, проводится обзор действующей автоматизированной системы предупреждения об опасных ситуациях в околоземном пространстве.

В [65] описываются три поколения оптико-электронных комплексов, предназначенных для мониторинга околоземного пространства.

В [104] предлагается алгоритм, ускоряющий время построения орбиты некаталогизированного объекта КМ.

В [106] представлены текущее состояние мониторинга некаталогизируемого космического мусора, прогноз его количества в области низких околоземных орбит, оценка возможностей по активному удалению малоразмерного космического мусора, предложения по созданию и развитию системы его мониторинга.

В настоящее время разрабатываются различные проекты по очистке околоземного пространства: захват фрагмента космического мусора с помощью сети [116, 119, 121], захват с помощью гарпуна [6, 58, 99, 102, 118], использование лазерной установки [1, 2, 5, 56, 123]. В [9, 117] рассматривается идея облета крупногабаритного КМ с последующим переводом его на орбиту захоронения. Однако экономически приемлемых проектов пока не существует.

В принятых международных документах в качестве одной из мер по предотвращению образования КМ указывается увод с рабочих орбит космических средств после окончания их активного функционирования [47, 127]. В [3, 12, 15, 17, 45, 53] рассматривается задача перевода закончившего работу КА на орбиту захоронения с заданным сроком существования. Идеи увода отработавшего КА и его частей в плотные слои атмосферы рассматриваются в [3, 15, 45, 50, 52, 53, 113]. Об-

зор средств захвата и увода крупногабаритного космического мусора представлен в работах [69, 105, 124, 125].

В [3] отмечается, что принудительный ввод КА в атмосферу с применением замедляющих полет приемов является одним из перспективных способов, однако для реализации такого типа маневров необходима модификация традиционных проектов КА и РН.

В [7] рассматривается задача выбора орбит, на которые могут переводиться крупноразмерные космические объекты после окончания их активного функционирования, проводится анализ зависимости времени баллистического существования космических объектов от высот орбит увода. Из представленных результатов можно сделать вывод, что при уменьшении минимальной высоты орбиты время существования космического объекта на этой орбите стремится к нулю. В работе предполагалось, что объект прекращает баллистическое существование по достижении им высоты над поверхностью Земли, меньшей 80 км.

В [12] рассматривается возможность выполнения требований «Руководящих принципов организации работ по снижению техногенного засорения космического пространства». В качестве одного из наиболее простых и эффективных способов предотвращения замусоренности средневысотных орбит отмечается минимизация эксцентриситета спутников после окончания их активного функционирования. На основе статистических данных делается вывод о том, что почти половина спутников с 1999 по 2011 гг. была уведена на орбиту захоронения, соответствующую требованиям, указанным в документах Межагентского координационного комитета по предупреждению образования космического мусора.

Одним из вопросов, рассматриваемым в [15], является описание различных способов предотвращения замусоренности околоземного пространства: сокращение продуктов выхлопа твердотопливных двигателей, пассивация КА и РН, уменьшение осколкообразования вследствие столкновений, перевод КА и РН на орбиты захоронения, принудительный ввод в атмосферу КА и РН и сокращение длительности существования космических объектов и т.д. Для осуществления ввода КА в атмосферу предлагается использовать специальные реактивные двигатели или основные двигатели. На низких орбитах для усиления торможения в атмосфере предлагается возможность использования изменения геометрии поверхности для увеличения ее площади (например, надувные баллоны).

В [17] рассматривается задача перелета завершившего работу КА на орбиту

захоронения с заданным сроком существования. Проведенные исследования позволяют для конкретного КА выбрать тип орбиты захоронения (круговая или эллиптическая) и момент перевода КА на эту орбиту.

В [45] рассматривается задача увода в атмосферу и на орбиты захоронения на примере нескольких спутников. Строятся зависимости относительной массы топлива от различных параметров.

В [50], помимо различных методов удаления объектов КМ, приводится идея сокращения замусоренности околоземного пространства за счет увода вышедших из строя спутников в верхние слои атмосферы Земли при помощи установленного на них солнечного паруса.

В [52] предлагается уводить сверхмалые КА, являющиеся частью распределенного КА, в плотные слои атмосферы.

В [53] рассматривается увод КА «Гонец-М» после завершения его активного функционирования на орбиту захоронения и в плотные слои атмосферы, проводятся оценки характеристической скорости, которая потребуется для осуществления маневра, и времени существования рассматриваемого КА на орбите захоронения.

В [113] в качестве одного из методов по сокращению замусоренности околоземного пространства рассматривается использование невыработанных остатков топлива для совершения маневра, изменяющего высоту перигея орбиты, для оперативного и контролируемого увода отделившихся частей КА в плотные слои атмосферы. Ставится задача оптимизации. На основе анализа парка существующих космических средств выведения делается вывод о возможности применения данного метода.

В [69] приводится классификация способов увода объектов КМ, а также описываются проблемы, которые могут возникнуть при их реализации.

В [105] сформулированы требования для многоразовых систем, выполнение которых необходимо для организации успешной стыковки с некооперируемыми объектами и их последующей буксировки на орбиты утилизации.

В [124] отмечается, что несмотря на то что было предложено и апробировано на Земле множество эффективных методов захвата и удаления КМ, ни один объект КМ до сих пор не был удален. В данной работе проводится обзор и сравнение существующих технологий захвата и удаления КМ. Рассматриваются преимущества и недостатки актуальных методов.

В [125] рассматриваются новые технологии, которые разрабатываются для активного удаления объектов КМ, а также руководящие принципы для минимизации образования КМ.

1.2. Современное состояние исследований по проблемам решения задач оптимального управления движением КА с реактивным двигателем большой ограниченной тяги и методика «лестница задач»

Проблемам численного решения оптимизационных задач посвящено значительное число работ; отметим несколько ключевых монографий, задавших и определивших направление исследований по вычислительной оптимизации [13, 63, 64, 107, 110, 111].

С самого начала космической эры проблеме оптимизации траекторий КА уделялось большое внимание (см., например, [11, 41, 48, 60, 68]). Несмотря на значительные усилия, к концу 1980-х годов удалось решить лишь несколько относительно несложных задач оптимизации траекторий перелетов КА с двигателями большой ограниченной тяги. Основные успехи оптимизации траекторий КА были связаны с решением задач оптимизации перелетов в импульсной постановке (см, например, литературный обзор в [32]) и КА, управляемого посредством двигателей малой тяги.

Прорыв для траекторий КА с двигателями большой ограниченной тяги произошел в начале 1990-х годов благодаря работам Григорьева Константина Георгиевича и его учеников [18–29].

Методика «лестница задач» начала формироваться при решении задачи Всеволода Александровича Егорова о построении экстремалей Понтрягина для перелетов КА между Землей и Луной. Отметим, что представленное в известной работе [42] «решение» содержит ошибки, связанные с наличием орбиты прямого и обратного направления вращений вокруг Луны, что приводит к наличию двух близких корней и на что прямо указывает описанное в [42] характерное поведение метода Ньютона в таких ситуациях; таким образом в [27] решение задачи построения экстремалей Понтрягина для перелетов от Земли к Луне было представлено впервые.

Суть методики «лестница задач» состоит в выборе некоторой последовательности вспомогательных задач с постепенным уточнением и усложнением постановки, их формализации и последовательном решении этих задач, с использо-

ванием полученных решений более простых задач для решения следующих по сложности задач, в том числе с различными формализациями одной и той же задачи для включения в параметрические семейства методов продолжения решения по параметру.

Впервые методика «лестница задач» была представлена в [30, Гл. 6] для частного случая перехода от решения задачи оптимизации траектории в импульсной постановке к решению задачи оптимального управления перелетом КА с реактивным двигателем большой ограниченной тяги и состояла из трех ступенек:

1. Импульсная постановка задачи, формализованная в виде оптимизационной задачи в бесконечномерном пространстве (то есть не в виде задачи математического программирования).
2. Полуимпульсная постановка задачи (задача оптимального управления, являющаяся промежуточной ступенью между задачей в импульсной постановке и требуемой решения задачей).
3. Задачи оптимального управления перелетом КА с реактивным двигателем большой ограниченной тяги.

В последствии методика такого перехода была обобщена и упрощена — полуимпульсная постановка задачи была исключена [33, 34].

Название «лестница задач» появилось при чтении спецкурса “Прикладные задачи оптимального управления и численные методы” на механико-математическом факультете МГУ в середине 2000-х и первое время использовалось ограничено — внутри коллектива учеников Константина Георгиевича Григорьева и, изредка, в докладах на конференциях.

Методика «лестница задач» использует переход от решения одной задачи к решению другой. Ситуация продолжения решения по параметру, приводящая к изменению числа активных участков, была окончательно отработана при решении задачи перехода между различными точками одной и той же круговой орбиты [31] и в последствии использовалась при решении задач Соревнований по Глобальной Оптимизации Траекторий (ГТОС-2 и ГТОС-3) [37, 38]. При решении задачи ГТОС-4 методика «лестница задач» оказалась одним из ключевых факторов победы команды Московского Государственного Университета в соревнованиях. При этом первой ступенькой «лестницы задач» была задача Ламберта, второй —

задача в импульсной постановке, третьей — задача минимизации квадратичного функционала управления, четвертой — задача с “измененным законом управления”, собственно и позволившая сформировать траекторию-победительницу. Использование “измененного закона управления” позволило включить в одно параметрическое семейство задачи с квадратичным функционалом и задачи с управлением “включено-выключено”. Отметим, что другим ключевым фактором победы команды МГУ в ГТОС-4 стала эффективная реализация идей Моисеева Никиты Николаевича [39].

Методика «лестница задач» эффективно отработала в задачах оптимизации траекторий перелетов ступенчатого КА и КА с ДТБ с низкой круговой орбиты ИСЗ на целевую геопереходную орбиту [40]. Отметим, что представленное диссертационное исследование является непосредственным развитием [40].

В широкий научный обиход название «лестница задач» было выведено Самохиным Александром Сергеевичем, решившим задачу оптимизации перелетов КА, управляемых комбинацией двигателей большой и малой тяги, с орбиты ИСЗ к Фобосу (см. [101] и другие публикации Самохина А.С.).

В [8] в рамках исследования по методике «лестница задач» было построено параметрическое семейство, связавшее решение задачи в импульсной постановке и задачи с квадратичным функционалом управления.

В настоящее время решение задач оптимизации траекторий космических аппаратов в целом и построение экстремалей перелетов космических аппаратов с реактивным двигателем большой ограниченной тягой в частности по-прежнему актуально (см., например, [51, 54, 66, 97, 98, 103]).

1.3. Выводы по главе 1

Представленный литературный обзор показал, что проблема космического мусора и предлагаемый метод уменьшения замусоренности околоземного пространства актуальны, что проблема решения задач оптимизации траекторий КА, в том числе КА с реактивным двигателем большой ограниченной тяги, актуальна, и проблема построения экстремалей Понтрягина актуальна. Постановка задачи оптимизации траектории перелета КА с реактивным двигателем большой ограниченной тяги с опорной орбиты на целевую эллиптическую со сбросом ДТБ и ЦБ РБ в атмосферу Земли является новой и ранее в литературе не встречалась.

ГЛАВА 2. АПСИДАЛЬНЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ

2.1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимизации перелета КА с низкой круговой орбиты ИСЗ заданного наклона и радиуса $R_0 = R_3 + h_0$ на целевую эллиптическую орбиту. Параметры целевой орбиты — радиусы перигея и апогея, угол наклона — заранее неизвестны и определяются в результате решения оптимизационной задачи. Перелет рассматривается в центральном ньютоновском гравитационном поле в вакууме в апсидальной импульсной постановке. Апсидальными точками орбиты называются точки апогея (наиболее удаленная от Земли точка орбиты КА) и перигея (ближайшая к Земле точка орбиты КА). КА состоит из двух ступеней и спутника. Довыведение спутника с целевой орбиты на ГСО осуществляется с использованием двигателей и за счет топлива самого спутника. Предполагается, что характеристическая скорость маневров довыведения ограничена заданной величиной. Масса ступеней пропорциональна массе вмещающегося в их баки топлива с коэффициентом α . В баки залито столько топлива, сколько необходимо для совершения соответствующих маневров. Масса двигателя и структурных конструкций не учитывается. Отработавшие ступени за счет дополнительных импульсных воздействий переводятся на орбиты, касающиеся условной границы атмосферы (высота перигея 100 км). Время существования объектов на таких орбитах считается малым. Предполагается, что дополнительные импульсы для сброса ступеней в атмосферу подаются в апогеях орбит, с которых осуществляется увод ступеней, и не меняют наклона орбиты, то есть являются тормозными. Торможение ступени для перевода на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, происходит с помощью дополнительного двигателя, которым оснащена ступень, за счет остающегося в баках топлива. Оставшаяся после сброса второй ступени масса КА на целевой орбите считается полезной и максимизируется.

2.2. Формализация постановки задачи

Перелет рассматривается в декартовой прямоугольной системе координат, связанной с центром Земли. Ось z этой системы перпендикулярна плоскости экватора и направлена с юга на север, ось x лежит в плоскости экватора и направлена по линии узлов начальной круговой орбиты от нисходящего узла к восходящему,

ось y дополняет систему координат до правой системы координат.

Траектория перелета представляет собой серию эллиптических орбит, последовательно пересекающихся в точках на оси x . Каждая из этих орбит однозначно определяется величинами r_- , r_+ и i — расстояниями от центра Земли до точек орбиты на отрицательном и положительном направлении оси x и углом наклона; если орбита эллиптическая, то одно из этих расстояний является радиусом перигея, другое — радиусом апогея (рис. 2.1).

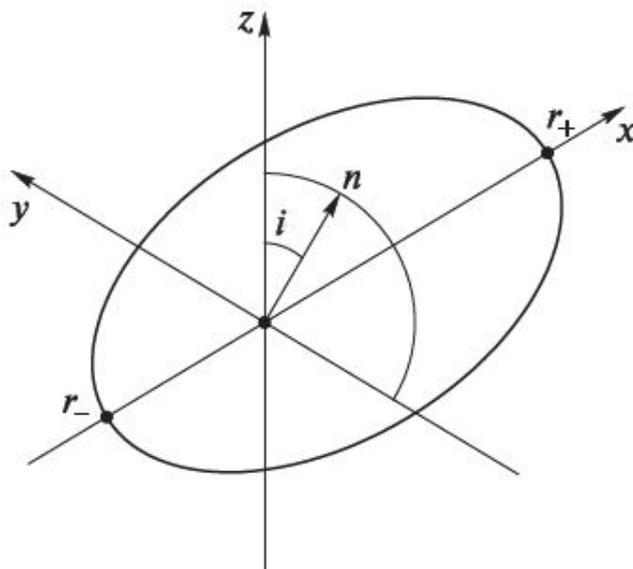


Рис. 2.1: Эллиптическая орбита с наклоном i и апсидальными радиусами r_- , r_+

Импульсы даются только в точках орбиты на оси x , радиальные составляющие векторов импульсов равны нулю. При приложении в точке отрицательной части оси x изменяются величины r_+ и i , а величина r_- остается неизменной; импульс перехода с орбиты на орбиту определяется соотношением [44]

$$\Delta v_- = \sqrt{v_{1-}^2 + v_{2-}^2 - 2v_{1-}v_{2-} \cos(i_2 - i_1)}, \quad (2.1)$$

где $v_{1-} = \sqrt{\frac{2\mu r_{1+}}{r_{1-}(r_{1-} + r_{1+})}}$, $v_{2-} = \sqrt{\frac{2\mu r_{2+}}{r_{2-}(r_{2-} + r_{2+})}}$ — величины скоростей на первой и второй орбитах соответственно; $r_{1-} = r_{2-}$, r_{1+} , r_{2+} — апсидальные радиусы на первой и второй орбитах соответственно; i_1 , i_2 — наклоны первой и второй орбит соответственно.

Аналогично, при приложении в точке положительной части оси x изменяются величины r_- и i , неизменной остается величина r_+ , а импульс перехода с орбиты

на орбиту определяется соотношением

$$\Delta v_+ = \sqrt{v_{1+}^2 + v_{2+}^2 - 2v_{1+}v_{2+} \cos(i_2 - i_1)},$$

где

$$v_{1+} = \sqrt{\frac{2\mu r_{1-}}{r_{1+}(r_{1-} + r_{1+})}}, \quad v_{2+} = \sqrt{\frac{2\mu r_{2-}}{r_{2+}(r_{2-} + r_{2+})}}, \quad (2.2)$$

причем $r_{1+} = r_{2+}$.

Таким образом, есть последовательность орбит перехода, и на ней определяется оптимизируемый функционал — полезная масса. В начальный момент на орбите старта обезразмеренная масса КА считается равной единице ($m_0 = 1$). После каждого импульса она изменяется согласно формуле Циолковского

$$m_+ = m_- \exp\left(-\frac{\Delta v}{c}\right),$$

где $c = P_{уд}g_3$ — скорость истечения реактивной струи.

Рассматриваются два варианта сброса отработавших ступеней: 1) простая отстыковка ступени; 2) сброс ступени в атмосферу. В первом случае сбрасываемая масса считается пропорциональной массе вмещающегося в его баки топлива, во втором — ступень сбрасывается с некоторым остатком топлива, расходуемого на торможение ступени. Пусть разделение происходит на орбите с параметрами r_- , r_+ , i и тормозной импульс дается в точке r_+ . Он не изменяет наклон орбиты, а только уменьшает радиус r_- :

$$\Delta v_{сб} = v_+ - v_{сб+}, \quad (2.3)$$

где скорости v_+ и $v_{сб+}$ даются, аналогичными (2.2) формулами:

$$v_+ = \sqrt{\frac{2\mu r_-}{r_+(r_- + r_+)}}, \quad v_{сб+} = \sqrt{\frac{2\mu r_{атм}}{r_+(r_{атм} + r_+)}}$$

$r_{атм} = R_3 + h_{атм}$ — радиус перигея, достаточный для постепенного торможения ступени в атмосфере.

2.3. Определение и анализ траекторий с малыми накладными расходами на сброс отработавших средств выведения космического аппарата в атмосферу

Все маневры выполняются с использованием двух ступеней. Импульс (или импульсы) с общей суммой характеристической скорости u_1 реализуется с использованием первой ступени, u_2 — второй ступени.

В случае простой отстыковки ступеней: масса КА после выполнения первой серии маневров

$$m_{1-} = m_0 \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right), \quad (2.4)$$

сухая масса первой ступени

$$m_{1c} = \alpha m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right),$$

масса КА после сброса первой ступени

$$m_{1+} = m_{1-} - m_{1c} = m_0 \left((1 + \alpha) \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right) - \alpha \right),$$

масса КА после выполнения второй серии маневров

$$m_{2-} = m_{1+} \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right),$$

сухая масса второй ступени

$$m_{2c} = \alpha m_{1+} \left(1 - \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right)\right),$$

полезная масса

$$m_{\Pi} = m_{2-} - m_{2c} = m_0 \left((1 + \alpha) \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right) - \alpha \right) \cdot \left((1 + \alpha) \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right) - \alpha \right).$$

Решение задачи с простой отстыковкой ступеней хорошо известно [100] и в настоящей работе приводится для сравнения.

Как и при простом сбросе, после первой серии маневров масса КА определяется по формуле (2.4). Рассмотрим случай, когда отделение первой ступени произошло на эллиптической орбите с радиусами $r_{cб1-}$, $r_{cб1+}$ и тормозной импульс дан в положительной части оси x . Формула для тормозного импульса задается под-

становкой соответствующих переменных в выражение (2.3). В отличие от предыдущего случая, обозначим m_{1c} массу сбрасываемой ступени, состоящую из сухой массы и массы топлива, необходимого для реализации маневра сброса в атмосферу. Сухая масса $m_{1\text{сухая}}$ сброшенной первой ступени после тормозного импульса составляет

$$m_{1\text{сухая}} = m_{1c} \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right).$$

Считаем, что топлива в ступени не осталось и это ее сухая масса. С другой стороны масса топлива $m_{1\text{топлива}}$ в первой ступени составляет

$$m_{1\text{топлива}} = m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right) + m_{1c} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right)\right),$$

сухая масса первой ступени

$$m_{1\text{сухая}} = \alpha \left(m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right) + m_{1c} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right)\right) \right),$$

где Δv_{c61} — дополнительное импульсное воздействие, переводящее первую ступень на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы.

В результате решения линейного уравнения

$$m_{1c} \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right) = \alpha \left(m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right) + m_{1c} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right)\right) \right) :$$

определяется масса m_{1c} сбрасываемой ступени:

$$m_{1c} = \frac{\alpha m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right)\right)}{(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{\Delta v_{c61}}{c}\right) - \alpha}. \quad (2.5)$$

Масса КА после сброса первой ступени составляет

$$m_{1+} = m_{1-} - m_{1c}.$$

Вторая ступень отделяется на целевой орбите. Импульс Δv_{c62} сброса и сбрасываемая масса m_{2c} второй ступени определяются аналогично первой ступени при

положении апогея орбиты отделения на положительной части оси x :

$$m_{2c} = \frac{\alpha m_{1+} \left(1 - \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right)\right)}{(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{\Delta v_{с62}}{c}\right) - \alpha}.$$

Полезная масса определяется соотношением

$$m_{\Pi} = m_{2+} = m_{2-} - m_{2c}. \quad (2.6)$$

При последующем анализе предполагается, что перелет начинается на круговой орбите с высотой $h_0 = 200$ км и наклоном $i_0 = 0.9$ рад.

При вычислении импульса довыведения КА с целевой орбиты на ГСО рассматриваются четыре возможных маневра.

Первый маневр — двухимпульсный. При этом первый импульс в положительной части оси x изменяет величину $R_{ц-}$ до $R_{ГСО}$, а второй импульс в отрицательной части оси x является установочным. Импульс довыведения считается как сумма этих двух импульсов, угол наклона орбиты довыведения определяется из условия минимума импульса довыведения.

Второй маневр также двухимпульсный. Он аналогичен первому маневру, но первый импульс дается в отрицательной части оси x , а установочный — в положительной. На рис. 2.2, а зеленым цветом выделена целевая орбита, красным — ГСО, синим — орбита довыведения, соответствующая двухимпульсному маневру.

Третий маневр является трехимпульсным. При этом первый импульс дается в положительной части оси x и он изменяет величину $R_{ц-}$ до R_{\max} — максимально-возможного удаления КА от притягивающего центра. Вторым импульсом в удаленной точке $r_- = R_{\max}$ изменяется r_+ до $R_{ГСО}$. Третий импульс снова в положительной части оси x является установочным. Импульс довыведения равен сумме этих трех импульсов, а углы наклона двух эллиптических орбит рассматриваемого маневра довыведения определяются из условий его минимума. Этот маневр изображен на рис. 2.2, б.

Четвертый маневр аналогичен третьему, но первый и последний импульсы даются в отрицательной части оси x , а импульс в удаленной точке — в положительной. Итоговый импульс довыведения определяется как минимум из импульсов

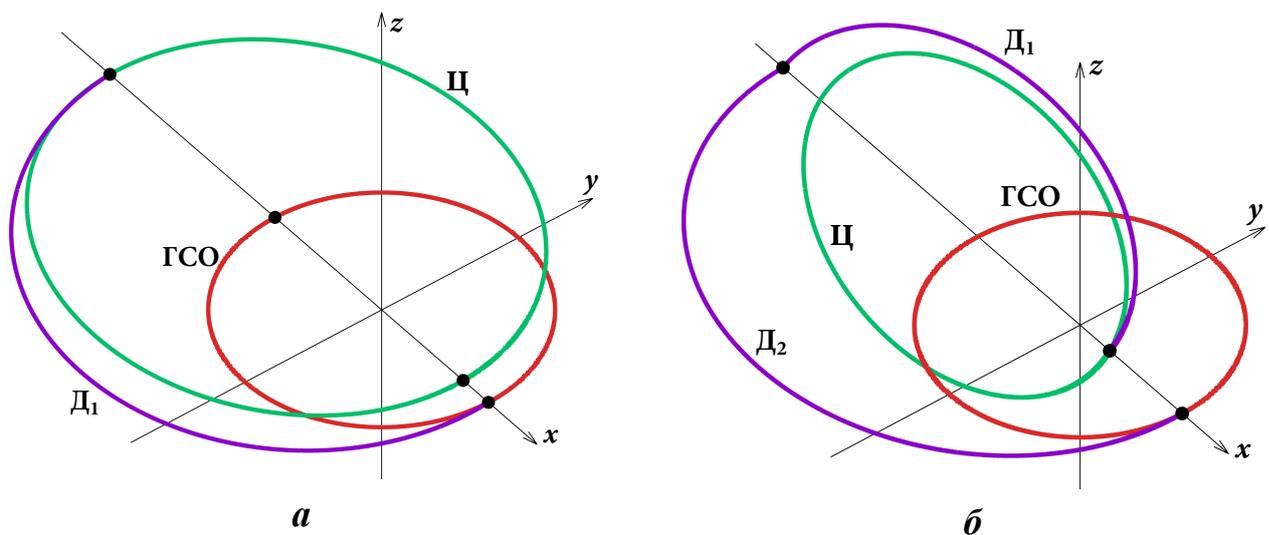


Рис. 2.2: Маневры довыведения (D_1 — первая орбита довыведения, D_2 — вторая орбита довыведения) космического аппарата с целевой орбиты на геостационарную: a — двухимпульсный; b — трехимпульсный

довыведения этих четырех возможных маневров.

Рассматривались различные схемы перелета КА с круговой орбиты ИСЗ на целевую. Вначале предполагалось, что в задаче перелета на целевую орбиту импульсы последовательно подаются во всех апогеях и перигеях переходных орбит. В процессе оптимизации часть таких импульсов обнулилась. Итоговое решение, в зависимости от импульса довыведения, получается двух-, трех- или четырехимпульсным (рис. 2.3). Можно сказать, что оно возникает вследствие биэллиптического перелета КА на ГСО. Первоначальные расчеты были проведены с помощью прямых методов оптимизации, а итоговое решение получено с применением принципа Лагранжа [4, 16]. Система нелинейных уравнений, получаемая в результате применения принципа Лагранжа, решается модифицированным методом Ньютона.

Для пояснения полученного результата рассмотрим вспомогательную задачу апсидального импульсного перехода с низкой круговой орбиты ИСЗ на ГСО. Трехимпульсный переход состоит из двух эллиптических движений. Первый, «разгонный», импульс переводит КА с круговой орбиты ИСЗ радиусом $R_0 = R_3 + 200$ км и наклоном $i_0 = 0.9$ рад. на первую эллиптическую орбиту с параметрами $r_{1+} = R_3 + 200$ км, $r_{1-} = r^*$ и наклоном i_1 . Вторым импульсом «в удаленной точке» $r_{1-} = r^*$ переводит КА с первой эллиптической орбиты на вторую с параметрами $r_{2-} = r^*$, $r_{2+} = R_{\text{ГСО}} = 42164$ км и наклоном i_2 . Третьим, «установочным», импульсом переводит КА со второй эллиптической орбиты на ГСО. Полезная

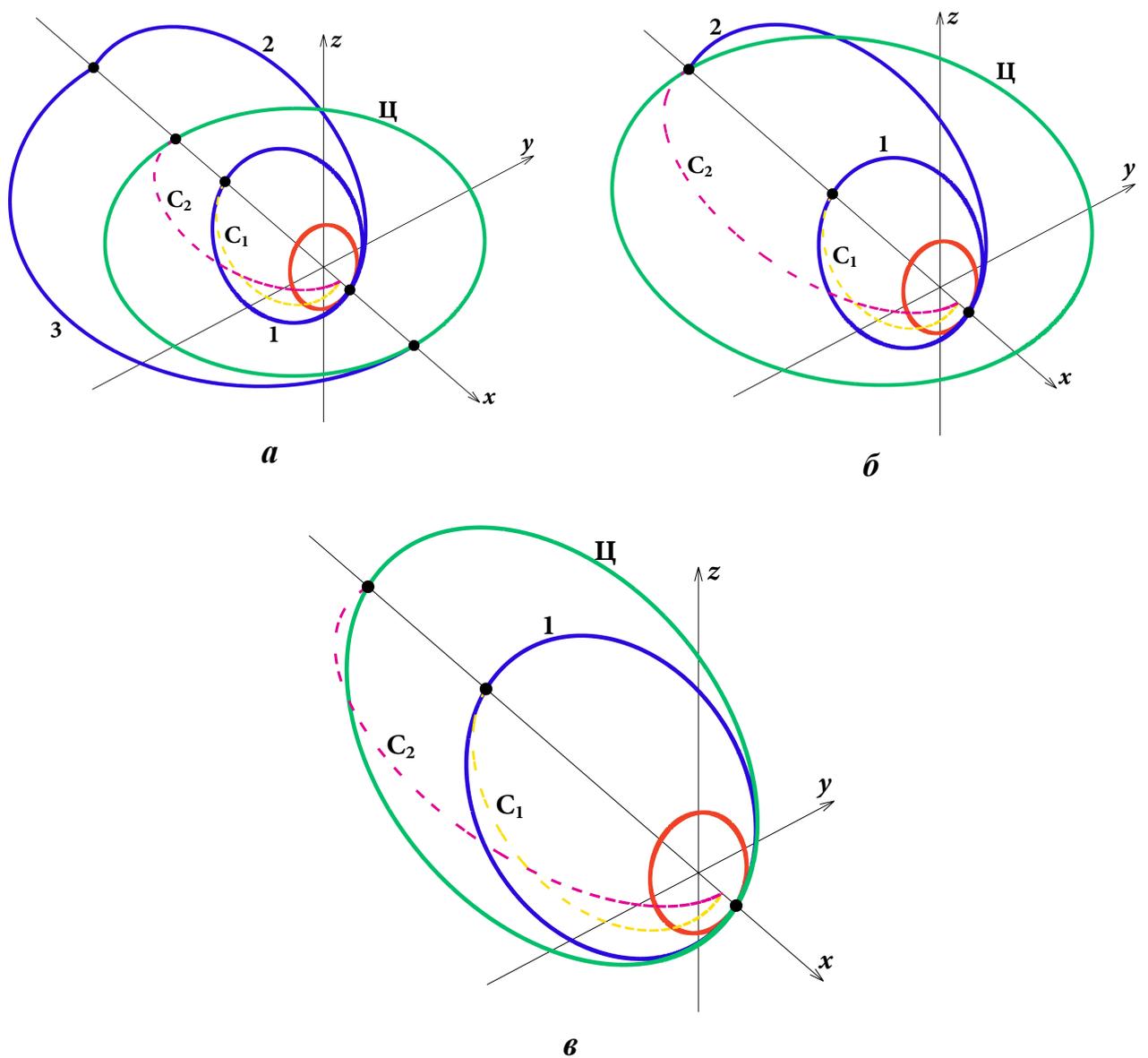


Рис. 2.3: Схемы перелета с опорной орбиты на целевую орбиту (C_1, C_2 — орбиты сброса соответственно первой и второй ступени в атмосферу) по маневрам: *a* — четырехимпульсному; *б* — трехимпульсному; *в* — двухимпульсному

масса вычисляется по формуле Циолковского

$$m_{\Pi} = \exp \left(-\frac{\Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3}{c} \right).$$

Зависимость безразмерной полезной массы от r^* для такого перехода при оптимальном выборе i_1 и i_2 представлена на рис. 2.4. Оптимальные величины i_1 и i_2 и соответствующая им величина m_{Π} определены в результате численного решения задачи максимизации функции двух переменных без дополнительных ограничений $m_{\Pi}(i_1, i_2) \rightarrow \max$. На первом этапе использовался метод покоординатного

спуска, на втором — метод Ньютона.

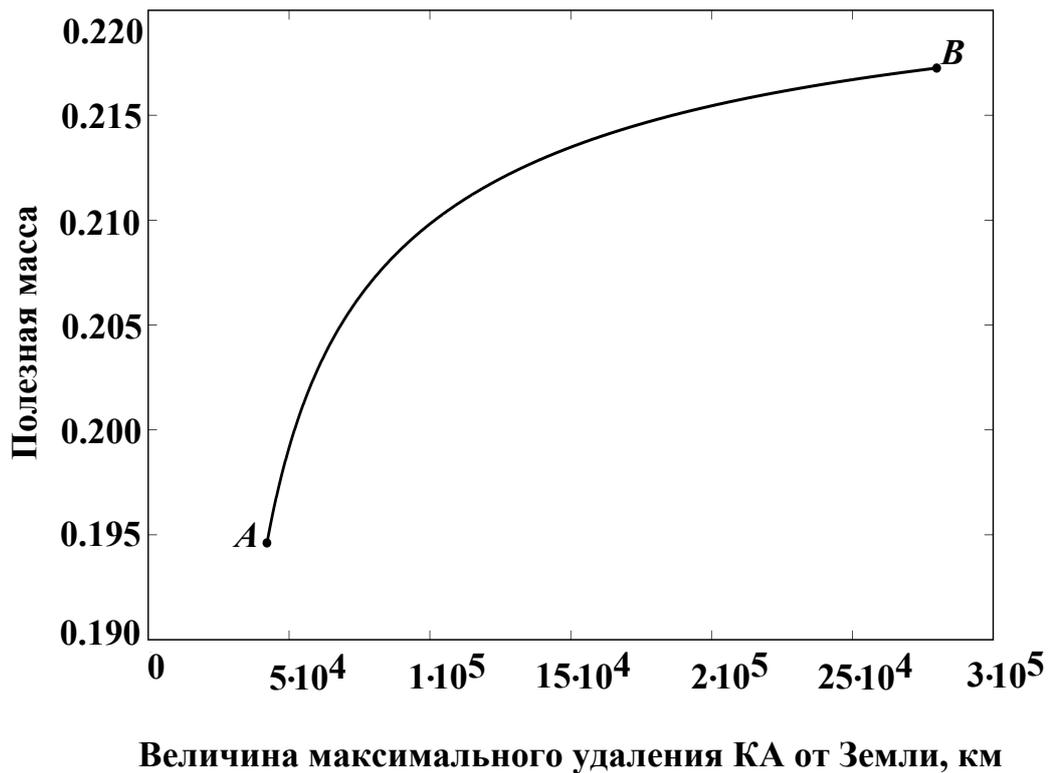


Рис. 2.4: Зависимость полезной массы от величины максимально возможного удаления космического аппарата в задаче оптимизации траектории биэллиптического перелета с опорной орбиты на геостационарную

Точка А ($r^* = R_{\text{ГСО}}$) на рис. 2.4 соответствует гомановскому переходу. Полученная зависимость показывает, что оптимальный (среди двухимпульсных) гомановский перелет при расширении класса сравнения до трехимпульсных оптимальным не является. Максимум полезной массы соответствует максимально допустимой величине $r^* = R_{\text{max}}$, а при отсутствии такого ограничения — переходу через бесконечность.

В качестве второй вспомогательной задачи рассмотрим простую схему построения перехода. Для этого построим оптимальный биэллиптический перелет с низкой круговой орбиты ИСЗ с заданным наклоном на ГСО при заданном максимальном удалении КА от Земли $r^* = R_{\text{max}}$. На рис. 2.4 такой переход соответствует величине $R_{\text{max}} = 280000$ км (точка В). Обозначим Δv_1 , Δv_2 и Δv_3 величины импульсных воздействий в рассмотренной задаче биэллиптического перелета на ГСО, $\Delta v_{\text{дов}}$ — импульс довыведения, u_1 и u_2 — характеристические скорости маневров, реализованные за счет топлива из первой и второй ступени соответственно.

После отработки первой серии маневров КА оказывается на соответствующей орбите сброса первой ступени. Случай $u_1 < \Delta v_1$ называется разделением первого импульса, случай $\Delta v_1 < u_1 < \Delta v_1 + \Delta v_2$ — разделением второго импульса, случай $\Delta v_1 + \Delta v_2 < u_1$ — разделением третьего импульса, случаи $u_1 = \Delta v_1$ и $u_1 = \Delta v_1 + \Delta v_2$ называются схемами без разделения импульсов со сбросом отработавшей первой ступени на первом и на втором протяженном пассивном участке соответственно. Величина u_2 определяется соотношением

$$u_2 = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 - u_1. \quad (2.7)$$

Положение и скорость КА после выполнения второй серии маневров определяют целевую орбиту (орбиту сброса второй ступени).

В зависимости от величины импульса довыведения получаются различные целевые орбиты. Рассмотрены три характерные значения импульса довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО: 0.5, 1.0 и 1.5 км/с. В случае импульса доведения, равного 0.5 км/с, перигей целевой орбиты равен радиусу ГСО, апогей выше нее, но ниже максимально возможного удаления. В данном случае возможны пять нижеперечисленных схем разделения при выведении КА на целевую орбиту.

Во-первых, в случае разделения первого импульса (см. рис. 2.3, *a*) схема перелета состоит из трех переходных орбит: перигей первой переходной орбиты равен радиусу опорной орбиты, апогей лежит ниже максимально возможного удаления КА; перевод первой ступени на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, происходит с апогея рассматриваемой переходной орбиты; перигей второй переходной орбиты равен радиусу опорной, апогей — максимально возможному удалению; перигей третьей орбиты равен перигею целевой орбиты, апогей — максимально возможному удалению.

Во-вторых, в случае разделения второго импульса получается схема перелета, состоящая из трех орбит: перигей первой орбиты равен радиусу опорной, апогей — максимально возможному удалению; перигей второй орбиты лежит ниже перигея целевой орбиты, апогей равен максимально возможному удалению КА; перигей третьей орбиты равен перигею целевой орбиты, апогей — максимально возможному удалению; перевод первой ступени на орбиту, касающуюся границы атмосферы, происходит с апогея второй переходной орбиты.

В-третьих, в случае разделения третьего импульса получается следующая схе-

ма перелета: первая переходная орбита аналогична первой орбите в задаче разделения второго импульса; апогей второй орбиты равен максимально возможному удалению КА, перигей — радиусу перигея целевой орбиты; апогей третьей орбиты лежит ниже максимально возможного удаления КА, но выше апогея целевой орбиты; перевод первой ступени на орбиту, касающуюся границы атмосферы, происходит с апогея третьей орбиты.

В-четвертых и в-пятых, в случае сброса ступени без разделения импульсов перелет состоит из двух переходных орбит: перигей первой переходной орбиты равен радиусу опорной орбиты, апогей — максимально возможному удалению; перигей второй переходной орбиты равен перигею целевой орбиты, апогей — максимально возможному удалению. При сбросе ступени на первом протяженном пассивном участке перевод ступени на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, происходит в максимально удаленной точке R_{\max} , и величина импульса сброса мала (требуется уменьшить высоту перигея на 100 км). Наилучшее довыведение КА с целевой орбиты на ГСО во всех этих случаях осуществляется за счет одного импульса в перигее целевой орбиты.

В случае импульса довыведения, равного 1.0 км/с апогей целевой орбиты равен максимально возможному удалению КА, перигей лежит ниже ГСО. В данном случае получают три схемы разделения: первого импульса (см. рис. 2.3, б), второго импульса и схема без разделения импульсов, в которой первая ступень переводится на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, с апогея первой переходной орбиты.

В случае импульса довыведения, равного 1.5 км/с перигей целевой орбиты равен радиусу опорной круговой орбиты, апогей лежит ниже максимально возможного удаления. В данном случае реализуется единственно возможная схема с разделением первого импульса (см. рис. 2.3, в).

Определены зависимости полезной массы от массы первой ступени в результате решения трех задач: 1) простая отстыковка ступени от КА (простой сброс); 2) простая схема со сбросом в атмосферу (вторая вспомогательная задача); 3) задача оптимизации со сбросом в атмосферу.

При решении второй вспомогательной задачи по заданному значению величины u_1 вычислялось значение u_2 по формуле (2.7), полезная масса — по форму-

ле (2.6), а масса первой ступени — по формуле

$$m_{1\text{ступени}} = 1 - m_{1+} = 1 - m_{1-} + m_{1c},$$

где m_{1-} и m_{1c} заданы формулами (2.4) и (2.5) соответственно.

На рис. 2.5 представлены зависимости полезной массы от массы первой ступени в случае импульса довыведения равного 0.5 км/с. На данном рисунке верхний график соответствует простому сбросу, нижний график — сбросу ступеней в атмосферу (простая схема и задача оптимизации). Стоит отметить, что решения задачи оптимизации и второй вспомогательной задачи на основном графике визуально не различаются. Полезная масса в задаче с простой отстыковкой ступеней (0.267), как и следовало ожидать, больше чем в задаче со сбросом ступеней в атмосферу (0.262). Первая точка слева на графиках соответствует максимуму в задачах, вторая точка соответствует решению задачи без разделения импульсов, в случае когда отстыковка первой ступени от КА происходит на первой переходной орбите, третья точка — решению задачи без разделения импульсов, в случае когда отстыковка первой ступени от КА происходит на второй переходной орбите. На выноске окрестности точки максимума эта зависимость изображена в увеличенном масштабе: пунктирная линия — полезная масса во второй вспомогательной задаче, сплошная линия — в задаче оптимизации. Из выноски видно, что полезная масса в задаче оптимизации несколько лучше полезной массы во второй вспомогательной задаче. Максимум в обеих задачах соответствует массе первой ступени равной 0.5591317, максимальная полезная масса в задаче оптимизации равна 0.2621201, во второй вспомогательной задаче — 0.2621195 (отличие в седьмом знаке после запятой).

На рис. 2.6 представлена аналогичная зависимость полезной массы от массы первой ступени в случае импульса довыведения 1.0 км/с. Полезная масса в задаче с простой отстыковкой ступеней (0.316) больше чем в задаче со сбросом ступеней в атмосферу (0.314). Как в задаче оптимизации, так и во второй вспомогательной задаче максимум соответствует массе первой ступени равной 0.4686843, максимальная полезная масса в задаче оптимизации равна 0.31420396, во второй вспомогательной задаче — 0.31420295 (отличие в шестом знаке после запятой).

На рис. 2.7 представлены зависимости полезной массы от массы первой ступени в случае импульса довыведения равного 1.5 км/с. Полезная масса в задаче

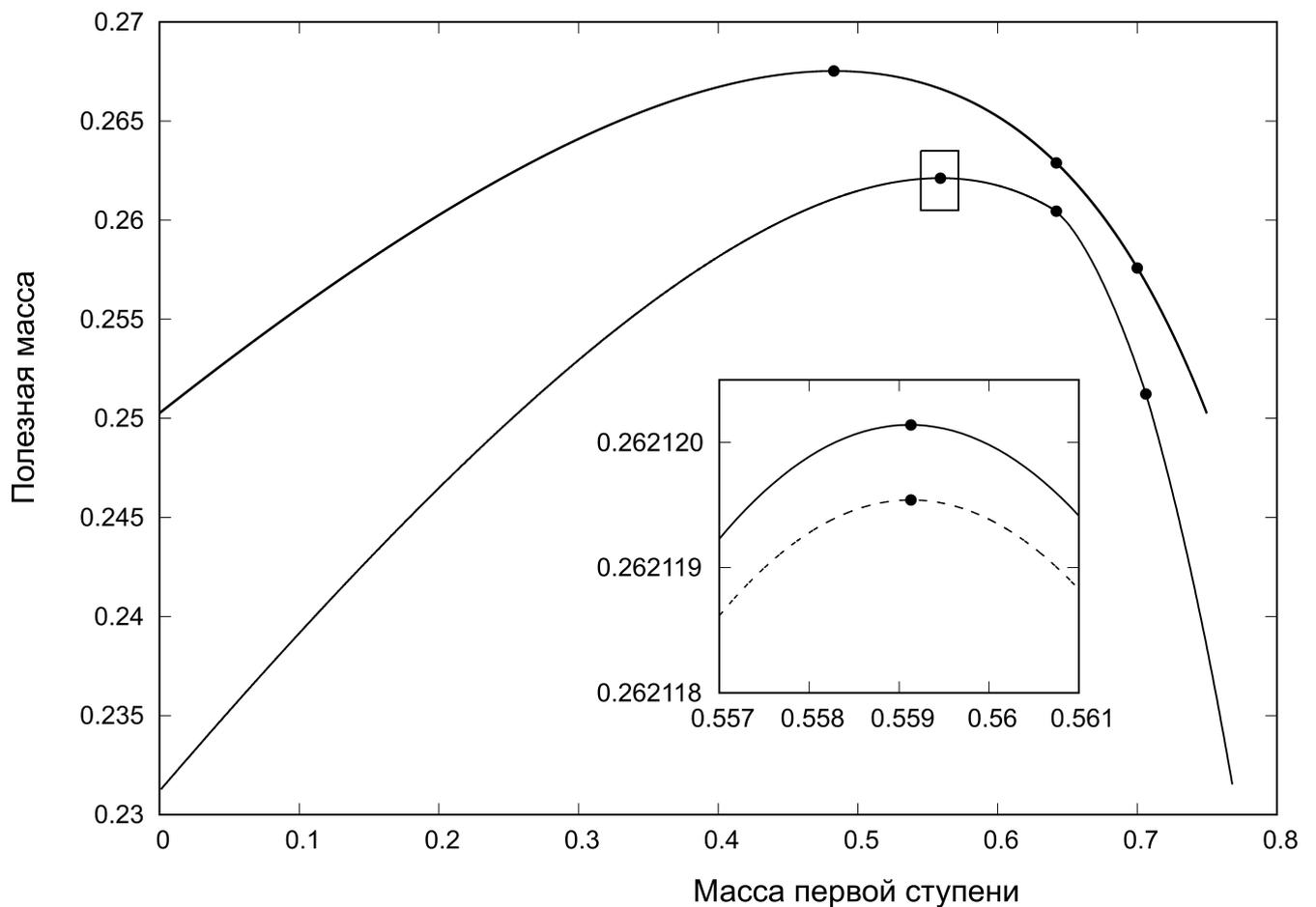


Рис. 2.5: Зависимость полезной массы от массы первой ступени в задачах перелета космического аппарата с опорной орбиты на целевую эллиптическую (импульс до-выведения равен 0.5 км/с)

с простой отстыковкой ступеней (0.37318) больше чем в задаче со сбросом ступеней в атмосферу (0.37305). В отличие от предыдущих случаев отличие простого сброса ступеней от сброса в атмосферу на графике визуализируется только в окрестности точки, соответствующей максимуму полезной массы. Это обусловлено малой величиной импульса, переводящего вторую ступень на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы. Как в задаче оптимизации, так и во второй вспомогательной задаче максимум соответствует массе первой ступени равной 0.388544314663, максимальная полезная масса в задаче оптимизации равна 0.373055529801, во второй вспомогательной задаче — 0.373055529689 (отличие в десятом знаке после запятой). Стоит отметить, что во всех рассмотренных выше случаях отличие полезной массы в задаче оптимизации и во второй вспомогательной задаче не связано с погрешностями расчетов. Вычисления проводились с бóльшей точностью: полученная многомерная точка во второй вспомогательной задаче отделима от множества остановки метода Ньютона, применяемого при ре-

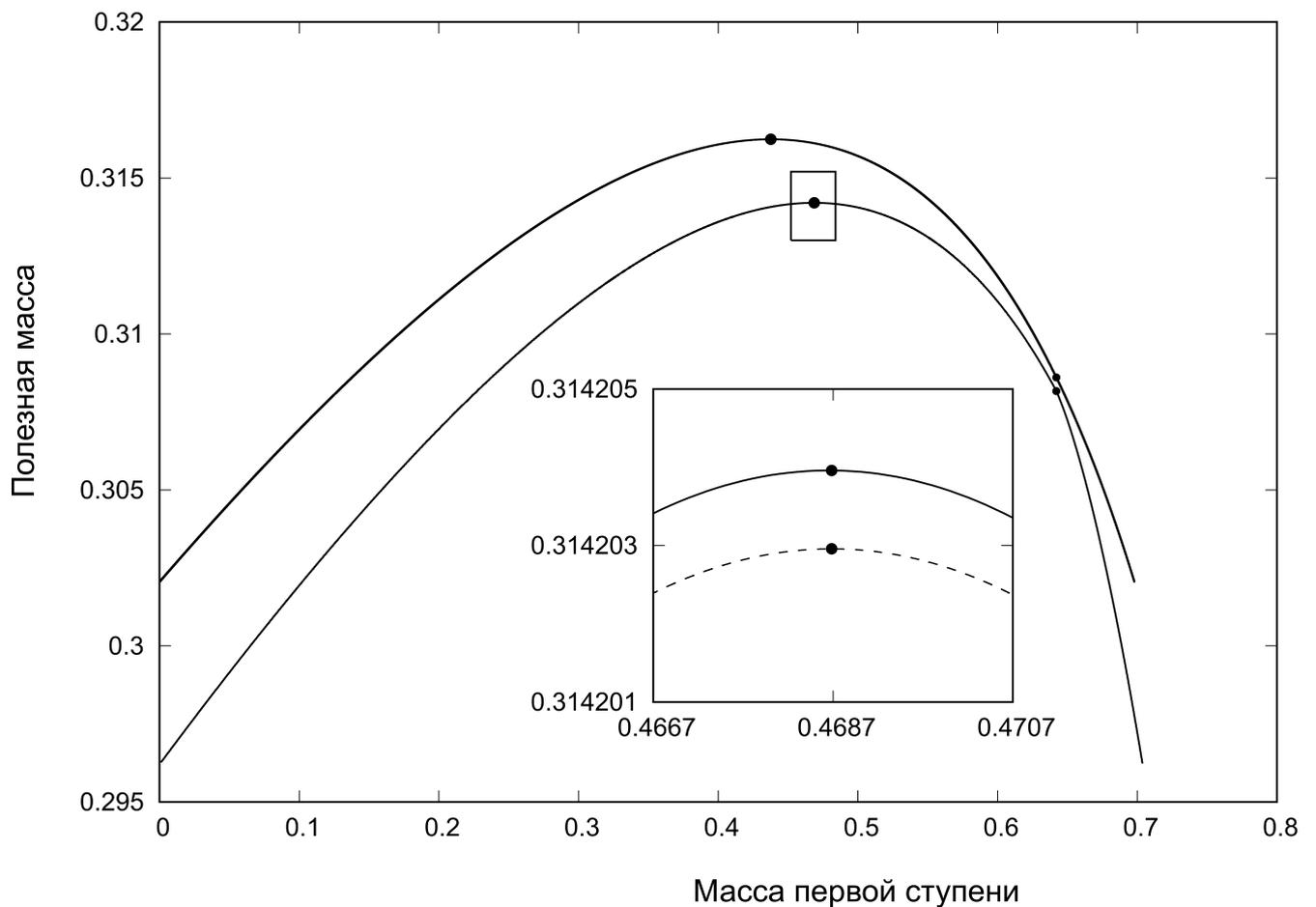


Рис. 2.6: Зависимость полезной массы от массы первой ступени в задачах перелета космического аппарата с опорной орбиты на целевую эллиптическую (импульс довыведения равен 1.0 км/с)

шении задачи оптимизации.

Наличие локального максимума в задаче со сбросом ступеней в атмосферу демонстрирует график зависимости полезной массы от радиусов апогея и перигея целевой эллиптической орбиты (рис. 2.8, импульс довыведения равен 0.5 км/с). Для каждой расчетной точки (заданных радиусов апогея и перигея) подобраны наклон целевой орбиты, неизвестный радиус апогея первой переходной орбиты, углы наклона трех переходных орбит и орбиты довыведения так, чтобы удовлетворить ограничению импульса довыведения и обеспечить максимальную полезную массу. Определение всех этих величин осуществлялось численно в результате решения системы уравнений принципа Лагранжа. Излом на графике соответствует радиусу перигея целевой орбиты равного радиусу ГСО. Следует обратить внимание на то, что этот излом приводит к изломам линий уровня на рис. 2.8. Также следует отметить овраговость линий уровня функционала — абсолютное изменение радиуса апогея оказывает на функционал значительно меньшее влияние, чем

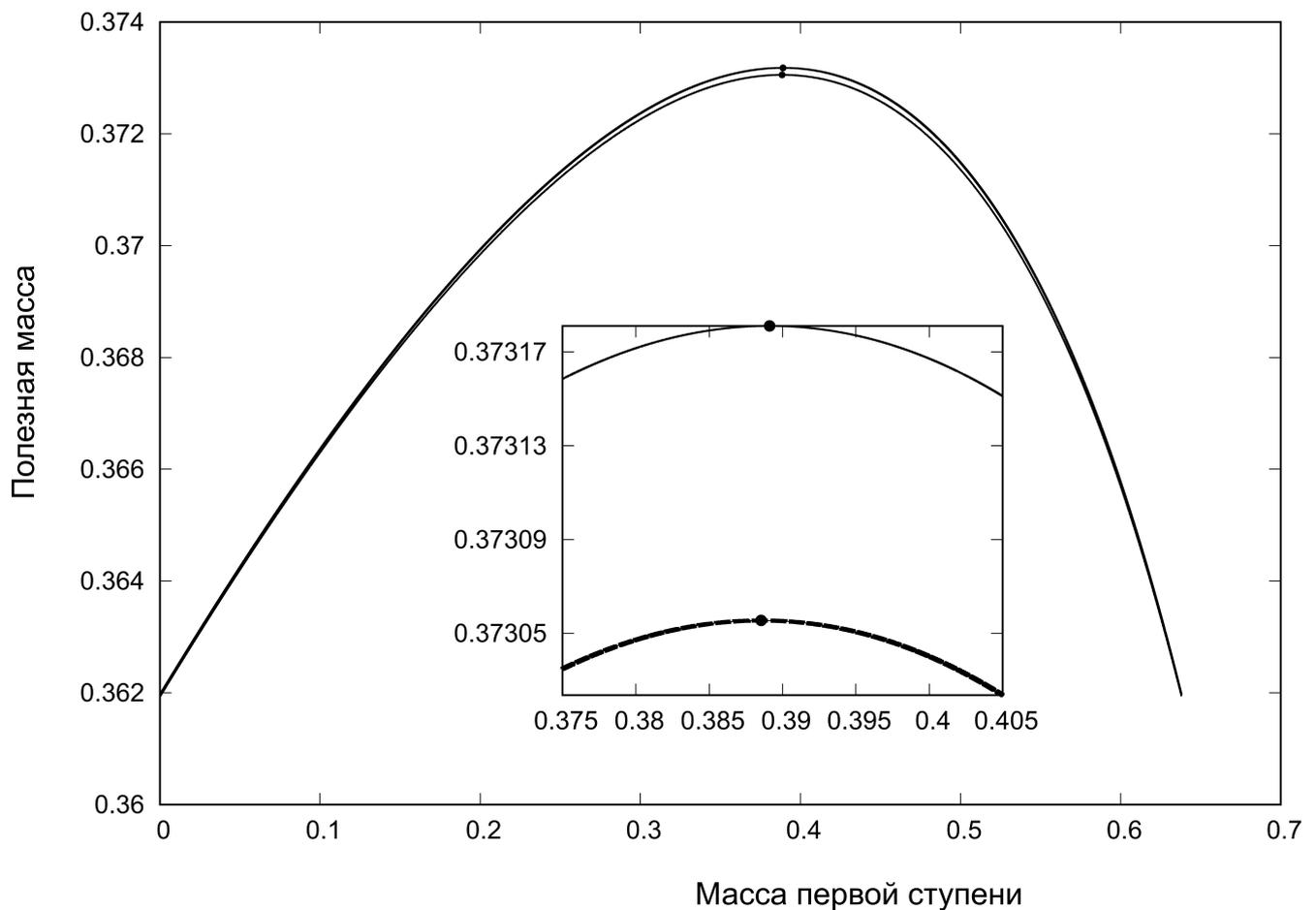


Рис. 2.7: Зависимость полезной массы от массы первой ступени в задачах перелета космического аппарата с опорной орбиты на целевую эллиптическую (импульс довыведения равен 1.5 км/с)

отклонение перигея от радиуса ГСО. Выделенная точка на графике соответствует наилучшим значениям радиуса апогея и перигея целевой орбиты для рассматриваемого импульса довыведения. Как видно из рисунка максимум полезной массы соответствует случаю, когда радиус перигея равен радиусу ГСО. На рис. 2.5 эта точка соответствует точке на сплошной линии в выноске.

2.4. Выводы по главе 2

В результате проведенных расчетов было установлено:

- решение задачи оптимизации перелета КА на целевую эллиптическую орбиту в зависимости от импульса довыведения является двух-, трех- или четырехимпульсным;
- максимум полезной массы достигается при разделении первого импульса;
- простая схема сброса ступеней в атмосферу позволяет построить решение

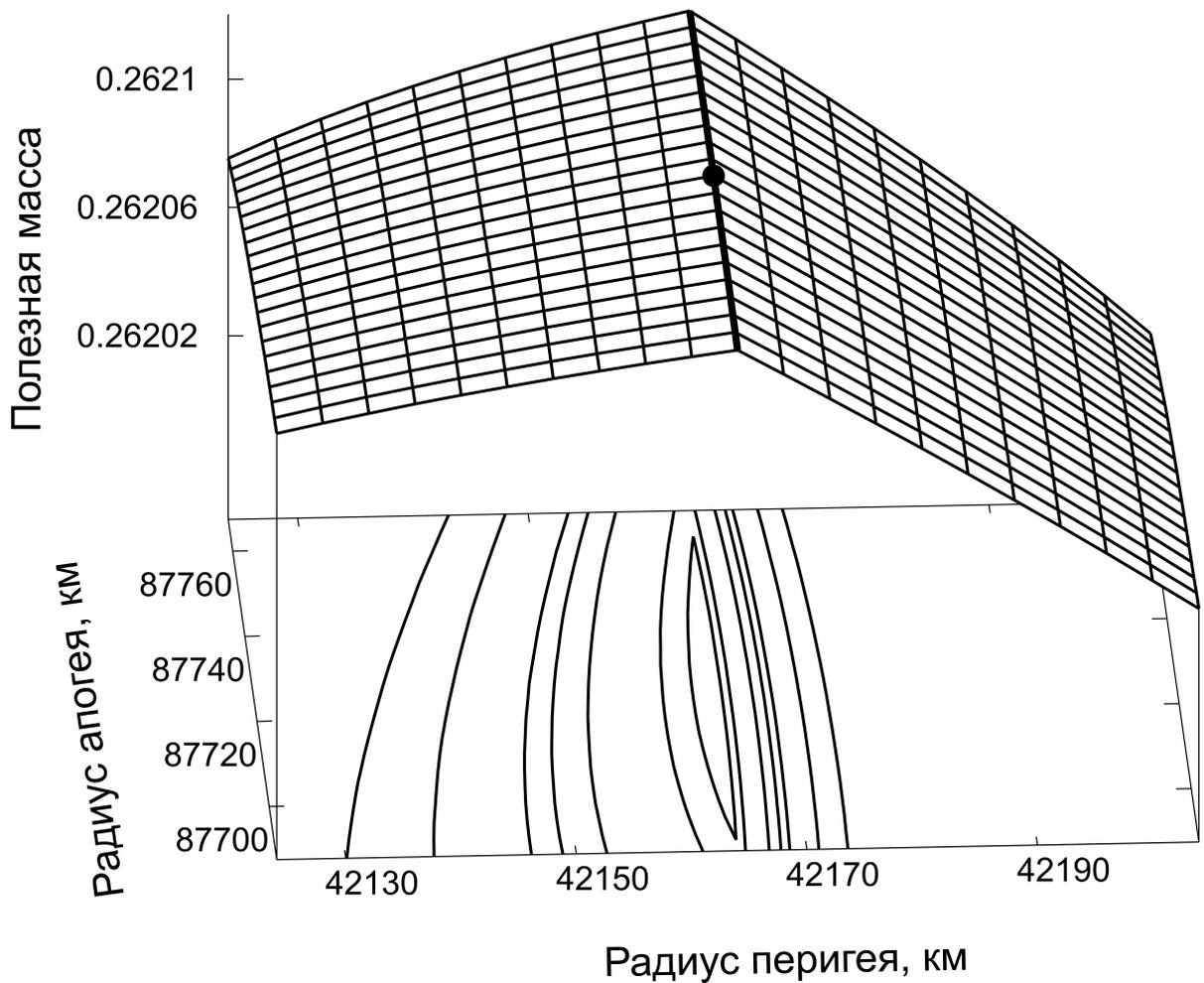


Рис. 2.8: Зависимость полезной массы от радиусов апогея и перигея целевой эллиптической орбиты (импульс довыведения равен 0.5 км/с)

задачи близкое к оптимальному;

- накладные расходы сброса ступеней в атмосферу при импульсе довыведения 1.5 км/с и максимально возможном удалении $R_{\max} = 280000$ км малы.

ГЛАВА 3. НЕАПСИДАЛЬНЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ

3.1. Постановка задачи

Постановка задачи, которая рассматривается в данной главе совпадает с ранее рассмотренной в предыдущей, но отсутствует априорное предположение об апсидальности импульсных воздействий, и ограничение на максимальное удаление КА от Земли учитывается как фазовое. Можно считать, что задача оптимизации рассматривается в кольце $K = \{R_{\min} \leq r(t) \leq R_{\max}\}$, где $r(t)$ — расстояние от центра Земли до КА в момент времени t , R_{\min} и R_{\max} — ограничение на минимальное и максимальное удаление КА от центра Земли. Такая постановка задачи близка к постановке [46, с. 70]. Величина минимального удаления равна радиусу условной границы атмосферы. В задаче фазовое ограничение $r(t) \geq R_{\min}$ не является активным.

Существуют различные подходы получения необходимых условий оптимальности первого порядка в задачах оптимизации траекторий перелетов КА в импульсной постановке. Один из таких подходов предполагает рассмотрение задачи в импульсной постановке как задачи оптимизации в классе обобщенных функций. При этом импульсные воздействия интерпретируются в качестве управлений, обобщенных δ -функций Дирака [67]. Использование этого подхода приводит к громоздкому учету соответствующих множителей Лагранжа в виде меры, и данный подход в настоящее время при решении задач не получил большого распространения. Другой подход [43, 48], предполагающий непосредственное использование метода вариаций, также приводит к громоздким преобразованиям.

В данной главе используется подход, связанный с исключением из рассмотрения управлений — δ -функций Дирака и формализацией в виде гладкой задачи на наборе участков пассивного полета [32]. Основным недостатком и, одновременно, основным достоинством используемого подхода является необходимость выбора структуры траектории — последовательности пассивных участков перелета, соединенных в общую траекторию условиями стыковки. Разные последовательности таких условий стыковки — импульсов, импульсов сброса ступеней, моментов выхода на фазовое ограничение, — приводят к разным формализациям задачи и, с этой точки зрения, являются недостатком. С другой стороны наличие априорной информации о структуре решения задачи, полученной в результате рассмотрения

задачи в более простой постановке, более простой учет условий и ограничений по сравнению с другими подходами и однотипность проводимого анализа формально различных задач разной структуры являются достоинством.

В рассматриваемой задаче более простой постановкой был случай с априорным предположением об апсидальности импульсных воздействий из второй главы. Рассмотрение этой упрощенной задачи позволяет предполагать, что вне зависимости от величины суммы импульсов довыведения и разделяемого импульса весь перелет КА с опорной круговой орбиты на ГСО состоит из трех орбит и пяти основных импульсов, а также из двух дополнительных импульсных воздействий, переводящих отработавшие ступени на орбиты, касающиеся условной границы атмосферы. Причем некоторые из этих орбит составляют траекторию выведения КА с опорной орбиты на целевую, а оставшиеся орбиты — траекторию довыведения КА (спутника) с целевой орбиты на ГСО. Таким образом, переход от задачи с априорным предположением об апсидальности импульсных воздействий к задаче без данного предположения является первым шагом методики «лестница задач».

Согласно [32], решение формализованной задачи импульсной постановки на основе принципа Лагранжа сводится к решению краевой задачи и осуществляется численно методом стрельбы. Краевые задачи принципа максимума решаются численно методом стрельбы [35, 36]. На основе предыдущих исследований выбираются вычислительные схемы метода стрельбы и хорошие начальные приближения искомых параметров пристрелки. Задача Коши решается методом Дормана-Принса 8(7) с автоматическим выбором шага [109], система нелинейных уравнений — методом Ньютона в модификации Исаева-Сонина [49] с использованием в условиях сходимости нормировки Федоренко [108], входящая в него система линейных уравнений — методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу и повторным пересчетом [62]. В силу громоздкости, получение условий краевой задачи в явном виде вызывает определенные сложности. Поэтому уже на этапе формирования краевой задачи и далее при ее численном решении используется технология численно-аналитического дифференцирования [112]. При этом в программной реализации вместо стандартного класса «плавающая точка» используется специально разработанный класс `ext_value`, оказавшийся эффективной реализацией этой идеи.

3.2. Формализация постановки задачи

Перелет рассматривается в центральном ньютоновском гравитационном поле в вакууме в прямоугольной декартовой системе координат, связанной с центром Земли. Ось z этой системы перпендикулярна плоскости экватора и направлена с юга на север, ось x лежит в плоскости экватора и направлена по линии узлов начальной круговой орбиты от нисходящего узла к восходящему, ось y дополняет систему координат до правой. Система дифференциальных уравнений движения центра масс КА имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_x(t), & \dot{y}(t) &= v_y(t), & \dot{z}(t) &= v_z(t), \\ \dot{v}_x(t) &= -\frac{\mu x(t)}{r^3(t)}, & \dot{v}_y(t) &= -\frac{\mu y(t)}{r^3(t)}, & \dot{v}_z(t) &= -\frac{\mu z(t)}{r^3(t)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты центра масс КА в момент времени t ; $r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$ — расстояние от КА до центра Земли в момент времени t ; $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ — компоненты вектора скорости центра масс КА в момент времени t ; μ — гравитационный параметр Земли.

Пусть в момент τ происходит импульсное воздействие. Оно происходит мгновенно:

$$\tau_- = \tau_+ \quad (3.2)$$

(это условие необходимо при формализации задачи согласно [32]); положение объекта при этом не изменяется:

$$x(\tau_-) = x(\tau_+), \quad y(\tau_-) = y(\tau_+), \quad z(\tau_-) = z(\tau_+); \quad (3.3)$$

скорость объекта и масса изменяются скачком, при этом скачок массы связан с величиной импульса формулой Циолковского

$$m(\tau_+) = m(\tau_-) \exp(-\Delta v/c),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta v &= \sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2 + \Delta v_z^2}, \\ \Delta v_x &= v_x(\tau_+) - v_x(\tau_-), \end{aligned}$$

$$\Delta v_y = v_y(\tau_+) - v_y(\tau_-),$$

$$\Delta v_z = v_z(\tau_+) - v_z(\tau_-),$$

$c = P_{уд}g$ — скорость истечения реактивной струи, $P_{уд}$ — удельная тяга, g — ускорение свободного падения на поверхности Земли, Δv_x , Δv_y , Δv_z — компоненты вектора импульса.

Здесь и далее τ_- обозначает окончание пассивного участка, $x(\tau_-)$, $y(\tau_-)$, $z(\tau_-)$ — фазовые переменные в этот момент времени (функции непрерывные слева); τ_+ — начало следующего пассивного участка, $x(\tau_+)$, $y(\tau_+)$, $z(\tau_+)$ — фазовые переменные в этот момент времени (функции непрерывные справа). С точки зрения формализации задачи и применения принципа Лагранжа [32] это разные участки и разные фазовые переменные. В основной теореме [32] подчеркивается, что они различны и обозначаются по-разному. Единая система обозначений приведена для упрощения записи (индексы опущены).

Рассмотрим, как эти общие условия импульсного воздействия формализуются в требующихся в постановке задачи ситуациях: в моменты подачи импульсов в начале и конце траектории, промежуточных импульсных воздействий, импульсного воздействия на фазовом ограничении, импульсных воздействий сброса ступеней в атмосферу.

Импульс в начальный момент времени. В начальный момент времени КА до первого импульсного воздействия находится на опорной круговой орбите заданного наклона i_0 и радиуса R_0 . В силу выбора системы координат долгота восходящего узла $\Omega_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x^2(0_-) + y^2(0_-) + z^2(0_-) &= R_0^2, \\ x(0_-)C_{0x} + y(0_-)C_{0y} + z(0_-)C_{0z} &= 0, \\ v_x(0_-) &= -\frac{v_0}{R_0} (y(0_-) \cos i_0 + z(0_-) \sin i_0), \\ v_y(0_-) &= \frac{v_0}{R_0} x(0_-) \cos i_0, \quad v_z(0_-) = \frac{v_0}{R_0} x(0_-) \sin i_0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} C_{0x} &= 0, \quad C_{0y} = -C_0 \sin i_0, \quad C_{0z} = C_0 \cos i_0, \quad C_0 = \sqrt{\mu R_0}, \\ v_0 &= \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}, \quad R_0 = R_3 + h_0, \end{aligned}$$

C_{0x} , C_{0y} , C_{0z} — компоненты вектора кинетического момента КА относительно

центра Земли, C_0 — значение модуля этого вектора, v_0 — модуль вектора скорости на опорной орбите.

Начальный момент $t = 0_-$ соответствует условиям до импульсного воздействия на круговой орбите, никакому пассивному участку он не соответствует. Величины $x(0_-)$, $y(0_-)$, $z(0_-)$, $v_x(0_-)$, $v_y(0_-)$, $v_z(0_-)$ — координаты и компоненты вектора скорости на круговой орбите до импульсного воздействия с учетом (3.2), (3.3) — при формализации задачи в соответствии с [32] из рассмотрения исключаются:

$$x(0_+)^2 + y(0_+)^2 + z(0_+)^2 = R_0^2, \quad x(0_+)C_{0x} + y(0_+)C_{0y} + z(0_+)C_{0z} = 0. \quad (3.5)$$

Отметим, что из пяти условий (3.4) в формализованной постановке задачи остается два (3.5). Три последних условия (3.4) входят составной частью в величину начального импульса:

$$\begin{aligned} \Delta v_{0x} &= v_x(0_+) + \frac{v_0}{R_0} (y(0_+) \cos i_0 + z(0_+) \sin i_0), \\ \Delta v_{0y} &= v_y(0_+) - \frac{v_0}{R_0} x(0_+) \cos i_0, \\ \Delta v_{0z} &= v_z(0_+) - \frac{v_0}{R_0} x(0_+) \sin i_0, \\ \Delta v_0 &= \sqrt{\Delta v_{0x}^2 + \Delta v_{0y}^2 + \Delta v_{0z}^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Промежуточные импульсные воздействия. В моменты импульсных воздействий в промежуточные моменты времени (без дополнительных условий и ограничений) t_1 и t_2 выполняются условия:

$$t_{k+} - t_{k-} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (3.7)$$

$$x(t_{k+}) - x(t_{k-}) = 0, \quad y(t_{k+}) - y(t_{k-}) = 0, \quad z(t_{k+}) - z(t_{k-}) = 0; \quad (3.8)$$

величины импульсных воздействий в эти моменты времени имеют вид:

$$\Delta v_k = \sqrt{\Delta v_{kx}^2 + \Delta v_{ky}^2 + \Delta v_{kz}^2}, \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta v_{kx} &= v_x(t_{k+}) - v_x(t_{k-}), \\ \Delta v_{ky} &= v_y(t_{k+}) - v_y(t_{k-}), \\ \Delta v_{kz} &= v_z(t_{k+}) - v_z(t_{k-}).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Импульсное воздействие на фазовом ограничении. В момент импульсного воздействия t_R на фазовом ограничении выполняются условия:

$$t_{R+} - t_{R-} = 0,\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}x(t_{R+}) - x(t_{R-}) &= 0, \\ y(t_{R+}) - y(t_{R-}) &= 0, \\ z(t_{R+}) - z(t_{R-}) &= 0,\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$x^2(t_{R+}) + y^2(t_{R+}) + z^2(t_{R+}) - R_{\max}^2 = 0,\tag{3.13}$$

где R_{\max} — величина максимального удаления КА от Земли.

$$x(t_{R-})v_x(t_{R-}) + y(t_{R-})v_y(t_{R-}) + z(t_{R-})v_z(t_{R-}) \geq 0,\tag{3.14}$$

$$x(t_{R+})v_x(t_{R+}) + y(t_{R+})v_y(t_{R+}) + z(t_{R+})v_z(t_{R+}) \leq 0;\tag{3.15}$$

величина импульсного воздействия в этот момент времени имеет вид:

$$\Delta v_R = \sqrt{\Delta v_{xR}^2 + \Delta v_{yR}^2 + \Delta v_{zR}^2},\tag{3.16}$$

где

$$\begin{aligned}\Delta v_{xR} &= v_x(t_{R+}) - v_x(t_{R-}), \\ \Delta v_{yR} &= v_y(t_{R+}) - v_y(t_{R-}), \\ \Delta v_{zR} &= v_z(t_{R+}) - v_z(t_{R-}).\end{aligned}\tag{3.17}$$

Условия (3.14), (3.15) подчеркивают возможность излома траектории в момент импульсного воздействия на фазовом ограничении: перед выходом на фазовое ограничение (3.13) радиальная составляющая скорости КА положительна (3.14), а после схода — отрицательна (3.15).

Импульсы сброса ступеней. В моменты τ_1 и τ_2 сброса первой и второй сту-

пеней выполняются условия

$$\tau_{i+} - \tau_{i-} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} x(\tau_{i+}) - x(\tau_{i-}) = 0, \quad y(\tau_{i+}) - y(\tau_{i-}) = 0, \quad z(\tau_{i+}) - z(\tau_{i-}) = 0, \\ v_x(\tau_{i+}) - v_x(\tau_{i-}) = 0, \quad v_y(\tau_{i+}) - v_y(\tau_{i-}) = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$v_z(\tau_{i+}) - v_z(\tau_{i-}) = 0,$$

$$x(\tau_{i-})v_x(\tau_{i-}) + y(\tau_{i-})v_y(\tau_{i-}) + z(\tau_{i-})v_z(\tau_{i-}) = 0; \quad (3.20)$$

величины импульсных воздействий в эти моменты времени имеют вид:

$$\Delta v_{c\delta i} = v_{\tau i} - v_{c\delta i}, \quad i = 1, 2, \quad (3.21)$$

где $v_{\tau i} = \sqrt{v_x^2(\tau_{i-}) + v_y^2(\tau_{i-}) + v_z^2(\tau_{i-})}$ — модуль скорости в апогее орбиты сброса ступени, $v_{c\delta i}$ — модуль скорости ступени в апогее соответствующей орбиты, касающейся условной границы атмосферы (т.е. после дополнительного импульсного воздействия). Согласно [44, §2.01] $v_{c\delta i}$ вычисляется по формуле:

$$v_{c\delta i} = \sqrt{\frac{2\mu r_{\text{атм}}}{r_{ai}(r_{ai} + r_{\text{атм}})}}, \quad (3.22)$$

где $r_{ai} = \sqrt{x^2(\tau_{i-}) + y^2(\tau_{i-}) + z^2(\tau_{i-})}$ — радиус апогея соответствующей орбиты, с которой происходит сброс ступени, $r_{\text{атм}} = R_3 + 100$ км — радиус перигея орбиты, касающейся условной границы атмосферы (постоянная величина в задаче), R_3 — радиус Земли.

Импульс в конечный момент времени. После последнего импульсного воздействия КА должен находиться на ГСО:

$$\begin{aligned} x^2(T_+) + y^2(T_+) - R_{\text{ГСО}}^2 = 0, \quad z(T_+) = 0, \\ v_x(T_+) = -\frac{v_{\text{ГСО}}}{R_{\text{ГСО}}}y(T_+), \quad v_y(T_+) = \frac{v_{\text{ГСО}}}{R_{\text{ГСО}}}x(T_+), \quad v_z(T_+) = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $v_{\text{ГСО}} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{\text{ГСО}}}}$ — модуль вектора скорости на ГСО, $R_{\text{ГСО}}$ — радиус ГСО.

Как и в начальный момент времени с использованием условий (3.2), (3.3), при формализации задачи величины $x(T_+)$, $y(T_+)$, $z(T_+)$, $v_x(T_+)$, $v_y(T_+)$, $v_z(T_+)$ и сам

момент T_+ из рассмотрения исключаются, а условия (3.23) преобразуются:

$$x^2(T_-) + y^2(T_-) - R_{\text{ГСО}}^2 = 0, \quad z(T_-) = 0; \quad (3.24)$$

величина импульсного воздействия в момент выведения на ГСО имеет вид:

$$\Delta v_T = \sqrt{\Delta v_{Tx}^2 + \Delta v_{Ty}^2 + \Delta v_{Tz}^2}, \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta v_{Tx} &= -\frac{v_{\text{ГСО}}}{R_{\text{ГСО}}}y(T_-) - v_x(T_-), \\ \Delta v_{Ty} &= \frac{v_{\text{ГСО}}}{R_{\text{ГСО}}}x(T_-) - v_y(T_-), \quad \Delta v_{Tz} = -v_z(T_-). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Функционал и ограничение импульса довыведения. Как и во второй главе диссертации масса КА считается обезразмеренной и в начальный момент времени равна единице, полезная масса вычисляется по формуле (2.6). Она может быть представлена в виде произведения двух множителей:

$$\begin{aligned} m_{\text{п}} &= m_{\text{п1}} \cdot m_{\text{п2}}, \\ m_{\text{п1}} &= \exp(-u_1/c) - \frac{\alpha(1 - \exp(-u_1/c))}{(1 + \alpha)\exp(-\Delta v_{c61}/c) - \alpha}, \\ m_{\text{п2}} &= \exp(-u_2/c) - \frac{\alpha(1 - \exp(-u_2/c))}{(1 + \alpha)\exp(-\Delta v_{c62}/c) - \alpha}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Решается задача максимизации полезной массы — массы КА на целевой орбите, оставшейся после сброса второй ступени:

$$-m_{\text{п}} \rightarrow \min. \quad (3.28)$$

Сумма импульсов довыведения $\Delta v_{\text{дов}}$ с целевой орбиты на ГСО ограничена заданной величиной Δv^* :

$$\Delta v_{\text{дов}} \leq \Delta v^*. \quad (3.29)$$

Неизвестными в задаче являются

— моменты времени $t_1, t_2, t_R, \tau_1, \tau_2, T$;

— координаты и скорости КА в начальный момент времени после импульсного воздействия: $x(0_+), y(0_+), z(0_+), v_x(0_+), v_y(0_+), v_z(0_+)$;

— координаты и скорости КА в моменты времени t_i ($i = 1, 2, R$): $x(t_{i+}), x(t_{i-})$,

$y(t_{i+}), y(t_{i-}), z(t_{i+}), z(t_{i-}), v_x(t_{i-}), v_x(t_{i+}), v_y(t_{i-}), v_y(t_{i+}), v_z(t_{i-}), v_z(t_{i+});$

— координаты и скорости КА в конечный момент времени до импульсного воздействия: $x(T_-), y(T_-), z(T_-), v_x(T_-), v_y(T_-), v_z(T_-);$

— координаты и скорости КА в моменты τ_j ($j = 1, 2$): $x(\tau_{j+}), x(\tau_{j-}), y(\tau_{j+}), y(\tau_{j-}), z(\tau_{j+}), z(\tau_{j-}), v_x(\tau_{j+}), v_x(\tau_{j-}), v_y(\tau_{j+}), v_y(\tau_{j-}), v_z(\tau_{j+}), v_z(\tau_{j-}).$

Формализация задачи не закончена: не установлены соответствия точной очередности между моментами $t_1, t_2, t_R, \tau_1, \tau_2$. Их установление зафиксирует структуру траектории и позволит на основе принципа Лагранжа сформировать краевую задачу.

В результате решения задачи оказалось, что для импульсов довыведения 0.5 км/с, 1.0 км/с и 1.5 км/с очередность указанных моментов, позволяющих получить решение задачи, различна и эти величины представляют собой три характерных случая. Выбор других последовательностей либо не позволяет решить краевую задачу, либо полученное решение краевой задачи не являются искомым решением исходной задачи оптимизации.

В случае импульса довыведения 0.5 км/с

$$0 < \tau_1 < t_1 < t_R < t_2 < \tau_2 < T$$

и траектория состоит из шести пассивных участков (рис. 3.1): 1) от 0_+ до τ_{1-} , 2) от τ_{1+} до t_{1-} , 3) от t_{1+} до t_{R-} , 4) от t_{R+} до t_{2-} , 5) от t_{2+} до τ_{2-} , 6) от τ_{2+} до T_- .

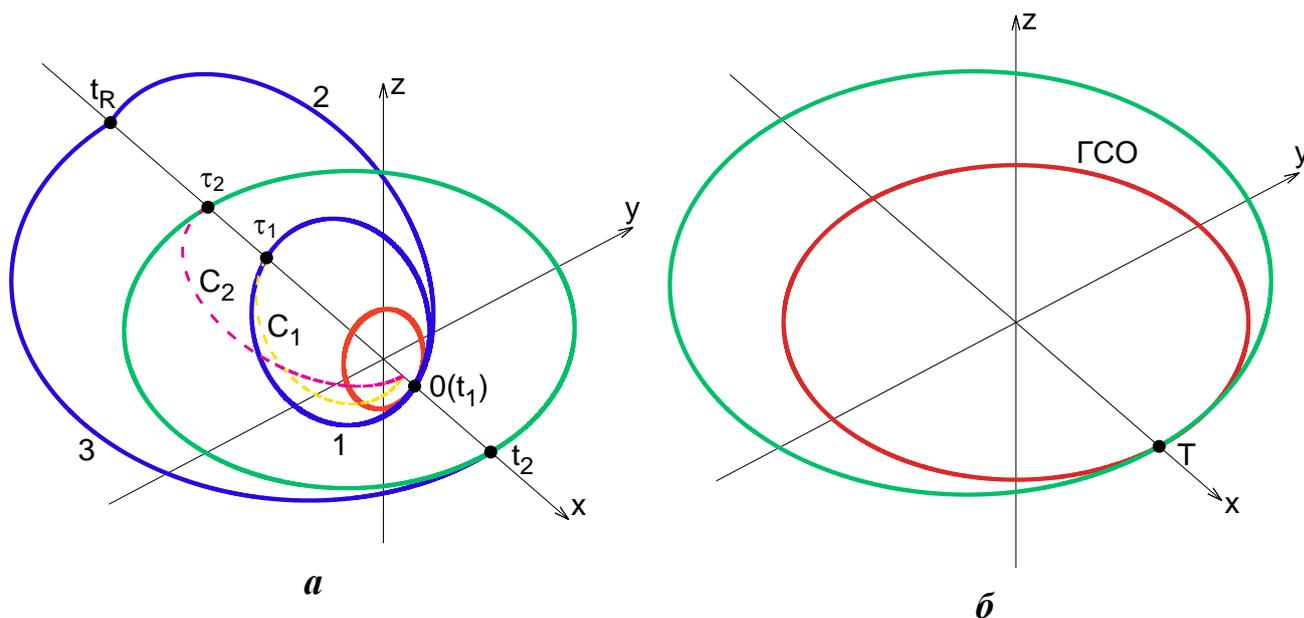


Рис. 3.1: Схема перелета КА на целевую орбиту и довыведения на ГСО при импульсе довыведения 0.5 км/с

В начальный момент времени подается импульс, переводящий КА с опорной орбиты на первую переходную с апогеем r_{a1} и наклоном i_1 . В момент τ_1 прохождения апогея первая ступень переводится на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, далее в момент времени t_1 прохождения перигея подается импульс, переводящий КА на вторую переходную орбиту с апогеем r_{a2} и наклоном i_2 . В момент времени t_R прохождения апогея (на фазовом ограничении) подается импульс, переводящий КА на третью переходную орбиту с перигеем $r_{п3}$ и наклоном i_3 . В момент времени t_2 прохождения перигея подается импульс, переводящий КА на целевую орбиту с апогеем r_{ac} и наклоном i_c . В момент времени τ_2 прохождения апогея подается импульс, переводящий вторую ступень на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы. В момент времени T прохождения перигея КА переводится с целевой орбиты на ГСО — в рассматриваемом случае орбита довыведения с целевой на ГСО отсутствует.

В случае импульса довыведения 1.0 км/с

$$0 < \tau_1 < t_1 < t_R < \tau_2 < t_2 < T$$

и траектория состоит из шести пассивных участков (рис. 3.2): 1) от 0_+ до τ_{1-} , 2) от τ_{1+} до t_{1-} , 3) от t_{1+} до t_{R-} , 4) от t_{R+} до τ_{2-} , 5) от τ_{2+} до t_{2-} , 6) от t_{2+} до T_- .

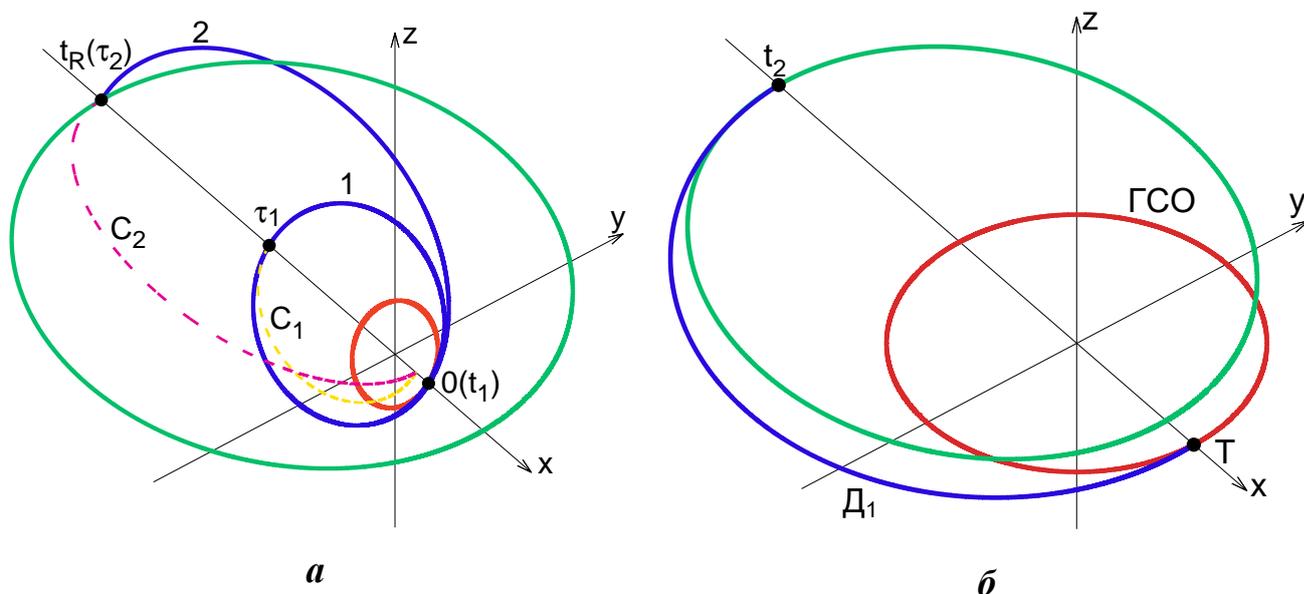


Рис. 3.2: Схема перелета КА на целевую орбиту и довыведения на ГСО при импульсе довыведения 1.0 км/с

В начальный момент времени подается импульс, переводящий КА с опорной

орбиты на первую переходную с апогеем r_{a1} и наклоном i_1 . В момент τ_1 прохождения апогея первая ступень переводится на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, далее в момент времени t_1 прохождения перигея подается импульс, переводящий КА на вторую переходную орбиту с апогеем r_{a2} и наклоном i_2 . В момент времени t_R прохождения апогея (на фазовом ограничении) подается импульс, переводящий КА на целевую орбиту с перигеем $r_{пц}$ и наклоном $i_{ц}$. В момент времени τ_2 прохождения апогея подается импульс, переводящий вторую ступень на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы. В момент времени t_2 прохождения апогея подается импульс, переводящий КА на орбиту довыведения с перигеем $r_{пд1}$ и наклоном $i_{д1}$. В момент времени T прохождения перигея КА переводится с орбиты довыведения на ГСО.

В случае импульса довыведения 1.5 км/с

$$0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < t_R < T$$

и траектория состоит из шести пассивных участков (рис. 3.3): 1) от 0_+ до τ_{1-} , 2) от τ_{1+} до t_{1-} , 3) от t_{1+} до τ_{2-} , 4) от τ_{2+} до t_{2-} , 5) от t_{2+} до t_{R-} , 6) от t_{R+} до T_- .

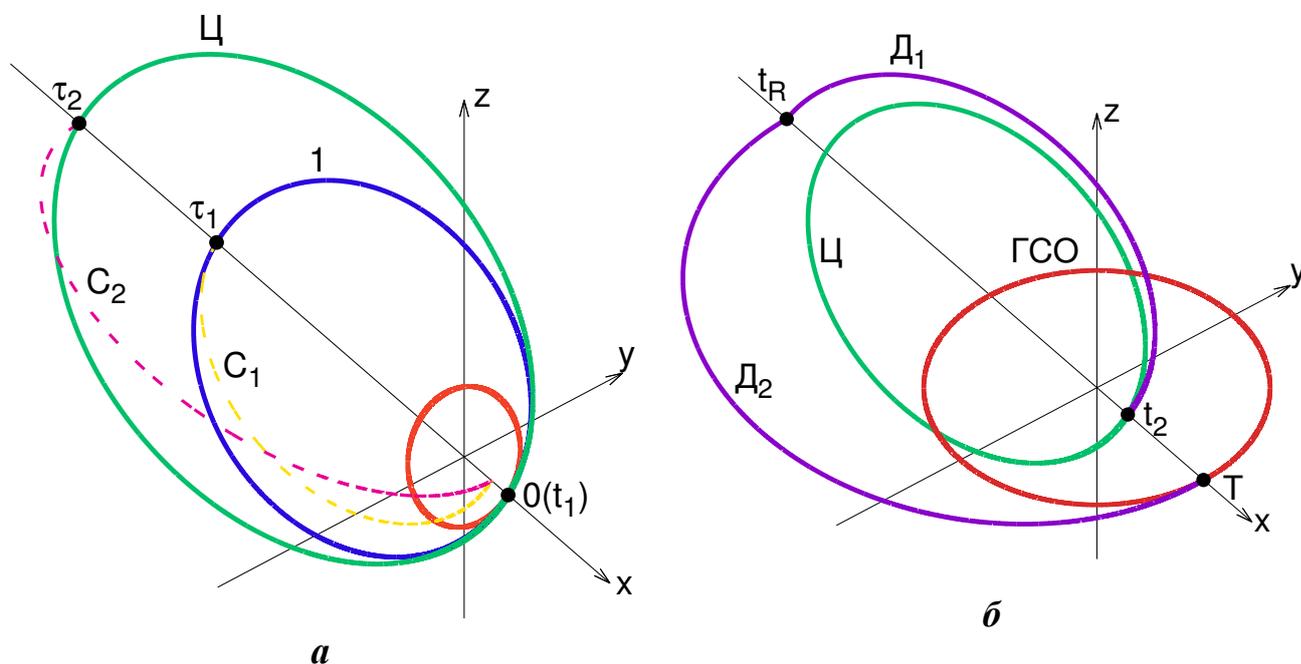


Рис. 3.3: Схема перелета КА на целевую орбиту и довыведения на ГСО при импульсе довыведения 1.5 км/с

В начальный момент времени подается импульс, переводящий КА с опорной орбиты на переходную с апогеем r_{a1} и наклоном i_1 . В момент τ_1 прохождения

апогея первая ступень переводится на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, далее в момент времени t_1 прохождения перигея подается импульс, переводящий КА на целевую орбиту с радиусом апогея $r_{\text{ац}}$ и наклоном $i_{\text{ц}}$. В момент времени τ_2 прохождения апогея подается импульс, переводящий вторую ступень на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы. В момент времени t_2 прохождения перигея подается импульс, переводящий КА на первую орбиту довыведения с апогеем $r_{\text{ад1}}$ и наклоном $i_{\text{д1}}$. В момент времени t_R прохождения апогея (на фазовом ограничении) подается импульс, переводящий КА на вторую орбиту довыведения с перигеем $r_{\text{пд2}}$ и наклоном $i_{\text{д2}}$. В момент времени T прохождения перигея КА переводится со второй орбиты довыведения на ГСО.

3.3. Необходимые условия оптимальности первого порядка

Введем обозначения, которые будем использовать при анализе условий трансверсальности:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_r = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_v = \begin{pmatrix} p_{vx} \\ p_{vy} \\ p_{vz} \end{pmatrix},$$

$$\Delta v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (\text{с соответствующим индексом}).$$

Применение принципа Лагранжа к решаемой задаче рассмотрим для случая импульса довыведения 1.5 км/с:

$$u_1 = \Delta v_0, \quad u_2 = \Delta v_1, \quad \Delta v_{\text{дов}} = \Delta v_2 + \Delta v_R + \Delta v_T.$$

Функция Лагранжа имеет вид:

$$\Lambda = \int_{0_+}^{\tau_{1-}} L dt + \int_{\tau_{1+}}^{t_{1-}} L dt + \int_{t_{1+}}^{\tau_{2-}} L dt + \int_{\tau_{2+}}^{t_{2-}} L dt + \int_{t_{2+}}^{t_{R-}} L dt + \int_{t_{R+}}^{T_-} L dt + l,$$

лагранжиан

$$L = p_x (\dot{x} - v_x) + p_y (\dot{y} - v_y) + p_z (\dot{z} - v_z) + \\ + p_{vx} \left(\dot{v}_x + \frac{\mu x}{r^3} \right) + p_{vy} \left(\dot{v}_y + \frac{\mu y}{r^3} \right) + p_{vz} \left(\dot{v}_z + \frac{\mu z}{r^3} \right),$$

ГАМИЛЬТониан

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z - \frac{\mu}{r^3} (p_{vx} x + p_{vy} y + p_{vz} z),$$

и терминант

$$l = l_0 + l_{\tau_1} + l_{t_1} + l_{\tau_2} + l_{t_2} + l_R + l_T + \lambda_{\text{дов}}(\Delta v_{\text{дов}} - \Delta v^*) - \lambda_0 m_{\text{п}};$$

$l_0, l_{\tau_1}, l_{\tau_2}, l_{t_1}, l_{t_2}, l_R, l_T$ — части терминанта, соответствующие моментам времени $0, \tau_1, \tau_2, t_1, t_2, t_R, T$ и условиям (3.5), (3.7), (3.8), (3.11)–(3.15), (3.18)–(3.20), (3.24). Величины импульсных воздействий Δv_0 (3.6), Δv_k (3.9), (3.10), $\Delta v_{\text{сб}i}$ (3.21), (3.22), Δv_T (3.25), (3.26) входят в терминант в виде компонент $\Delta v_{\text{дов}}$ и $m_{\text{п}}$:

$$\begin{aligned} l_0 &= \lambda_{R0} (x^2(0_+) + y^2(0_+) + z^2(0_+) - R_0^2) + \lambda_{C0} (x(0_+)C_{0x} + y(0_+)C_{0y} + z(0_+)C_{0z}); \\ l_{\tau_i} &= \lambda_{x\tau_i} (x(\tau_{i+}) - x(\tau_{i-})) + \lambda_{y\tau_i} (y(\tau_{i+}) - y(\tau_{i-})) + \lambda_{z\tau_i} (z(\tau_{i+}) - z(\tau_{i-})) + \\ &+ \lambda_{vx\tau_i} (v_x(\tau_{i+}) - v_x(\tau_{i-})) + \lambda_{vy\tau_i} (v_y(\tau_{i+}) - v_y(\tau_{i-})) + \lambda_{vz\tau_i} (v_z(\tau_{i+}) - v_z(\tau_{i-})) + \\ &+ \lambda_{rvi} (x(\tau_{i-})v_x(\tau_{i-}) + y(\tau_{i-})v_y(\tau_{i-}) + z(\tau_{i-})v_z(\tau_{i-})) + \lambda_{\tau_i}(\tau_{i+} - \tau_{i-}), \quad i = 1, 2; \\ l_{t_k} &= \lambda_{xtk} (x(t_{k+}) - x(t_{k-})) + \lambda_{ytk} (y(t_{k+}) - y(t_{k-})) + \\ &+ \lambda_{ztk} (z(t_{k+}) - z(t_{k-})) + \lambda_{tk} (t_{k+} - t_{k-}), \quad k = 1, 2; \\ l_R &= \lambda_{xR} (x(t_{R+}) - x(t_{R-})) + \lambda_{yR} (y(t_{R+}) - y(t_{R-})) + \lambda_{zR} (z(t_{R+}) - z(t_{R-})) + \\ &+ \lambda_R (t_{R+} - t_{R-}) + \lambda_{R1} (x^2(t_{R+}) + y^2(t_{R+}) + z^2(t_{R+}) - R_{\text{max}}^2) + \\ &+ \lambda_{R2} (x(t_{R-})v_x(t_{R-}) + y(t_{R-})v_y(t_{R-}) + z(t_{R-})v_z(t_{R-})) + \\ &+ \lambda_{R3} (x(t_{R+})v_x(t_{R+}) + y(t_{R+})v_y(t_{R+}) + z(t_{R+})v_z(t_{R+})); \\ l_T &= \lambda_T (x^2(T_-) + y^2(T_-) - R_T^2) + \lambda_{zT} z(T_-). \end{aligned}$$

$\lambda_{\text{дов}}, \lambda_0; \lambda_{R0}, \lambda_{C0}; \lambda_{x\tau_i}, \lambda_{y\tau_i}, \lambda_{z\tau_i}, \lambda_{vx\tau_i}, \lambda_{vy\tau_i}, \lambda_{vz\tau_i}, \lambda_{rvi}, \lambda_{\tau_i}$ ($i = 1, 2$); $\lambda_{xtk}, \lambda_{ytk}, \lambda_{ztk}, \lambda_{tk}$ ($k = 1, 2$); $\lambda_{xR}, \lambda_{yR}, \lambda_{zR}, \lambda_R, \lambda_{R1}, \lambda_{R2}, \lambda_{R3}; \lambda_T, \lambda_{zT}$ — числовые множители Лагранжа, $p_x(\cdot), p_y(\cdot), p_z(\cdot), p_{v_x}(\cdot), p_{v_y}(\cdot), p_{v_z}(\cdot)$ — сопряженные переменные (функциональные множители Лагранжа) на каждом из шести участков. Дополнительная нумерация функций, связанная с номером участка формально необходимая согласно теореме [32], для упрощения системы обозначений не используется.

Согласно принципу Лагранжа необходимые условия (первого порядка) минимума имеют следующий вид.

1) Условия стационарности по фазовым переменным (уравнения Эйлера–

Лагранжа):

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_x &= \frac{\mu}{r^3} \left[p_{vx} - \frac{3x}{r^2} (xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}) \right], \\
 \dot{p}_y &= \frac{\mu}{r^3} \left[p_{vy} - \frac{3y}{r^2} (xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}) \right], \\
 \dot{p}_z &= \frac{\mu}{r^3} \left[p_{vz} - \frac{3z}{r^2} (xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}) \right], \\
 \dot{p}_{vx} &= -p_x, \quad \dot{p}_{vy} = -p_y, \quad \dot{p}_{vz} = -p_z.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

2) Условия трансверсальности и стационарности:

а) в начальный момент времени:

$$\begin{aligned}
 p_x(0_+) &= 2\lambda_{R0}x(0_+) + \lambda_{C0}C_{0x} - \rho_0 \frac{v_0}{R_0} \left(\frac{\Delta v_{0y}}{\Delta v_0} \cos i_0 + \frac{\Delta v_{0z}}{\Delta v_0} \sin i_0 \right), \\
 p_y(0_+) &= 2\lambda_{R0}y(0_+) + \lambda_{C0}C_{0y} + \rho_0 \frac{v_0}{R_0} \left(\frac{\Delta v_{0x}}{\Delta v_0} \cos i_0 \right), \\
 p_z(0_+) &= 2\lambda_{R0}z(0_+) + \lambda_{C0}C_{0z} + \rho_0 \frac{v_0}{R_0} \left(\frac{\Delta v_{0x}}{\Delta v_0} \sin i_0 \right), \\
 p_{vx}(0_+) &= -\rho_0 \frac{\Delta v_{0x}}{\Delta v_0}, \quad p_{vy}(0_+) = -\rho_0 \frac{\Delta v_{0y}}{\Delta v_0}, \quad p_{vz}(0_+) = -\rho_0 \frac{\Delta v_{0z}}{\Delta v_0},
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

где

$$\rho_0 = m_{\text{п2}} \left(1 + \frac{\alpha}{(1 + \alpha) \exp(-\Delta v_{\text{сб1}}/c) - \alpha} \right) \exp(-u_1/c) \left(-\frac{\lambda_0}{c} \right)$$

— величина базис-вектора Лоудена в начальный момент времени:

$$\rho_0 = \sqrt{p_{vx}^2(0_+) + p_{vy}^2(0_+) + p_{vz}^2(0_+)}.$$

Из (3.31) выражений получаем, что

$$\begin{aligned}
 p_x(0_+) &= 2\lambda_{R0}x(0_+) + \lambda_{C0}C_{0x} + \frac{v_0}{R_0} (p_{vy}(0_+) \cos i_0 + p_{vz}(0_+) \sin i_0), \\
 p_y(0_+) &= 2\lambda_{R0}y(0_+) + \lambda_{C0}C_{0y} - \frac{v_0}{R_0} p_{vy}(0_+) \cos i_0, \\
 p_z(0_+) &= 2\lambda_{R0}z(0_+) + \lambda_{C0}C_{0z} - \frac{v_0}{R_0} p_{vz}(0_+) \sin i_0.
 \end{aligned}$$

Условие стационарности в начальный момент времени отсутствует.

Интеграл Белецкого-Егорова-Пайнса в центральном ньютоновском гравита-

ционном поле задается формулой:

$$\vec{K} = \vec{r} \times \vec{p}_r + \vec{v} \times \vec{p}_v.$$

Пусть $\vec{e}_r, \vec{e}_v, \vec{e}_c$ — три ортонормированных вектора, $\vec{C} = R_0 \cdot v_0 \cdot \vec{e}_c$ — вектор кинетического момента — постоянная задачи, $r = R_0 \cdot \vec{e}_r$ — радиус-вектор, $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{e}_v$ — вектор скорости на круговой орбите до приложения импульса. Согласно свойству векторного произведения

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_v = \vec{e}_c, \quad \vec{e}_v \times \vec{e}_c = \vec{e}_r, \quad \vec{e}_c \times \vec{e}_r = \vec{e}_v.$$

Из условий (3.31) следует $\vec{C} \cdot \vec{K} = 0$.

В самом деле

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta v_0} = \vec{v}(0_+) - \vec{v}_0 = \vec{v}(0_+) - \frac{1}{R_0} \vec{C} \times \vec{r} &= \begin{pmatrix} v_x(0_+) - \frac{zC_y}{R_0^2} + \frac{yC_z}{R_0^2} \\ v_y(0_+) - \frac{xC_z}{R_0^2} + \frac{zC_x}{R_0^2} \\ v_z(0_+) - \frac{yC_x}{R_0^2} + \frac{xC_y}{R_0^2} \end{pmatrix} = \\ &= \Delta v_{0r} \vec{e}_r + \Delta v_{0v} \vec{e}_v + \Delta v_{0c} \vec{e}_c, \end{aligned}$$

$$\vec{p}_r(0_+) = 2\lambda_{R0} \vec{r}(0_+) + \lambda_{C0} \vec{C} - \lambda_0 \frac{\partial m_{\Pi}}{\partial \Delta v_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta v_0}{\partial x(0_+)} \\ \frac{\partial \Delta v_0}{\partial y(0_+)} \\ \frac{\partial \Delta v_0}{\partial z(0_+)} \end{pmatrix}.$$

С учетом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta v_0}{\partial x(0_+)} &= \frac{\Delta v_{0z} C_y - \Delta v_{0y} C_z}{R_0^2 \Delta v_0}, \quad \frac{\partial \Delta v_0}{\partial y(0_+)} = \frac{\Delta v_{0x} C_z - \Delta v_{0z} C_x}{R_0^2 \Delta v_0}, \\ \frac{\partial \Delta v_0}{\partial z(0_+)} &= \frac{\Delta v_{0y} C_x - \Delta v_{0x} C_y}{R_0^2 \Delta v_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_r(0_+) &= 2\lambda_{R0} \vec{r}(0_+) + \lambda_{C0} \vec{C} + \frac{\rho}{R_0^2 \Delta v_0} \vec{C} \times \overrightarrow{\Delta v_0} = \\ &= 2\lambda_{R0} \vec{r}(0_+) + \lambda_{C0} \vec{C} + \frac{\rho}{R_0^2 \Delta v_0} C_0 \vec{e}_c \times (\Delta v_{0r} \vec{e}_r + \Delta v_{0v} \vec{e}_v + \Delta v_{0c} \vec{e}_c) = \\ &= 2\lambda_{R0} \vec{r} + \lambda_{C0} \vec{C} + \frac{v_0 \rho}{R_0 \Delta v_0} \Delta v_{0r} \vec{e}_v + \frac{v_0 \rho}{R_0 \Delta v_0} \Delta v_{0v} (-\vec{e}_r), \end{aligned}$$

$$\vec{p}_v(0_+) = -\lambda_0 \frac{\partial m_{\Pi}}{\partial \Delta v_0} \frac{\partial \vec{\Delta v}_0}{\Delta v_0}.$$

Тогда

$$\vec{r}(0_+) \times \vec{p}_r(0_+) = \vec{r}(0_+) \times \left(2\lambda_{R0}\vec{r}(0_+) + \lambda_{C0}\vec{C} + \frac{v_0\rho_0}{R_0\Delta v_0}\Delta v_{0r}\vec{e}_v - \frac{v_0\rho_0}{R_0\Delta v_0}\Delta v_{0v}\vec{e}_r \right).$$

Так как

$$\begin{aligned} \vec{r}(0_+) \times \vec{r}(0_+) &= \vec{0}, \\ \lambda_{C0} \left(\vec{r}(0_+) \times \vec{C} \right) &= \lambda_{C0} R_0^2 v_0 (\vec{e}_r \times \vec{e}_c) = -\lambda_{C0} R_0^2 v_0 \vec{v}_0, \end{aligned}$$

то

$$\vec{C} \cdot (\vec{r}(0_+) \times \vec{p}_r(0_+)) = \vec{C} \cdot \frac{v_0^3 \rho}{\Delta v_0} \Delta v_{0r} \cdot \vec{e}_c = \frac{R_0 v_0^2 \rho}{\Delta v_0} \Delta v_{0r}. \quad (3.32)$$

Второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \vec{v}(0_+) \times \vec{p}_v(0_+) &= \vec{v}(0_+) \times \left(\frac{\rho_0}{\Delta v_0} \vec{\Delta v}_0 \right) = \left(\vec{v}(0_+) = \vec{\Delta v}_0 + \vec{v}_0 \right) = \\ &= \left(\vec{\Delta v}_0 + \vec{v}_0 \right) \times \left(\frac{\rho_0}{\Delta v_0} \vec{\Delta v}_0 \right) = \frac{\rho_0 v_0}{\Delta v_0} \vec{e}_v \times (\Delta v_{0r} \vec{e}_r + \Delta v_{0v} \vec{e}_v + \Delta v_{0c} \vec{e}_c) = \\ &= \frac{\rho v_0}{\Delta v_0} \Delta v_{0r} \cdot (-\vec{e}_c) + \frac{\rho v_0}{\Delta v_0} \Delta v_{0c} \cdot \vec{e}_r, \end{aligned}$$

и

$$\vec{C} \cdot (\vec{v}(0_+) \times \vec{p}_v(0_+)) = \vec{C} \cdot \frac{\rho_0 v_0}{\Delta v_0} \Delta v_{0r} \cdot (-\vec{e}_c) = -\frac{R_0 v_0^2 \rho_0}{\Delta v_0} \Delta v_{0r}. \quad (3.33)$$

Складывая (3.32) и (3.33) получаем, что $\vec{C} \cdot \vec{K} = \vec{0}$. То есть компонента векторного интеграла Белецкого-Егорова-Пайнса, сонаправленная с компонентой вектора \vec{e}_c , равна нулю.

б) В моменты времени τ_i ($i = 1, 2$) сброса отработавших ступеней:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{\Pi i}}{\partial \Delta v_{c\delta i}} &= \frac{\alpha(1+\alpha)(1-\exp(-u_i/c)) \exp(-\Delta v_{c\delta i}/c)}{((1+\alpha)\exp(-\Delta v_{c\delta i}/c) - \alpha)^2} \left(-\frac{1}{c} \right), \\ \frac{\partial v_{c\delta i}}{\partial r_{ai}} &= \frac{\mu r_{\text{атм}}}{v_{c\delta i}} \frac{2r_{ai} + r_{\text{атм}}}{(r_{ai}(r_{ai} + r_{\text{атм}}))^2}. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\rho_{\tau i} = \lambda_0 m_{\Pi(3-i)} \frac{\partial m_{\Pi i}}{\partial \Delta v_{\text{сб}i}} \left(-\frac{\partial v_{\text{сб}i}}{\partial r_{\text{ai}}} \right), \quad \rho'_{\tau i} = \lambda_0 m_{\Pi(3-i)} \frac{\partial m_{\Pi i}}{\partial \Delta v_{\text{сб}i}}, \quad (3.34)$$

С учетом (3.34) вид условий трансверсальности упрощается:

$$\begin{aligned} p_x(\tau_{i-}) &= \lambda_{x\tau i} - \lambda_{rvi} v_x(\tau_{i-}) + \rho_{\tau i} \frac{x(\tau_{i-})}{r_{\text{ai}}}, \\ p_y(\tau_{i-}) &= \lambda_{y\tau i} - \lambda_{rvi} v_y(\tau_{i-}) + \rho_{\tau i} \frac{y(\tau_{i-})}{r_{\text{ai}}}, \\ p_z(\tau_{i-}) &= \lambda_{z\tau i} - \lambda_{rvi} v_z(\tau_{i-}) + \rho_{\tau i} \frac{z(\tau_{i-})}{r_{\text{ai}}}, \\ p_{vx}(\tau_{i-}) &= \lambda_{vx\tau i} - \lambda_{rvi} x(\tau_{i-}) + \rho'_{\tau i} \frac{v_x(\tau_{i-})}{v_{\tau i}}, \\ p_{vy}(\tau_{i-}) &= \lambda_{vy\tau i} - \lambda_{rvi} y(\tau_{i-}) + \rho'_{\tau i} \frac{v_y(\tau_{i-})}{v_{\tau i}}, \\ p_{vz}(\tau_{i-}) &= \lambda_{vz\tau i} - \lambda_{rvi} z(\tau_{i-}) + \rho'_{\tau i} \frac{v_z(\tau_{i-})}{v_{\tau i}}, \\ p_x(\tau_{i+}) &= \lambda_{x\tau i}, \quad p_y(\tau_{i+}) = \lambda_{y\tau i}, \quad p_z(\tau_{i+}) = \lambda_{z\tau i}, \\ p_{vx}(\tau_{i+}) &= \lambda_{vx\tau i}, \quad p_{vy}(\tau_{i+}) = \lambda_{vy\tau i}, \quad p_{vz}(\tau_{i+}) = \lambda_{vz\tau i}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Из условий стационарности

$$H(\tau_{i-}) = -\lambda_{\tau i}, \quad H(\tau_{i+}) = -\lambda_{\tau i}.$$

следует непрерывность гамильтониана в эти моменты времени:

$$H(\tau_{i-}) = H(\tau_{i+}). \quad (3.36)$$

Из условий трансверсальности (3.35) следует, что в моменты сброса ступеней векторный интеграл Белецкого-Егорова-Пайнса непрерывен:

$$\vec{K}|_{\tau_{i-}} = \vec{K}|_{\tau_{i+}}.$$

В самом деле, используя непрерывность координат и скоростей КА в эти мо-

менты времени получаем

$$\vec{p}_r(\tau_{i+}) - \vec{p}_r(\tau_{i-}) = \lambda_{rvi} \begin{pmatrix} v_x(\tau_{i-}) \\ v_y(\tau_{i-}) \\ v_z(\tau_{i-}) \end{pmatrix} - \frac{\rho_{\tau i}}{r_{ai}} \begin{pmatrix} x(\tau_{i-}) \\ y(\tau_{i-}) \\ z(\tau_{i-}) \end{pmatrix} = \lambda_{rvi} \vec{v}(\tau_i) - \frac{\rho_{\tau i}}{r_{ai}} \vec{r}(\tau_i),$$

$$\vec{p}_v(\tau_{i+}) - \vec{p}_v(\tau_{i-}) = \lambda_{rvi} \begin{pmatrix} x(\tau_{i-}) \\ y(\tau_{i-}) \\ z(\tau_{i-}) \end{pmatrix} - \frac{\rho'_{\tau i}}{v_{\tau i}} \begin{pmatrix} v_x(\tau_{i-}) \\ v_y(\tau_{i-}) \\ v_z(\tau_{i-}) \end{pmatrix} = \lambda_{rvi} \vec{r}(\tau_i) - \frac{\rho'_{\tau i}}{v_{\tau i}} \vec{v}(\tau_i).$$

Тогда, используя свойства векторного произведения:

$$\begin{aligned} \vec{r}(\tau_{i+}) \times \vec{p}_r(\tau_{i+}) - \vec{r}(\tau_{i-}) \times \vec{p}_r(\tau_{i-}) &= \\ &= \vec{r}(\tau_i) \times (\vec{p}_r(\tau_{i+}) - \vec{p}_r(\tau_{i-})) = \vec{r}(\tau_i) \times \left(\lambda_{rvi} \vec{v}(\tau_i) - \frac{\rho_{\tau i}}{r_{ai}} \vec{r}(\tau_i) \right) = \\ &= \lambda_{rvi} (\vec{r}(\tau_i) \times \vec{v}(\tau_i)) - \frac{\rho_{\tau i}}{r_{ai}} (\vec{r}(\tau_i) \times \vec{r}(\tau_i)) = \lambda_{rvi} (\vec{r}(\tau_i) \times \vec{v}(\tau_i)), \\ \vec{v}(\tau_{i+}) \times \vec{p}_v(\tau_{i+}) - \vec{v}(\tau_{i-}) \times \vec{p}_v(\tau_{i-}) &= \\ &= \vec{v}(\tau_i) \times (\vec{p}_v(\tau_{i+}) - \vec{p}_v(\tau_{i-})) = \vec{v}(\tau_i) \times \left(\lambda_{rvi} \vec{r}(\tau_i) - \frac{\rho'_{\tau i}}{v_{\tau i}} \vec{v}(\tau_i) \right) = \\ &= \lambda_{rvi} (\vec{v}(\tau_i) \times \vec{r}(\tau_i)) - \frac{\rho'_{\tau i}}{v_{\tau i}} (\vec{v}(\tau_i) \times \vec{v}(\tau_i)) = \lambda_{rvi} (\vec{v}(\tau_i) \times \vec{r}(\tau_i)). \end{aligned}$$

Откуда и следует, что

$$\begin{aligned} \vec{K}|_{\tau_{i+}} - \vec{K}|_{\tau_{i-}} &= \lambda_{rvi} (\vec{r}(\tau_i) \times \vec{v}(\tau_i)) + \lambda_{rvi} (\vec{v}(\tau_i) \times \vec{r}(\tau_i)) = \\ &= \lambda_{rvi} (\vec{r}(\tau_i) \times \vec{v}(\tau_i) - \vec{r}(\tau_i) \times \vec{v}(\tau_i)) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

в) В момент времени t_1 .

Обозначим

$$\rho_1 = \frac{\lambda_0}{c} \exp(-u_2/c) \left(1 + \frac{\alpha}{(1 + \alpha) \exp(-\Delta v_{c62}/c) - \alpha} \right) m_{п1}.$$

Тогда

$$p_x(t_{1-}) = \lambda_{xt1}, \quad p_y(t_{1-}) = \lambda_{yt1}, \quad p_z(t_{1-}) = \lambda_{zt1},$$

$$\begin{aligned}
p_{vx}(t_{1-}) &= \rho_1 \frac{\Delta v_{1x}}{\Delta v_1}, & p_{vy}(t_{1-}) &= \rho_1 \frac{\Delta v_{1y}}{\Delta v_1}, & p_{vz}(t_{1-}) &= \rho_1 \frac{\Delta v_{1z}}{\Delta v_1}, \\
p_x(t_{1+}) &= \lambda_{xt1}, & p_y(t_{1+}) &= \lambda_{yt1}, & p_z(t_{1+}) &= \lambda_{zt1}, \\
p_{vx}(t_{1+}) &= \rho_1 \frac{\Delta v_{1x}}{\Delta v_1}, & p_{vy}(t_{1+}) &= \rho_1 \frac{\Delta v_{1y}}{\Delta v_1}, & p_{vz}(t_{1+}) &= \rho_1 \frac{\Delta v_{1z}}{\Delta v_1}, \\
H(t_{1-}) &= -\lambda_{t1}, & H(t_{1+}) &= -\lambda_{t1},
\end{aligned}$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{p_{vx}^2(t_{1-}) + p_{vy}^2(t_{1-}) + p_{vz}^2(t_{1-})} = \sqrt{p_{vx}^2(t_{1+}) + p_{vy}^2(t_{1+}) + p_{vz}^2(t_{1+})}.$$

Следствиями условий трансверсальности и стационарности в момент t_1 являются сонаправленность вектора импульса $(\Delta v_{1x}, \Delta v_{1y}, \Delta v_{1z})$ и базис-вектора Лодена $(p_{vx}(t_1), p_{vy}(t_1), p_{vz}(t_1))$ и условия непрерывности сопряженных переменных и гамильтониана в этот момент времени:

$$\begin{aligned}
p_x(t_{1+}) - p_x(t_{1-}) &= 0, & p_{vx}(t_{1+}) - p_{vx}(t_{1-}) &= 0, \\
p_y(t_{1+}) - p_y(t_{1-}) &= 0, & p_{vy}(t_{1+}) - p_{vy}(t_{1-}) &= 0, \\
p_z(t_{1+}) - p_z(t_{1-}) &= 0, & p_{vz}(t_{1+}) - p_{vz}(t_{1-}) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$H(t_{1+}) - H(t_{1-}) = 0. \tag{3.38}$$

Учет непрерывности радиус-вектора $(x(t_1), y(t_1), z(t_1))$ и сопряженных переменных (3.37) позволяет упростить (3.38) до условия ортогональности вектора $(p_x(t_1), p_y(t_1), p_z(t_1))$ и вектора импульса, известное ранее как необходимое условие максимума функции $\rho(t)$ в момент промежуточного импульсного воздействия без дополнительных ограничений [46].

Из условий трансверсальности следует, что в момент времени t_1

$$\vec{K}|_{t_{1-}} = \vec{K}|_{t_{1+}}.$$

Из непрерывности координат КА и сопряженных переменных получаем, что

$$\vec{r}(t_{k+}) \times \vec{p}_r(t_{k+}) - \vec{r}(t_{k-}) \times \vec{p}_r(t_{k-}) = \vec{r}(t_k) \times \vec{p}_r(t_k) - \vec{r}(t_k) \times \vec{p}_r(t_k) = \vec{0}.$$

Используя свойства векторного произведения и непрерывность сопряженных

переменных, вычислим:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t_{k+}) \times \vec{p}_v(t_{k+}) - \vec{v}(t_{k-}) \times \vec{p}_v(t_{k-}) &= \\
= \vec{v}(t_{k+}) \times \vec{p}_v(t_k) - \vec{v}(t_{k-}) \times \vec{p}_v(t_k) &= (\vec{v}(t_{k+}) - \vec{v}(t_{k-})) \times \vec{p}_v(t_k) = \\
= \frac{\rho}{\Delta v_k} ((\vec{v}(t_{k+}) - \vec{v}(t_{k-})) \times (\vec{v}(t_{k+}) - \vec{v}(t_{k-}))) &= \vec{0}.
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

г) В момент времени t_2 :

$$\begin{aligned}
p_x(t_{2-}) &= \lambda_{xt2}, & p_y(t_{2-}) &= \lambda_{yt2}, & p_z(t_{2-}) &= \lambda_{zt2}, \\
p_{vx}(t_{2-}) &= \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{2x}}{\Delta v_2}, & p_{vy}(t_{2-}) &= \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{2y}}{\Delta v_2}, & p_{vz}(t_{2-}) &= \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{2z}}{\Delta v_2}, \\
p_x(t_{2+}) &= \lambda_{xt2}, & p_y(t_{2+}) &= \lambda_{yt2}, & p_z(t_{2+}) &= \lambda_{zt2}, \\
p_{vx}(t_{2+}) &= \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{2x}}{\Delta v_2}, & p_{vy}(t_{2+}) &= \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{2y}}{\Delta v_2}, & p_{vz}(t_{2+}) &= \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{2z}}{\Delta v_2},
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$H(t_{2-}) = -\lambda_{t2}, \quad H(t_{2+}) = -\lambda_{t2}, \tag{3.40}$$

где

$$\lambda_{\text{дов}} = \sqrt{p_{vx}^2(t_{2-}) + p_{vy}^2(t_{2-}) + p_{vz}^2(t_{2-})} = \sqrt{p_{vx}^2(t_{2+}) + p_{vy}^2(t_{2+}) + p_{vz}^2(t_{2+})}.$$

Следствием условий (3.39), (3.40) являются сонаправленность вектора импульса и базис-вектора Лоудена

$$(\Delta v_{2x}, \Delta v_{2y}, \Delta v_{2z}) \uparrow\uparrow (p_{vx}(t_2), p_{vy}(t_2), p_{vz}(t_2)),$$

и условия непрерывности сопряженных переменных и гамильтониана в этот момент времени:

$$\begin{aligned}
p_x(t_{2+}) - p_x(t_{2-}) &= 0, & p_y(t_{2+}) - p_y(t_{2-}) &= 0, & p_z(t_{2+}) - p_z(t_{2-}) &= 0, \\
p_{vx}(t_{2+}) - p_{vx}(t_{2-}) &= 0, & p_{vy}(t_{2+}) - p_{vy}(t_{2-}) &= 0, & p_{vz}(t_{2+}) - p_{vz}(t_{2-}) &= 0, \\
H(t_{2+}) - H(t_{2-}) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Учет непрерывности радиус-вектора $(x(t_2), y(t_2), z(t_2))$ и сопряженных переменных (3.39) позволяет упростить (3.41) до условия ортогональности вектора

$(p_x(t_2), p_y(t_2), p_z(t_2))$ и вектора импульса, известное ранее как необходимое условие максимума функции $\rho(t)$ в момент промежуточного импульсного воздействия без дополнительных ограничений [46].

Ступенчатость КА внесла коррективы: максимумы функции $\rho(t)$ в моменты t_1 и t_2 по величине могут различаться.

Из условий трансверсальности следует, что в момент времени t_2

$$\vec{K}|_{t_{2-}} = \vec{K}|_{t_{2+}}. \quad (3.42)$$

Доказательство (3.42) аналогично доказательству, приведенному для момента времени t_1 .

д) В момент времени t_R импульса на фазовом ограничении:

$$\begin{aligned} p_x(t_{R-}) &= \lambda_{xR} - \lambda_{R2}v_x(t_{R-}), \\ p_y(t_{R-}) &= \lambda_{yR} - \lambda_{R2}v_y(t_{R-}), \\ p_z(t_{R-}) &= \lambda_{zR} - \lambda_{R2}v_z(t_{R-}), \\ p_x(t_{R+}) &= \lambda_{xR} + 2\lambda_{R1}x(t_{R+}) + \lambda_{R3}v_x(t_{R+}), \\ p_y(t_{R+}) &= \lambda_{yR} + 2\lambda_{R1}y(t_{R+}) + \lambda_{R3}v_y(t_{R+}), \\ p_z(t_{R+}) &= \lambda_{zR} + 2\lambda_{R1}z(t_{R+}) + \lambda_{R3}v_z(t_{R+}), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} p_{vx}(t_{R-}) &= -\lambda_{R2}x(t_{R-}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{xR}}{\Delta v_R}, \\ p_{vy}(t_{R-}) &= -\lambda_{R2}y(t_{R-}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{yR}}{\Delta v_R}, \\ p_{vz}(t_{R-}) &= -\lambda_{R2}z(t_{R-}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{zR}}{\Delta v_R}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} p_{vx}(t_{R+}) &= \lambda_{R3}x(t_{R+}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{xR}}{\Delta v_R}, \\ p_{vy}(t_{R+}) &= \lambda_{R3}y(t_{R+}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{yR}}{\Delta v_R}, \\ p_{vz}(t_{R+}) &= \lambda_{R3}z(t_{R+}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{zR}}{\Delta v_R}, \\ H(t_{R-}) &= -\lambda_R, \quad H(t_{R+}) = -\lambda_R. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Следствием (3.45) является условие непрерывности гамильтониана:

$$H(t_{R+}) - H(t_{R-}) = 0. \quad (3.46)$$

Из условий трансверсальности (3.43), (3.44) следует, что в момент времени t_R

$$\vec{K}|_{t_{R-}} = \vec{K}|_{t_{R+}}.$$

В самом деле

$$\vec{p}_r(t_{R+}) - \vec{p}_r(t_{R-}) = 2\lambda_{R1}\vec{r}'(t_R) + \lambda_{R3}\vec{v}(t_{R+}) + \lambda_{R2}\vec{v}(t_{R-}).$$

Тогда, используя непрерывность координат КА и свойства векторного произведения, получаем

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t_{R+}) \times \vec{p}_r(t_{R+}) - \vec{r}'(t_{R-}) \times \vec{p}_r(t_{R-}) &= \vec{r}'(t_R) \times (\vec{p}_r(t_{R+}) - \vec{p}_r(t_{R-})) = \\ &= \vec{r}'(t_R) \times (2\lambda_{R1}\vec{r}'(t_R) + \lambda_{R3}\vec{v}(t_{R+}) + \lambda_{R2}\vec{v}(t_{R-})) = \\ &= 2\lambda_{R1}(\vec{r}'(t_R) \times \vec{r}'(t_R)) + \lambda_{R3}(\vec{r}'(t_R) \times \vec{v}(t_{R+})) + \lambda_{R2}(\vec{r}'(t_R) \times \vec{v}(t_{R-})) = \\ &= \lambda_{R3}(\vec{r}'(t_R) \times \vec{v}(t_{R+})) + \lambda_{R2}(\vec{r}'(t_R) \times \vec{v}(t_{R-})), \\ \vec{v}(t_{R+}) \times \vec{p}_v(t_{R+}) &= \vec{v}(t_{R+}) \times \lambda_{R3}\vec{r}'(t_R) + \vec{v}(t_{R+}) \times \frac{\lambda_{\text{доб}}}{\Delta v_R} \begin{pmatrix} \Delta v_{xR} \\ \Delta v_{yR} \\ \Delta v_{zR} \end{pmatrix} = \\ &= \lambda_{R3}(\vec{v}(t_{R+}) \times \vec{r}'(t_R)) + \frac{\lambda_{\text{доб}}}{\Delta v_R} (\vec{v}(t_{R+}) \times (\vec{v}(t_{R+}) - \vec{v}(t_{R-}))) = \\ &= \lambda_{R3}(\vec{v}(t_{R+}) \times \vec{r}'(t_R)) - \frac{\lambda_{\text{доб}}}{\Delta v_R} (\vec{v}(t_{R+}) \times \vec{v}(t_{R-})), \\ \vec{v}(t_{R-}) \times \vec{p}_v(t_{R-}) &= -\vec{v}(t_{R-}) \times \lambda_{R2}\vec{r}'(t_R) + \vec{v}(t_{R-}) \times \frac{\lambda_{\text{доб}}}{\Delta v_R} \begin{pmatrix} \Delta v_{xR} \\ \Delta v_{yR} \\ \Delta v_{zR} \end{pmatrix} = \\ &= -\lambda_{R2}(\vec{v}(t_{R-}) \times \vec{r}'(t_R)) + \frac{\lambda_{\text{доб}}}{\Delta v_R} (\vec{v}(t_{R-}) \times (\vec{v}(t_{R+}) - \vec{v}(t_{R-}))) = \\ &= -\lambda_{R2}(\vec{v}(t_{R-}) \times \vec{r}'(t_R)) + \frac{\lambda_{\text{доб}}}{\Delta v_R} (\vec{v}(t_{R-}) \times \vec{v}(t_{R+})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t_{R+}) \times \vec{p}_v(t_{R+}) - \vec{v}(t_{R-}) \times \vec{p}_v(t_{R-}) &= \\
&= \lambda_{R3} (\vec{v}(t_{R+}) \times \vec{r}(t_R)) - \frac{\lambda_{\text{доб}}}{\Delta v_R} (\vec{v}(t_{R+}) \times \vec{v}(t_{R-})) + \\
&+ \lambda_{R2} (\vec{v}(t_{R-}) \times \vec{r}(t_R)) - \frac{\lambda_{\text{доб}}}{\Delta v_R} (\vec{v}(t_{R-}) \times \vec{v}(t_{R+})) = \lambda_{R3} (\vec{v}(t_{R+}) \times \vec{r}(t_R)) + \\
&+ \lambda_{R2} (\vec{v}(t_{R-}) \times \vec{r}(t_R)) - \frac{\lambda_{\text{доб}}}{\Delta v_R} (\vec{v}(t_{R+}) \times \vec{v}(t_{R-}) - \vec{v}(t_{R+}) \times \vec{v}(t_{R-})) = \\
&= \lambda_{R3} (\vec{v}(t_{R+}) \times \vec{r}(t_R)) + \lambda_{R2} (\vec{v}(t_{R-}) \times \vec{r}(t_R)), \\
\vec{K}|_{t_{R+}} - \vec{K}|_{t_{R-}} &= \lambda_{R3} (\vec{r}(t_R) \times \vec{v}(t_{R+})) + \lambda_{R2} (\vec{r}(t_R) \times \vec{v}(t_{R-})) + \\
&+ \lambda_{R3} (\vec{v}(t_{R+}) \times \vec{r}(t_R)) + \lambda_{R2} (\vec{v}(t_{R-}) \times \vec{r}(t_R)) = \\
&= \lambda_{R3} (\vec{r}(t_R) \times \vec{v}(t_{R+}) - \vec{r}(t_R) \times \vec{v}(t_{R+})) + \\
&+ \lambda_{R2} (\vec{r}(t_R) \times \vec{v}(t_{R-}) - \vec{r}(t_R) \times \vec{v}(t_{R-})) = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

е) В момент времени T_- :

$$\begin{aligned}
p_x(T_-) &= -2\lambda_T x(T_-) - \lambda_{\text{доб}} \frac{v_{\text{ГСО}}}{R_{\text{ГСО}}} \frac{\Delta v_{Ty}}{\Delta v_T}, \\
p_y(T_-) &= -2\lambda_T y(T_-) + \lambda_{\text{доб}} \frac{v_{\text{ГСО}}}{R_{\text{ГСО}}} \frac{\Delta v_{Tx}}{\Delta v_T}, \\
p_z(T_-) &= -\lambda_z T, \\
p_{vx}(T_-) &= \lambda_{\text{доб}} \frac{\Delta v_{Tx}}{\Delta v_T}, \quad p_{vy}(T_-) = \lambda_{\text{доб}} \frac{\Delta v_{Ty}}{\Delta v_T}, \quad p_{vz}(T_-) = \lambda_{\text{доб}} \frac{\Delta v_{Tz}}{\Delta v_T}. \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Условие стационарности в конечный момент времени имеет вид:

$$H(T) = 0.$$

Аналогично начальному моменту времени компонента интеграла Белецкого-Егорова-Пайнса (сонаправленная с вектором \vec{e}_z) равна нулю.

Таким образом, интеграл Белецкого-Егорова-Пайнса сохраняет свое значение на всех участках траектории и ортогонален векторам \vec{C} и \vec{e}_z . Следовательно, он коллинеарен вектору \vec{e}_x (только первая его компонента отлична от нуля).

3) Условия дополняющей нежесткости:

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{дов}} (\Delta v_{\text{дов}} - \Delta v^*) &= 0, \\ \lambda_{R1} (x(t_{R-})v_x(t_{R-}) + y(t_{R-})v_y(t_{R-}) + z(t_{R-})v_z(t_{R-})) &= 0, \\ \lambda_{R2} (x(t_{R+})v_x(t_{R+}) + y(t_{R+})v_y(t_{R+}) + z(t_{R+})v_z(t_{R+})) &= 0.\end{aligned}$$

4) Условия неотрицательности (неположительности):

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_{R1} \leq 0, \quad \lambda_{R2} \geq 0, \quad \lambda_{\text{дов}} \geq 0.$$

5) Множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю (условие НЕРОН).

6) Множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного сомножителя (условие нормировки). В качестве такого условия возьмем

$$\lambda_0 = 1.$$

Проведем теперь сравнение полученных условий оптимальности и их следствий с [46].

Согласно (3.36), (3.38), (3.41), (3.46), гамильтониан непрерывен в точках приложения импульсных воздействий [46, с. 34] (результат расширен на случай импульсов сброса ступеней в атмосферу). Согласно (3.43) функции $p_x(\cdot)$, $p_y(\cdot)$, $p_z(\cdot)$ разрывны в момент приложения импульса на фазовом ограничении: «если в момент сообщения импульса точка находится на границе, то функция $\Psi_r(t)$ разрывна в этой точке» [46, формула (1.42)].

В моменты приложения всех импульсных воздействий импульс скорости направлен вдоль сопряженного вектора. Этот результат соответствует формуле (1.42) в [46].

Гамильтониан в конечный момент времени равен нулю [46, с. 35].

В моменты приложения промежуточных импульсных воздействий векторы $(p_x(\cdot), p_y(\cdot), p_z(\cdot))$ и $(p_{v_x}(\cdot), p_{v_y}(\cdot), p_{v_z}(\cdot))$ ортогональны [46, с. 36].

Условия трансверсальности вычислялись численно при помощи технологии численно-аналитического дифференцирования. Всего имеется 72 фазовые переменные и следовательно столько же условий трансверсальности. В классе `ext_value` выделяется память под 72 переменные. Для каждой сопряженной переменной в каждый момент времени $(0_+, \tau_{i\pm}, t_{k\pm}, T_-, i = 1, 2, k = 1, 2)$ создается

отдельная переменная в программе.

3.4. Функция переключения и экстремаль в задаче без априорного предположения об апсидальности импульсных воздействий

Результаты расчетов приводятся при ограничении на характеристическую скорость маневров довыведения $\Delta v^* = 1.5$ км/с. Экстремаль представлена в приложении А. На рис. 3.4 представлен общий вид зависимости функции переключения от времени на траектории перелета. Детально вид этой зависимости в окрестности характерных точек τ_1 , t_1 , τ_2 , t_2 и t_R представлен на рис. 3.5. Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах для построения графика: 1 км и 1 с. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам.

Как следует из (3.39), (3.47) $\rho(t_2) = \rho(T) = \lambda_{\text{дов}}$. Кроме того оказалось, что в (3.44) $\lambda_{R2} = \lambda_{R3} = 0$, и потому $\rho(t_R) = \lambda_{\text{дов}} = 0.1228696733$. Значение $\rho(0) = 0.1230001207$ и $\rho(t_1) = 0.1229511111$, близки к величине $\rho(t_2) = \rho(t_R) = \rho(T) = 0.1228696733$, но не равны, и это не погрешность расчетов. Как отмечалось ранее, различие величин максимумов функции переключения связано со ступенчатостью КА.

3.5. Выводы по главе 3

В результате проведенных расчетов было установлено:

- решение задачи перелета КА с опорной орбиты на целевую эллиптическую без априорного предположения об апсидальности импульсов совпадает с решением аналогичной задачи с априорным предположением об апсидальности импульсов и, следовательно, при ограничении на характеристическую скорость маневров довыведения равном 1.5 км/с накладные расходы на сброс ступеней в атмосферу малы. При ограничении на характеристическую скорость маневров довыведения меньшую 1.47 км/с меняется структура траектории и накладные расходы на сброс ступеней в атмосферу становятся значительными;
- интеграл Белецкого-Егорова-Пайнса и гамильтониан непрерывны в моменты подачи промежуточных импульсных воздействий, включая моменты сброса ступеней;

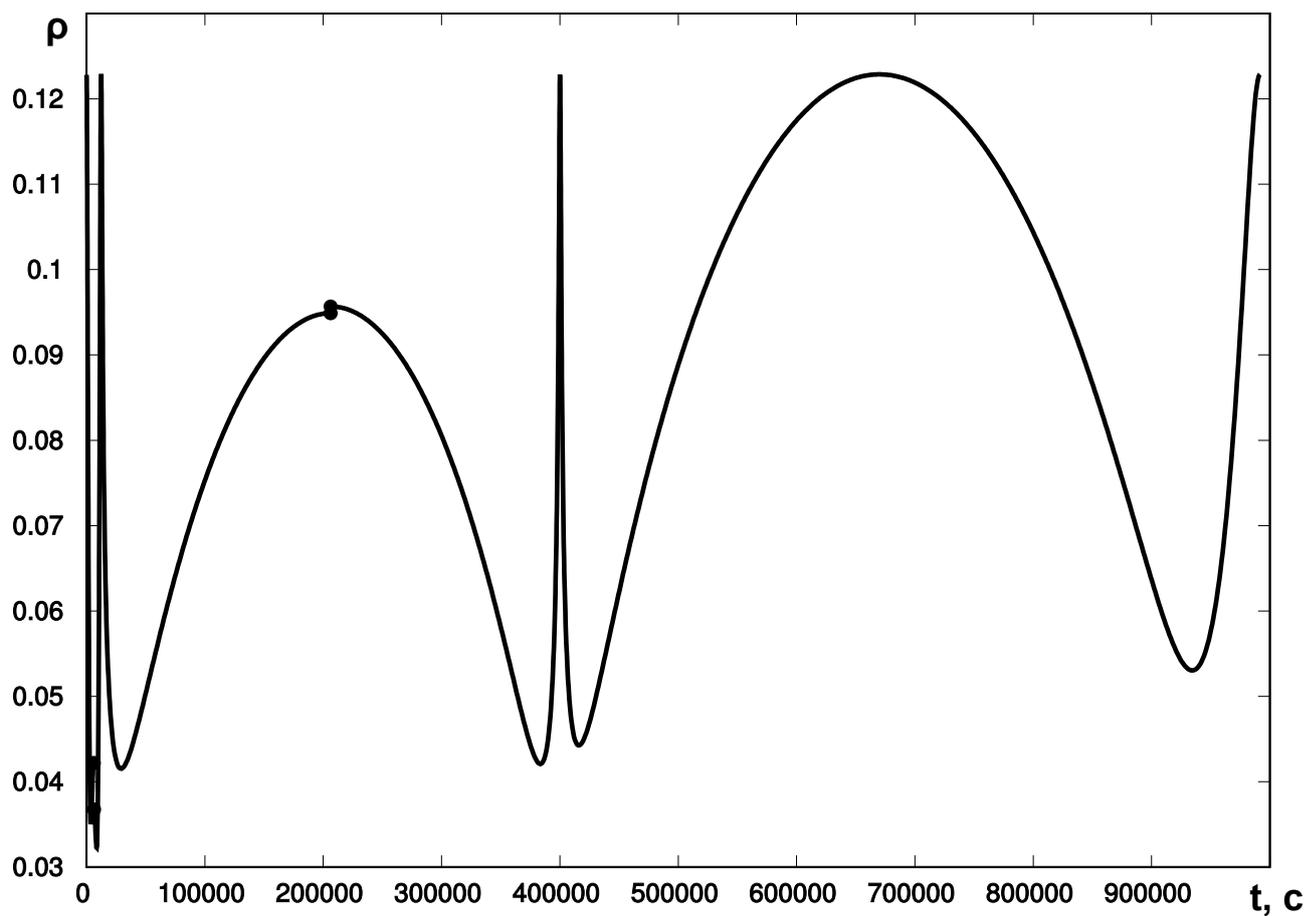


Рис. 3.4: График зависимости функции переключения от времени

- различие величин максимумов функции переключения связано со ступенчатостью КА (со сбросом ступеней в атмосферу).

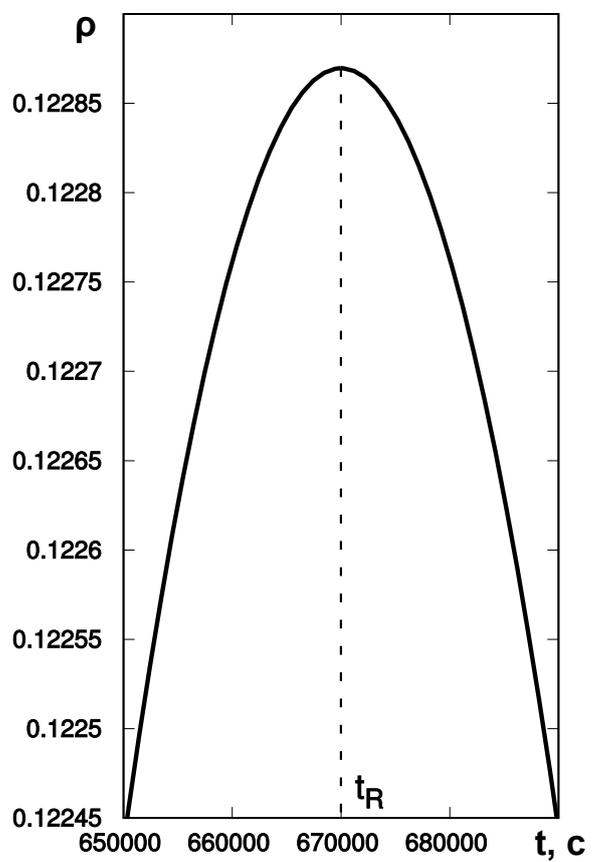
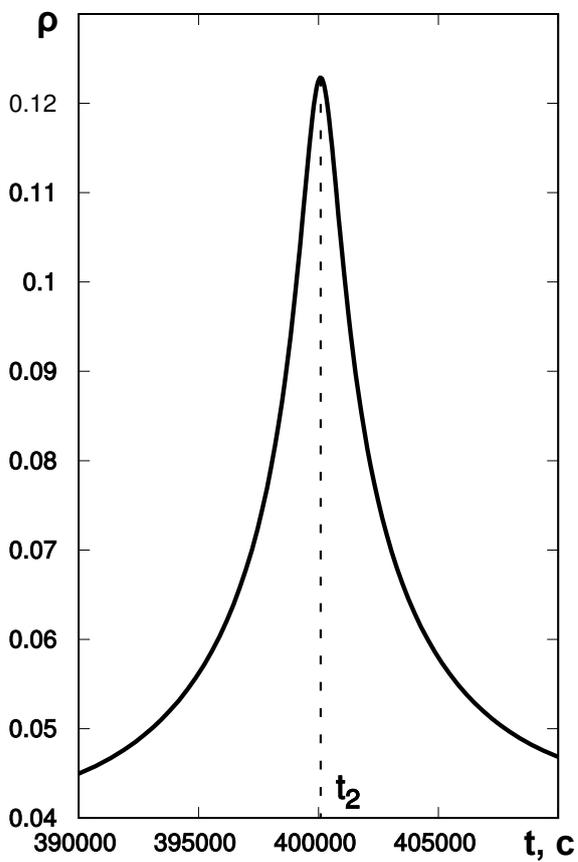
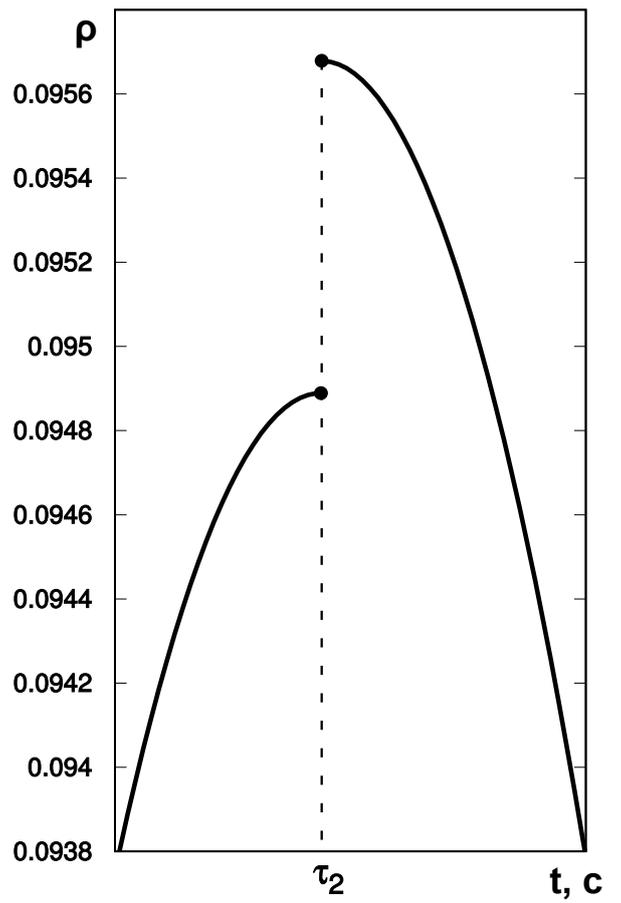
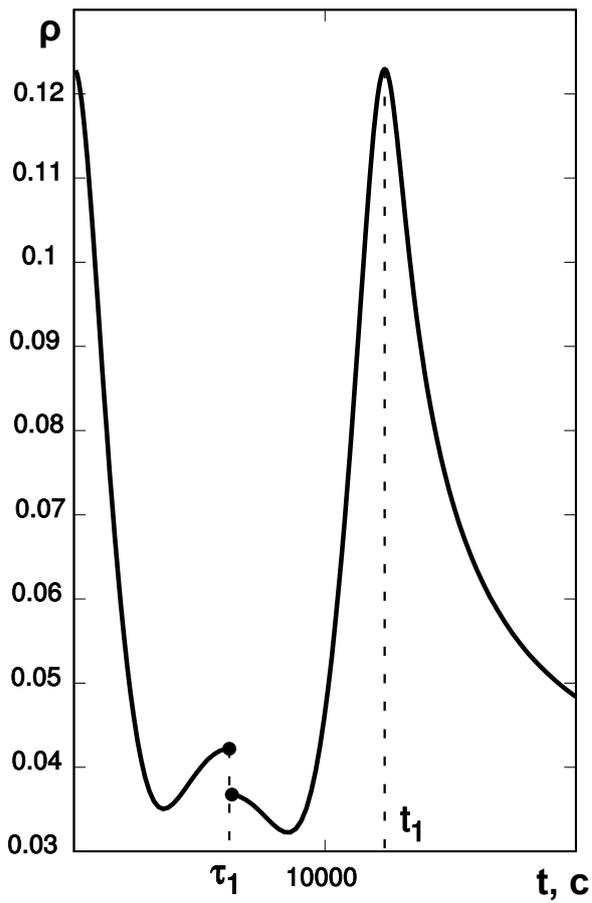


Рис. 3.5: График зависимости функции переключения в окрестности моментов τ_1 , t_1 , τ_2 , t_2 и t_R

ГЛАВА 4. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ИМПУЛЬСНАЯ ПОСТАНОВКА

4.1. Постановка задачи

Как и ранее, исследование проводится в импульсной постановке, перелет рассматривается в центральном ньютоновском гравитационном поле в вакууме. В отличие от модели КА, состоящего из двух ступеней и спутника, рассмотренной в предыдущей главе, в данной главе предполагается, что КА состоит из ЦБ, ДТБ и спутника. При этом первая серия маневров выведения КА осуществляется за счет топлива из ДТБ. По окончании этой серии маневров КА должен оказаться на орбите «сброса» — орбите, касающейся условной границы атмосферы (с высотой перигея 100 км). Далее следует участок пассивного полета продолжительностью 120 с, на котором осуществляется сброс ДТБ. По окончании участка сброса ДТБ остается на орбите сброса, а КА импульсным воздействием переводится на «безопасную» орбиту с высотой перигея 200 км. Это и последующие импульсные воздействия осуществляются за счет топлива из основного бака ЦБ. Наконец, после второй серии маневров КА оказывается на целевой орбите — одной из множества эллиптических орбит, таких что характеристическая скорость довыведения спутника на ГСО ограничена заданной величиной. Учет характеристической скорости маневров довыведения с целевой орбиты на ГСО осуществляется по упрощенной схеме апсидальной импульсной постановки. На целевой орбите осуществляется отстыковка спутника от ЦБ. Сброс ЦБ происходит с апогея целевой орбиты за счет топлива из основного бака.

Рассматривается траектория перелета КА для случая ограничения характеристической скорости маневров довыведения величиной 1.5 км/с. Как показало проведенное ранее исследование, при характеристической скорости маневров довыведения меньше 1.47 км/с структура траектории будет иной и накладные расходы оказываются значительными.

Найденное в апсидальной импульсной постановке решение с исключительно малыми накладными расходами, оказавшееся также решением в задаче без априорного предположения апсидальности, позволяет надеяться на успех применения методики «лестницы задач» — последовательной формализации и решения серии задач с постепенным уточнением и усложнением постановки, с использованием полученных решений более простых задач для решения следующих по сложно-

сти в качестве начального приближения непосредственно или на основе метода продолжения решения по параметру. Использование хорошего начального приближения и хорошей вычислительной схемы метода стрельбы позволяет построить одну из возможных экстремалей в задаче. Попытки построить произвольную экстремаль без предварительного анализа траектории заканчиваются неудачно — не удается построить экстремаль.

Задача оптимизации формализуется, и на основе соответствующего принципа Лагранжа [32] ее решение сводится к решению многоточечной краевой задачи.

4.2. Формализация постановки задачи

Система дифференциальных уравнений пассивного движения центра масс КА в прямоугольной декартовой системе координат совпадает с (3.1).

Проведенные ранее исследования показали, что с учетом импульсов для перевода ДТБ и ЦБ на орбиты, касающиеся условной границы атмосферы, структурно искомая траектория перелета КА с опорной на целевую орбиту состоит из четырех пассивных участков и пяти импульсных воздействий (рис. 4.1).

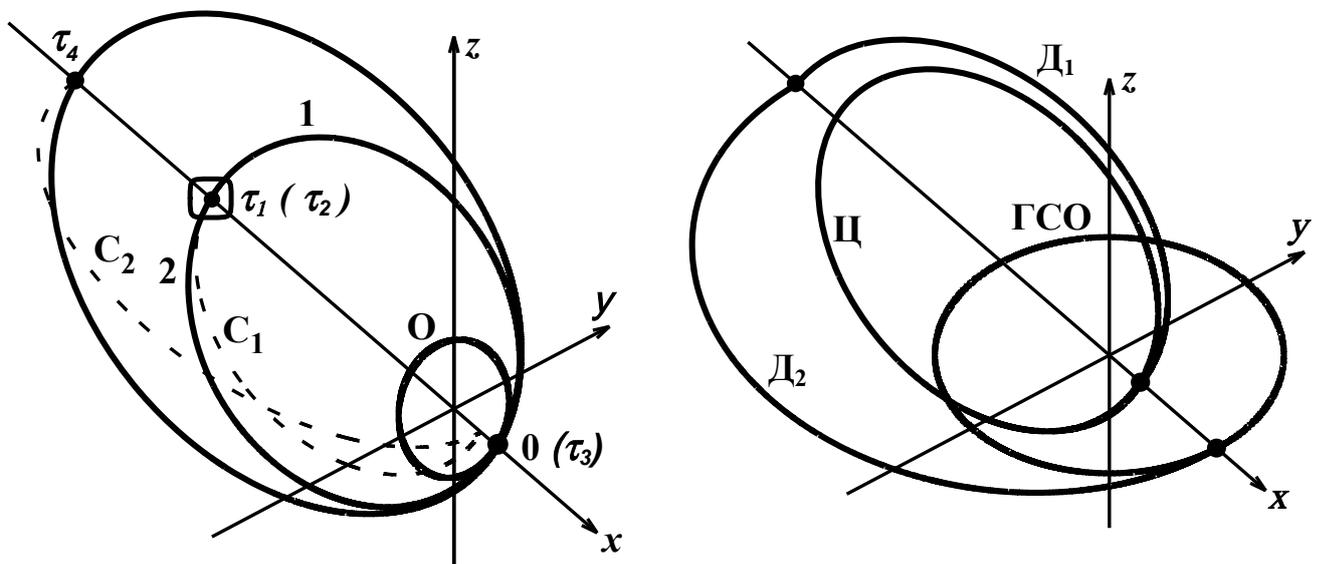


Рис. 4.1: Схема перелета КА на целевую орбиту (слева) и схема довыведения с целевой орбиты на геостационарную (справа): О — опорная орбита, 1 — первая переходная орбита (до выделенной области), 2 — «безопасная» орбита (после выделенной области, апогеи первой переходной и безопасной орбит визуально неотличимы), Ц — целевая орбита, С₁ — орбита сброса ДТБ, С₂ — орбита сброса ЦБ, Д₁ — первая орбита довыведения, Д₂ — вторая орбита довыведения, ГСО — геостационарная орбита.

В начальный момент времени КА до первого импульсного воздействия находится на опорной круговой орбите заданного наклона i_0 и радиуса R_0 , начальные

условия совпадают с (3.4) и также как и в предыдущей главе после соответствующих преобразований приводятся к (3.5).

Радиус перигея $r_{\Pi}(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ мгновенной эллиптической орбиты является функцией координат и скоростей КА и вычисляется по формулам [44]:

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \\
 \cos\varphi &= \frac{xv_x + yv_y + zv_z}{rV}, \quad V_{\text{кр}}^2 = \frac{\mu}{r}, \\
 e &= \sqrt{\left[\left(\frac{V}{V_{\text{кр}}} \right)^2 - 1 \right]^2 + \frac{r}{a} \left(\frac{V}{V_{\text{кр}}} \right)^2 \cos^2 \varphi}, \\
 a &= \frac{r}{2 - \left(\frac{V}{V_{\text{кр}}} \right)^2}, \quad r_{\Pi} = a(1 - e),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

где a — большая полуось, e — эксцентриситет, $V_{\text{кр}}$ — круговая скорость на расстоянии r от центра Земли, φ — угол между радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$ и вектором скорости $\vec{V} = (v_x, v_y, v_z)$.

Далее используется следующее обозначение для радиуса перигея орбиты:

$$r_{\Pi}(\tau) := r_{\Pi}(x(\tau), y(\tau), z(\tau), v_x(\tau), v_y(\tau), v_z(\tau)),$$

где τ — произвольный момент времени.

Импульсное воздействие (3.6) в начальный момент времени $t = 0$ переводит КА на первую переходную орбиту. В не известный заранее момент времени τ_1 (согласно проведенным ранее исследованиям в окрестности апогея первой переходной орбиты) подается импульс, переводящий КА на орбиту сброса ДТБ — эллиптическую орбиту, касающуюся условной границы атмосферы (с высотой перигея 100 км):

$$\begin{aligned}
 x(\tau_{1+}) - x(\tau_{1-}) &= 0, \quad y(\tau_{1+}) - y(\tau_{1-}) = 0, \quad z(\tau_{1+}) - z(\tau_{1-}) = 0, \\
 \tau_{1+} - \tau_{1-} &= 0, \quad r_{\Pi}(\tau_{1+}) = R_3 + 100 \text{ км}, \\
 \Delta v_1 &= \sqrt{(v_x(\tau_{1+}) - v_x(\tau_{1-}))^2 + (v_y(\tau_{1+}) - v_y(\tau_{1-}))^2 + (v_z(\tau_{1+}) - v_z(\tau_{1-}))^2}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

На следующем пассивном участке продолжительностью 120 с ДТБ отстыковывается от КА. В момент времени τ_2 КА импульсным воздействием переводится

на «безопасную» орбиту (с высотой перигея 200 км):

$$\begin{aligned} x(\tau_{2+}) - x(\tau_{2-}) &= 0, & y(\tau_{2+}) - y(\tau_{2-}) &= 0, & z(\tau_{2+}) - z(\tau_{2-}) &= 0, \\ \tau_{2+} - \tau_{2-} &= 0, & \tau_{2-} - \tau_{1+} &= 120 \text{ с}, & r_{\text{п}}(\tau_{2+}) &= R_3 + 200 \text{ км}, \\ \Delta v_2 &= \sqrt{(v_x(\tau_{2+}) - v_x(\tau_{2-}))^2 + (v_y(\tau_{2+}) - v_y(\tau_{2-}))^2 + (v_z(\tau_{2+}) - v_z(\tau_{2-}))^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В не известный заранее момент времени τ_3 (согласно проведенным ранее исследованиям в окрестности перигея «безопасной» орбиты) КА импульсным воздействием переводится на целевую орбиту:

$$\begin{aligned} x(\tau_{3+}) - x(\tau_{3-}) &= 0, & y(\tau_{3+}) - y(\tau_{3-}) &= 0, \\ z(\tau_{3+}) - z(\tau_{3-}) &= 0, & \tau_{3+} - \tau_{3-} &= 0, \\ \Delta v_3 &= \sqrt{(v_x(\tau_{3+}) - v_x(\tau_{3-}))^2 + (v_y(\tau_{3+}) - v_y(\tau_{3-}))^2 + (v_z(\tau_{3+}) - v_z(\tau_{3-}))^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

На продолжительном пассивном участке целевой орбиты спутник отделяется от ЦБ. Далее довыведение спутника на ГСО осуществляется за счет топлива спутника.

Проведенные ранее исследования показали, что наилучшей точкой перехода ЦБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, является апогей целевой орбиты. При этом импульс сброса направлен против скорости движения ЦБ, угол наклона не меняется:

$$\begin{aligned} R_{\text{ца}} &= r(\tau_{4-}) = \sqrt{x^2(\tau_{4-}) + y^2(\tau_{4-}) + z^2(\tau_{4-})}, \\ V_{\text{ца}} &= v(\tau_{4-}) = \sqrt{v_x^2(\tau_{4-}) + v_y^2(\tau_{4-}) + v_z^2(\tau_{4-})}, \\ V_{\text{атм}} &= \sqrt{\frac{2\mu r_{\text{атм}}}{r(\tau_{4-})(r(\tau_{4-}) + r_{\text{атм}})}}, \\ \Delta v_4 &= V_{\text{ца}} - V_{\text{атм}}, \end{aligned}$$

где τ_4 — момент прохождения апогея целевой орбиты, $r_{\text{атм}} = R_3 + 100$ км, $V_{\text{атм}}$ — скорость в апогее орбиты, касающейся условной границы атмосферы, на которую переходит после импульса ЦБ, $R_{\text{ца}}$ — радиус апогея целевой орбиты, $V_{\text{ца}}$ — скорость в апогее целевой орбиты.

Характеристическая скорость маневров довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО учитывается по упрощенной схеме и осуществляется за счет трех

импульсных воздействий:

$$\Delta v_{\text{дов}}(\cdot) = \Delta v_{\text{дов1}}(\cdot) + \Delta v_{\text{дов2}}(\cdot) + \Delta v_{\text{дов3}}(\cdot). \quad (4.5)$$

Все три импульса довыведения вычисляются по апсидальным формулам [44].

Первое импульсное воздействие $\Delta v_{\text{дов1}}(\cdot)$ подается в перигее целевой орбиты, и оно, не меняя наклона, повышает апогей до максимально возможного удаления КА от Земли R_{max} :

$$\begin{aligned} \Delta v_{\text{дов1}}(\cdot) &= \sqrt{V_{\text{цп}}^2 + V_{1\text{п}}^2 - 2V_{\text{цп}}V_{1\text{п}}}, \\ V_{\text{цп}} &= \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{ац}}}{R_{\text{цп}}(R_{\text{ац}} + R_{\text{цп}})}}, \quad V_{1\text{п}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{max}}}{R_{\text{цп}}(R_{\text{max}} + R_{\text{цп}})}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $R_{\text{цп}}$ — радиус перигея целевой орбиты, $V_{\text{цп}}$ — скорость в перигее целевой орбиты.

В формулах (4.6) вместо “более естественного и понятного” соотношения

$$\Delta v_{\text{дов1}} = V_{1\text{п}} - V_{\text{цп}} \quad (4.7)$$

используется формализованное соотношение $\Delta v_{\text{дов1}} = |V_{1\text{п}} - V_{\text{цп}}|$. Разумеется, на оптимальном решении имеем $V_{1\text{п}} > V_{\text{цп}}$ и модуль (корень из квадрата) в формуле вычисления $\Delta v_{\text{дов1}}$ не нужен. Однако при промежуточных расчетах желательно учесть потенциальную возможность $V_{1\text{п}} < V_{\text{цп}}$. В случае отсутствия модуля в таких потенциально возможных случаях использование упрощенной формулы (4.7) приводит к $\Delta v_{\text{дов1}} < 0$, что, хотя и “нефизично”, но в то же время само по себе не страшно, так как на найденном оптимальном решении проблема не возникает. Главная причина использования более сложной формулы с модулем состоит в ухудшении сходимости итерационного процесса в случае использования более простой формулы.

Второе импульсное воздействие $\Delta v_{\text{дов2}}(\cdot)$ подается в апогее, увеличивает перигей до радиуса ГСО $R_{\text{ГСО}}$ и меняет наклон до нуля:

$$\begin{aligned} \Delta v_{\text{дов2}}(\cdot) &= \sqrt{V_{1\text{а}}^2 + V_{2\text{а}}^2 - 2V_{1\text{а}}V_{2\text{а}} \cos i_{\text{ц}}}, \\ V_{1\text{а}} &= \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{цп}}}{R_{\text{max}}(R_{\text{max}} + R_{\text{цп}})}}, \quad V_{2\text{а}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{ГСО}}}{R_{\text{max}}(R_{\text{max}} + R_{\text{ГСО}})}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $i_{ц}$ — угол наклона целевой орбиты к плоскости экватора. В момент прохождения апогея эта величина может быть вычислена по формуле

$$\cos i_{ц} = \frac{\sqrt{v_x^2(\tau_{4-}) + v_y^2(\tau_{4-})}}{\sqrt{v_x^2(\tau_{4-}) + v_y^2(\tau_{4-}) + v_z^2(\tau_{4-})}}. \quad (4.9)$$

Третье импульсное воздействие $\Delta v_{\text{довз}}(\cdot)$ в перигее, не меняя наклона, уменьшает апогей до радиуса ГСО, тем самым переводя спутник в не заданную заранее точку ГСО.

$$\begin{aligned} \Delta v_{\text{довз}}(\cdot) &= V_{2п} - v_{\text{ГСО}}, \\ V_{2п} &= \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{max}}}{R_{\text{ГСО}}(R_{\text{max}} + R_{\text{ГСО}})}}, \quad v_{\text{ГСО}} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{\text{ГСО}}}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Величина $\Delta v_{\text{довз}}$ фактически является константой (зависит от заданной величины $R_{\text{ГСО}}$ и заданного параметра задачи R_{max}).

Входящие в формулы величины $R_{цп}$, $R_{ца}$, $i_{ц}$ являются кеплеровскими интегралами и могут быть вычислены в любой момент нахождения КА на целевой орбите. Вычисление этих величин в момент прохождения апогея целевой орбиты τ_4 оказалось технически удобнее. Итак, $\Delta v_{\text{дов}}(\cdot)$ с использованием (4.6), (4.8)–(4.10) представлено в виде зависимости

$$\Delta v_{\text{дов}}(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})),$$

что позволяет формализовать краевые условия:

$$\begin{aligned} \Delta v_{\text{дов}}(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})) &= \Delta v^*, \\ x(\tau_{4-})v_x(\tau_{4-}) + y(\tau_{4-})v_y(\tau_{4-}) + z(\tau_{4-})v_z(\tau_{4-}) &= 0, \\ \lambda_3(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})) &= v_x(\tau_{4-})(z(\tau_{4-})v_x(\tau_{4-}) - \\ - x(\tau_{4-})v_z(\tau_{4-})) - v_y(\tau_{4-})(y(\tau_{4-})v_z(\tau_{4-}) - z(\tau_{4-})v_y(\tau_{4-})) - \frac{\mu z(\tau_{4-})}{r(\tau_{4-})} &= 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\lambda_3(\cdot)$ — z-компонента вектора Лапласа. Последнее соотношение в апогее может быть записано в виде $z(\tau_{4-}) = 0$, однако при расчетах использовалось основное соотношение на z-компоненту вектора Лапласа для удобства перехода к общему случаю — задаче с ограниченной тягой. Первое соотношение в (4.11) представля-

ет собой ограничение на характеристическую скорость довыведения КА с целевой на ГСО. Проведенное ранее исследование показало, что это ограничение активно, и поэтому оно представлено в виде равенства. Также можно считать, что для случая нестрогого неравенства рассмотрен только один главный случай (в условиях дополняющей нежесткости соответствующий множитель Лагранжа больше нуля). Второе соотношение ортогональности радиус-вектора и вектора скорости выполняется на эллиптической орбите в двух точках — перигее и апогее. Различить их можно, например, следующим образом: до момента прохождения апогея радиальная составляющая вектора скорости положительна, после прохождения апогея отрицательна. Такие строгие неравенства на дальнейшее решение задачи на основе принципа Лагранжа влияние не окажут (будут пассивными) и потому в работе не приводятся. Третье соотношение показывает, что апогей находится в плоскости экватора. С одной стороны, это условие не является ограничительным, устраняя симметрию вращения задачи относительно вектора кинетического момента КА (C_{0x}, C_{0y}, C_{0z}) опорной орбиты. С другой стороны, условие нахождения линии апсид в плоскости экватора позволяет избежать лишних расходов на довыведение КА. С третьей стороны, оно позволяет серьезно упростить формулы довыведения, использовать их апсидальный вариант.

Функционалом задачи является полезная масса спутника на целевой орбите.

Учитывая, что сухая масса бака пропорциональна массе вмещающегося в него топлива с коэффициентом α [41, с. 93], получаем, что масса КА после выполнения первой серии маневров и сброса ДТБ равна

$$m_1 = (1 + \alpha) \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right) - \alpha.$$

Полезная масса, оставшаяся на целевой орбите, с учетом подачи импульса перевода ЦБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, в апогее целевой орбиты [82] равна

$$m_{\text{п}}(\cdot) = \left[(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right) - \alpha \right] \left[\exp\left(-\frac{u_2}{c}\right) - \frac{\alpha \left(1 - \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right)\right)}{(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{\Delta v_4}{c}\right) - \alpha} \right].$$

В рассматриваемом случае перелета (т.е. при $\Delta v^*=1.5$ км/с)

$$u_1 = \Delta v(0) + \Delta v(\tau_1), \quad u_2 = \Delta v(\tau_2) + \Delta v(\tau_3).$$

Следовательно, полезная масса является сложной функцией от координат и скоростей КА после импульсного воздействия в начальный момент времени, скоростей КА до и после импульсного воздействия в моменты времени τ_1, τ_2, τ_3 , координат и скоростей КА в момент времени τ_4 .

Таким образом, рассматриваемая задача формализована. Ее решение сводится на основе принципа Лагранжа к решению краевой задачи [32].

4.3. Необходимые условия оптимальности первого порядка

Функция Лагранжа имеет вид

$$\Lambda = \sum_{i=0}^4 \left(\int_{\tau_{i+}}^{\tau_{(i+1)-}} L dt \right) + l, \quad (\tau_{0+} = 0_+),$$

лагранжиан

$$L = p_x (\dot{x} - v_x) + p_y (\dot{y} - v_y) + p_z (\dot{z} - v_z) + \\ + p_{vx} \left(\dot{v}_x + \frac{\mu x}{r^3} \right) + p_{vy} \left(\dot{v}_y + \frac{\mu y}{r^3} \right) + p_{vz} \left(\dot{v}_z + \frac{\mu z}{r^3} \right),$$

гамильтониан

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z + p_{vx} \left(-\frac{\mu x}{r^3} \right) + p_{vy} \left(-\frac{\mu y}{r^3} \right) + p_{vz} \left(-\frac{\mu z}{r^3} \right),$$

терминант

$$l = \sum_{i=1}^3 \lambda_{xi} (x(\tau_{i+}) - x(\tau_{i-})) + \sum_{i=1}^3 \lambda_{yi} (y(\tau_{i+}) - y(\tau_{i-})) + \sum_{i=1}^3 \lambda_{zi} (z(\tau_{i+}) - z(\tau_{i-})) + \\ + \sum_{i=1}^3 \lambda_{\tau i} (\tau_{i+} - \tau_{i-}) + \lambda_{\tau 12} (\tau_{2-} - \tau_{1+} - 120) + \\ + \lambda_{R0} (x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2 - R_0^2) + \lambda_{C0} (x(0)C_{0x} + y(0)C_{0y} + z(0)C_{0z}) + \\ + \lambda_{c61} (r_{\Pi}(\tau_{1+}) - R_3 - 100) + \lambda_{6e3} (r_{\Pi}(\tau_{2+}) - R_3 - 200) + \\ + \lambda_{rv4} (x(\tau_{4-})v_x(\tau_{4-}) + y(\tau_{4-})v_y(\tau_{4-}) + z(\tau_{4-})v_z(\tau_{4-})) +$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_{\Pi} \lambda_3 (x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})) + \\
& + \lambda_{\text{дов}} (\Delta v_{\text{дов}}(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})) - \Delta v^*) - \lambda_0 m_{\Pi}.
\end{aligned}$$

$\lambda_{xi}, \lambda_{yi}, \lambda_{zi}, \lambda_{\tau i}, \lambda_{\tau 12}, \lambda_{R0}, \lambda_{C0}, \lambda_{сб1}, \lambda_{без}, \lambda_{rv4}, \lambda_{\Pi}, \lambda_{\text{дов}}, \lambda_0$ ($i = 1, 2, 3$) — числовые множители Лагранжа, $p_x(\cdot), p_y(\cdot), p_z(\cdot), p_{v_x}(\cdot), p_{v_y}(\cdot), p_{v_z}(\cdot)$ — сопряженные переменные (функциональные множители Лагранжа) на каждом из четырех участков. Дополнительная нумерация функций, связанная с номером участка, формально необходимая согласно теореме [32] для упрощения системы обозначений, не используется.

Условия стационарности по фазовым переменным (сопряженная система уравнений, уравнения Эйлера-Лагранжа) совпадают с (3.30).

Условия трансверсальности в виду громоздкости приводятся в формальном виде:

$$\begin{aligned}
p_{\xi}(\tau_{i+}) &= \frac{\partial l}{\partial \xi(\tau_{i+})}, & p_{\xi}(\tau_{i-}) &= -\frac{\partial l}{\partial \xi(\tau_{i-})}, \\
p_{\xi}(0_+) &= \frac{\partial l}{\partial \xi(0_+)}, & p_{\xi}(\tau_{4-}) &= -\frac{\partial l}{\partial \xi(\tau_{4-})}, \\
\xi &= x, y, z, v_x, v_y, v_z, & i &= 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Производные функций $r_{\Pi}(\cdot), \Delta v_{\text{дов}}(\cdot), m_{\Pi}(\cdot)$, входящие в условия трансверсальности, вычисляются при помощи специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирования.

Условия стационарности:

$$\begin{aligned}
H(\tau_{1-}) &= -\lambda_{\tau 1}, & H(\tau_{1+}) &= -\lambda_{\tau 1} + \lambda_{\tau 12}, & H(\tau_{2-}) &= -\lambda_{\tau 2} + \lambda_{\tau 12}, \\
H(\tau_{2+}) &= -\lambda_{\tau 2}, & H(\tau_{3-}) &= -\lambda_{\tau 3}, & H(\tau_{3+}) &= -\lambda_{\tau 3}, & H(\tau_{4-}) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

В начальный момент времени условие стационарности отсутствует. Следствием условий стационарности в момент времени τ_3 является непрерывность гамильтониана: $H(\tau_{3+}) = H(\tau_{3-})$. Из условий стационарности в моменты времени τ_1 и τ_2 следует, что $H(\tau_{2+}) = H(\tau_{1-})$.

В самом деле, поскольку правая часть системы дифференциальных уравнений не зависит явно от времени, то функция $H(t)$ постоянна на решении этой системы, т.е. $H(\tau_{2-}) = H(\tau_{1+})$. Из условий стационарности получаем, что $H(\tau_{1+}) = H(\tau_{1-}) + \lambda_{\tau 12}$, $H(\tau_{2-}) = H(\tau_{2+}) + \lambda_{\tau 12}$. Вычитая из одного равенства другое, получим, что $H(\tau_{1+}) - H(\tau_{2-}) = H(\tau_{1-}) - H(\tau_{2+})$. Откуда получаем, что

$H(\tau_{1-}) - H(\tau_{2+}) = 0$, т.е. $H(\tau_{2+}) = H(\tau_{1-})$, что и требовалось.

В качестве условия нормировки выбирается

$$\lambda_0 = 1. \quad (4.14)$$

В связи со сложной структурой траектории доказательство невозможности аномального случая $\lambda_0 = 0$ представляет собой отдельное исследование и при написании данной работы не рассматривалось.

Неизвестными краевой задачи являются: 48 произвольных постоянных интегрирования системы дифференциальных уравнений (3.1), (3.30) (по 12 неизвестных на каждом из четырех участков); моменты времени $\tau_{1\pm}$, $\tau_{2\pm}$, $\tau_{3\pm}$, τ_{4-} ; 21 числовых множителей Лагранжа. Всего 76 неизвестных. Для их определения имеется 20 условий на координаты КА и время (3.5), (4.2), (4.3), (4.4), (4.11), 48 условий трансверсальности (4.12), 7 условий стационарности (4.13) и одно условие нормировки (4.14) Всего 76 условий, т.е. число неизвестных в краевой задаче совпадает с числом условий для их определения.

4.4. Модифицированный орбитальный базис и вычислительная схема метода стрельбы

Краевая задача принципа Лагранжа сводится на основе метода стрельбы к системе нелинейных уравнений, которая решается численно модифицированным методом Ньютона–Исаева–Сонина–Федоренко [49, 108, гл. 1].

Выбор вычислительной схемы метода стрельбы оказывает очень большое влияние на скорость сходимости метода Ньютона, и более эффективным является задание параметров пристрелки, определяющих импульсное воздействие в специально выбранном базисе — модифицированном орбитальном базисе (при этом начало новой системы координат и исходной совпадают).

Базисные векторы $\vec{e}_r(\tau)$, $\vec{e}_{v_{тр}}(\tau)$, $\vec{e}_c(\tau)$ локальной системы координат в момент каждого из импульсных воздействий определяются следующим образом. Вектор $\vec{e}_r(\tau)$ направлен по радиус-вектору КА в момент подачи импульсного воздействия, направление $\vec{e}_{v_{тр}}(\tau)$ совпадает с направлением трансверсальной компонен-

ты скорости, $\vec{e}_c(\tau)$ дополняет систему до правой тройки. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{e}_r(\tau) &= \frac{\vec{r}(\tau)}{|\vec{r}(\tau)|}, & \vec{e}_{v\text{тр}}(\tau) &= \frac{\vec{v}_{\text{тр}}(\tau)}{|\vec{v}_{\text{тр}}(\tau)|}, & \vec{e}_c(\tau) &= \frac{\vec{C}(\tau)}{|\vec{C}(\tau)|}, \\ \vec{e}_v(\tau) &= \frac{\vec{v}(\tau)}{|\vec{v}(\tau)|}, & \vec{C}(\tau) &= [\vec{e}_r(\tau), \vec{e}_v(\tau)], & \vec{v}_{\text{тр}}(\tau) &= [\vec{e}_c(\tau), \vec{e}_r(\tau)]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Скорости КА и, следовательно, компоненты вектора импульса $\Delta v_r(\tau)$, $\Delta v_{\text{тр}}(\tau)$, $\Delta v_c(\tau)$ в каждый момент τ подачи импульсного воздействия задаются в системе координат, связанной с КА:

$$\begin{aligned} \Delta v_r(\tau) &= \Delta v(\tau) \cos \psi(\tau) \cos \theta(\tau), & \Delta v_{\text{тр}}(\tau) &= \Delta v(\tau) \sin \psi(\tau) \cos \theta(\tau), \\ \Delta v_c(\tau) &= \Delta v(\tau) \sin \theta(\tau), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где $\theta(\tau)$ — угол склонения направления вектора импульса (угол между вектором импульса и плоскостью орбиты) в момент времени τ , $\psi(\tau)$ — угол прямого восхождения направления вектора импульса (отсчитывается в плоскости орбиты от радиус-вектора в направлении вектора скорости) в момент времени τ , $\Delta v(\tau)$ — величина импульса (значение в основной системе координат совпадает со значением в локальной).

Компоненты вектора импульса в исходной системе координат $\Delta v_x(\tau)$, $\Delta v_y(\tau)$, $\Delta v_z(\tau)$ получаются по следующим формулам перехода от одного базиса к другому, записанных в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \Delta v_x(\tau) \\ \Delta v_y(\tau) \\ \Delta v_z(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{rx}(\tau) & e_{vx\text{тр}}(\tau) & e_{cx}(\tau) \\ e_{ry}(\tau) & e_{vy\text{тр}}(\tau) & e_{cy}(\tau) \\ e_{rz}(\tau) & e_{vz\text{тр}}(\tau) & e_{cz}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta v_r(\tau) \\ \Delta v_{\text{тр}}(\tau) \\ \Delta v_c(\tau) \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

где $e_{rx}(\tau)$, $e_{ry}(\tau)$, $e_{rz}(\tau)$ — координаты вектора $\vec{e}_r(\tau)$; $e_{vx\text{тр}}(\tau)$, $e_{vy\text{тр}}(\tau)$, $e_{vz\text{тр}}(\tau)$ — координаты вектора $\vec{e}_{v\text{тр}}(\tau)$; $e_{cx}(\tau)$, $e_{cy}(\tau)$, $e_{cz}(\tau)$ — координаты вектора $\vec{e}_c(\tau)$ в основной системе координат в момент времени τ .

Компоненты вектора скорости КА до импульсного воздействия $v_x(\tau_-)$, $v_y(\tau_-)$, $v_z(\tau_-)$ в исходной системе координат в момент времени τ определяются в результате решения задачи Коши (а в начальный момент времени на опорной круговой орбите по формулам из справочника [44]). Компоненты вектора скорости КА после подачи импульсного воздействия $v_x(\tau_+)$, $v_y(\tau_+)$, $v_z(\tau_+)$ в основной системе

координат в момент времени τ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} v_x(\tau_+) &= \Delta v_x(\tau) + v_x(\tau_-), & v_y(\tau_+) &= \Delta v_y(\tau) + v_y(\tau_-), \\ v_z(\tau_+) &= \Delta v_z(\tau) + v_z(\tau_-). \end{aligned} \quad (4.18)$$

В вектор параметров пристрелки в начальный момент входят: φ_0 — угловое положение КА на опорной круговой орбите, величина импульса Δv_0 , два угла задающих направление первого импульсного воздействия ψ_0, θ_0 и шесть значений сопряженных переменных $p_x(0_+), p_y(0_+), p_z(0_+), p_{vx}(0_+), p_{vy}(0_+), p_{vz}(0_+)$. Угловое положение КА φ_0 позволяет определить координаты КА, а также его скорости на опорной орбите до импульсного воздействия по формулам из справочника [44]. В моменты времени τ_k ($k = 1, 2, 3$) импульсных воздействий, переводящих КА соответственно на «орбиту сброса ДТБ», «безопасную» и целевую орбиты, в векторы параметров пристрелки входят величины импульсных воздействий Δv_k , два угла, задающих направление импульсных воздействий ψ_k, θ_k , и шесть значений сопряженных переменных после импульсных воздействий $p_x(\tau_{k+}), p_y(\tau_{k+}), p_z(\tau_{k+}), p_{vx}(\tau_{k+}), p_{vy}(\tau_{k+}), p_{vz}(\tau_{k+})$. Скорости КА после импульсного воздействия вычисляются по формулам (4.15)–(4.18). В вектор параметров пристрелки также входят продолжительности пассивных участков $\Delta\tau_1, \Delta\tau_3$ и $\Delta\tau_4$ ($\Delta\tau_2=120$ с — параметр задачи) и числовые множители Лагранжа $\lambda_{R0}, \lambda_{C0}, \lambda_{сб1}, \lambda_{без}, \lambda_{rv4}, \lambda_{дов}, \lambda_{ц}$. Координаты КА на каждом следующем участке интегрирования исходя из условий непрерывности берутся равными соответствующим координатам на предыдущем участке и не входят в вектор параметров пристрелки, а также соответствующие условия непрерывности не входят в вектор-функцию невязок.

В вектор-функцию невязок входят: условия на радиусы перигея КА в момент выхода на «орбиту сброса ДТБ» и «безопасную» орбиту в моменты времени τ_1 и τ_2 соответственно; ограничение на импульс довыведения в момент окончания перелета; условия нахождения КА в апогее целевой орбиты в момент τ_4 подачи последнего импульсного воздействия для перехода ЦБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы; равенство нулю z -компоненты вектора Лапласа в момент времени τ_4 ; 12 условий трансверсальности в начальный момент и конечный моменты времени; 9 следствий из условий трансверсальности на координаты КА — скачки сопряженных переменных, обусловленные наличием ограничения на радиус перигея в моменты времени τ_1 и τ_2 , и условия непрерывности сопряженных переменных в момент времени τ_3 ; 18 условий трансверсальности на скорости

КА до и после импульсного воздействия в моменты времени τ_1 , τ_2 и τ_3 ; следствие из условий стационарности в моменты времени τ_1 и τ_2 ; непрерывность гамильтониана в момент времени τ_3 ; равенство нулю гамильтониана в момент времени τ_4 .

4.5. Экстремаль в задаче в модифицированной импульсной постановке

Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 час. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам. Для численного интегрирования использовался метод Дормана-Принса 8(7). Значения параметров пристрелки, числовых множителей Лагранжа, фазовых и сопряженных переменных в началах и концах пассивных участков приведены с необходимой для повторения расчетов точностью. Их уточнение может потребовать одну-две итерации метода Ньютона. Соответствие фазовых и сопряженных переменных в началах и концах пассивных участков можно проверить с помощью численного интегрирования. Выполнение условий трансверсальности и стационарности можно проверить с использованием технологии численно-аналитического дифференцирования. Экстремаль представлена в приложении В.

4.6. Выводы по главе 4

Использованная методика одновременного выбора вычислительной схемы метода стрельбы и хорошего начального приближения соответствующих параметров пристрелки на основе решенной ранее задачи в более простой постановке оказалась эффективной — задачу построения экстремалей удалось решить. Представленная в данной главе задача и ее решение, являясь еще одним шагом методики «лестница задач», послужили основой решения задачи оптимизации перелета КА с большой ограниченной тягой (не в импульсной постановке) и с учетом возмущений, обусловленных нецентральностью гравитационного поля Земли. Необходимость решения задачи в модифицированной импульсной постановке (с учетом сброса ДТБ и ЦБ) была вызвана сложностью непосредственного перехода к задаче с большой ограниченной тягой, поскольку модифицированный метод Ньютона не сходился при использовании в качестве начального приближения решения из третьей главы.

ГЛАВА 5. ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГОЙ

5.1. Постановка задачи

В данной главе решается задача оптимизации траектории перелета КА с опорной круговой орбиты ИСЗ заданного радиуса и наклона на целевую орбиту с помощью РБ с двигательной установкой большой ограниченной тяги и ДТБ, со сбросом ДТБ и ЦБ РБ в атмосферу Земли. Довыведение с целевой орбиты на ГСО учитывается по упрощенной схеме апсидальной импульсной постановки и осуществляется двигательной установкой КА.

Целью данной главы является построение экстремалей Понтрягина в задаче с большой ограниченной тягой. Структура этой экстремали (последовательность и примерное расположение на траектории активных участков) известна из предыдущих исследований, проведенных в импульсной постановке. Первая серия маневров выведения КА на целевую орбиту осуществляется за счет топлива из ДТБ. После отработки этого топлива КА оказывается на орбите, касающейся условной границы атмосферы (с высотой перигея 100 км). На участке пассивного полета, продолжительностью 120 с, осуществляется сброс ДТБ. За счет дополнительного включения двигателя КА возвращается на «безопасную орбиту» (с высотой перигея 200 км). Это и последующие включения двигателя КА происходят за счет топлива из основного бака ЦБ. Предполагается, что в баки залито ровно столько топлива, сколько необходимо для совершения соответствующих маневров.

После выполнения второй серии маневров КА оказывается на целевой орбите, такой что характеристическая скорость маневров довыведения с нее на ГСО ограничена заданной величиной. Из проведенных ранее исследований следует, что накладные расходы на сброс малы при биэллиптической схеме довыведения. На целевой орбите спутник отделяется от ЦБ. За счет последнего включения двигателя на остатках топлива из основного бака в окрестности апогея целевой орбиты ЦБ переводится на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, а спутник за счет собственных двигателей переводится на ГСО.

В данной главе рассматриваются две разные, но близкие постановки задачи. В первом случае, предполагается, что сухая масса ДТБ и масса основного бака ЦБ пропорциональны массе вмещающегося в них топлива с коэффициентом α , а масса двигателя пропорциональна тяговооруженности с коэффициентом β [41].

Во втором случае предполагается, что заданы массовые характеристики РБ: сухие массы ДТБ и основного бака ЦБ, а также ограничения на массы топлива в ДТБ и в основном баке ЦБ.

Функционалом в рассматриваемых задачах является полезная масса, т.е. масса КА, оставшаяся на целевой орбите после отстыковки ЦБ.

Рассматриваемые задачи формализуются как задачи оптимального управления совокупностью динамических систем. На основе соответствующего принципа максимума Л.С. Понтрягина [33] их решение сводится к решению многоточечных краевых задач.

5.2. Формализация постановки задачи

Система дифференциальных уравнений движения центра масс КА в центральном ньютоновском гравитационном поле в вакууме имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_x(t), & \dot{y}(t) &= v_y(t), & \dot{z}(t) &= v_z(t), \\ \dot{v}_x(t) &= -\frac{\mu x(t)}{r^3(t)} + \frac{P_x(t)}{m(t)}, & \dot{v}_y(t) &= -\frac{\mu y(t)}{r^3(t)} + \frac{P_y(t)}{m(t)}, \\ \dot{v}_z(t) &= -\frac{\mu z(t)}{r^3(t)} + \frac{P_z(t)}{m(t)}, & \dot{m}(t) &= -\frac{P(t)}{c}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты центра масс КА в момент времени t ; $r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$ — расстояние от КА до центра Земли в момент времени t ; $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ — компоненты вектора скорости центра масс КА в момент времени t ; $M(0)$ — масса КА в начальный момент времени; $M(t)$ — масса КА в момент времени t ; $m(t) = M(t)/M(0)$ — обезразмеренная (используемая при расчетах) масса КА; $\vec{F}(t) = (F_x(t), F_y(t), F_z(t))$ — вектор реактивной тяги в момент t ; $F(t) = |\vec{F}(t)| = \sqrt{F_x^2(t) + F_y^2(t) + F_z^2(t)}$ — величина вектора реактивной тяги; $\vec{P}(t) = (P_x(t), P_y(t), P_z(t)) = (F_x(t)/M(0), F_y(t)/M(0), F_z(t)/M(0))$ — вектор обезразмеренной реактивной тяги; $n = F_{\max}/(M(0)g_3)$ — начальная тяговооруженность; $P(t) = \sqrt{P_x^2(t) + P_y^2(t) + P_z^2(t)}$ — величина вектора обезразмеренной реактивной тяги в момент времени t .

Кроме центрального ньютоновского гравитационного поля рассматривается движение центра масс КА в гравитационном поле с учетом второй зональной гармоники:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= v_x(t), & \dot{y}(t) &= v_y(t), & \dot{z}(t) &= v_z(t), \\
\dot{v}_x(t) &= -\frac{\mu x(t)}{r^3(t)} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5(t)} \left(\frac{5x(t)z^2(t)}{r^2(t)} - x(t) \right) + \frac{P_x(t)}{m(t)}, \\
\dot{v}_y(t) &= -\frac{\mu y(t)}{r^3(t)} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5(t)} \left(\frac{5y(t)z^2(t)}{r^2(t)} - y(t) \right) + \frac{P_y(t)}{m(t)}, \\
\dot{v}_z(t) &= -\frac{\mu z(t)}{r^3(t)} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5(t)} \left(\frac{5z^3(t)}{r^2(t)} - 3z(t) \right) + \frac{P_z(t)}{m(t)}, \\
\dot{m}(t) &= -\frac{P(t)}{c},
\end{aligned}$$

где J_2 — коэффициент второй зональной гармоники.

Управления в задаче считаются кусочно-непрерывными функциями:

$$P(t) = \sqrt{(P_x(t))^2 + (P_y(t))^2 + (P_z(t))^2} \leq P_{\max},$$

где $P_{\max} = g_3 n m_0$ — ограничение величины вектора управляющей тяги, n — начальная тяговооруженность КА, где m_0 — начальная масса КА.

В начальный момент времени ($t = 0$) КА находится на опорной круговой орбите заданного наклона i_0 и радиуса R_0 . В силу выбора системы координат долгота восходящего узла $\Omega_0 = 0$, и потому в качестве формализации условий нахождения КА на начальной круговой орбите могут быть выбраны соотношения:

$$\begin{aligned}
x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2 &= R_0^2, & x(0)C_{0x} + y(0)C_{0y} + z(0)C_{0z} &= 0, \\
v_x(0) + \frac{v_0}{R_0} (y(0) \cos i_0 + z(0) \sin i_0) &= 0, & v_y(0) - \frac{v_0}{R_0} x(0) \cos i_0 &= 0, \\
v_z(0) - \frac{v_0}{R_0} x(0) \sin i_0 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Масса КА считается безразмерной и потому в начальный момент равна 1:

$$m(0) = m_0 = 1. \tag{5.3}$$

После выполнения первой серии маневров в момент $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$ КА должен оказаться на оскулирующей кеплеровской орбите, касающейся условной границы атмосферы (на самом деле условия касания атмосферы оскулирующей кеплеровской орбиты не гарантируют касания атмосферы орбиты в реальном поле Земли; в работе предполагается, что для быстрого устранения КМ этого достаточно). Понижение

высоты перигея орбиты до 100 км (условная граница атмосферы) происходит за счет включения двигателя ЦБ на остатках топлива из ДТБ. Как и ранее, функция радиус перицентра $r_{\text{п}}(\cdot)$ является функцией координат и компонент вектора скорости КА (4.1). В момент времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$ выполняются условия:

$$r_{\text{п}}(\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}) = R_3 + 100 \text{ км}, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) - x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0, & y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) - y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0, \\ z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) - z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0, & v_x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) - v_x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0, \\ v_y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) - v_y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0, & v_z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) - v_z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0, \\ \tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}} - \tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}} &= 0. \end{aligned}$$

После выхода КА на орбиту сброса ДТБ начинается пассивный участок сброса ДТБ $[\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}, \tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}]$. На этом участке масса в системе дифференциальных уравнений не рассматривается. Предполагается, что отстыковка ДТБ занимает заданное время:

$$\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}} - \tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}} = 120 \text{ с}. \quad (5.5)$$

Рассматриваются две различные, но близкие постановки задачи. В первой постановке предполагается, что сухая масса бака пропорциональна массе вмещающегося в него топлива с коэффициентом α , масса двигателя и дополнительных конструкций ЦБ пропорциональна тяговооруженности с коэффициентом β . Во второй постановке предполагается, что заданы все массовые характеристики РБ. В обеих постановках задачи считается, что в баки залито ровно столько топлива, сколько необходимо для совершения соответствующих маневров.

Масса КА после сброса ДТБ в первой постановке задачи определяется соотношением:

$$m(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = m(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) - \alpha \left(m_0 - m(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) \right), \quad (5.6)$$

во второй постановке:

$$m(\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}) = m(\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}) - m^{\text{ДТБ}}, \quad (5.7)$$

где $m^{\text{ДТБ}}$ — заданная сухая обезразмеренная масса ДТБ (можно считать, что в эту величину включена также масса неснижаемого остатка топлива).

Ограничение на массу топлива в ДТБ во второй постановке задачи имеет вид

$$m_0 - m \left(\tau_{с61}^{ДТБ} \right) \leq m_{топл.}^{ДТБ}. \quad (5.8)$$

После сброса ДТБ КА совершает маневр перехода на «безопасную» орбиту. Этот маневр заканчивается в момент времени $\tau_{бес}$. На совершение маневра расходуется топливо из основного бака. В момент времени $\tau_{бес}$ выполняются условия:

$$r_{п}(\tau_{бес-}) = R_3 + 200 \text{ км}, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} x(\tau_{бес+}) - x(\tau_{бес-}) &= 0, \quad y(\tau_{бес+}) - y(\tau_{бес-}) = 0, \quad z(\tau_{бес+}) - z(\tau_{бес-}) = 0, \\ v_x(\tau_{бес+}) - v_x(\tau_{бес-}) &= 0, \quad v_y(\tau_{бес+}) - v_y(\tau_{бес-}) = 0, \quad v_z(\tau_{бес+}) - v_z(\tau_{бес-}) = 0, \\ \tau_{бес+} - \tau_{бес-} &= 0. \end{aligned}$$

После выхода на «безопасную» орбиту начинается вторая серия маневров, после завершения которой КА переходит на целевую орбиту. На целевой орбите спутник отстыковывается от ЦБ. Масса спутника, оставшаяся на целевой орбите, считается полезной и максимизируется:

$$m_{п} = m(\tau_{ц-}) - m(\tau_{ц+}) \rightarrow \max, \quad (5.10)$$

где $m(\tau_{ц-})$ — масса КА на целевой орбите до отстыковки спутника, $m(\tau_{ц+})$ — масса ЦБ на целевой орбите после отстыковки спутника. Спутник за счет собственных двигателей переходит на ГСО. Предполагается, что характеристическая скорость маневра довыведения с целевой орбиты на ГСО ограничена заданной величиной Δv^* и линия апсид целевой орбиты лежит в плоскости экватора, т.е. z-компонента вектора Лапласа равна нулю. В момент времени $\tau_{ц}$ выполняются условия:

$$\begin{aligned} \Delta v_{дов}(\tau_{ц-}) &:= \Delta v_{дов}(x(\tau_{ц-}), y(\tau_{ц-}), z(\tau_{ц-}), v_x(\tau_{ц-}), v_y(\tau_{ц-}), v_z(\tau_{ц-})) \leq \Delta v^*, \\ \mathcal{A}(\tau_{ц-}) &:= C_y(\tau_{ц-})v_x(\tau_{ц-}) - C_x(\tau_{ц-})v_y(\tau_{ц-}) - \frac{\mu z(\tau_{ц-})}{r(\tau_{ц-})} = 0, \\ x(\tau_{ц+}) - x(\tau_{ц-}) &= 0, \quad y(\tau_{ц+}) - y(\tau_{ц-}) = 0, \quad z(\tau_{ц+}) - z(\tau_{ц-}) = 0, \\ v_x(\tau_{ц+}) - v_x(\tau_{ц-}) &= 0, \quad v_y(\tau_{ц+}) - v_y(\tau_{ц-}) = 0, \\ v_z(\tau_{ц+}) - v_z(\tau_{ц-}) &= 0, \quad \tau_{ц+} - \tau_{ц-} = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $\tau_{ц}$ — момент выхода на целевую орбиту, $C_x(\tau_{ц-})$, $C_y(\tau_{ц-})$, $C_z(\tau_{ц-})$ — компоненты вектора кинетического момента орбитального движения КА в момент времени $\tau_{ц-}$.

Характеристическая скорость маневров довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО так же как и в предыдущей главе учитывается по упрощенной схеме (4.5) (учитывается в рамках центрального ньютоновского поля, все импульсные маневры считаются апсидальными, поворот орбиты производится только вторым импульсом, первый разгонный и последний установочный импульсы плоскость орбиты не меняют, что в совокупности существенно упрощает постановку задачи). В качестве R_{\max} выбирается удаление от Земли, с одной стороны, достаточно большое, а с другой — позволяющее пренебречь влиянием других тел Солнечной системы, в первую очередь влиянием Луны и Солнца.

После отстыковки спутника маневр ЦБ продолжается. За счет дополнительного включения двигателя происходит понижение высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ до 100 км (условная граница атмосферы):

$$r_{ц}(T) = R_3 + 100 \text{ км.} \quad (5.12)$$

В конечный момент времени T расходуется все топливо из основного бака ЦБ. Исходя из того, что в первой постановке задачи предполагается, что в баки залито ровно столько топлива, сколько необходимо для совершения соответствующих маневров, и сухая масса основного бака ЦБ пропорциональна массе вмещающегося в него топлива с коэффициентом α , а масса двигателя пропорциональна тяговооруженности с коэффициентом β [41], получаем:

$$\begin{aligned} m(T) - \alpha m_{\text{топл.}} - \beta n &= 0, \\ m_{\text{топл.}} &= \left(m \left(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}} \right) - m(\tau_{ц-}) \right) + \left(m(\tau_{ц+}) - m(T) \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Во второй постановке задачи заданы сухая масса ЦБ и ограничение на топливо в основном баке ЦБ, поэтому

$$m(T) - m^{\text{ЦБ}} = 0, \quad (5.14)$$

$$\left(m \left(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}} \right) - m(\tau_{ц-}) \right) + \left(m(\tau_{ц+}) - m(T) \right) \leq m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}}, \quad (5.15)$$

где $m^{\text{ЦБ}}$ — заданная сухая обезразмеренная масса ЦБ, включающая массу двигателя и дополнительных конструкций, $m_{\text{топл}}^{\text{ЦБ}}$ — максимальная обезразмеренная масса топлива, которое можно залить в основной бак ЦБ.

Стоит отметить, что непрерывность координат и скоростей КА выполняется во все моменты времени. Особенность рассматриваемой задачи: функционал является функцией фазовых переменных в промежуточный момент времени.

5.3. Необходимые условия оптимальности первого порядка

Рассматриваемая задача является задачей оптимального управления с промежуточными условиями и решается на основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [33].

Функция Понтрягина в случае центрального ньютоновского гравитационного поля имеет вид

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z + p_m \left(-\frac{P}{c} \right) + \\ + p_{vx} \left(-\frac{\mu x}{r^3} + \frac{P_x}{m} \right) + p_{vy} \left(-\frac{\mu y}{r^3} + \frac{P_y}{m} \right) + p_{vz} \left(-\frac{\mu z}{r^3} + \frac{P_z}{m} \right),$$

в задачах с учетом второй зональной гармоники функция Понтрягина имеет вид

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z + p_m \left(-\frac{P}{c} \right) + \\ + p_{vx} \left(-\frac{\mu x}{r^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5} \left(\frac{5xz^2}{r^2} - x \right) + \frac{P_x}{m} \right) + \\ + p_{vy} \left(-\frac{\mu y(t)}{r^3(t)} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5(t)} \left(\frac{5yz^2}{r^2} - y \right) + \frac{P_y}{m} \right) + \\ + p_{vz} \left(-\frac{\mu z}{r^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5} \left(\frac{5z^3}{r^2} - 3z \right) + \frac{P_z}{m} \right),$$

терминант (для первой постановки задачи) —

$$l = l_0 + l_{c61} + l_{c62} + l_{\text{без}} + l_{\text{ц}} + l_T - \lambda_0 (m(\tau_{\text{ц}-}) - m(\tau_{\text{ц}+})),$$

где

$$l_0 = \lambda_{R0} (x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2 - R_0^2) + \lambda_{C0} (x(0)C_{0x} + y(0)C_{0y} + z(0)C_{0z}) + \\ + \lambda_{vx0} \left(v_x(0) + \frac{v_0}{R_0} (y(0) \cos i_0 + z(0) \sin i_0) \right) + \lambda_{vy0} \left(v_y(0) - \frac{v_0}{R_0} x(0) \cos i_0 \right) + \\ + \lambda_{vz0} \left(v_z(0) - \frac{v_0}{R_0} x(0) \sin i_0 \right) + \lambda_{m0} (m(0) - m_0),$$

$$l_{c61} = \sum_{\xi=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} \lambda_{\xi c61} \left(\xi \left(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}} \right) - \xi \left(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}} \right) \right) + \lambda_{\tau c61} \left(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}} - \tau_{c61-}^{\text{ДТБ}} \right) + \\ + \lambda_{c61} \left(r_{\Pi} \left(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}} \right) - R_3 - 100 \right),$$

$$l_{c62} = \lambda_{m\tau} \left(m \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}} \right) - m \left(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}} \right) + \alpha \left(m_0 - m \left(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}} \right) \right) \right) + \\ + \lambda_{\tau} \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}} - \tau_{c61-}^{\text{ДТБ}} - 120 \right) + \lambda_{\tau c62} \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}} - \tau_{c62-}^{\text{ДТБ}} \right),$$

$$l_{6e3} = \sum_{\xi=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} \lambda_{\xi 6e3} \left(\xi \left(\tau_{6e3+} \right) - \xi \left(\tau_{6e3-} \right) \right) + \lambda_{\tau 6e3} \left(\tau_{6e3+} - \tau_{6e3-} \right) + \\ + \lambda_{6e3} \left(r_{\Pi} \left(\tau_{6e3-} \right) - R_3 - 200 \right),$$

$$l_{\Pi} = \sum_{\xi=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} \lambda_{\xi \Pi} \left(\xi \left(\tau_{\Pi+} \right) - \xi \left(\tau_{\Pi-} \right) \right) + \lambda_{\tau \Pi} \left(\tau_{\Pi+} - \tau_{\Pi-} \right) + \\ + \lambda_{\Pi} \left(C_y \left(\tau_{\Pi-} \right) v_x \left(\tau_{\Pi-} \right) - C_x \left(\tau_{\Pi-} \right) v_y \left(\tau_{\Pi-} \right) - \frac{\mu z \left(\tau_{\Pi-} \right)}{r \left(\tau_{\Pi-} \right)} \right) + \\ + \lambda_{\text{ДОВ}} \left(\Delta v_{\text{ДОВ}} \left(x \left(\tau_{\Pi-} \right), y \left(\tau_{\Pi-} \right), z \left(\tau_{\Pi-} \right), v_x \left(\tau_{\Pi-} \right), v_y \left(\tau_{\Pi-} \right), v_z \left(\tau_{\Pi-} \right) \right) - \Delta v^* \right),$$

$$l_T = \lambda_T \left(r_{\Pi} \left(T \right) - R_3 - 100 \right) + \\ + \lambda_{mT} \left(m \left(T \right) - \alpha \left(\left(m \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}} \right) - m \left(\tau_{\Pi-} \right) \right) + \left(m \left(\tau_{\Pi+} \right) - m \left(T \right) \right) \right) - \beta n \right).$$

Во второй постановке задачи l_{c62} и l_T имеют вид

$$l_{c62} = \lambda_{m\tau 1} \left(m \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}} \right) - m \left(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}} \right) + m^{\text{ДТБ}} \right) + \\ + \lambda_{m\tau 2} \left(m_0 - m \left(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}} \right) - m_{\text{ТОПЛ.}}^{\text{ДТБ}} \right) + \\ + \lambda_{\tau} \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}} - \tau_{c61-}^{\text{ДТБ}} - 120 \right) + \lambda_{\tau c62} \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}} - \tau_{c62-}^{\text{ДТБ}} \right),$$

$$l_T = \lambda_T (r_{\Pi}(T) - R_3 - 100) + \lambda_{mT1} (m(T) - m^{\text{ЦБ}}) + \\ + \lambda_{mT2} \left(\left(m \left(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}} \right) - m(\tau_{\text{Ц-}}) \right) + (m(\tau_{\text{Ц+}}) - m(T)) - m_{\text{ТОПЛ.}}^{\text{ЦБ}} \right).$$

Здесь $p_x(\cdot)$, $p_y(\cdot)$, $p_z(\cdot)$, $p_{v_x}(\cdot)$, $p_{v_y}(\cdot)$, $p_{v_z}(\cdot)$, $p_m(\cdot)$ — сопряженные переменные (функциональные множители Лагранжа) на каждом из участков траектории; λ_0 , λ_{R0} , λ_{C0} , λ_{vx0} , λ_{vy0} , λ_{vz0} , λ_{m0} , $\lambda_{\xi c61}$, $\lambda_{\xi \text{без}}$, $\lambda_{\xi \text{Ц}}$ ($\xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z$), $\lambda_{\tau c61}$, λ_{c61} , $\lambda_{m\tau}$, λ_{τ} , $\lambda_{\tau c62}$, $\lambda_{\tau \text{без}}$, $\lambda_{\text{без}}$, $\lambda_{\tau \text{Ц}}$, $\lambda_{\text{Ц}}$, $\lambda_{\text{ДОВ}}$, λ_T , λ_{mT} , $\lambda_{m\tau 1}$, $\lambda_{m\tau 2}$, λ_{mT1} , λ_{mT2} — числовые множители Лагранжа.

Стоит отметить, что на участке $[\tau_{c61}^{\text{ДТБ}}, \tau_{c62}^{\text{ДТБ}}]$ отсутствует слагаемое, соответствующее дифференциальному уравнению $\dot{m} = -\frac{P}{c}$ в функции Понтрягина.

Условия стационарности по фазовым переменным (уравнения Эйлера-Лагранжа) в центральном ньютоновском гравитационном поле для координат и скоростей совпадают с (3.30), а для массы соответствующее уравнение имеет вид:

$$\dot{p}_m = \frac{P_x p_{vx} + P_y p_{vy} + P_z p_{vz}}{m^2}. \quad (5.16)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа в случае перелета в гравитационном поле с учетом второй зональной гармоники в явном виде не выписывались. Правые части этих уравнений вычислялись с использованием технологии численно-аналитического дифференцирования [112].

Условия трансверсальности в силу их громоздкости выписываются в формальном виде:

$$p_{\xi}(0) = \frac{\partial l}{\partial \xi(0)}, \quad p_{\xi}(T) = -\frac{\partial l}{\partial \xi(T)}, \\ p_{\xi}(\beta_+) = \frac{\partial l}{\partial \xi(\beta_+)}, \quad p_{\xi}(\beta_-) = -\frac{\partial l}{\partial \xi(\beta_-)}, \\ \xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z, \quad \beta = \tau_{c61}^{\text{ДТБ}}, \tau_{c62}^{\text{ДТБ}}, \tau_{\text{без}}, \tau_{\text{Ц}}.$$

Следствием условий трансверсальности в начальный момент времени являются

$$\begin{aligned} p_x(0) &= 2\lambda_{R0}x(0) + \lambda_{C0}C_{0x} - \frac{v_0}{R_0} (p_{vy}(0) \cos i_0 + p_{vz}(0) \sin i_0), \\ p_y(0) &= 2\lambda_{R0}y(0) + \lambda_{C0}C_{0y} + \frac{v_0}{R_0} p_{vx}(0) \cos i_0, \\ p_z(0) &= 2\lambda_{R0}z(0) + \lambda_{C0}C_{0z} + \frac{v_0}{R_0} p_{vy}(0) \sin i_0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Следствиями условий трансверсальности в моменты времени $\tau_{сб1}^{\text{ДТБ}}$ и $\tau_{без}$ являются

$$\begin{aligned} p_\xi(\gamma_-) - p_\xi(\gamma_+) + \lambda_i \frac{\partial r_\Pi(\gamma_-)}{\partial \xi(\gamma_-)} &= 0, \\ \xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z, \quad \gamma = \tau_{сб1}^{\text{ДТБ}}, \tau_{без}, \quad i = \text{сб1}, \text{без}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Следствиями условий трансверсальности в момент времени τ_Π являются

$$\begin{aligned} p_\xi(\tau_{\Pi-}) - p_\xi(\tau_{\Pi+}) + \lambda_{\text{дов}} \frac{\Delta v_{\text{дов}}(\tau_{\Pi-})}{\partial \xi(\tau_{\Pi-})} + \lambda_\Pi \frac{\partial \mathcal{A}(\tau_{\Pi-})}{\partial \xi(\tau_{\Pi-})} &= 0, \\ \xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Производные функций $r_\Pi(\cdot)$, $\Delta v_{\text{дов}}(\cdot)$, $\mathcal{A}(\cdot)$, входящие в следствия из условий трансверсальности (5.18), (5.19), а также условия трансверсальности в конечный момент времени T вычисляются при помощи технологии численно-аналитического дифференцирования.

Следствием условий трансверсальности по переменной m в моменты времени $\tau_{сб1}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{сб2}^{\text{ДТБ}}$ и T в первой постановке задачи является равенство

$$(1 + \alpha)p_m(\tau_{сб2+}^{\text{ДТБ}}) - p_m(\tau_{сб1-}^{\text{ДТБ}}) - \alpha p_m(T) = 0. \quad (5.20)$$

Докажем это следствие. Условия трансверсальности по переменной m в моменты времени $\tau_{сб1}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{сб2}^{\text{ДТБ}}$ и T имеют вид

$$\begin{aligned} p_m(\tau_{сб1-}^{\text{ДТБ}}) &= -\frac{\partial l}{\partial m(\tau_{сб1-}^{\text{ДТБ}})} = \lambda_{m\tau}(1 + \alpha), \\ p_m(\tau_{сб2+}^{\text{ДТБ}}) &= \frac{\partial l}{\partial m(\tau_{сб2+}^{\text{ДТБ}})} = \lambda_{m\tau} - \alpha\lambda_{mT}, \\ p_m(T) &= -\frac{\partial l}{\partial m(T)} = -\lambda_{mT}(1 + \alpha). \end{aligned}$$

Имеем следующую цепочку равенств:

$$p_m(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) - \lambda_{m\tau} + \alpha\lambda_{mT} = 0, \quad \lambda_{m\tau} = \frac{p_m(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}})}{1 + \alpha}, \quad \lambda_{mT} = -\frac{p_m(T)}{1 + \alpha} \Rightarrow$$

$$p_m(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) - \frac{p_m(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}})}{1 + \alpha} - \alpha\frac{p_m(T)}{1 + \alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$(1 + \alpha)p_m(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) - p_m(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}}) - \alpha p_m(T) = 0.$$

Следствием условий трансверсальности по переменной m в моменты времени $\tau_{c61}^{\text{ДТБ}}, \tau_{c62}^{\text{ДТБ}}$ во второй постановке задачи является равенство

$$p_m(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) - p_m(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}}) = \lambda_{mT2} - \lambda_{m\tau2}. \quad (5.21)$$

Докажем это равенство. В моменты времени $\tau_{c61}^{\text{ДТБ}}, \tau_{c62}^{\text{ДТБ}}$ по переменной m условия трансверсальности имеют вид

$$p_m(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = \lambda_{m\tau1} + \lambda_{mT2}, \quad p_m(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}}) = \lambda_{m\tau1} + \lambda_{m\tau2}.$$

Вычитаем из первого равенства второе и получаем следствие (5.21).

Следствием условий трансверсальности по переменной m в момент времени $\tau_{ц}$ является непрерывность сопряженной переменной:

$$p_m(\tau_{ц+}) = p_m(\tau_{ц-}), \quad (5.22)$$

поскольку $p_m(\tau_{ц-}) = -\alpha\lambda_{mT}$, $p_m(\tau_{ц+}) = -\alpha\lambda_{mT}$ — в первой постановке задачи и $p_m(\tau_{ц-}) = -\alpha\lambda_{mT2}$, $p_m(\tau_{ц+}) = -\alpha\lambda_{mT2}$ — во второй постановке задачи.

В начальный момент времени условие стационарности отсутствует. Следствием условий стационарности в моменты времени $\tau_{c61}^{\text{ДТБ}}, \tau_{c62}^{\text{ДТБ}}$ является $H(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = H(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}})$. В моменты времени $\tau_{без}$ и $\tau_{ц}$ выполняются условия непрерывности функции Понтрягина: $H(\tau_{без+}) = H(\tau_{без-})$ и $H(\tau_{ц+}) = H(\tau_{ц-})$. Условие стационарности в не заданный заранее момент времени T : $H(T) = 0$.

Пусть \vec{e} — единичный вектор. Тогда условия оптимальности по управлениям P_x, P_y, P_z имеют вид

$$\vec{P} = P\vec{e}, \quad \vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

$$P_x = P \cos \alpha, \quad P_y = P \cos \beta, \quad P_z = P \cos \gamma,$$

$$\begin{aligned}
\vec{P}_{opt} &= \arg \operatorname{abs} \max_{0 \leq P \leq P_{\max}} \left[\frac{p_{vx}P_x + p_{vy}P_y + p_{vz}P_z}{m} - \frac{p_m}{c}P \right] = \\
&= \arg \operatorname{abs} \max_{0 \leq P \leq P_{\max}} \left[\frac{p_{vx}P \cos \alpha + p_{vy}P \cos \beta + p_{vz}P \cos \gamma}{m} - \frac{p_m}{c}P \right] = \\
&= \arg \operatorname{abs} \max_{0 \leq P \leq P_{\max}} \left[P \left(\frac{p_{vx} \cos \alpha + p_{vy} \cos \beta + p_{vz} \cos \gamma}{m} - \frac{p_m}{c} \right) \right],
\end{aligned}$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы.

Если $\left(\frac{p_{vx} \cos \alpha + p_{vy} \cos \beta + p_{vz} \cos \gamma}{m} - \frac{p_m}{c} \right) > 0$, то $P_{opt} = P_{\max}$;
если же $\left(\frac{p_{vx} \cos \alpha + p_{vy} \cos \beta + p_{vz} \cos \gamma}{m} - \frac{p_m}{c} \right) < 0$, то $P_{opt} = 0$. Таким образом,

$$P_{opt} = \begin{cases} P_{\max}, & \chi > 0, \\ 0, & \chi < 0, \end{cases} \quad (5.23)$$

где $\chi \equiv \frac{\rho}{m} - \frac{p_m}{c}$ — функция переключения.

$p_{vx} \cos \alpha + p_{vy} \cos \beta + p_{vz} \cos \gamma$ — скалярное произведение векторов $\vec{p}_v = (p_{vx}, p_{vy}, p_{vz})$ и $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Оно достигает максимального значения при сонаправленности векторов \vec{p}_v и \vec{e} :

$$\cos \alpha_{opt} = \frac{p_{vx}}{\rho}, \quad \cos \beta_{opt} = \frac{p_{vy}}{\rho}, \quad \cos \gamma_{opt} = \frac{p_{vz}}{\rho},$$

где $\rho = \sqrt{p_{vx}^2 + p_{vy}^2 + p_{vz}^2}$. Таким образом, учет оптимального направления вектора тяги позволяет определить:

$$(P_x)_{opt} = P_{opt} \frac{p_{vx}}{\rho}, \quad (P_y)_{opt} = P_{opt} \frac{p_{vy}}{\rho}, \quad (P_z)_{opt} = P_{opt} \frac{p_{vz}}{\rho}. \quad (5.24)$$

Режимы особого управления, потенциально возможные в рассматриваемых задачах, в данной работе не рассматриваются.

Условия дополняющей нежесткости и неотрицательности в первой постановке задачи имеют вид

$$\begin{aligned}
\lambda_{\text{дов}}(\Delta v_{\text{дов}}(\tau_{\text{ц-}}) - \Delta v^*) &= 0, \\
\lambda_0 &\geq 0, \quad \lambda_{\text{дов}} \geq 0.
\end{aligned} \quad (5.25)$$

Во второй постановке задачи в дополнение к (5.25) имеются следующие усло-

вия дополняющей нежесткости и неотрицательности:

$$\begin{aligned} \lambda_{m\tau 2} \left(m_0 - m \left(\tau_{сб1-}^{\text{ДТБ}} \right) - m_{\text{ТОПЛ.}}^{\text{ДТБ}} \right) &= 0, \\ \lambda_{mT 2} \left(\left(m \left(\tau_{сб2+}^{\text{ДТБ}} \right) - m \left(\tau_{ц-} \right) \right) + \left(m \left(\tau_{ц+} \right) - m(T) \right) - m_{\text{ТОПЛ.}}^{\text{ЦБ}} \right) &= 0, \\ \lambda_{m\tau 2} &\geq 0, \quad \lambda_{mT 2} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

В качестве условия нормировки используется:

$$p_{vx}^2(0) + p_{vy}^2(0) + p_{vz}^2(0) = 1. \quad (5.27)$$

5.4. Структура траектории и вычислительная схема метода стрельбы

Структура траектории определяется на основе результатов проведенных ранее исследований в модифицированной импульсной постановке. Главным достоинством подхода заданной структуры траектории является то, что он позволяет построить экстремали Потрягина — при наличии «хорошей» вычислительной схемы метода стрельбы и «хорошего» начального приближения модифицированный метод Ньютона сходится за несколько итераций.

Начальное приближение к значениям фазовых и сопряженных переменных, входящих в вектор параметров пристрелки, выбирается на основе ранее полученного решения в модифицированной импульсной постановке в соответствии с [33]: в моменты включения тяги они соответствуют значениям фазовых и сопряженных переменных до импульсного воздействия, в моменты выключения тяги — значениям фазовых и сопряженных переменных после импульсного воздействия, продолжительность активных участков оценивается исходя из расхода топлива на данное включение двигателя, продолжительность пассивных участков равняется соответствующей продолжительности пассивных участков между импульсными воздействиями. Вначале решается задача с большой ограниченной тягой в первой постановке при $n = 10$. Далее методом продолжения по параметру (тяговооруженности) получается решение для $n = 0.1$. Переход от задачи в первой постановке к задаче во второй постановке также осуществляется методом продолжения по параметру: соответствующее уравнение из первой постановки задачи умножается на $(1 - \gamma)$, а из второй — на γ , где $\gamma \in [0, 1]$.

В вектор параметров пристрелки входят (см. рис. 5.1):

- числовые множители Лагранжа $\lambda_{R0}, \lambda_{C0}, \lambda_{сб1}, \lambda_{без}, \lambda_{ц}, \lambda_{дов}, \lambda_T$, во второй постановке задачи добавляется еще один числовой множитель Лагранжа λ_{mT2} ;
- угловое положение КА на опорной круговой орбите φ_0 , значения четырех сопряженных переменных в начальный момент времени $p_{vx}(0), p_{vy}(0), p_{vz}(0), p_m(0)$ (по угловому положению вычисляются значения координат и скоростей КА в начальный момент времени, значения сопряженных переменных $p_x(0), p_y(0), p_z(0)$ вычисляются по формулам (5.17). По условию имеем $m(0) = 1$ и, поэтому $m(0)$ в вектор параметров пристрелки не включается. Таким образом получаем стартовую точку для решения задачи Коши);
- продолжительность первого активного участка $\Delta\tau_1^{\text{акт}}$;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после выключения двигателя $x(\tau_{1+}^{\text{акт}}), y(\tau_{1+}^{\text{акт}}), z(\tau_{1+}^{\text{акт}}), v_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}), v_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}), v_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}), p_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}), p_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}), p_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}), p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{акт}}), p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{акт}}), p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{акт}})$;
- продолжительность первого пассивного участка $\Delta\tau_1^{\text{пасс}}$;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после включения двигателя $x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), v_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), v_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), v_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$;
- продолжительность второго активного участка, на котором происходит понижение высоты перигея орбиты КА до условной границы атмосферы, $\Delta\tau_2^{\text{акт}} = \Delta\tau_{сб1}^{\text{ДТБ}}$;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после выключения двигателя $x(\tau_{сб1+}^{\text{ДТБ}}), y(\tau_{сб1+}^{\text{ДТБ}}), z(\tau_{сб1+}^{\text{ДТБ}}), v_x(\tau_{сб1+}^{\text{ДТБ}}), v_y(\tau_{сб1+}^{\text{ДТБ}}), v_z(\tau_{сб1+}^{\text{ДТБ}}), p_x(\tau_{сб1+}^{\text{ДТБ}}), p_y(\tau_{сб1+}^{\text{ДТБ}}), p_z(\tau_{сб1+}^{\text{ДТБ}}), p_{vx}(\tau_{сб1+}^{\text{ДТБ}}), p_{vy}(\tau_{сб1+}^{\text{ДТБ}}), p_{vz}(\tau_{сб1+}^{\text{ДТБ}})$ (продолжительность второго пассивного участка $\Delta\tau_2^{\text{пасс}}$, во время которого происходит сброс ДТБ является параметром задачи (120 с) и не входит в вектор параметров пристрелки);
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после включения двигателя $x(\tau_{сб2+}^{\text{ДТБ}}), y(\tau_{сб2+}^{\text{ДТБ}}), z(\tau_{сб2+}^{\text{ДТБ}}), v_x(\tau_{сб2+}^{\text{ДТБ}}), v_y(\tau_{сб2+}^{\text{ДТБ}}), v_z(\tau_{сб2+}^{\text{ДТБ}})$,

$p_x(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}), p_y(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}), p_z(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}), p_{vx}(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}), p_{vy}(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}), p_{vz}(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}})$, в том числе сопряженная переменная, соответствующая массе $p_m(\tau_{с62}^{\text{ДТБ}}) = p_m(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}})$ (масса КА после сброса ДТБ не входит в вектор параметров пристрелки и вычисляется в первой постановке задачи по формуле (5.6), во второй постановке — (5.7));

- продолжительность третьего активного участка $\Delta\tau_3^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{без}}$, на котором происходит повышение высоты перигея орбиты КА до 200 км;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после выключения двигателя $x(\tau_{\text{без}+}), y(\tau_{\text{без}+}), z(\tau_{\text{без}+}), v_x(\tau_{\text{без}+}), v_y(\tau_{\text{без}+}), v_z(\tau_{\text{без}+}), p_x(\tau_{\text{без}+}), p_y(\tau_{\text{без}+}), p_z(\tau_{\text{без}+}), p_{vx}(\tau_{\text{без}+}), p_{vy}(\tau_{\text{без}+}), p_{vz}(\tau_{\text{без}+})$;
- продолжительность третьего пассивного участка $\Delta\tau_3^{\text{пасс}}$;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после включения двигателя $x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), v_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), v_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), v_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), p_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), p_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), p_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), p_{vx}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), p_{vy}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}), p_{vz}(\tau_{3+}^{\text{пасс}})$;
- продолжительность четвертого активного участка $\Delta\tau_4^{\text{акт}}$ — в конце данного участка КА выходит на целевую орбиту;
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных после выключения двигателя $x(\tau_{4+}^{\text{акт}}), y(\tau_{4+}^{\text{акт}}), z(\tau_{4+}^{\text{акт}}), v_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}), v_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}), v_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}), p_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}), p_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}), p_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}), p_{vx}(\tau_{4+}^{\text{акт}}), p_{vy}(\tau_{4+}^{\text{акт}}), p_{vz}(\tau_{4+}^{\text{акт}})$;
- продолжительность четвертого пассивного участка $\Delta\tau_4^{\text{пасс}} = \Delta\tau_{\text{ц}}$ — полет на целевой орбите (для удобства вычислений в качестве точки $\tau_{\text{ц}}$ выбрана точка последнего включения двигателя для сброса ЦБ);
- значения координат и скоростей, а также сопряженных переменных ЦБ после включения двигателя $x(\tau_{\text{ц}+}), y(\tau_{\text{ц}+}), z(\tau_{\text{ц}+}), v_x(\tau_{\text{ц}+}), v_y(\tau_{\text{ц}+}), v_z(\tau_{\text{ц}+}), p_x(\tau_{\text{ц}+}), p_y(\tau_{\text{ц}+}), p_z(\tau_{\text{ц}+}), p_{vx}(\tau_{\text{ц}+}), p_{vy}(\tau_{\text{ц}+}), p_{vz}(\tau_{\text{ц}+)$, масса $m(\tau_{\text{ц}+})$ ЦБ после отстыковки спутника (сопряженная переменная $p_m(\tau_{\text{ц}+})$ не входит в вектор параметров пристрелки, поскольку согласно следствию (5.22) p_m непрерывна в точке $\tau_{\text{ц}}$);

- продолжительность пятого активного участка, соответствующего понижению высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ, до 100 км (условной границы атмосферы), $\Delta\tau_5^{\text{акт}} = \Delta T$.

В вектор-функцию невязок входят:

- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_1^{\text{акт}}$;
- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_1^{\text{пасс}}$;
- 6 условий непрерывности фазовых переменных и 6 следствий из условий трансверсальности в момент времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$ (5.18);
- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$;
- 6 условий непрерывности фазовых переменных и 6 следствий из условий трансверсальности в момент времени $\tau_{\text{без}}$ (5.18);
- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_3^{\text{пасс}}$;
- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_4^{\text{акт}}$;
- 6 условий непрерывности фазовых переменных и 6 следствий из условий трансверсальности в момент времени $\tau_{\text{ц}}$ (5.19);
- равенство нулю z-компоненты вектора Лапласа (второе условие (5.11));
- условие расхода всего топлива из основного бака ЦБ в конечный момент времени: в первой постановке задачи — (5.13), во второй постановке задачи — (5.14);
- условие дополняющей нежесткости — равенство импульса довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО заданной величине (первое условие (5.25));

- три условия на перигей орбиты КА в моменты времени $\tau_{с61}^{ДТБ}$, $\tau_{без}$, T (5.4), (5.9), (5.12);
- четыре условия на функцию переключения: $\chi(\tau_{1-}^{акт}) = 0$, $\chi(\tau_{1+}^{пасс}) = 0$, $\chi(\tau_{3+}^{пасс}) = 0$, $\chi(\tau_{4-}^{акт}) = 0$;
- шесть условий трансверсальности в конечный момент времени T ;
- следствие из условий трансверсальности по переменной m : в первой постановке задачи — (5.20), во второй постановке задачи — (5.21) (с учетом $\lambda_{m\tau_2} = 0$);
- три следствия из условий стационарности $H(\tau_{с62+}^{ДТБ}) = H(\tau_{с61-}^{ДТБ})$, $H(\tau_{без+}) = H(\tau_{без-})$ и $H(\tau_{ц+}) = H(\tau_{ц-})$;
- условие стационарности в конечный момент времени: $H(T) = 0$;
- условие нормировки (5.27),
- во второй постановке задачи в вектор-функцию невязок входит также второе условие дополняющей нежесткости из (5.26) (первое условие дополняющей нежесткости из (5.26) не входит в вектор-функцию невязок и выполнение соответствующего неравенства (5.8) проверяется после решения задачи — на экстремали Понтрягина выполнено строгое неравенство, что соответствует случаю $\lambda_{m\tau_2} = 0$).

Таким образом, в первой постановке задачи — 118 параметров пристрелки и 118 невязок, во второй постановке задачи — 119 параметров пристрелки и 119 невязок, т.е. число неизвестных параметров совпадает с числом уравнений для их определения.

5.5. Экстремали Понтрягина в задаче с большой ограниченной тягой с малыми накладными расходами на сброс отработавших средств выведения космического аппарата в атмосферу

Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 с. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам. Для численного интегрирования использовался метод Дормана-Принса 8 (7). Экстремали Понтрягина представлены в приложениях С, D, E, F.

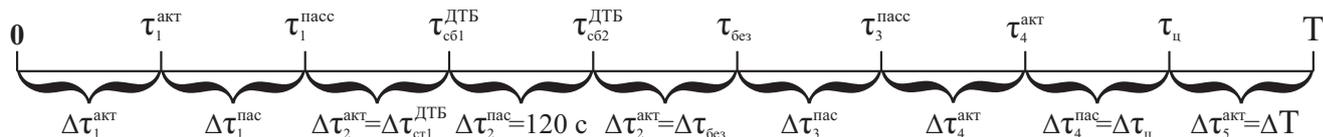


Рис. 5.1: Вычислительная схема метода стрельбы

Для первой постановки задачи с большой ограниченной тягой без учета влияния второй зональной гармоники расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ДТБ): 0.0083865. Расход топлива на повышение высоты перигея до 200 км (выход на безопасную орбиту): 0.0041482. Расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ЦБ): 0.0000301. Общий расход топлива на сброс ДТБ и ЦБ: 0.0125648.

Для второй постановки задачи с большой ограниченной тягой без учета влияния второй зональной гармоники расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ДТБ): 198.005 кг (0.0088002). Расход топлива на повышение высоты перигея до 200 км (выход на безопасную орбиту): 80.878 кг (0.0035946). Расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ЦБ): 1.628 кг (0.0000724). Общий расход топлива на сброс ДТБ и ЦБ: 280.512 кг (0.0124672).

Для первой постановки задачи с большой ограниченной тягой с учетом влияния второй зональной гармоники расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ДТБ): 0.0084909. Расход топлива на повышение высоты перигея до 200 км (выход на безопасную орбиту): 0.0041101. Расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ЦБ): 0.0000290. Общий расход топлива на сброс ДТБ и ЦБ: 0.0126300.

Для второй постановки задачи с большой ограниченной тягой с учетом второй зональной гармоники расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ДТБ): 199.041 кг (0.0088463). Расход топлива на повышение высоты перигея до 200 км (выход на безопасную орбиту): 80.895 кг (0.0035953). Расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ЦБ): 1.606 кг (0.0000714). Общий расход топлива на сброс ДТБ и ЦБ: 281.542 кг (0.0125130).

Таким образом, во всех четырех рассмотренных случаях накладные расходы на сброс ДТБ и ЦБ в атмосферу малы.

Наличие локального максимума в задаче с большой ограниченной тягой демонстрирует график зависимости полезной массы от радиусов апогея и перигея

целевой эллиптической орбиты (рис. 5.2). Для каждой расчетной точки (заданных радиусов апогея и перигея) численно определялся угол наклона целевой орбиты, так чтобы было выполнено ограничение на величину характеристической скорости маневров довыведения и решалась вспомогательная задача оптимизации траектории выведения КА на целевую орбиты с заданными углом наклона и радиусами апогея и перигея. Выделенная точка на графике соответствует наилучшим значениям радиуса апогея и перигея целевой орбиты для рассматриваемого ограничения на характеристическую скорость маневров довыведения.

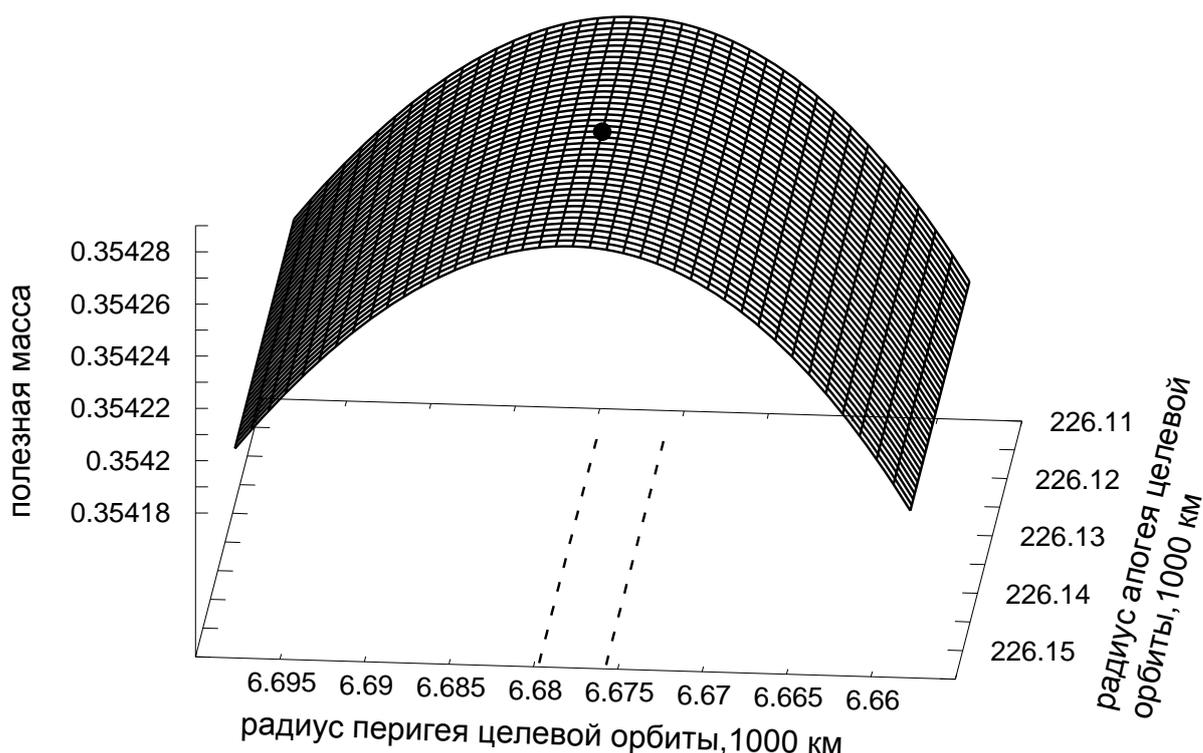


Рис. 5.2: Зависимость полезной массы от радиусов апогея и перигея целевой орбиты для первой постановки задачи без учета влияния второй зональной гармоники.

5.6. Выводы по главе 5

Одним из результатов проведенных ранее в импульсной постановке исследований оказалась возможность сброса ДТБ и ЦБ в атмосферу Земли с малыми накладными расходами. Этот же результат удалось подтвердить и в случае КА с двигателем большой ограниченной тяги.

Оказалось, что решение задачи перелета КА с двигателем большой ограниченной тяги в определенной мере близко к решению в импульсной постановке. Методика перехода от решения задачи в импульсной постановке к решению с дви-

гателем большой тяги [33] в рассматриваемом случае оказалась эффективной — экстремаль Понтрягина построена.

Задачи в первой и второй постановках (с оптимизируемой конструкцией и с фиксированными массовыми характеристиками) удалось включить в параметрическое семейство. Переход от решения первой задачи (с выбранными константами $\alpha = 0,08$ и $\beta = 0,01$) ко второй эффективно получен методом продолжения решения по параметру.

Отличие экстремали в случае учета второй зональной гармоники от соответствующей экстремали без учета второй зональной гармоники мало в смысле сходимости использованного метода Ньютона (метод Ньютона сходится за 11 итераций).

Технология численно-аналитического дифференцирования показала свою эффективность и технологичность (упрощение программного кода, уменьшение вероятности ошибок программирования).

Методика «лестница задач» позволила решить представленную в данной главе задачу, выбрать эффективную вычислительную схему и хорошее начальное приближение, справиться с трудностями численного решения, связанными со сложностью и громоздкостью постановки задачи, продемонстрировав таким образом свою эффективность.

ГЛАВА 6. УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ

6.1. Постановка задачи

В данной главе рассматривается упрощенная модель, в которой направление тяги определяется двумя углами — склонением вектора тяги θ (отсчитывается от плоскости экватора к северному полюсу) и прямого восхождения вектора тяги ϕ (отсчитывается в плоскости экватора от оси Ox в сторону Oy). Предполагается, что на каждом из активных участков углы изменяются по линейному закону. Простое управление делает рассматриваемую задачу оптимизации перелета конечномерной: траектория зависит от конечного числа параметров. Рассматривается задача во второй постановке (т.е. с заданными массовыми характеристиками РБ) с учетом влияния второй зональной гармоники.

6.2. Формализация постановки задачи

Углы склонения и прямого восхождения вектора тяги изменяются по линейному закону

$$\phi(t) = a_k(t - t_k) + b_k, \quad \theta(t) = c_k(t - t_k) + d_k,$$

где a_k, b_k, c_k, d_k — неизвестные параметры, определяющие линейный закон управления углами склонения и прямого восхождения вектора тяги на активном участке. Система дифференциальных уравнений управляемого движения центра масс КА на активном участке (индексы участков для “основных” фазовых переменных опущены, нумерация для активных и пассивных участков сплошная, на пассивных участках полета КА $P_{\max} = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x, & \dot{y} &= v_y, & \dot{z} &= v_z, \\ \dot{v}_x &= g_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) + P_{\max} \frac{\cos(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m}, \\ \dot{v}_y &= g_y(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) + P_{\max} \frac{\sin(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m}, \\ \dot{v}_z &= g_z(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) + P_{\max} \frac{\sin(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m}, \\ \dot{m} &= -\frac{P_{\max}}{c}, & \dot{a}_k &= 0, & \dot{b}_k &= 0, & \dot{c}_k &= 0, & \dot{d}_k &= 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $x(t), y(t), z(t)$ — координаты центра масс КА в момент времени t ; $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ — компоненты вектора скорости центра масс КА в момент времени

t ; $m(t) = M(t)/M(0)$ — обезразмеренная (используемая при расчетах) масса КА в момент времени t ; $M(0)$ — масса КА в начальный момент времени; $M(t)$ — масса КА в момент времени t ; $P_{\max} = g_3 n m_0$ — ограничение величины вектора управляющей тяги (во всех расчетах для данной задачи используются максимальная тяга); g_3 — гравитационное ускорение у поверхности Земли; n — начальная тяговооруженность; $m_0 = 1$ — начальная обезразмеренная масса КА; $c = P_{\text{уд}} g_3$ — скорость истечения реактивной струи; $P_{\text{уд}}$ — удельная тяга; $(g_x(\cdot), g_y(\cdot), g_z(\cdot))$ — компоненты, связанные с используемой моделью гравитационного поля и системой координат; t_0^k, t_1^k — неизвестные моменты начала и конца k -го (активного) участка.

Рассматривается движение центра масс КА в гравитационном поле Земли с учетом второй зональной гармоники:

$$\begin{aligned} g_x &= -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5} \left(\frac{5xz^2}{r^2} - x \right), \\ g_y &= -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5} \left(\frac{5yz^2}{r^2} - y \right), \\ g_z &= -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{3}{2} J_2 \mu \frac{R_0^2}{r^5} \left(\frac{5z^3}{r^2} - 3z \right), \end{aligned}$$

где $r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$ — расстояние от КА до центра Земли в момент времени t ; μ — гравитационный параметр Земли; J_2 — коэффициент второй зональной гармоники.

Условия стыковки k -го (активного) и $(k-1)$ -го, $(k+1)$ -го (пассивных) участков:

$$\begin{aligned} t_1^{k-1} - t_0^k &= 0, & t_1^k - t_0^{k+1} &= 0, & x(t_1^{k-1}) - x(t_0^k) &= 0, \\ x(t_1^k) - x(t_0^{k+1}) &= 0, & y(t_1^{k-1}) - y(t_0^k) &= 0, & y(t_1^k) - y(t_0^{k+1}) &= 0, \\ z(t_1^{k-1}) - z(t_0^k) &= 0, & z(t_1^k) - z(t_0^{k+1}) &= 0, & v_x(t_1^{k-1}) - v_x(t_0^k) &= 0, \\ v_x(t_1^k) - v_x(t_0^{k+1}) &= 0, & v_y(t_1^{k-1}) - v_y(t_0^k) &= 0, & v_y(t_1^k) - v_y(t_0^{k+1}) &= 0, \\ v_z(t_1^{k-1}) - v_z(t_0^k) &= 0, & v_z(t_1^k) - v_z(t_0^{k+1}) &= 0, & m(t_1^{k-1}) - m(t_0^k) &= 0, \\ m(t_1^k) - m(t_0^{k+1}) &= 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Величины $a_k(t_0^k), b_k(t_0^k), c_k(t_0^k), d_k(t_0^k)$ и $a_k(t_1^k), b_k(t_1^k), c_k(t_1^k), d_k(t_1^k)$ не заданы

(оптимизируются без дополнительных ограничений), а на $(k-1)$ -м и $(k+1)$ -м пассивных участках таких фазовых переменных нет. Кроме того, в эти моменты могут задаваться дополнительные ограничения на “основные” фазовые переменные (выход на орбиту сброса ДТБ, выход на безопасную орбиту и т.д.). В моменты, соответствующие отстыковки ДТБ и ЦБ, вместо условий непрерывности массы КА в формализацию задачи входят условия на скачок массы. Опишем подробно условия на координаты, скорости и массу КА в различные моменты времени. Стоит отметить, что эти условия совпадают с условиями на координаты, скорости и массу КА в решенной ранее задаче с большой ограниченной тягой.

В начальный момент времени ($t = 0$) КА находится на опорной круговой орбите радиуса R_0 . Условия на координаты и скорости КА в начальный момент времени совпадают с аналогичными условиями в задаче с большой ограниченной тягой (5.2). Масса КА считается безразмерной и потому в начальный момент равна 1 (5.3).

Первая серия маневров выполняется за счет топлива из ДТБ. После выполнения первой серии маневров в момент $\tau_{сб1}^{ДТБ}$ КА должен оказаться на мгновенной кеплеровской орбите, касающейся условной границы атмосферы. Понижение высоты перигея орбиты до 100 км (условная граница атмосферы) происходит за счет включения двигателя ЦБ на остатках топлива из ДТБ. В момент времени $\tau_{сб1}^{ДТБ}$ выполняются условия (5.4).

После выхода КА на орбиту сброса ДТБ начинается пассивный участок сброса ДТБ $[\tau_{сб1}^{ДТБ}, \tau_{сб2}^{ДТБ}]$. На этом участке масса в системе дифференциальных уравнений не рассматривается. Предполагается, что отстыковка ДТБ занимает заданное время (5.5). Масса КА после сброса ДТБ определяется соотношением (5.7). Ограничение на массу топлива в ДТБ имеет вид (5.8). После сброса ДТБ КА совершает маневр перехода на «безопасную» орбиту. Этот маневр заканчивается в момент времени $\tau_{без}$. На совершение маневра расходуется топливо из основного бака. В момент времени $\tau_{без}$ выполняются условия (5.9).

После выхода на «безопасную» орбиту начинается вторая серия маневров, после завершения которой КА переходит на целевую орбиту. На целевой орбите спутник отстыковывается от ЦБ. Масса спутника, оставшаяся на целевой орбите, считается полезной и максимизируется (5.10). Спутник за счет собственных двигателей переходит на геостационарную орбиту. Предполагается, что характеристическая скорость маневра довыведения с целевой орбиты на геостационар-

ную ограничена заданной величиной Δv^* и линия апсид целевой орбиты лежит в плоскости экватора, т.е. z-компонента вектора Лапласа равна нулю. В момент времени $\tau_{\text{ц}}$ выполняются условия (5.11).

Характеристическая скорость маневров довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО учитывается по упрощенной схеме и осуществляется за счет трех импульсных воздействий (4.5).

После отстыковки спутника маневр ЦБ продолжается. За счет дополнительного включения двигателя происходит понижение высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ до 100 км (условная граница атмосферы) (5.12).

В конечный момент времени T расходуется все топливо из основного бака ЦБ. Условия в конечный момент времени также совпадают с аналогичными условиями в задаче с большой ограниченной тягой во второй постановке (5.14), (5.15).

6.3. Необходимые условия оптимальности первого порядка

Задача решается на основе соответствующего принципа Лагранжа [32]. Гамильтониан на пассивном участке:

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z + p_{vx} g_x + p_{vy} g_y + p_{vz} g_z.$$

Гамильтониан на активном участке:

$$\begin{aligned} H = & p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z + \\ & + p_{vx} \left(g_x + P_{\max} \frac{\cos(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m} \right) + \\ & + p_{vy} \left(g_y + P_{\max} \frac{\sin(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m} \right) + \\ & + p_{vz} \left(g_z + P_{\max} \frac{\sin(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m} \right) - p_m \frac{P_{\max}}{c}. \end{aligned}$$

Терминант имеет вид

где

$$\begin{aligned} l = & l_0 + l_{c\delta 1} + l_{c\delta 2} + l_{\delta e z} + l_{\text{ц}} + l_T - \lambda_0 (m(\tau_{\text{ц}}-) - m(\tau_{\text{ц}}+)), \\ l_0 = & \lambda_{R0} (x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2 - R_0^2) + \lambda_{C0} (x(0)C_{0x} + y(0)C_{0y} + z(0)C_{0z}) + \\ & + \lambda_{vx0} \left(v_x(0) + \frac{v_0}{R_0} (y(0) \cos i_0 + z(0) \sin i_0) \right) + \lambda_{vy0} \left(v_y(0) - \frac{v_0}{R_0} x(0) \cos i_0 \right) + \\ & + \lambda_{vz0} \left(v_z(0) - \frac{v_0}{R_0} x(0) \sin i_0 \right) + \lambda_{m0} (m(0) - m_0), \end{aligned}$$

$$l_{c61} = \sum_{\xi=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} \lambda_{\xi c61} \left(\xi \left(\tau_{c61+}^{ДТБ} \right) - \xi \left(\tau_{c61-}^{ДТБ} \right) \right) + \lambda_{\tau c61} \left(\tau_{c61+}^{ДТБ} - \tau_{c61-}^{ДТБ} \right) + \\ + \lambda_{c61} \left(r_{\Pi} \left(\tau_{c61-}^{ДТБ} \right) - R_3 - 100 \right),$$

$$l_{c62} = \lambda_{m\tau 1} \left(m \left(\tau_{c62+}^{ДТБ} \right) - m \left(\tau_{c61-}^{ДТБ} \right) + m^{ДТБ} \right) + \\ + \lambda_{m\tau 2} \left(m_0 - m \left(\tau_{c61-}^{ДТБ} \right) - m_{\text{ТОПЛ}}^{ДТБ} \right) + \\ + \lambda_{\tau} \left(\tau_{c62+}^{ДТБ} - \tau_{c61-}^{ДТБ} - 120 \right) + \lambda_{\tau c62} \left(\tau_{c62+}^{ДТБ} - \tau_{c62-}^{ДТБ} \right),$$

$$l_{6ез} = \sum_{\xi=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} \lambda_{\xi 6ез} \left(\xi \left(\tau_{6ез+} \right) - \xi \left(\tau_{6ез-} \right) \right) + \lambda_{\tau 6ез} \left(\tau_{6ез+} - \tau_{6ез-} \right) + \\ + \lambda_{6ез} \left(r_{\Pi} \left(\tau_{6ез-} \right) - R_3 - 200 \right),$$

$$l_{\Pi} = \sum_{\xi=(x,y,z,v_x,v_y,v_z)} \lambda_{\xi \Pi} \left(\xi \left(\tau_{\Pi+} \right) - \xi \left(\tau_{\Pi-} \right) \right) + \lambda_{\tau \Pi} \left(\tau_{\Pi+} - \tau_{\Pi-} \right) + \\ + \lambda_{\Pi} \left(C_y \left(\tau_{\Pi-} \right) v_x \left(\tau_{\Pi-} \right) - C_x \left(\tau_{\Pi-} \right) v_y \left(\tau_{\Pi-} \right) - \frac{\mu z \left(\tau_{\Pi-} \right)}{r \left(\tau_{\Pi-} \right)} \right) + \\ + \lambda_{\text{ДОВ}} \left(\Delta v_{\text{ДОВ}} \left(x \left(\tau_{\Pi-} \right), y \left(\tau_{\Pi-} \right), z \left(\tau_{\Pi-} \right), v_x \left(\tau_{\Pi-} \right), v_y \left(\tau_{\Pi-} \right), v_z \left(\tau_{\Pi-} \right) \right) - \Delta v^* \right),$$

$$l_T = \lambda_T \left(r_{\Pi} \left(T \right) - R_3 - 100 \right) + \lambda_{mT1} \left(m \left(T \right) - m^{\text{ЦБ}} \right) + \\ + \lambda_{mT2} \left(\left(m \left(\tau_{c62+}^{ДТБ} \right) - m \left(\tau_{\Pi-} \right) \right) + \left(m \left(\tau_{\Pi+} \right) - m \left(T \right) \right) - m_{\text{ТОПЛ}}^{\text{ЦБ}} \right).$$

Здесь $p_x(\cdot), p_y(\cdot), p_z(\cdot), p_{v_x}(\cdot), p_{v_y}(\cdot), p_{v_z}(\cdot), p_m(\cdot), p_{ak}(\cdot), p_{bk}(\cdot), p_{ck}(\cdot), p_{dk}(\cdot)$ — сопряженные переменные (функциональные множители Лагранжа) на каждом из участков траектории (поскольку соответствующие правые части дифференциальных уравнений равны нулю $p_{ak}(\cdot), p_{bk}(\cdot), p_{ck}(\cdot), p_{dk}(\cdot)$ не входят явно в гамильтониан); $\lambda_0, \lambda_{R0}, \lambda_{C0}, \lambda_{vx0}, \lambda_{vy0}, \lambda_{vz0}, \lambda_{m0}, \lambda_{\xi c61}, \lambda_{\xi 6ез}, \lambda_{\xi \Pi} (\xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z), \lambda_{\tau c61}, \lambda_{c61}, \lambda_{\tau}, \lambda_{\tau c62}, \lambda_{\tau 6ез}, \lambda_{6ез}, \lambda_{\tau \Pi}, \lambda_{\Pi}, \lambda_{\text{ДОВ}}, \lambda_T, \lambda_{m\tau 1}, \lambda_{m\tau 2}, \lambda_{mT1}, \lambda_{mT2}$ — числовые множители Лагранжа.

Сопряженная система уравнений для координат и скоростей совпадает с соответствующей сопряженной системой из задачи с большой ограниченной тягой. Выпишем ее в формальном виде (правые части уравнений Эйлера-Лагранжа для “основных” сопряженных переменных как и ранее вычислялись при помощи специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирова-

ния):

$$\dot{p}_\xi = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z. \quad (6.3)$$

Для остальных переменных сопряженная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_m &= \frac{P_{\max}}{m^2} (p_{vx} \cos(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k) + \\ &+ p_{vy} \sin(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k) + p_{vz} \sin(c_k(t - t_0^k) + d_k)), \\ \dot{p}_{ak} &= \frac{P_{\max}(t - t_0^k)}{m} (-p_{vx} \sin(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k) + \\ &+ p_{vy} \cos(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)), \\ \dot{p}_{bk} &= \frac{P_{\max}}{m} (-p_{vx} \sin(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k) + \\ &+ p_{vy} \cos(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)), \\ \dot{p}_{ck} &= \frac{P_{\max}(t - t_0^k)}{m} (-p_{vx} \cos(a_k(t - t_0^k) + b_k) \sin(c_k(t - t_0^k) + d_k) - \\ &- p_{vy} \sin(a_k(t - t_0^k) + b_k) \sin(c_k(t - t_0^k) + d_k) + p_{vz} \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)), \\ \dot{p}_{dk} &= \frac{P_{\max}}{m} (-p_{vx} \cos(a_k(t - t_0^k) + b_k) \sin(c_k(t - t_0^k) + d_k) - \\ &- p_{vy} \sin(a_k(t - t_0^k) + b_k) \sin(c_k(t - t_0^k) + d_k) + p_{vz} \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Условия трансверсальности по “основным” фазовым переменным остаются неизменными. Выпишем их в силу громоздкости в формальном виде (громоздкие производные в условиях трансверсальности как и ранее вычислялись при помощи специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирования):

$$\begin{aligned} p_\xi(0) &= \frac{\partial l}{\partial \xi(0)}, & p_\xi(T) &= -\frac{\partial l}{\partial \xi(T)}, \\ p_\xi(\beta_+) &= \frac{\partial l}{\partial \xi(\beta_+)}, & p_\xi(\beta_-) &= -\frac{\partial l}{\partial \xi(\beta_-)}, \\ \xi &= x, y, z, v_x, v_y, v_z, & \beta &= \tau_{сб1}^{\text{ДТБ}}, \tau_{сб2}^{\text{ДТБ}}, \tau_{без}, \tau_{ц}. \end{aligned}$$

Существенные изменения произошли в условиях стационарности (раньше они получались как условия оптимальности по управлению) и трансверсальности по “новым” фазовым переменным:

$$H(t_1^{k-1}) = H(t_0^k), \quad H(t_1^k) = H(t_0^{k+1}),$$

$$\begin{aligned}
p_{ak}(t_0^k) &= 0, & p_{ak}(t_1^k) &= 0, \\
p_{bk}(t_0^k) &= 0, & p_{bk}(t_1^k) &= 0, \\
p_{ck}(t_0^k) &= 0, & p_{ck}(t_1^k) &= 0, \\
p_{dk}(t_0^k) &= 0, & p_{dk}(t_1^k) &= 0.
\end{aligned}$$

В моменты включения и выключения двигателя из условия непрерывности “основных” фазовых и сопряженных переменных в случае отсутствия дополнительных ограничений на эти фазовые переменные получаем следующее равенство

$$\begin{aligned}
\chi \equiv & \frac{p_{vx} \cos(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m} + \\
& + \frac{p_{vy} \sin(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m} + \\
& + \frac{p_{vz} \sin(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m} - \frac{p_m}{c} = 0. \quad (6.5)
\end{aligned}$$

Здесь χ является аналогом функции переключения из задачи с большой ограниченной тягой.

В связи с тем, что условия трансверсальности по “основным” переменным остаются неизменными, следствия из этих условий, которые используются в вычислительной схеме метода стрельбы также не меняются.

Индексы, соответствующие нумерации участков, у “новых” фазовых и сопряженных переменных $a_k(\cdot)$, $b_k(\cdot)$, $c_k(\cdot)$, $d_k(\cdot)$, $p_{ak}(\cdot)$, $p_{bk}(\cdot)$, $p_{ck}(\cdot)$, $p_{dk}(\cdot)$ далее для упрощения записи опущены.

Также не меняется структура следствий из условий стационарности. В моменты времени $\tau_{сб1}^{ДТБ}$, $\tau_{сб2}^{ДТБ}$ следствием условий стационарности является равенство $H(\tau_{сб2+}^{ДТБ}) = H(\tau_{сб1-}^{ДТБ})$. В моменты времени $\tau_{бес}$ и $\tau_{ц}$ выполняются условия непрерывности гамильтониана: $H(\tau_{бес+}) = H(\tau_{бес-})$ и $H(\tau_{ц+}) = H(\tau_{ц-})$. Условие стационарности в не заданный заранее момент времени T : $H(T) = 0$.

Условия дополняющей нежесткости имеют вид

$$\begin{aligned}
\lambda_{дов}(\Delta v_{дов}(\tau_{ц-}) - \Delta v^*) &= 0, \\
\lambda_{mT2} \left(\left(m \left(\tau_{сб2+}^{ДТБ} \right) - m(\tau_{ц-}) \right) + \left(m(\tau_{ц+}) - m(T) \right) - m_{топл}^{ЦБ} \right) &= 0, \quad (6.6)
\end{aligned}$$

$$\lambda_{m\tau_2} \left(m_0 - m \left(\tau_{сб1-}^{\text{ДТБ}} \right) - m_{\text{топл.}}^{\text{ДТБ}} \right) = 0. \quad (6.7)$$

Условия неотрицательности имеют вид

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_{\text{дов}} \geq 0, \quad \lambda_{m\tau_2} \geq 0, \quad \lambda_{mT_2} \geq 0.$$

В качестве условия нормировки как и ранее используется (5.27).

6.4. Структура траектории и вычислительная схема метода стрельбы

Структура траектории определяется на основе результатов проведенных ранее исследований. Вычислительная схема метода стрельбы для рассматриваемой задачи совпадает с вычислительной схемой метода стрельбы для решенной ранее задачи с большой ограниченной тягой. В рассматриваемом случае в отличие от вычислительной схемы метода стрельбы для задачи с большой ограниченной тяги в вектор параметров пристрелки в начале каждого активного участка дополнительно входят значения фазовых переменных $a(t_0^k)$, $b(t_0^k)$, $c(t_0^k)$, $d(t_0^k)$, а в вектор-функцию невязок дополнительно входят четыре уравнения для сопряженных переменных — равенство нулю $p_a(t_1^k)$, $p_b(t_1^k)$, $p_c(t_1^k)$, $p_d(t_1^k)$ в силу условий трансверсальности в конце каждого активного участка. Значения сопряженных переменных в начале каждого активного участка задаются равными нулю $p_a(t_0^k)$, $p_b(t_0^k)$, $p_c(t_0^k)$, $p_d(t_0^k)$ и не входят в вектор параметров пристрелки.

Опишем вычислительную схему метода стрельбы (см. рис. 5.1). Стоит отметить, что верхний индекс “акт” указывает на продолжительность активного участка, а верхний индекс “пасс” указывает на продолжительность пассивного участка, при этом для моментов времени верхний индекс “акт” означает завершение активного участка (выключение двигателя) и начало соответствующего пассивного участка, а верхний индекс “пасс” означает завершение пассивного участка и начало соответствующего активного участка (включение двигателя). В вектор параметров пристрелки входят:

- числовые множители Лагранжа λ_{R0} , λ_{C0} , $\lambda_{сб1}$, $\lambda_{без}$, $\lambda_{ц}$, $\lambda_{дов}$, λ_T , λ_{mT_2} ;
- угловое положение КА на опорной круговой орбите φ_0 , значения четырех “новых” фазовых переменных $a(0)$, $b(0)$, $c(0)$, $d(0)$, значения четырех сопряженных переменных в начальный момент времени $p_{vx}(0)$, $p_{vy}(0)$, $p_{vz}(0)$, $p_m(0)$ (по угловому положению вычисляются значения координат и скоро-

стей КА в начальный момент времени, значения сопряженных переменных $p_x(0), p_y(0), p_z(0)$ вычисляются формулам (5.17). Поскольку $m(0) = 1$, то в вектор параметров пристрелки $m(0)$ не включается. Значения четырех “новых” сопряженных переменных $p_a(0), p_b(0), p_c(0), p_d(0)$ в силу условий трансверсальности равны нулю и не входят в вектор параметров пристрелки. Таким образом получаем стартовую точку для решения задачи Коши);

- продолжительность первого активного участка $\Delta\tau_1^{\text{акт}}$;
- значения координат и скоростей $x(\tau_{1+}^{\text{акт}}), y(\tau_{1+}^{\text{акт}}), z(\tau_{1+}^{\text{акт}}), v_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}), v_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}), v_z(\tau_{1+}^{\text{акт}})$, значения сопряженных переменных после выключения двигателя $p_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}), p_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}), p_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}), p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{акт}}), p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{акт}}), p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{акт}})$ (масса и соответствующая ей сопряженная переменная определяются из условий непрерывности, и поэтому не входят в вектор параметров пристрелки);
- продолжительность первого пассивного участка $\Delta\tau_1^{\text{пасс}}$;
- значения координат и скоростей $x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), v_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), v_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), v_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, значения сопряженных переменных $p_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$, значения “новых” фазовых переменных после включения двигателя $a(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), b(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), c(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), d(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$ (сопряженные переменные $p_a(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_b(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_c(\tau_{1+}^{\text{пасс}}), p_d(\tau_{1+}^{\text{пасс}})$ равны нулю в силу условий трансверсальности, масса и соответствующая ей сопряженная переменная определяются из условий непрерывности, и поэтому не входят в вектор параметров пристрелки);
- продолжительность второго активного участка, на котором происходит понижение высоты перигея орбиты КА до условной границы атмосферы, $\Delta\tau_2^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$;
- значения координат и скоростей $x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}), y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}), z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}), v_x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}), v_y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}), v_z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}})$, значения сопряженных переменных $p_x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}), p_y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}), p_z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}), p_{vx}(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}), p_{vy}(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}), p_{vz}(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}})$ (продолжительность второго пассивного участка $\Delta\tau_2^{\text{пасс}}$, во время которого происходит сброс ДТБ является параметром задачи (120 с), масса и соответствующая ей сопряженная переменная определяются из условий непрерывности, и поэтому не входят в вектор параметров пристрелки);

- значения координат и скоростей $x(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $y(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $z(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $v_x(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $v_y(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $v_z(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, значения сопряженных переменных $p_x(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $p_y(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $p_z(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $p_{vx}(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $p_{vy}(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $p_{vz}(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, в том числе сопряженная переменная, соответствующая массе $p_m(\tau_{с62+}^{ДТБ}) = p_m(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, значения “новых” фазовых переменных $a(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $b(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $c(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $d(\tau_{с62+}^{ДТБ})$ после включения двигателя (масса КА после сброса ДТБ вычисляется по формуле (5.7), сопряженные переменные $p_a(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $p_b(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $p_c(\tau_{с62+}^{ДТБ})$, $p_d(\tau_{с62+}^{ДТБ})$ равны нулю в силу условий трансверсальности, и поэтому не входят в вектор параметров пристрелки);
- продолжительность третьего активного участка $\Delta\tau_3^{акт} = \Delta\tau_{без}$, на котором происходит повышение высоты перигея орбиты КА до 200 км;
- значения координат и скоростей $x(\tau_{без+})$, $y(\tau_{без+})$, $z(\tau_{без+})$, $v_x(\tau_{без+})$, $v_y(\tau_{без+})$, $v_z(\tau_{без+})$, значения сопряженных переменных после выключения двигателя $p_x(\tau_{без+})$, $p_y(\tau_{без+})$, $p_z(\tau_{без+})$, $p_{vx}(\tau_{без+})$, $p_{vy}(\tau_{без+})$, $p_{vz}(\tau_{без+})$ (масса и соответствующая ей сопряженная переменная определяются из условий непрерывности, и поэтому не входят в вектор параметров пристрелки);
- продолжительность третьего пассивного участка $\Delta\tau_3^{пасс}$;
- значения координат и скоростей $x(\tau_{3+}^{пасс})$, $y(\tau_{3+}^{пасс})$, $z(\tau_{3+}^{пасс})$, $v_x(\tau_{3+}^{пасс})$, $v_y(\tau_{3+}^{пасс})$, $v_z(\tau_{3+}^{пасс})$, сопряженных переменных $p_x(\tau_{3+}^{пасс})$, $p_y(\tau_{3+}^{пасс})$, $p_z(\tau_{3+}^{пасс})$, $p_{vx}(\tau_{3+}^{пасс})$, $p_{vy}(\tau_{3+}^{пасс})$, $p_{vz}(\tau_{3+}^{пасс})$, значения “новых” фазовых переменных после включения двигателя $a(\tau_{3+}^{пасс})$, $b(\tau_{3+}^{пасс})$, $c(\tau_{3+}^{пасс})$, $d(\tau_{3+}^{пасс})$ (сопряженные переменные $p_a(\tau_{3+}^{пасс})$, $p_b(\tau_{3+}^{пасс})$, $p_c(\tau_{3+}^{пасс})$, $p_d(\tau_{3+}^{пасс})$ равны нулю в силу условий трансверсальности, масса и соответствующая ей сопряженная переменная определяются из условий непрерывности, и поэтому не входят в вектор параметров пристрелки);
- продолжительность четвертого активного участка $\Delta\tau_4^{акт}$ — в конце данного участка КА выходит на целевую орбиту;
- значения координат и скоростей $x(\tau_{4+}^{акт})$, $y(\tau_{4+}^{акт})$, $z(\tau_{4+}^{акт})$, $v_x(\tau_{4+}^{акт})$, $v_y(\tau_{4+}^{акт})$, $v_z(\tau_{4+}^{акт})$, значения сопряженных переменных после выключения двигателя $p_x(\tau_{4+}^{акт})$, $p_y(\tau_{4+}^{акт})$, $p_z(\tau_{4+}^{акт})$, $p_{vx}(\tau_{4+}^{акт})$, $p_{vy}(\tau_{4+}^{акт})$, $p_{vz}(\tau_{4+}^{акт})$ (масса и соответствующая ей сопряженная переменная определяются из условий непрерывности, и поэтому не входят в вектор параметров пристрелки);

- продолжительность четвертого пассивного участка $\Delta\tau_4^{\text{пасс}} = \Delta\tau_{\text{ц}}$ — полет на целевой орбите (для удобства вычислений в качестве точки $\tau_{\text{ц}}$ выбрана точка последнего включения двигателя для сброса ЦБ);
- значения координат и скоростей ЦБ $x(\tau_{\text{ц}+})$, $y(\tau_{\text{ц}+})$, $z(\tau_{\text{ц}+})$, $v_x(\tau_{\text{ц}+})$, $v_y(\tau_{\text{ц}+})$, $v_z(\tau_{\text{ц}+})$, значения сопряженных переменных $p_x(\tau_{\text{ц}+})$, $p_y(\tau_{\text{ц}+})$, $p_z(\tau_{\text{ц}+})$, $p_{vx}(\tau_{\text{ц}+})$, $p_{vy}(\tau_{\text{ц}+})$, $p_{vz}(\tau_{\text{ц}+})$, масса ЦБ $m(\tau_{\text{ц}+})$ после отстыковки спутника, значения “новых” фазовых переменных $a(\tau_{\text{ц}+})$, $b(\tau_{\text{ц}+})$, $c(\tau_{\text{ц}+})$, $d(\tau_{\text{ц}+})$ после включения двигателя (сопряженная переменная $p_m(\tau_{\text{ц}+})$ согласно следствию из условий трансверсальности непрерывна в точке $\tau_{\text{ц}}$, сопряженные переменные $p_a(\tau_{\text{ц}+})$, $p_b(\tau_{\text{ц}+})$, $p_c(\tau_{\text{ц}+})$, $p_d(\tau_{\text{ц}+})$ равны нулю в силу условий трансверсальности, и поэтому не входят в вектор параметров пристрелки);
- продолжительность пятого активного участка, соответствующего понижению высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ, до 100 км (условной границы атмосферы), $\Delta\tau_5^{\text{акт}} = \Delta T$.

В вектор-функцию невязок входят:

- 12 условий непрерывности “основных” фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_{1-}^{\text{акт}}$, четыре условия на равенство нулю сопряженных переменных $p_a(\tau_{1-}^{\text{акт}})$, $p_b(\tau_{1-}^{\text{акт}})$, $p_c(\tau_{1-}^{\text{акт}})$, $p_d(\tau_{1-}^{\text{акт}})$;
- 12 условий непрерывности “основных” фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_1^{\text{пасс}}$;
- 6 условий непрерывности “основных” фазовых переменных и 6 следствий из условий трансверсальности в момент времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$ (5.18), четыре условия на равенство нулю сопряженных переменных $p_a(\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}})$, $p_b(\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}})$, $p_c(\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}})$, $p_d(\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}})$;
- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$;
- 6 условий непрерывности “основных” фазовых переменных и 6 следствий из условий трансверсальности в момент времени $\tau_{\text{без}}^{\text{ДТБ}}$ (5.18), четыре условия на равенство нулю сопряженных переменных $p_a(\tau_{\text{без}}^{\text{ДТБ}})$, $p_b(\tau_{\text{без}}^{\text{ДТБ}})$, $p_c(\tau_{\text{без}}^{\text{ДТБ}})$, $p_d(\tau_{\text{без}}^{\text{ДТБ}})$;

- 12 условий непрерывности фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_3^{\text{пасс}}$;
- 12 условий непрерывности “основных” фазовых и сопряженных переменных в момент времени $\tau_4^{\text{акт}}$, четыре условия на равенство нулю сопряженных переменных $p_a(\tau_{4-}^{\text{акт}})$, $p_b(\tau_{4-}^{\text{акт}})$, $p_c(\tau_{4-}^{\text{акт}})$, $p_d(\tau_{4-}^{\text{акт}})$;
- 6 условий непрерывности “основных” фазовых переменных и 6 следствий из условий трансверсальности в момент времени $\tau_{\text{ц}}$ (5.19);
- равенство нулю z-компоненты вектора Лапласа (второе условие (5.11));
- условие расхода всего топлива из основного бака ЦБ в конечный момент времени (5.14);
- два условия дополняющей нежесткости (6.6) (условие дополняющей нежесткости (6.7) не входит в вектор-функцию невязок и выполнение соответствующего неравенства (5.8) проверяется после решения задачи — на экстремали выполнено строгое неравенство, что соответствует случаю $\lambda_{m\tau 2} = 0$);
- три условия на перигей орбиты КА в моменты времени $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$, $\tau_{\text{без}}$, T (5.4), (5.9), (5.12);
- четыре условия на функцию переключения: $\chi(\tau_{1-}^{\text{акт}}) = 0$, $\chi(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0$, $\chi(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0$, $\chi(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = 0$;
- шесть условий трансверсальности в конечный момент времени T ;
- следствие из условий трансверсальности по переменной m (с учетом $\lambda_{m\tau 2} = 0$) (5.21);
- три следствия из условий стационарности $H(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = H(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}})$, $H(\tau_{\text{без+}}) = H(\tau_{\text{без-}})$ и $H(\tau_{\text{ц+}}) = H(\tau_{\text{ц-}})$;
- условие стационарности в конечный момент времени: $H(T) = 0$;
- условие нормировки (5.27).

Таким образом, в вычислительную схему метода стрельбы входят 139 параметров пристрелки и 139 функций-невязок, т.е. число неизвестных параметров совпадает с числом уравнений для их определения.

Начальное приближение к значениям параметров пристрелки выбирается на основе ранее полученного решения в задаче с большой ограниченной тяги. При этом значения коэффициентов $a(t_0^k), b(t_0^k), c_k(t_0), d_k(t_0)$ определяются следующим образом: по значениям сопряженных переменных $p_{vx}(t_0^k), p_{vy}(t_0^k), p_{vz}(t_0^k)$ определяются значения углов $\phi(t_0^k)$ и $\theta(t_0^k)$ в начале активного участка, по значениям сопряженных переменных $p_{vx}(t_1^k), p_{vy}(t_1^k), p_{vz}(t_1^k)$ определяются значения углов $\phi(t_1^k)$ и $\theta(t_1^k)$ в конце активного участка, значения коэффициентов $a(t_0^k), b(t_0^k), c(t_0^k), d(t_0^k)$ определяются в результате решения системы двух линейных уравнений для каждого активного участка.

6.5. Экстремаль упрощенной модели

Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 с. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам. Для численного интегрирования использовался метод Дормана-Принса 8 (7). Экстремаль представлена в приложении G.

Расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ДТБ): 195.873 кг (0.0087054). Расход топлива на повышение высоты перигея до 200 км (выход на безопасную орбиту): 80.889 кг (0.0035951). Расход топлива на понижение высоты перигея до 100 км (для сброса ЦБ): 1.595 кг (0.0000709). Общий расход топлива на сброс ДТБ и ЦБ: 278.357 кг (0.0123714), то есть накладные расходы на сброс ДТБ и ЦБ в атмосферу составляют 1.23%.

Было проведено сравнение полученного решения, представленного в приложении, с аналогичным решением задачи с большой ограниченной тягой. Отличие по функционалу (обезразмеренной полезной массе) составляет 0.0001121. На рисунках 6.1, 6.2 представлены траектории для рассматриваемой задачи (пунктирная линия с короткими штрихами) и для задачи с большой ограниченной тягой (пунктирная линия с длинными штрихами). Из рисунков видно, что данные траектории визуально близки. Экстремали в задаче оптимального управления и в задаче с простой схемой управления на активных участках близки и с точки зрения сходимости метода Ньютона. При этом возможен как прямой переход от задачи

оптимального управления перелетом КА с большой ограниченной тягой к задаче с упрощенным выбором управления на активных участках, так и обратный переход. При использовании в качестве начального приближения решения задачи с упрощенным выбором управления для получения экстремали в задаче оптимального управления потребовалось 3 итерации метода Ньютона.

Как и в рассмотренной ранее задаче с большой ограниченной тягой включение двигателя для перевода ДТБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, происходит в окрестности апогея мгновенной эллиптической орбиты первого пассивного участка и включение двигателя для перевода ЦБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы происходит в окрестности апогея целевой орбиты (соответствующей мгновенной эллиптической орбиты), накладные расходы на сброс ДТБ и ЦБ также оказались малы.

6.6. Выводы по главе 6

Основные выводы данной главы:

- задача перелета с упрощенным выбором управления может быть формализована и решена не только как конечномерная задача с ограничениями, но рассмотрена и как оптимизационная задача в банаховых пространствах [4], на основе соответствующего принципа Лагранжа [32] ее решение сводится к решению многоточечной краевой задачи.
- экстремали в задаче оптимального управления и в задаче с простой схемой управления на активных участках близки.
- решение краевой задачи принципа Лагранжа с простой схемой управления может быть использовано для нахождения экстремали в задаче оптимального управления; для получения экстремали в задаче оптимального управления потребовалось 3 итерации метода Ньютона.

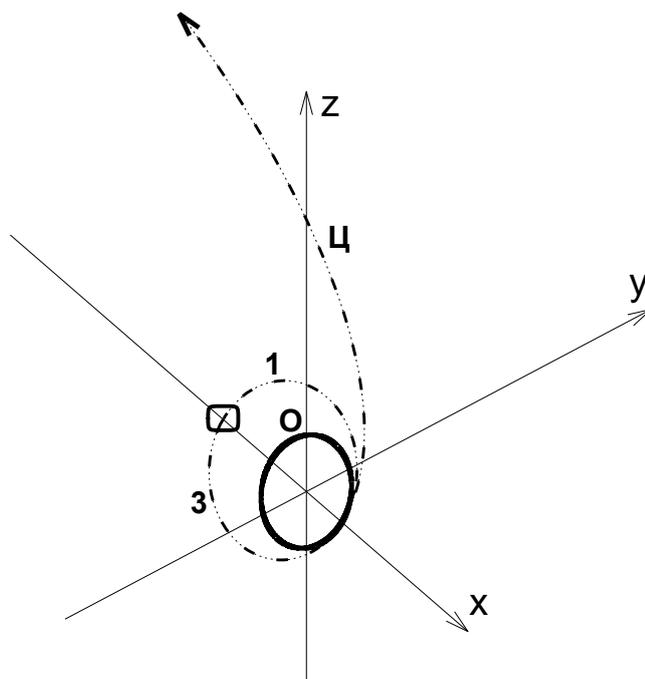


Рис. 6.1: Траектории перелета КА (пунктирная линия с короткими штрихами — упрощенная модель, пунктирная линия с длинными штрихами — задача с большой ограниченной тягой: O — опорная орбита, 1 — первый пассивный участок, 3 — третий пассивный участок, \mathcal{C} — целевая орбита)

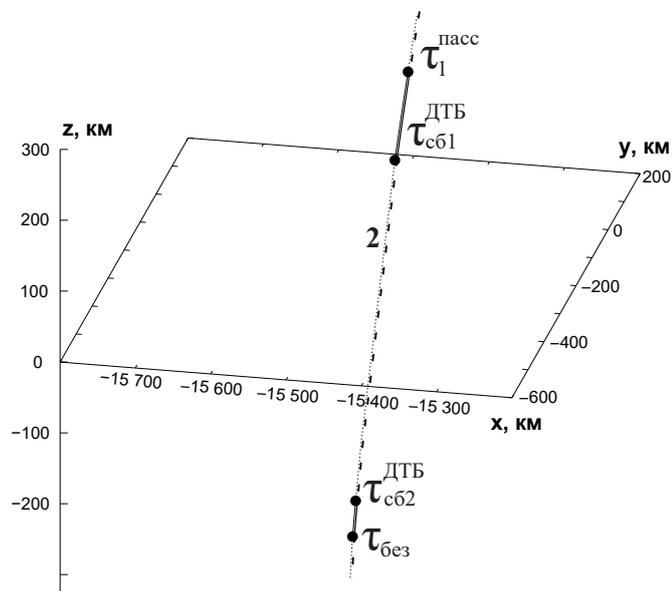


Рис. 6.2: Траектории перелета КА (пунктирная линия с короткими штрихами — упрощенная модель, пунктирная линия с длинными штрихами — задача с большой ограниченной тягой: $\tau_1^{\text{пасс}}$ — момент окончания первого пассивного участка, $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$ — момент перехода КА, на орбиту касающуюся условной границы атмосферы, $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$ — момент выхода КА на «безопасную» орбиту), 2 — второй пассивный участок (участок сброса ДТБ)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами работы являются:

1. определены схемы перелета космического аппарата с малыми накладными расходами на сброс его отработавших частей в атмосферу Земли в импульсной постановке;
2. при помощи параметрических исследований для задачи в импульсной постановке показано, что на построенной на основе принципа Лагранжа экстремали достигается локальный максимум полезной массы;
3. установлено, что решение задачи с априорным предположением об апсидальности импульсных воздействий совпадает с соответствующим решением задачи без априорного предположения об апсидальности импульсных воздействий при неограниченном заранее времени перелета и фазовом ограничении на максимально возможное удаление космического аппарата от Земли;
4. на основе методики «лестница задач» решена задача оптимизации траектории выведения космического аппарата, оснащенного двигателем большой ограниченной тяги, с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли на целевую эллиптическую орбиту со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли и построены соответствующие экстремали Понтрягина;
5. установлено, что решение задачи перелета космического аппарата с двигателем большой ограниченной тяги близко к решению соответствующей задачи в импульсной постановке и накладные расходы на сброс дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока малы;
6. для задачи с большой ограниченной тягой на основе метода продолжения решения по параметру был произведен переход от решения первой постановки задачи (с заданными константами $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.01$) к решению второй (с заданными массовыми характеристиками);

7. установлено, что отличие экстремали Понтрягина в случае учета второй зональной гармоник от соответствующей экстремали Понтрягина без учета второй зональной гармоник как для первой, так и для второй постановки задачи с большой ограниченной тягой мало в смысле сходимости метода Ньютона.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Авдеев А.В. К вопросу борьбы с космическим мусором с помощью лазерной космической установки на основе HF-НХЛ // Труды МАИ. 2012. № 61. С. 1–22.
- [2] Авдеев А.В., Башкин А.С., Каторгин Б.И., Парфеньев М.В. Анализ возможности очистки околоземного пространства от опасных фрагментов космического мусора с помощью космической лазерной установки на основе автономного непрерывного химического HF-лазера // Квантовая электроника. 2011. Т. 41. № 7. С. 669–674.
- [3] Адушкин В.В., Вениаминов С.С., Козлов С.И. Как не допустить дальнейшего засорения околоземного космического пространства // Воздушно-космическая сфера. 2017. № 1 (91). С. 96–103.
- [4] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 2005. 384 с.
- [5] Аполлонов В.В. Уничтожение космического мусора и объектов естественного происхождения лазерным излучением // Квантовая электроника. 2013. Т. 43. № 9. С. 890–894.
- [6] Асланов В.С., Алексеев А.В., Ледков А.С. Определение параметров оснащённой гарпуном тросовой системы для буксировки космического мусора // Труды МАИ. 2016. № 90. С. 1–21.
- [7] Афанасьева Т.И., Гридчина Т.А., Колюка Ю.Ф. Оценка возможных орбит увода для очищения области космического пространства на высотах 900–1500 км // Космонавтика и ракетостроение. 2014. № 1. С. 94–105.
- [8] Ахмедова Нигяр Рамиз гызы. Оптимизация перелета космического аппарата со сферы действия тяготения на круговую орбиту. Дипл. раб. (науч. рук. Григорьев И.С.). Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Баку. 2022.
- [9] Баранов А.А., Гришко Д.А. Баллистические аспекты облёта крупногабарит-

- ного космического мусора на низких околокруговых орбитах // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 4. С. 160-171.
- [10] Бордовицына Т.В., Александрова А.Г., Чувашов И.Н. Численное моделирование динамики околоземных космических объектов искусственного происхождения с использованием параллельных вычислений // Вестник Томского государственного университета. 2011. № 4 (16). С. 34–48.
- [11] Бреквелл Дж.В. Оптимизация траекторий // Вопросы ракетной техники. 1961. № 1. С. 46–69.
- [12] Булынин Ю.Л., Созонова И.Л. Анализ выполнения требований межагентского координационного комитета по предупреждению образования космического мусора // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М.Ф. Решетнева. 2013. № 6. С. 100–106.
- [13] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
- [14] Ведешин Л.А. Концепция создания системы мониторинга и управления экологическим состоянием околоземного космического пространства // Труды Института прикладной астрономии РАН. 2019. № 51. С. 26–31.
- [15] Вениаминов С.С., Червонов А.М. Космический мусор — угроза человечеству. М.: Издательство Института Космических Исследований РАН, 2012. 164 с.
- [16] Галеев Э.М. Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. М.: Ленанд, 2018. 335 с.
- [17] Голиков А.Р., Баранов А.Р., Будянский А.А., Чернов Н.В. Выбор низковысотных орбит захоронения и перевод на них выработавших свой ресурс космических аппаратов // Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение». 2015. № 4. С. 4–19.
- [18] Григорьев К.Г., Заплетин М.П., Силаев Д.А. Оптимальное выведение космического аппарата с поверхности Луны на круговую орбиту ее спутника // Космические исследования. 1991. Т. 29. № 5. С. 695–704.

- [19] Григорьев К.Г., Заплетина Е.В., Заплетин М.П. Оптимальная мягкая посадка космического аппарата на поверхность Луны с круговой орбиты ее спутника // Космические исследования. 1992. Т. 30. № 2. С. 203–211.
- [20] Григорьев К.Г., Заплетина Е.В., Заплетин М.П. Оптимальное выведение космического аппарата с поверхности Луны в заданную точку круговой орбиты ее искусственного спутника // Космические исследования. 1992. Т. 30. № 3. С. 321–332.
- [21] Григорьев К.Г., Заплетина Е.В., Заплетин М.П. Оптимальная мягкая посадка космического аппарата с круговой орбиты искусственного спутника Луны в заданную точку ее поверхности // Космические исследования. 1992. Т. 30. № 4. С. 483–494.
- [22] Григорьев К.Г., Заплетин М.П. Численное решение краевых задач принципа максимума в оптимизационных задачах динамики космического полета // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1993. № 1. С. 91–96.
- [23] Григорьев К.Г., Федына А.В. Оптимальное пространственное выведение космического аппарата на геостационарную орбиту с орбиты искусственного спутника Земли // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1993. № 3. С. 116–126.
- [24] Григорьев К.Г., Заплетина Е.В., Заплетин М.П. Оптимальные пространственные перелеты космического аппарата между поверхностью Луны и орбитой ее искусственного спутника // Космические исследования. 1993. Т. 31. № 5. С. 34–52.
- [25] Григорьев К.Г. О наискорейших маневрах космического аппарата // Космические исследования. 1994. Т. 32. № 1. С. 56–69.
- [26] Григорьев К.Г. О маневрах космического аппарата при минимальных затратах массы и ограниченном времени // Космические исследования. 1994. Т. 32. № 2. С. 45–60.
- [27] Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Оптимальные траектории перелетов космического аппарата с реактивными двигателями большой ограниченной тяги

между орбитой искусственного спутника Земли и Луной // *Космические исследования*. 1994. Т. 32. № 6. С. 108–129.

- [28] Григорьев К.Г., Федына А.В. Оптимальные перелеты космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между компланарными круговыми орбитами // *Космические исследования*. 1995. Т. 33. № 4. С. 403–416.
- [29] Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Оптимальные траектории возвращения космического аппарата с реактивными двигателями большой ограниченной тяги от Луны к Земле // *Космические исследования*. 1995. Т. 33. № 5. С. 513–532.
- [30] Григорьев И.С. Исследование оптимальных траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги между Землей и Луной: дис. ...канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 — Москва. 1997. 137 с.
- [31] Григорьев И.С., Григорьев К.Г., Петрикова Ю.Д. О наискорейших маневрах космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги в гравитационном поле в вакууме // *Космические исследования*. 2000. Т. 38. № 2. С. 171–192.
- [32] Григорьев И.С., Григорьев К.Г. К проблеме решения в импульсной постановке задач оптимизации траекторий перелётов космического аппарата с реактивным двигателем большой тяги в произвольном гравитационном поле в вакууме // *Космические исследования*. 2002. № 40 (1). С. 88–111.
- [33] Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. I // *Космические исследования*. 2007. Т. 45. № 4. С. 358–366.
- [34] Григорьев И.С., Григорьев К.Г. Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги. II // *Космические исследования*. 2007. Т. 45. № 6. С. 553–563.

- [35] Григорьев И.С. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005. 160 с.
- [36] Григорьев К.Г., Григорьев И.С., Заплетин М.П. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления. М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007. 184 с.
- [37] Григорьев И.С., Заплетин М.П. Об одной задаче оптимизации траекторий посещения КА группы астероидов // Космические исследования. 2009. Т. 47. № 5. С. 460–470.
- [38] Григорьев И.С., Заплетин М.П. Проблема построения экстремалей Понтрягина в задачах оптимизации перелетов космического аппарата к астероидам // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 69–84.
- [39] Григорьев И.С., Заплетин М.П. Выбор перспективных последовательностей астероидов // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 65–79.
- [40] Григорьев И.С., Данилина И.А. Оптимизация межорбитальных пространственных траекторий перелетов космического аппарата с разгонным блоком. Баку: Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова в г. Баку, 2020. 196 с. ISBN 978-9952-8354-0-3
URL: http://mech.math.msu.su/~iliagri/zip/grig_dan_2020.pdf (дата обращения: 10.05.2025)
- [41] Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. 702 с.
- [42] Гусев Л.И. Решение одной вариационной задачи перелета КА между спутниковыми орбитами Земли и Луны. // Космические исследования. 1979. Т. 17. № 2. С. 234.
- [43] Дубовский С.В. Межорбитальные и межпланетные перелеты // Космические исследования. 1965. Т. 5. № 4. С. 494–507.

- [44] Дубошин Г.Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
- [45] Зеленцов В.В. Очистка околоземного космического пространства от космического мусора // *Аэрокосмический научный журнал МГТУ имени Н.Э. Баумана*. 2016. № 6. С. 1–14. <https://doi.org/10.7463/aersp.0616.0851816>
- [46] Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М.: Наука, 1975. 392 с.
- [47] Изделия космической техники. Общие требования к космическим средствам по ограничению техногенного засорения околоземного космического пространства. ГОСТ Р 52925–2018. Введён 2019-01-01. М.: Федеральное агентство по техническому регулированию и метрологии.
- [48] Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов. М.: Наука, 1976. 744 с.
- [49] Исаев В.К., Сонин В.В. Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1963. № 6 (3). С. 1114–1116.
- [50] Кириллов В.А., Багатеев И.Р., Тарлецкий И.С., Баландина Т.Н., Баландин Е.А. Анализ концепций очистки околоземного космического пространства // *Сибирский журнал науки и технологий*. 2017. Т. 18. № 2. С. 343–351.
- [51] Кирилюк Е.В. Сквозная оптимизация траекторий выведения полезного груза на геостационарную орбиту с применением энергетических возможностей разгонного блока и собственной двигательной установки космического аппарата // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2022. Вып. 2. <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2022-2-2155>
- [52] Ключников В.Ю. Возможные направления реализации функций распределённого космического аппарата // *Космонавтика и ракетостроение*. 2014. № 2 (75). С. 66–74.
- [53] Коловский И.К., Подолякин В.Н., Шмаков Д.Н. Оценка возможности проведения манёвра увода с рабочей орбиты космических аппаратов «Гонец-М» // *Космонавтика и ракетостроение*. 2018. № 2 (101). С. 107–113.

- [54] Константинов М.С. Оптимизация маневра перевода космического аппарата из одной точки эллиптической орбиты в другую точку той же орбиты // Космические исследования. 2023. Т. 61. № 5. С. 420–438.
- [55] Космический мусор. Кн. 2. Предупреждение образования космического мусора / Под науч. ред. Г.Г. Райкунова. М.: Физматлит, 2014. 188 с.
- [56] Кузнецов И.И., Мухин И.Б., Снетков И.Л., Палашов О.В. Схемы орбитальных лазеров для удаления космического мусора // Космический мусор: фундаментальные и практические аспекты угрозы. Серия «Механика, управление и информатика». 2019. С. 199–206.
- [57] Лаврентьев В.Г., Олейников И.И., Червонов А.М. Основные аспекты мониторинга техногенного состояния околоземного космического пространства для обеспечения безопасности космической деятельности // Механика, управление и информатика. 2015. Т. 7. № 1 (54). С. 216–228.
- [58] Ледков А.С. Управление силой тяги при буксировке космического мусора на упругом тросе // Наука и образование: научное издание МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2014. № 10. С. 383–397.
- [59] Логинов С.С., Назаров Ю.П., Юраш В.С., Яковлев М.В. Проектирование системы информационного мониторинга в целях предотвращения техногенного засорения околоземного космического пространства // Космонавтика и ракетостроение. 2014. № 4 (77). С. 145–150.
- [60] Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. Пер. с англ. М.: Мир, 1966.
- [61] Макаров Ю.Н. Мониторинг техногенного засорения космического пространства. Проблемы и решения // Наноиндустрия. 2019. № 1 (87). С. 6–14.
- [62] Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. Перевод с английского. М.: Мир, 1977. 584 с.
- [63] Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.

- [64] Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 528 с.
- [65] Молотов И.Е., Воропаев В.А., Юдин А.Н. и др. Комплексы электронно-оптических средств для мониторинга околоземного космического пространства // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2017. № 4. Вып. 2. С. 110–116.
- [66] Орлов А.А. Методика оптимизации траекторий межпланетных перелетов с гравитационными маневрами при использовании двигателей малой тяги // Космические исследования. 2019. Т. 57. № 5. С. 361–372.
- [67] Орлов Ю.В. Теория оптимальных систем с обобщенными управлениями. М.: Наука, 1988. 187 с.
- [68] Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // Успехи физических наук. 1957. Т. 63. № 1а. С. 5–32.
- [69] Пикалов Р.С., Юдинцев В.В. Обзор и выбор средств увода крупногабаритного космического мусора // Труды МАИ. 2018. № 100. С. 1–37.
- [70] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 391 с.
- [71] Проскуряков А.И. Импульсный перелет на целевую орбиту со сбросом ступеней в атмосферу и с учетом фазового ограничения // Материалы 54-х научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга. Издательство Эйдос. 2019. Т. 2. С. 18–20.
- [72] Проскуряков А.И. Сравнение апсидальных и неапсидальных импульсных траекторий выведения КА на целевую орбиту с учетом сброса ступеней в атмосферу // XLIII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. М.: Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2019. Т. 1. С. 111.
- [73] Проскуряков А.И. Оптимизации траектории выведения космического аппарата на целевую орбиту со сбросом дополнительного топливного бака и

- разгонного блока в атмосферу // Материалы международного молодежного научного форума «Ломоносов — 2020». М.: Издательство МАКС Пресс. 2020. С. 1.
- [74] Проскуряков А.И. Об одной задаче сокращения замусоренности околоземного пространства за счет сброса отработанных ступеней в атмосферу Земли // Материалы международного молодежного научного форума «Ломоносов — 2017». М.: Издательство МАКС Пресс. 2017. С. 1.
- [75] Проскуряков А.И. Гомановские и биэллиптические схемы в задаче перелета КА с низкой круговой орбиты со сбросом ступеней в атмосферу // Гагаринские чтения — 2017: XLIII Международная молодежная научная конференция. М.: Издательство МАИ. 2017. С. 1062–1063.
- [76] Проскуряков А.И. Оптимизация апсидального выведения КА с опорной орбиты на геостационар со сбросом ступеней в атмосферу // II научно-практическая конференция с международным участием «Творческий потенциал молодежи в решении авиакосмических проблем». Баку. Издательство Центра полиграфии Национальной академии авиации. 2017. С. 22–23.
- [77] Проскуряков А.И. Задача оптимизации траектории выведения космического аппарата с опорной орбиты на целевую // II Международная научная конференция молодых исследователей, посвященная 95-й годовщине общенационального лидера Азербайджана Гейдара Алиева. Баку. Издательство Бакинского инженерного университета. 2018. Т. 1. С. 24–25.
- [78] Проскуряков А.И. Оптимизация целевой орбиты и траектории выведения КА с учетом сброса ступеней в атмосферу // Гагаринские чтения — 2018: XLIV Международная молодежная научная конференция. М.: Издательство МАИ. 2018. Т. 2. С. 343.
- [79] Проскуряков А.И. Оптимизация целевой орбиты и траектории выведения КА на целевую орбиту с учетом возвращения отработавших ступеней в атмосферу Земли // Материалы международного молодежного научного форума «Ломоносов — 2018». М.: Издательство МАКС Пресс. 2018. С. 1.
- [80] Проскуряков А.И. Траектория перелета космического аппарата с опорной орбиты на целевую со сбросом дополнительного топливного бака и разгон-

ного блока в атмосферу // Сборник материалов Евразийского молодежного форума, посвященного 20-летию юбилею Казахстанского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова. Нур-Султан. Издательство Казахстанского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова. 2021. С. 34-35.

- [81] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация целевой орбиты и траектории апсидального импульсного выведения космического аппарата на неё с учётом сброса отработавших ступеней в атмосферу // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 4 (88). <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-4-1869>
- [82] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Импульсные перелёты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть I) // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 9 (93). <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1917>
- [83] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Импульсные перелёты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть II) // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 10 (94). <http://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1925>
- [84] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация перелета КА со сбросом дополнительного топливного бака и разгонного блока в атмосферу Земли. // Автоматика и телемеханика. 2023. № 3. С. 22–43. <http://doi.org/10.31857/S0005231023030029>
- [85] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Задача выведения на целевую орбиту космического аппарата максимальной массы с использованием двигателя ограниченной тяги и сбросом отделяемых частей средств выведения в атмосферу Земли. // Автоматика и телемеханика. 2024. № 1. С. 21–46. <http://doi.org/10.31857/S0005231024010025>
- [86] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Задача оптимизации траектории перелета космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги со сбросом дополнительного топливного бака и разгонного блока в атмосферу // XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных уче-

ных — пионеров освоения космического пространства. М.: Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2021. Т. 1. С. 480–481.

- [87] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация траектории перелета КА с опорной орбиты на целевую с учетом сброса дополнительного топливного бака и разгонного блока в атмосферу Земли // Ломоносовские чтения — 2021. Секция механики. М.: Издательство Московского университета. 2021. С. 74–75.
- [88] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Простая схема в задаче перелета КА на целевую орбиту с ограниченной тягой и сбросом ступеней в атмосферу // Ломоносовские чтения — 2020. Секция механики. М.: Издательство Московского университета. 2020. С. 76.
- [89] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Задача с ограниченной тягой для траектории перелета КА с опорной орбиты на целевую эллиптическую с заданным импульсом довыведения до геостационарной // XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. М.: Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2020. Т. 1. С. 274–275.
- [90] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация целевой орбиты и анализ апсидальных импульсных траекторий в задаче перелета КА на целевую орбиту со сбросом отработавших ступеней в атмосферу Земли // Материалы 53-х научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга. Издательство Эйдос. 2018. С. 161–162.
- [91] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация элементов целевой орбиты и траектории апсидального импульсного выведения космического аппарата на нее с учетом сброса ступеней в атмосферу // Ломоносовские чтения — 2018. Секция механики. М.: Издательство Московского университета. 2018. С. 69.
- [92] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Анализ траекторий апсидальных импульсных перелетов КА с опорной орбиты на целевую // XLII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Коро-

- лева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. М.: Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2018. С. 237–238.
- [93] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация перелета космического аппарата на целевую эллиптическую орбиту со сбросом ступеней в атмосферу Земли // Материалы 52-х научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга. Издательство Эйдос. 2017. С. 181.
- [94] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация апсидального импульсного перелета КА на геостационар со сбросом ступеней в атмосферу // XLI Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. М.: Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2017. С. 103.
- [95] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Упрощенная оптимизация выведения космического аппарата с возвращением разгонного блока в атмосферу Земли // Материалы 51-х научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга. Издательство Эйдос. 2016. С. 142–143.
- [96] Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация перелета КА с низкой круговой орбиты ИСЗ со сбросом отработанных ступеней в атмосферу // Ломоносовские чтения — 2017. Секция механики. М.: Издательство Московского университета. 2017. С. 73.
- [97] Саввина Е.В. Построение траектории перелета космического аппарата между околоземными эллиптическими орбитами методом перебора значений параметров внутри сетки данных // Проблемы управления. 2023. № 2. С. 65–74. <http://doi.org/10.25728/ru.2023.2.6>
- [98] Саввина Е.В. Оптимизация траектории межорбитального перелёта космического аппарата: выбор начальных приближений на основе корреляционного анализа данных // Проблемы управления. 2023. № 4. с. 48–56. <http://doi.org/10.25728/ru.2023.4.5>
- [99] Савельев Б.И. Многоразовый космический аппарат-буксир для уборки кос-

мического мусора // Патент №2510359. Российская Федерация. 2014. Бюллетень № 9.

- [100] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, 1997. 320 с.
- [101] Самохин А.С. Методика построения экстремалей Понтрягина в задачах сквозной траекторной оптимизации межпланетных перелётов с учётом планетоцентрических участков дис. ...канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 — Москва. 2021. 157 с.
URL: <http://keldysh.ru/council/1/2020-samohin/diss.pdf> (дата обращения: 10.05.2025)
- [102] Сизов Д.А., Асланов В.С. Оптимальное управление тягой буксира при разворачивании троса после захвата космического мусора гарпунном // Инженерный журнал: наука и инновации. 2020. № 5 (101). <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2020-5-1983>
- [103] Старченко А.Е. Оптимизация траектории выведения космического аппарата на геостационарную орбиту с целью снижения поглощенной дозы космической радиации // Космические исследования. 2019. Т. 57. № 4. С. 308–320.
- [104] Трушкова Е.А., Матвеев Г.А. Оптимизация процесса обнаружения орбит новых космических объектов с помощью параллельного расчета возможных орбит // Программные продукты и системы. 2015. № 3. С. 80–87.
- [105] Трушляков В.И., Юткин Е.А. Обзор средств стыковки и захвата объектов крупногабаритного космического мусора // Омский научный вестник. 2013. № 2. С. 56–61.
- [106] Усовик И.В., Морозов А.А. Разработка системы мониторинга некаталогизируемого космического мусора // Вестник Московского авиационного института. 2023. Т. 30. № 40. С. 202–209.
- [107] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
- [108] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Издательство Московского физико-технического института, 1994. 528 с.

- [109] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. Перевод с английского. М.: Мир, 1990. 512 с.
- [110] Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
- [111] Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.
- [112] Численно-аналитическое дифференцирование (ext_value) // URL: http://mech.math.msu.su/~iliagri/ext_value (дата обращения: 10.05.2025)
- [113] Шатров Я.Т., Баранов Д.А., Трушляков В.И., Куденцов В.Ю. Определение направлений разработки методов, технических решений и средств снижения техногенного воздействия на окружающую среду для реализации на борту космических средств выведения // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2011. № 1 (25). С. 38–47.
- [114] Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 224 с.
- [115] Шустов Б.М., Рыхлова Л.В., Кулешов Ю.П. и др. Концепция системы противодействия космическим угрозам: астрономические аспекты // Астрономический вестник. 2013. Т. 47. № 4. С. 327–340.
- [116] Юдинцев В.В. Динамика захвата сетью вращающегося объекта — космического мусора // Вестник Московского авиационного института. 2018. Т. 25. № 4. С. 37–48.
- [117] Baranov A.A., Grishko D.A., Razoumny Y.N., Li Jun. Flyby of large-size space debris objects and their transition to the disposal orbits in LEO // *Advances in Space Research*. 2017. V. 59 (12). P. 3011–3022.
- [118] Dudziak R, Tuttle S., Barraclough S. Harpoon technology development for the active removal of space debris // *Advances in Space Research*. 2015. V. 56 (3). P. 509–527.

- [119] Guang Zhai, Yue Qiu, Bin Liang, Cheng Li. On-orbit capture with flexible tether-net system // *Acta Astronautica*. 2009. No. 69. P. 613–623.
- [120] Jericho Locke, Thomas J. Colvin, Laura Ratliff, Asaad AbdulHamid, Colin Samples. Cost and Benefit Analysis of Mitigating, Tracking, and Remediating Orbital Debris // The NASA Office of Technology, Policy, and Strategy. 2024. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/20240003484> (accessed 10.05.2025)
- [121] Juergen S., Bischof B., Foth W.-O., Gunter J.-J. ROGER a potential orbital space debris removal system [Electronic resource]: URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010cosp...38.3935S> (accessed 10.05.2025)
- [122] Kessler D., Cour-Palais B. Collision Frequency of Artificial Satellites: The Creation of a Debris Belt // *J. Geophys. Res.* 1978. V. 83. P. 2637–2646.
- [123] Phipps C., Baker K., Libby S., et al. Removing orbital debris with lasers // *Advances in Space Research*. 2012. V. 49 (9). P. 1283–1300.
- [124] Shan M., Guo J., Gill E. Review and comparison of active space debris capturing and removal methods // *Progr. Aerospac. Sci.* 2015. V. 80. P. 18–32.
- [125] Pelton J.N. *New solutions for the space debris problem*. Springer, 2015. 94 p.
- [126] Proskuryakov A.I. Comparison of apsidal and non-apsidal impulse trajectories of the spacecraft launching to the target orbit, taking into account the reset of stages into the atmosphere // *AIP Conference Proceedings* 2171. 2019. <http://dx.doi.org/10.1063/1.5133206>
- [127] *Space debris mitigation guidelines*. Inter-Agency Space Debris Coordination Committee. Revision 2. 2020.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. Экстремаль в задаче без априорного предположения об апсидальности импульсных воздействий

В приложении к разделу 3.4 приводится экстремаль в задаче без априорного предположения об апсидальности импульсных воздействий при $\Delta v^* = 1.5$ км/с.

Функциональные множители Лагранжа (сопряженные переменные) могут быть получены численным интегрированием уравнений (3.1), (3.30). Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 ч. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам.

Представленная экстремаль может использоваться при отработке методики проверки локальной оптимальности 2-го порядка.

При необходимости уточнение представленных значений может быть произведено классическим методом Ньютона.

Числовые множители Лагранжа:

$$\begin{array}{lll} \lambda_{\text{дов}} = 0.034130249, & \lambda_{R0} = 0.018920947, & \lambda_{C0} = 0, \\ \lambda_{x\tau1} = -0.002955165, & \lambda_{y\tau1} = 0, & \lambda_{z\tau1} = 0, \\ \lambda_{vx\tau1} = 0, & \lambda_{vy\tau1} = 0.004464900, & \lambda_{vz\tau1} = 0.009184300, \\ \lambda_{rv1} = 0, & \lambda_{\tau1} = 0, & \lambda_{xt1} = 0.104525396, \\ \lambda_{yt1} = 0, & \lambda_{zt1} = 0, & \lambda_{t1} = 0, \\ \lambda_{x\tau2} = -0.000108451, & \lambda_{y\tau2} = 0, & \lambda_{z\tau2} = 0, \\ \lambda_{vx\tau2} = 0, & \lambda_{vy\tau2} = -0.023216554, & \lambda_{vz\tau2} = 0.012936331, \\ \lambda_{rv2} = 0, & \lambda_{\tau2} = 0, & \lambda_{xt2} = 0.104587708, \\ \lambda_{yt2} = 0, & \lambda_{zt2} = 0, & \lambda_{t2} = 0, \\ \lambda_{xR} = -0.000113047, & \lambda_{yR} = 0, & \lambda_{zR} = 0, \\ \lambda_R = 0, & \lambda_{R1} = 4.824999748 \cdot 10^{-8}, & \lambda_{R2} = 0, \\ \lambda_{R3} = 0, & \lambda_T = 0.000176579, & \lambda_{zT} = 0. \end{array}$$

В начальный момент времени КА переводится на переходную орбиту:

$$\begin{array}{lll} x(0_+) = 6578.155 \text{ км}, & y(0_+) = 0 \text{ км}, & z(0_+) = 0 \text{ км}, \\ v_x(0_+) = 0 \text{ км/с}, & v_y(0_+) = 5.826854 \text{ км/с}, & v_z(0_+) = 7.265299 \text{ км/с}, \\ p_x(0_+) = 0.103450926, & p_y(0_+) = 0, & p_z(0_+) = 0, \end{array}$$

$$p_{vx}(0_+) = 0, \quad p_{vy}(0_+) = 0.022070127, \quad p_{vz}(0_+) = 0.026081690.$$

Отделение первой ступени происходит в апогее первой переходной орбиты в момент времени $\tau_1 = 6192.351$ с:

$$\begin{aligned} x(\tau_{1-}) = x(\tau_{1+}) &= -16560.958 \text{ км}, & y(\tau_{1-}) = y(\tau_{1+}) &= 0 \text{ км}, \\ z(\tau_{1-}) = z(\tau_{1+}) &= 0 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}) = v_x(\tau_{1+}) &= 0 \text{ км/с}, \\ v_y(\tau_{1-}) = v_y(\tau_{1+}) &= -2.314477 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}) = v_z(\tau_{1+}) &= -2.885839 \text{ км/с}, \\ p_x(\tau_{1-}) &= -0.001893541, & p_y(\tau_{1-}) &= 0, \\ p_z(\tau_{1-}) &= 0, & p_{vx}(\tau_{1-}) &= 0, \\ p_{vy}(\tau_{1-}) &= 0.005431288, & p_{vz}(\tau_{1-}) &= 0.010389255, \\ p_x(\tau_{1+}) &= -0.002955165, & p_y(\tau_{1+}) &= 0, \\ p_z(\tau_{1+}) &= 0, & p_{vx}(\tau_{1+}) &= 0, \\ p_{vy}(\tau_{1+}) &= 0.004464900, & p_{vz}(\tau_{1+}) &= 0.009184300. \end{aligned}$$

В момент времени $t_1 = 12384.702$ с прохождения перигея КА переводится на целевую эллиптическую орбиту:

$$\begin{aligned} x(t_{1-}) = x(t_{1+}) &= 6578.155 \text{ км}, & y(t_{1-}) = y(t_{1+}) &= 0 \text{ км}, \\ z(t_{1-}) = z(t_{1+}) &= 0 \text{ км}, & v_x(t_{1-}) &= 0 \text{ км/с}, \\ v_y(t_{1-}) &= 5.826854 \text{ км/с}, & v_z(t_{1-}) &= 7.265299 \text{ км/с}, \\ v_x(t_{1+}) &= 0 \text{ км/с}, & v_y(t_{1+}) &= 6.819786 \text{ км/с}, \\ v_z(t_{1+}) &= 8.438685 \text{ км/с}, & p_x(t_{1-}) = p_x(t_{1+}) &= 0.104525396, \\ p_y(t_{1-}) = p_y(t_{1+}) &= 0, & p_z(t_{1-}) = p_z(t_{1+}) &= 0, \\ p_{vx}(t_{1-}) = p_{vx}(t_{1+}) &= 0, & p_{vy}(t_{1-}) = p_{vy}(t_{1+}) &= 0.022061607, \\ & & p_{vz}(t_{1-}) = p_{vz}(t_{1+}) &= 0.026071066. \end{aligned}$$

Отделение второй ступени происходит на целевой эллиптической орбите. В момент времени $\tau_2 = 206238.405$ с происходит перевод второй ступени на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы:

$$\begin{aligned} x(\tau_{2-}) = x(\tau_{2+}) &= -223261.901 \text{ км}, & y(\tau_{2-}) = y(\tau_{2+}) &= 0 \text{ км}, \\ z(\tau_{2-}) = z(\tau_{2+}) &= 0 \text{ км}, & v_x(\tau_{2-}) = v_x(\tau_{2+}) &= 0 \text{ км/с}, \\ v_y(\tau_{2-}) = v_y(\tau_{2+}) &= -0.200937 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{2-}) = v_z(\tau_{2+}) &= -0.248636 \text{ км/с}, \\ p_x(\tau_{2-}) &= -1.006587417 \cdot 10^{-4}, & p_y(\tau_{2-}) &= 0, \\ p_z(\tau_{2-}) &= 0, & p_{vx}(\tau_{2-}) &= 0, \\ p_{vy}(\tau_{2-}) &= -0.022245655, & p_{vz}(\tau_{2-}) &= 0.014137705, \\ p_x(\tau_{2+}) &= -1.084505068 \cdot 10^{-4}, & p_y(\tau_{2+}) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_z(\tau_{2+}) &= 0, & p_{vx}(\tau_{2+}) &= 0, \\
p_{vy}(\tau_{2+}) &= -0.023216554, & p_{vz}(\tau_{2+}) &= 0.012936331.
\end{aligned}$$

В момент времени $t_2 = 400092.108$ с начинается довыведение КА на целевую орбиту. В рассматриваемый момент времени КА переводится на первую орбиту довыведения:

$$\begin{aligned}
x(t_{2-}) &= x(t_{2+}) = 6578.155 \text{ км}, & y(t_{2-}) &= y(t_{2+}) = 0 \text{ км}, \\
z(t_{2-}) &= z(t_{2+}) = 0 \text{ км}, & v_x(t_{2-}) &= 0 \text{ км/с}, \\
v_y(t_{2-}) &= 6.819786 \text{ км/с}, & v_z(t_{2-}) &= 8.438685 \text{ км/с}, \\
v_x(t_{2+}) &= 0 \text{ км/с}, & v_y(t_{2+}) &= 6.840204 \text{ км/с}, \\
v_z(t_{2+}) &= 8.462813 \text{ км/с}, & p_x(t_{2-}) &= p_x(t_{2+}) = 0.104587708, \\
p_y(t_{2-}) &= p_y(t_{2+}) = 0, & p_z(t_{2-}) &= p_z(t_{2+}) = 0, \\
p_{vx}(t_{2-}) &= p_{vx}(t_{2+}) = 0, & p_{vy}(t_{2-}) &= p_{vy}(t_{2+}) = 0.022047417, \\
& & p_{vz}(t_{2-}) &= p_{vz}(t_{2+}) = 0.026053508.
\end{aligned}$$

В момент времени $t_R = 669990.407$ с КА переводится на вторую переходную орбиту:

$$\begin{aligned}
x(t_{R-}) &= x(t_{R+}) = -280000 \text{ км}, & y(t_{R-}) &= y(t_{R+}) = 0 \text{ км}, \\
z(t_{R-}) &= z(t_{R+}) = 0 \text{ км}, & v_x(t_{R-}) &= 0 \text{ км/с}, \\
v_y(t_{R-}) &= -0.160700 \text{ км/с}, & v_z(t_{R-}) &= -0.198820 \text{ км/с}, \\
v_x(t_{R+}) &= 0 \text{ км/с}, & v_y(t_{R+}) &= -0.610319 \text{ км/с}, \\
v_z(t_{R+}) &= -0.011790 \text{ км/с}, & p_x(t_{R-}) &= -8.602724881 \cdot 10^{-5}, \\
p_y(t_{R-}) &= 0, & p_z(t_{R-}) &= 0, \\
p_{vx}(t_{R-}) &= 0, & p_{vy}(t_{R-}) &= -0.031512584, \\
p_{vz}(t_{R-}) &= 0.013108431, & p_x(t_{R+}) &= -0.000113047, \\
p_y(t_{R+}) &= 0, & p_z(t_{R+}) &= 0, \\
p_{vx}(t_{R+}) &= 0, & p_{vy}(t_{R+}) &= -0.031512584, \\
& & p_{vz}(t_{R+}) &= 0.013108431.
\end{aligned}$$

В конечный момент времени $T = 991690.389$ с КА переводится на геостационарную орбиту:

$$\begin{aligned}
x(T_-) &= 42164 \text{ км}, & y(T_-) &= 0 \text{ км}, \\
z(T_-) &= 0 \text{ км}, & v_x(T_-) &= 0 \text{ км/с}, \\
v_y(T_-) &= 4.052966 \text{ км/с}, & v_z(T_-) &= 0.078296 \text{ км/с}, \\
p_x(T_-) &= -0.005959333, & p_y(T_-) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_z(T_-) &= 0, & p_{vx}(T_-) &= 0, \\
p_{vy}(T_-) &= -0.034021464, & p_{vz}(T_-) &= -0.002722850.
\end{aligned}$$

В. Экстремаль в задаче в модифицированной импульсной постановке

В приложении к разделу 4.5 приводится экстремаль в задаче в модифицированной импульсной постановке при $\Delta v^* = 1.5$ км/с.

Функциональные множители Лагранжа (сопряженные переменные) могут быть получены численным интегрированием уравнений (3.1), (3.30). Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 ч. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам.

Представленная экстремаль может использоваться при отработке методики проверки локальной оптимальности 2-го порядка.

При необходимости уточнение представленных значений может быть произведено классическим методом Ньютона при использовании вычислительной схемы из раздела 4.4.

Числовые множители Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\lambda_{R0} &= 0.017815524, & \lambda_{C0} &= -7.520941939 \cdot 10^{-9}, \\
\lambda_{сб1} &= 0.043518016, & \lambda_{бсз} &= -0.027849246, \\
\lambda_{rv4} &= 1.095476734 \cdot 10^{-15}, & \lambda_{дов} &= 0.033386983, \\
\lambda_{ц} &= -5.445096366 \cdot 10^{-11}, & \lambda_{x1} &= 0.009217755, \\
\lambda_{y1} &= -7.999581924 \cdot 10^{-5}, & \lambda_{z1} &= -0.000116971, \\
\lambda_{x2} &= -0.022775824, & \lambda_{y2} &= -0.000372282, \\
\lambda_{z2} &= -0.000393852, & \lambda_{x3} &= 0.102241372, \\
\lambda_{y3} &= -8.659365419 \cdot 10^{-7}, & \lambda_{z3} &= 9.583675185 \cdot 10^{-8}, \\
\lambda_{\tau1} &= 0, & \lambda_{\tau2} &= 0, \\
\lambda_{\tau3} &= 0, & \lambda_{\tau12} &= 0.
\end{aligned}$$

В начальный момент времени на опорной орбите в точке, соответствующей угловому положению КА $\varphi_0 = 0.000307502$ рад, подается импульс величины $\Delta v_0 = 1.790295$ км/с, направление импульса задается двумя углами $\psi_0 = 1.570796511$ рад, $\theta_0 = -0.031065111$ рад. Фазовые и сопряженные переменные после первого импульсного воздействия:

$$\begin{aligned}
x(0_+) &= 6578.155 \text{ км}, & y(0_+) &= 1.257 \text{ км}, \\
z(0_+) &= 1.585 \text{ км}, & v_x(0_+) &= -0.002944 \text{ км/с}, \\
v_y(0_+) &= 5.994660 \text{ км/с}, & v_z(0_+) &= 7.464764 \text{ км/с}, \\
p_x(0_+) &= 0.089297024, & p_y(0_+) &= 1.813822463 \cdot 10^{-5}, \\
p_z(0_+) &= 2.062665635 \cdot 10^{-5}, & p_{vx}(0_+) &= -1.047918144 \cdot 10^{-5}, \\
p_{vy}(0_+) &= 0.021999891, & p_{vz}(0_+) &= 0.026020734.
\end{aligned}$$

Продолжительность первого пассивного участка $\Delta\tau_1 = 7778.112$ с. Фазовые и сопряженные переменные до импульсного воздействия, переводящего КА на «орбиту сброса ДТБ»:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{1-}) &= -20417.251 \text{ км}, & y(\tau_{1-}) &= 44.700 \text{ км}, \\
z(\tau_{1-}) &= 55.603 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}) &= -0.023114 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{1-}) &= -1.931346 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}) &= -2.404980 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{1-}) &= 0.009217755, & p_y(\tau_{1-}) &= -7.999581924 \cdot 10^{-5}, \\
p_z(\tau_{1-}) &= -0.000116971, & p_{vx}(\tau_{1-}) &= 5.397985722 \cdot 10^{-5}, \\
p_{vy}(\tau_{1-}) &= 0.019187566, & p_{vz}(\tau_{1-}) &= 0.028158628.
\end{aligned}$$

В момент времени $\tau_1 = 7778.112$ с в окрестности апогея первой переходной орбиты подается импульс величины $\Delta v_1 = 0.017905$ км/с, направление импульса задается двумя углами $\psi_1 = -1.568891302$ рад, $\theta_1 = 0.078464379$ рад. Фазовые и сопряженные переменные после импульсного воздействия, переводящего КА на «орбиту сброса ДТБ»:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{1+}) &= -20417.251 \text{ км}, & y(\tau_{1+}) &= 44.700 \text{ км}, \\
z(\tau_{1+}) &= 55.603 \text{ км}, & v_x(\tau_{1+}) &= -0.023085 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{1+}) &= -1.921263 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1+}) &= -2.390184 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{1+}) &= -0.022777716, & p_y(\tau_{1+}) &= 9.226937389 \cdot 10^{-5}, \\
p_z(\tau_{1+}) &= 9.732879994 \cdot 10^{-5}, & p_{vx}(\tau_{1+}) &= -0.000150720, \\
p_{vy}(\tau_{1+}) &= -0.022960673, & p_{vz}(\tau_{1+}) &= -0.024276688.
\end{aligned}$$

Продолжительность второго пассивного участка — параметр задачи $\Delta\tau_2 = 120$ с. Фазовые и сопряженные переменные до импульсного воздействия, переводящего КА на «безопасную» орбиту:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{2-}) &= -20413.137 \text{ км}, & y(\tau_{2-}) &= -185.841 \text{ км}, \\
z(\tau_{2-}) &= -231.205 \text{ км}, & v_x(\tau_{2-}) &= 0.091658 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{2-}) &= -1.920866 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{2-}) &= -2.389690 \text{ км/с},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_x(\tau_{2-}) &= -0.022775824, & p_y(\tau_{2-}) &= -0.000372282, \\
p_z(\tau_{2-}) &= -0.000393852, & p_{vx}(\tau_{2-}) &= 0.000608522, \\
p_{vy}(\tau_{2-}) &= -0.022956007, & p_{vz}(\tau_{2-}) &= -0.024271746.
\end{aligned}$$

В момент времени $\tau_2 = 7898.112$ с подается импульс величины $\Delta v_2 = 0.017910$ км/с, направление импульса задается двумя углами $\psi_2 = 1.574537723$ рад, $\theta_2 = 0.080470327$ рад. Фазовые и сопряженные переменные после импульсного воздействия, переводящего КА на «безопасную» орбиту:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{2+}) &= -20413.137 \text{ км}, & y(\tau_{2+}) &= -185.841 \text{ км}, \\
z(\tau_{2+}) &= -231.205 \text{ км}, & v_x(\tau_{2+}) &= 0.091984 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{2+}) &= -1.933171 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{2+}) &= -2.402700 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{2+}) &= -0.001946435, & p_y(\tau_{2+}) &= 7.114993292 \cdot 10^{-5}, \\
p_z(\tau_{2+}) &= 0.000157512, & p_{vx}(\tau_{2+}) &= 5.197180216 \cdot 10^{-5}, \\
p_{vy}(\tau_{2+}) &= 0.004386109, & p_{vz}(\tau_{2+}) &= 0.009711238.
\end{aligned}$$

Продолжительность третьего пассивного участка $\Delta\tau_3 = 7707.074$ с. Фазовые и сопряженные переменные до импульсного воздействия, переводящего КА на целевую орбиту:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{3-}) &= 6578.155 \text{ км}, & y(\tau_{3-}) &= -0.053 \text{ км}, \\
z(\tau_{3-}) &= 0.007 \text{ км}, & v_x(\tau_{3-}) &= 4.743745 \cdot 10^{-5} \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{3-}) &= 6.001558 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{3-}) &= 7.459221 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{3-}) &= 0.102241372, & p_y(\tau_{3-}) &= -8.659365419 \cdot 10^{-7}, \\
p_z(\tau_{3-}) &= 9.583675185 \cdot 10^{-8}, & p_{vx}(\tau_{3-}) &= 1.591331760 \cdot 10^{-7}, \\
p_{vy}(\tau_{3-}) &= 0.021609456, & p_{vz}(\tau_{3-}) &= 0.025485244.
\end{aligned}$$

В момент времени $\tau_3 = 15605.187$ с в окрестности перигея «безопасной» орбиты подается импульс величины $\Delta v_3 = 1.278620$ км/с, направление импульса задается двумя углами $\psi_3 = -0.025756612$ рад, $\theta_3 = 1.570795995$ рад. Фазовые и сопряженные переменные после импульсного воздействия, переводящего КА на целевую орбиту:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{3+}) &= 6578.155 \text{ км}, & y(\tau_{3+}) &= -0.053 \text{ км}, \\
z(\tau_{3+}) &= 0.007 \text{ км}, & v_x(\tau_{3+}) &= 5.352692 \cdot 10^{-5} \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{3+}) &= 6.828477 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{3+}) &= 8.434453 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{3+}) &= 0.102241372, & p_y(\tau_{3+}) &= -8.659365382 \cdot 10^{-7}, \\
p_z(\tau_{3+}) &= 9.583675613 \cdot 10^{-8}, & p_{vx}(\tau_{3+}) &= 1.591331751 \cdot 10^{-7},
\end{aligned}$$

$$p_{vy}(\tau_{3+}) = 0.021609456, \quad p_{vz}(\tau_{3+}) = 0.025485244.$$

Продолжительность четвертого пассивного участка $\Delta\tau_4 = 197879.222$ с. На целевой орбите происходит отстыковка спутника от ЦБ. Масса спутника на целевой орбите (полезная масса) $m_{\text{п}} = 0.3682201$. Последний тормозной импульс, подается в точке, соответствующей апогею целевой орбиты в момент времени $\tau_4 = 213484.409$ с. Фазовые и сопряженные переменные до импульсного воздействия, переводящего ЦБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы:

$$\begin{aligned} x(\tau_{4-}) &= -226432.858 \text{ км}, & y(\tau_{4-}) &= 2.026 \text{ км}, \\ z(\tau_{4-}) &= 0, & v_x(\tau_{4-}) &= -1.775175 \cdot 10^{-6} \text{ км/с}, \\ v_y(\tau_{4-}) &= -0.198376 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{4-}) &= -0.245031 \text{ км/с}, \\ p_x(\tau_{4-}) &= -9.581254509 \cdot 10^{-5}, & p_y(\tau_{4-}) &= 8.230966349 \cdot 10^{-10}, \\ p_z(\tau_{4-}) &= -1.214462624 \cdot 10^{-9}, & p_{vx}(\tau_{4-}) &= -2.090929578 \cdot 10^{-7}, \\ p_{vy}(\tau_{4-}) &= -0.022151142, & p_{vz}(\tau_{4-}) &= 0.014169165. \end{aligned}$$

Величины импульсов довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО:

$$\Delta v_{\text{доб1}} = 0.029425 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{доб2}} = 0.491523 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{доб3}} = 0.979052 \text{ км/с}.$$

С. Экстремаль Понтрягина в первой постановке задачи с большой ограниченной тягой без учета второй зональной гармоники

В приложении к разделу 5.5 приводится экстремаль Понтрягина в первой постановке задачи с большой ограниченной тягой без учета влияния второй зональной гармоники при $n = 0.1$, $\Delta v^* = 1.5$ км/с.

Функциональные множители Лагранжа (сопряженные переменные) могут быть получены численным интегрированием уравнений (5.1), (3.30), (5.16). Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 с. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам.

Представленная экстремаль может использоваться при отработке методики проверки локальной оптимальности 2-го порядка или, например, условий оптимальности на основе принципа Кротова.

При необходимости уточнение представленных значений может быть произведено классическим методом Ньютона при использовании вычислительной схе-

мы из раздела 5.4.

Числовые множители Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{R0} &= 1.423653401 \cdot 10^{-4}, & \lambda_{C0} &= 5.449436495 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{vx0} &= 0.405259748, & \lambda_{vy0} &= 0.589704321, \\
 \lambda_{vz0} &= 0.698579524, & \lambda_{m0} &= 0.003432328, \\
 \lambda_{xc61} &= -3.873846947 \cdot 10^{-4}, & \lambda_{yc61} &= -7.920277477 \cdot 10^{-7}, \\
 \lambda_{zc61} &= -8.970454608 \cdot 10^{-7}, & \lambda_{vxc61} &= 0.002914341, \\
 \lambda_{vyc61} &= -0.713499179, & \lambda_{vzc61} &= -0.783349071, \\
 \lambda_{x6ез} &= -5.917150104 \cdot 10^{-5}, & \lambda_{y6ез} &= 2.025218246 \cdot 10^{-6}, \\
 \lambda_{z6ез} &= 4.709614039 \cdot 10^{-6}, & \lambda_{vх6ез} &= 0.008900558, \\
 \lambda_{vy6ез} &= 0.093083723, & \lambda_{vz6ез} &= 0.222191055, \\
 \lambda_{xц} &= 8.740512367 \cdot 10^{-8}, & \lambda_{yц} &= -1.259356477 \cdot 10^{-11}, \\
 \lambda_{zц} &= -9.045163419 \cdot 10^{-14}, & \lambda_{vxц} &= 5.768327813 \cdot 10^{-6}, \\
 \lambda_{vyц} &= 0.040236649, & \lambda_{vzц} &= 0.049732796, \\
 \lambda_{\tau c61} &= 0, & \lambda_{c61} &= 4.680967500 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{m\tau} &= 0.005329988, & \lambda_{\tau} &= 0, \\
 \lambda_{\tau c62} &= 0, & \lambda_{\tau 6ез} &= 0, \\
 \lambda_{6ез} &= -2.841041573 \cdot 10^{-4}, & \lambda_{\tau ц} &= 0, \\
 \lambda_{ц} &= -1.079286957 \cdot 10^{-4}, & \lambda_{дов} &= 1.137645843, \\
 \lambda_T &= 1.503996716 \cdot 10^{-6}, & \lambda_{mT} &= -0.009153076, \\
 & & \lambda_0 &= 0.019025011.
 \end{aligned}$$

Включение двигателя КА происходит в начальный момент времени $t = 0$ при угловом положении на опорной орбите $\varphi_0 = -0.705472280$ рад:

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 5007.985 \text{ км}, & y(0) &= -2651.311 \text{ км}, \\
 z(0) &= -3341.071 \text{ км}, & v_x(0) &= 5.047263 \text{ км/с}, \\
 v_y(0) &= 3.683784 \text{ км/с}, & v_z(0) &= 4.642151 \text{ км/с}, \\
 p_x(0) &= 3.446028184 \cdot 10^{-4}, & p_y(0) &= -4.786660707 \cdot 10^{-4}, \\
 p_z(0) &= -5.583044215 \cdot 10^{-4}, & p_{vx}(0) &= 0.405259748, \\
 p_{vy}(0) &= 0.589704321, & p_{vz}(0) &= 0.698579524, \\
 m(0) &= 1, & p_m(0) &= 0.003432328.
 \end{aligned}$$

Продолжительность первого активного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{акт}} = 1131.998$ с. КА переходит на эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a1} = 14035.721$ км, перигеем $r_{п1} = 6671.957$ км и углом наклона $i_1 = 0.8958017$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_1^{\text{акт}} = 1131.998$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5470.758 \text{ км}, & y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 2827.369 \text{ км}, \\
z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3532.816 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -4.230417 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 4.672028 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5.836656 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3.561111874 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3.781704714 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 4.405767926 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -0.344536234, \\
p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.631546204, & p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.747716538, \\
m(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= m(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.6765720, & p_m(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_m(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.005263918.
\end{aligned}$$

Продолжительность первого пассивного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{пасс}} = 4686.880$ с. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_1^{\text{пасс}} = 5818.878$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -14035.254 \text{ км}, & y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 58.892 \text{ км}, \\
z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 72.442 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -0.043472 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2.673120 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -3.339666 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 1.444079032 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -1.820622410 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2.590926438 \cdot 10^{-6}, \\
p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.003305221, \\
p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.595408579, & p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.849772643, \\
m(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= m(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.6765720, & p_m(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_m(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.005263918.
\end{aligned}$$

Продолжительность второго активного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}} = 29.353$ с. КА переходит на эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a2} = 14035.720$ км, перигеем $r_{п2} = 6478.155$ км и углом наклона $i_2 = 0.8951570$ рад — на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}} = 5848.230$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -14035.657 \text{ км}, & y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -19.214 \text{ км}, \\
z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -25.075 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= v_x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = 0.015967 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= v_y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -2.648637 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= v_z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -3.304705 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 1.444266574 \cdot 10^{-4}, & p_y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 6.988165912 \cdot 10^{-7}, \\
p_z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 1.004849560 \cdot 10^{-6}, & p_{vx}(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= -9.340175726 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vy}(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.595425044, & p_{vz}(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.849795922,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_x(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}}) &= -3.873846947 \cdot 10^{-4}, & p_y(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}}) &= -7.920277477 \cdot 10^{-7}, \\
p_z(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}}) &= -8.970454608 \cdot 10^{-7}, & p_{vx}(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}}) &= 0.002914341, \\
p_{vy}(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}}) &= -0.713499179, & p_{vz}(\tau_{c61+}^{\text{ДТБ}}) &= -0.783349071, \\
m(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}}) &= 0.6681855, & p_m(\tau_{c61-}^{\text{ДТБ}}) &= 0.005329988.
\end{aligned}$$

Продолжительность второго пассивного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{пасс}} = 120$ с — на этом участке происходит отстыковка ДТБ от КА. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{c62}^{\text{ДТБ}} = 5968.230$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= x(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -14019.172 \text{ км}, & y(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= y(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -336.920 \text{ км}, \\
z(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= z(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -421.477 \text{ км}, & v_x(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= v_x(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = 0.258781 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= v_y(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -2.645555 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= v_z(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -3.300839 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_x(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -3.871726199 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_y(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -1.313928140 \cdot 10^{-5}, \\
p_z(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_z(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -1.445363466 \cdot 10^{-5}, \\
p_{vx}(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_{vx}(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = 0.049391574, \\
p_{vy}(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_{vy}(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -0.712663427, & p_{vz}(\tau_{c62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_{vz}(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) = -0.782428184, \\
m(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) &= 0.6416403, & p_m(\tau_{c62+}^{\text{ДТБ}}) &= 0.005667420.
\end{aligned}$$

Продолжительность третьего активного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{бес}} = 14.519$ с. КА переходит на эллиптическую орбиту с апогеем $r_{\text{аз}} = 14035.874$ км, перигеем $r_{\text{пз}} = 6578.155$ км и углом наклона $i_3 = 0.8948279$ рад — «безопасная» орбита. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{бес}} = 5982.749$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{\text{бес-}}) &= x(\tau_{\text{бес+}}) = -14015.194 \text{ км}, & y(\tau_{\text{бес-}}) &= y(\tau_{\text{бес+}}) = -375.433 \text{ км}, \\
z(\tau_{\text{бес-}}) &= z(\tau_{\text{бес+}}) = -469.513 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{бес-}}) &= v_x(\tau_{\text{бес+}}) = 0.289258 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{\text{бес-}}) &= v_y(\tau_{\text{бес+}}) = -2.659780 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{бес-}}) &= v_z(\tau_{\text{бес+}}) = -3.316344 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{бес-}}) &= -3.871211714 \cdot 10^{-4}, & p_y(\tau_{\text{бес-}}) &= -1.463431373 \cdot 10^{-5}, \\
p_z(\tau_{\text{бес-}}) &= -1.609524515 \cdot 10^{-5}, & p_{vx}(\tau_{\text{бес-}}) &= 0.055012397, \\
p_{vy}(\tau_{\text{бес-}}) &= -0.712461811, & p_{vz}(\tau_{\text{бес-}}) &= -0.782206422, \\
p_x(\tau_{\text{бес+}}) &= -5.917150104 \cdot 10^{-5}, & p_y(\tau_{\text{бес+}}) &= 2.025218246 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{\text{бес+}}) &= 4.709614039 \cdot 10^{-6}, & p_{vx}(\tau_{\text{бес+}}) &= 0.008900558, \\
p_{vy}(\tau_{\text{бес+}}) &= 0.093083723, & p_{vz}(\tau_{\text{бес+}}) &= 0.222191055, \\
m(\tau_{\text{бес-}}) &= m(\tau_{\text{бес+}}) = 0.6374922, & p_m(\tau_{\text{бес-}}) &= p_m(\tau_{\text{бес+}}) = 0.005704298.
\end{aligned}$$

Продолжительность третьего пассивного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{пасс}} = 4571.261$ с. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_3^{\text{пасс}} = 10554.010$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 5527.159 \text{ км}, & y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -2642.844 \text{ км}, \\
z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -3294.703 \text{ км}, & v_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 4.053664 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 4.825758 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 6.017447 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 6.138211555 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -3.890945318 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -4.543891533 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vx}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vx}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.418904781, \\
p_{vy}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vy}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.629032699, & p_{vz}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vz}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.742503691, \\
m(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= m(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.6374922, & p_m(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_m(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.005704298.
\end{aligned}$$

Продолжительность четвертого активного участка составляет $\Delta\tau_4^{\text{акт}} = 913.392$ с. КА переходит на целевую орбиту с апогеем $r_{a4} = 226135.045$ км, перигеем $r_{п4} = 6677.638$ км и углом наклона $i_4 = 0.8905574$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_4^{\text{акт}} = 11467.402$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 5937.659 \text{ км}, & y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2751.423 \text{ км}, \\
z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 3401.831 \text{ км}, & v_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -3.287827 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6.093701 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 7.531278 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6.252708157 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2.993760569 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 3.495622146 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vx}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vx}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -0.348323103, \\
p_{vy}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vy}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.662986681, & p_{vz}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vz}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.782229146, \\
m(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= m(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.3765230, & p_m(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_m(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.009871935.
\end{aligned}$$

На целевой орбите спутник отделяется от ЦБ. Масса спутника на целевой орбите (полезная масса) $m_{п} = 0.3542811$. В момент $\tau_{ц}$ происходит последнее включение двигателя для понижения высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ до условной границы атмосферы. Для удобства при расчетах скачок массы (после отстыковки спутника) учитывается в момент последнего включения двигателя. Продолжительность четвертого пассивного участка (пассивного полета ЦБ на целевой орбите) $\Delta\tau_4^{\text{пасс}} = \Delta\tau_{ц} = 197205.174$ с. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{ц} = 208672.576$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{\text{ц-}}) &= x(\tau_{\text{ц+}}) = -226135.042 \text{ км}, & y(\tau_{\text{ц-}}) &= y(\tau_{\text{ц+}}) = 32.403 \text{ км}, \\
z(\tau_{\text{ц-}}) &= z(\tau_{\text{ц+}}) = 0.013 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{ц-}}) &= v_x(\tau_{\text{ц+}}) = -2.906133 \cdot 10^{-5} \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{\text{ц-}}) &= v_y(\tau_{\text{ц+}}) = -0.200007 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{ц-}}) &= v_z(\tau_{\text{ц+}}) = -0.247210 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{ц-}}) &= -8.796438670 \cdot 10^{-7}, & p_y(\tau_{\text{ц-}}) &= 1.220111297 \cdot 10^{-10}, \\
p_z(\tau_{\text{ц-}}) &= -1.868401079 \cdot 10^{-10}, & p_{vx}(\tau_{\text{ц-}}) &= -1.118196267 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vy}(\tau_{\text{ц-}}) &= -0.738171544, & p_{vz}(\tau_{\text{ц-}}) &= 0.503062601, \\
p_x(\tau_{\text{ц+}}) &= 8.740512367 \cdot 10^{-8}, & p_y(\tau_{\text{ц+}}) &= -1.259356477 \cdot 10^{-11}, \\
p_z(\tau_{\text{ц+}}) &= -9.045163419 \cdot 10^{-14}, & p_{vx}(\tau_{\text{ц+}}) &= 5.768327813 \cdot 10^{-6}, \\
p_{vy}(\tau_{\text{ц+}}) &= 0.040236649, & p_{vz}(\tau_{\text{ц+}}) &= 0.049732796, \\
m(\tau_{\text{ц-}}) &= 0.3765230, & m(\tau_{\text{ц+}}) &= 0.0222419, \\
p_m(\tau_{\text{ц-}}) &= p_m(\tau_{\text{ц+}}) = 0.009871935.
\end{aligned}$$

Продолжительность пятого (последнего) активного участка составляет $\Delta\tau_5^{\text{акт}} = \Delta T = 0.105 \text{ с}$ — ЦБ переводится на орбиту, касающуюся границы атмосферы с апогеем $r_{a5} = 226135.045 \text{ км}$, перигеем $r_{п5} = 6478.155 \text{ км}$ и углом наклона $i_5 = 0.8905574 \text{ рад}$. Фазовые и сопряженные переменные в момент $T = 208672.682 \text{ с}$ выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(T) &= -226135.042 \text{ км}, & y(T) &= 32.382 \text{ км}, \\
z(T) &= -0.013 \text{ км}, & v_x(T) &= -2.782049 \cdot 10^{-5} \text{ км/с}, \\
v_y(T) &= -0.197081 \text{ км/с}, & v_z(T) &= -0.243594 \text{ км/с}, \\
p_x(T) &= 8.740512369 \cdot 10^{-8}, & p_y(T) &= -1.244734828 \cdot 10^{-11}, \\
p_z(T) &= 9.027303368 \cdot 10^{-14}, & p_{vx}(T) &= 5.759113216 \cdot 10^{-6}, \\
p_{vy}(T) &= 0.040236649, & p_{vz}(T) &= 0.049732796, \\
m(T) &= 0.0222118, & p_m(T) &= 0.009885322.
\end{aligned}$$

Величины импульсов довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО:

$$\Delta v_{\text{дов1}} = 0.029833 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{дов2}} = 0.491115 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{дов3}} = 0.979052 \text{ км/с}.$$

Д. Экстремаль Понтрягина в первой постановке задачи с большой ограниченной тягой с учетом второй зональной гармоники

В приложении к разделу 5.5 приводится экстремаль Понтрягина в первой постановке задачи с большой ограниченной тягой с учетом влияния второй зональной гармоники при $n = 0.1$, $\Delta v^* = 1.5 \text{ км/с}$.

Функциональные множители Лагранжа (сопряженные переменные) могут

быть получены численным интегрированием уравнений (5.1), (3.30), (5.16). Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 с. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам.

Представленная экстремаль может использоваться при отработке методики проверки локальной оптимальности 2-го порядка или, например, условий оптимальности на основе принципа Кротова.

При необходимости уточнение представленных значений может быть произведено классическим методом Ньютона при использовании вычислительной схемы из раздела 5.4.

Числовые множители Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{R0} &= 1.421727887 \cdot 10^{-4}, & \lambda_{C0} &= 5.482684067 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{vx0} &= 0.415226919, & \lambda_{vy0} &= 0.586267328, \\
 \lambda_{vz0} &= 0.695612842, & \lambda_{m0} &= 0.003463865, \\
 \lambda_{xc61} &= -3.845369283 \cdot 10^{-4}, & \lambda_{yc61} &= 1.681792155 \cdot 10^{-6}, \\
 \lambda_{zc61} &= 4.635331528 \cdot 10^{-7}, & \lambda_{vxc61} &= -0.010233163, \\
 \lambda_{vyc61} &= -0.719439969, & \lambda_{vzc61} &= -0.788813868, \\
 \lambda_{x6ез} &= -5.784281466 \cdot 10^{-5}, & \lambda_{y6ез} &= 1.905080887 \cdot 10^{-6}, \\
 \lambda_{z6ез} &= 3.543409563 \cdot 10^{-6}, & \lambda_{vx6ез} &= 0.007549055, \\
 \lambda_{vy6ез} &= 0.094888426, & \lambda_{vz6ез} &= 0.226711348, \\
 \lambda_{xц} &= 8.713782604 \cdot 10^{-8}, & \lambda_{yц} &= -3.887907983 \cdot 10^{-10}, \\
 \lambda_{zц} &= -2.400436379 \cdot 10^{-12}, & \lambda_{vxcц} &= 1.782606257 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{vyц} &= 0.040125274, & \lambda_{vzц} &= 0.049600654, \\
 \lambda_{\tau c61} &= 0, & \lambda_{c61} &= 4.697176070 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{m\tau} &= 0.005398069, & \lambda_{\tau} &= 0, \\
 \lambda_{\tau c62} &= 0, & \lambda_{\tau 6ез} &= -2.855684898 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{6ез} &= -0.000285568, & \lambda_{\tau ц} &= 0, \\
 \lambda_{ц} &= -0.021886744, & \lambda_{дов} &= 1.144473207, \\
 \lambda_T &= 1.499683744 \cdot 10^{-6}, & \lambda_{mT} &= -0.009220798, \\
 & & \lambda_0 &= 0.019166141.
 \end{aligned}$$

Включение двигателя КА происходит в начальный момент времени $t = 0$ при угловом положении на опорной орбите $\varphi_0 = -0.723883254$ рад:

$$x(0) = 4928.614 \text{ км}, \quad y(0) = -2708.172 \text{ км},$$

$$\begin{aligned}
z(0) &= -3412.725 \text{ км}, & v_x(0) &= 5.155508 \text{ км/с}, \\
v_y(0) &= 3.625400 \text{ км/с}, & v_z(0) &= 4.568578 \text{ км/с}, \\
p_x(0) &= 3.253834818 \cdot 10^{-4}, & p_y(0) &= -4.866149138 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(0) &= -5.680473396 \cdot 10^{-4}, & p_{vx}(0) &= 0.415226919, \\
p_{vy}(0) &= 0.586267328, & p_{vz}(0) &= 0.695612842, \\
m(0) &= 1, & p_m(0) &= 0.003463865.
\end{aligned}$$

Продолжительность первого активного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{акт}} = 1141.372$ с. КА переходит на мгновенную эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a1} = 14163.653$ км, перигеем $r_{п1} = 6674.375$ км и углом наклона $i_1 = 0.8958919$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_1^{\text{акт}} = 1141.372$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5503.277 \text{ км}, & y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 2808.456 \text{ км}, \\
z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3512.006 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -4.176882 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 4.696293 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5.866415 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3.642259605 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3.771904961 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 4.421397092 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -0.343300402, \\
p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.638062192, & p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.755087972, \\
m(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= m(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.6738938, & p_m(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_m(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.005330051.
\end{aligned}$$

Продолжительность первого пассивного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{пасс}} = 4726.889$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на мгновенной эллиптической орбите с апогеем $r_{a2} = 14158.042$ км, перигеем $r_{п2} = 6676.113$ км и углом наклона $i_2 = 0.8959119$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_1^{\text{пасс}} = 5868.261$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -14155.946 \text{ км}, & y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 158.451 \text{ км}, \\
z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 164.927 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -0.087175 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2.653427 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -3.316007 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 1.435523155 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -3.498935226 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -5.232771489 \cdot 10^{-6}, \\
p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.009610822,
\end{aligned}$$

$$p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.599786855, \quad p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.857496199,$$

$$m(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = m(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.6738938, \quad p_m(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) = p_m(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.005330051.$$

Продолжительность второго активного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}} = 29.718$ с. КА переходит на мгновенную эллиптическую орбиту с апогеем $r_{\text{а3}} = 14158.042$ км, перигеем $r_{\text{п3}} = 6478.155$ км и углом наклона $i_3 = 0.8952447$ рад — на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}} = 5897.979$ с выключения двигателя:

$$x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -14157.653 \text{ км}, \quad y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = 79.958 \text{ км},$$

$$z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = 66.902 \text{ км}, \quad v_x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = v_x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -0.027753 \text{ км/с},$$

$$v_y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = v_y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -2.628981 \text{ км/с}, \quad v_z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = v_z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -3.280829 \text{ км/с},$$

$$p_x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = 1.436410992 \cdot 10^{-4}, \quad p_y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = -9.949034343 \cdot 10^{-7},$$

$$p_z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = -1.650162302 \cdot 10^{-6}, \quad p_{vx}(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = 0.005343214,$$

$$p_{vy}(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = 0.599853631, \quad p_{vz}(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = 0.857598476,$$

$$p_x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -3.845369283 \cdot 10^{-4}, \quad p_y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = 1.681792155 \cdot 10^{-6},$$

$$p_z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = 4.635331528 \cdot 10^{-7}, \quad p_{vx}(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -0.010233163,$$

$$p_{vy}(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -0.719439969, \quad p_{vz}(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -0.788813868,$$

$$m(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = 0.6654029, \quad p_m(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) = 0.005398069.$$

Продолжительность второго пассивного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{пасс}} = 120$ с — на этом участке происходит отстыковка ДТБ от КА. В конце пассивного участка КА оказывается на мгновенной эллиптической орбите с апогеем $r_{\text{а4}} = 14158.047$ км, перигеем $r_{\text{п4}} = 6478.149$ км и углом наклона $i_4 = 0.8952445$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}} = 6017.979$ с включения двигателя:

$$x(\tau_{\text{сб2-}}^{\text{ДТБ}}) = x(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = -14146.660 \text{ км}, \quad y(\tau_{\text{сб2-}}^{\text{ДТБ}}) = y(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = -235.494 \text{ км},$$

$$z(\tau_{\text{сб2-}}^{\text{ДТБ}}) = z(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = -326.732 \text{ км}, \quad v_x(\tau_{\text{сб2-}}^{\text{ДТБ}}) = v_x(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = 0.210991 \text{ км/с},$$

$$v_y(\tau_{\text{сб2-}}^{\text{ДТБ}}) = v_y(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = -2.627668 \text{ км/с}, \quad v_z(\tau_{\text{сб2-}}^{\text{ДТБ}}) = v_z(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = -3.278635 \text{ км/с},$$

$$p_x(\tau_{\text{сб2-}}^{\text{ДТБ}}) = p_x(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = -3.844032375 \cdot 10^{-4},$$

$$p_y(\tau_{\text{сб2-}}^{\text{ДТБ}}) = p_y(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = -1.045179124 \cdot 10^{-5},$$

$$p_z(\tau_{\text{сб2-}}^{\text{ДТБ}}) = p_z(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = -1.284808642 \cdot 10^{-5},$$

$$p_{vx}(\tau_{\text{сб2-}}^{\text{ДТБ}}) = p_{vx}(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = 0.035906906,$$

$$p_{vy}(\tau_{\text{сб2-}}^{\text{ДТБ}}) = p_{vy}(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = -0.718913867, \quad p_{vz}(\tau_{\text{сб2-}}^{\text{ДТБ}}) = p_{vz}(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = -0.788070889,$$

$$m(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = 0.6386351, \quad p_m(\tau_{\text{сб2+}}^{\text{ДТБ}}) = 0.005735876.$$

Продолжительность третьего активного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{безд}} = 14.385$ с. КА переходит на мгновенную эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a5} = 14158.180$ км, перигеем $r_{п5} = 6578.155$ км и углом наклона $i_5 = 0.8949099$ рад — «безопасная» орбита. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{безд}} = 6032.365$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{\text{безд}}) &= x(\tau_{\text{безд}+}) = -14143.413 \text{ км}, & y(\tau_{\text{безд}}) &= y(\tau_{\text{безд}+}) = -273.398 \text{ км}, \\
z(\tau_{\text{безд}}) &= z(\tau_{\text{безд}+}) = -374.009 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{безд}}) &= v_x(\tau_{\text{безд}+}) = 0.240422 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{\text{безд}}) &= v_y(\tau_{\text{безд}+}) = -2.642079 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{безд}}) &= v_z(\tau_{\text{безд}+}) = -3.294287 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{безд}}) &= -3.843626055 \cdot 10^{-4}, & p_y(\tau_{\text{безд}}) &= -1.190729070 \cdot 10^{-5}, \\
p_z(\tau_{\text{безд}}) &= -1.444485598 \cdot 10^{-5}, & p_{vx}(\tau_{\text{безд}}) &= 0.041436401, \\
p_{vy}(\tau_{\text{безд}}) &= -0.718753046, & p_{vz}(\tau_{\text{безд}}) &= -0.787874580, \\
p_x(\tau_{\text{безд}+}) &= -5.784281466 \cdot 10^{-5}, & p_y(\tau_{\text{безд}+}) &= 1.905080887 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{\text{безд}+}) &= 3.543409563 \cdot 10^{-6}, & p_{vx}(\tau_{\text{безд}+}) &= 0.007549055, \\
p_{vy}(\tau_{\text{безд}+}) &= 0.094888426, & p_{vz}(\tau_{\text{безд}+}) &= 0.226711348, \\
m(\tau_{\text{безд}}) &= m(\tau_{\text{безд}+}) = 0.6345250, & p_m(\tau_{\text{безд}}) &= p_m(\tau_{\text{безд}+}) = 0.005773032.
\end{aligned}$$

Продолжительность третьего пассивного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{пасс}} = 4634.438$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на мгновенной эллиптической орбите с апогеем $r_{a6} = 14166.458$ км, перигеем $r_{п6} = 6576.455$ км и углом наклона $i_6 = 0.8949134$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_3^{\text{пасс}} = 10666.802$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 5542.194 \text{ км}, & y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -2623.822 \text{ км}, \\
z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -3248.418 \text{ км}, & v_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 4.033683 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 4.844667 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 6.058871 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 6.244552187 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -3.915076110 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -4.551982156 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vx}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vx}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.417872915, \\
p_{vy}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vy}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.633616165, & p_{vz}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vz}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.750282478, \\
m(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= m(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.6345250, & p_m(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_m(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.005773032.
\end{aligned}$$

Продолжительность четвертого активного участка составляет $\Delta\tau_4^{\text{акт}} = 903.790$ с. КА переходит на целевую орбиту (мгновенную эллиптическую) с апогеем $r_{a7} = 227298.789$ км, перигеем $r_{п7} = 6673.247$ км и углом наклона $i_7 =$

0.8907271 рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_4^{\text{акт}} = 11570.593$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 5946.386 \text{ км}, & y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2722.933 \text{ км}, \\
z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 3393.999 \text{ км}, & v_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -3.261802 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6.108961 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 7.538321 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6.324584814 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2.980239371 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 3.526981368 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vx}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vx}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -0.348872800, \\
p_{vy}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vy}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.668732581, & p_{vz}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vz}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.787361933, \\
m(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= m(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.3762992, & p_m(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_m(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.009945343.
\end{aligned}$$

На целевой орбите спутник отделяется от ЦБ. Масса спутника на целевой орбите (полезная масса) $m_{\text{п}} = 0.3542810$. В момент $\tau_{\text{ц}}$ происходит последнее включение двигателя для понижения высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ до условной границы атмосферы. Для удобства при расчетах скачок массы (после отстыковки спутника) учитывается в момент последнего включения двигателя. Продолжительность четвертого пассивного участка $\Delta\tau_4^{\text{пасс}} = \Delta\tau_{\text{ц}} = 197249.118$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на мгновенной эллиптической орбите с апогеем $r_{\text{а8}} = 226175.430$ км, перигеем $r_{\text{п8}} = 6672.180$ км и углом наклона $i_8 = 0.8906070$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{ц}} = 208819.711$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{\text{ц}-}) &= x(\tau_{\text{ц}+}) = -226173.200 \text{ км}, & y(\tau_{\text{ц}-}) &= y(\tau_{\text{ц}+}) = 1004.378 \text{ км}, \\
z(\tau_{\text{ц}-}) &= z(\tau_{\text{ц}+}) = 0.347 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{ц}-}) &= v_x(\tau_{\text{ц}+}) = -8.983134 \cdot 10^{-4} \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{\text{ц}-}) &= v_y(\tau_{\text{ц}+}) = -0.199878 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{ц}-}) &= v_z(\tau_{\text{ц}+}) = -0.247078 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{ц}-}) &= -8.853368270 \cdot 10^{-7}, & p_y(\tau_{\text{ц}-}) &= 2.885549009 \cdot 10^{-9}, \\
p_z(\tau_{\text{ц}-}) &= -3.772226544 \cdot 10^{-8}, & p_{vx}(\tau_{\text{ц}-}) &= -0.004523832, \\
p_{vy}(\tau_{\text{ц}-}) &= -0.743208982, & p_{vz}(\tau_{\text{ц}-}) &= 0.505501270, \\
p_x(\tau_{\text{ц}+}) &= 8.713782604 \cdot 10^{-8}, & p_y(\tau_{\text{ц}+}) &= -3.887907983 \cdot 10^{-10}, \\
p_z(\tau_{\text{ц}+}) &= -2.400436379 \cdot 10^{-12}, & p_{vx}(\tau_{\text{ц}+}) &= 1.782606257 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vy}(\tau_{\text{ц}+}) &= 0.040125274, & p_{vz}(\tau_{\text{ц}+}) &= 0.049600654, \\
m(\tau_{\text{ц}-}) &= 0.3762992, & m(\tau_{\text{ц}+}) &= 0.0220182, \\
p_m(\tau_{\text{ц}-}) &= p_m(\tau_{\text{ц}+}) = 0.009945343.
\end{aligned}$$

Продолжительность пятого (последнего) активного участка составляет $\Delta\tau_5^{\text{акт}} = \Delta T = 0.102$ с — ЦБ переводится на мгновенную эллиптическую орбиту, касающуюся границы атмосферы с апогеем $r_{a9} = 226175.430$ км, перигеем $r_{п9} = 6478.155$ км и углом наклона $i_9 = 0.8906070$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $T = 208819.812$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned} x(T) &= -226173.200 \text{ км}, & y(T) &= 1004.358 \text{ км}, \\ z(T) &= 0.322 \text{ км}, & v_x(T) &= -8.848811 \cdot 10^{-4} \text{ км/с}, \\ v_y(T) &= -0.197032 \text{ км/с}, & v_z(T) &= -0.243561 \text{ км/с}, \\ p_x(T) &= 8.713782666 \cdot 10^{-8}, & p_y(T) &= -3.886504671 \cdot 10^{-10}, \\ p_z(T) &= -2.226966226 \cdot 10^{-12}, & p_{vx}(T) &= 1.782517799 \cdot 10^{-4}, \\ p_{vy}(T) &= 0.040125274, & p_{vz}(T) &= 0.049600654, \\ m(T) &= 0.0219892, & p_m(T) &= 0.009958462. \end{aligned}$$

Величины импульсов довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО:

$$\Delta v_{\text{дов1}} = 0.0297937 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{дов2}} = 0.4911539 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{дов3}} = 0.9790524 \text{ км/с}.$$

Е. Экстремаль Понтрягина во второй постановке задачи с большой ограниченной тягой без учета второй зональной гармоники

В приложении к разделу 5.5 приводится экстремаль Понтрягина во второй постановке задачи с большой ограниченной тягой без учета влияния второй зональной гармоники при $n = 0.1$, $\Delta v^* = 1.5$ км/с, $M(0) = 22500$ кг, сухая масса ДТБ $m^{\text{ДТБ}} = 0.052$ (соответствует массе 1170 кг), сухая масса ЦБ $m^{\text{ЦБ}} = 0.0635556$ (соответствует массе 1430 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ДТБ, $m_{\text{топл.}}^{\text{ДТБ}} = 0.6488889$ (соответствует массе 14600 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ЦБ $m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}} = 0.2266667$ (соответствует массе 5100 кг).

Функциональные множители Лагранжа (сопряженные переменные) могут быть получены численным интегрированием уравнений (5.1), (3.30), (5.16). Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 с. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам.

Представленная экстремаль может использоваться при отработке методики проверки локальной оптимальности 2-го порядка или, например, условий оптимальности на основе принципа Кротова.

При необходимости уточнение представленных значений может быть произведено классическим методом Ньютона при использовании вычислительной схемы из раздела 5.4.

Числовые множители Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{R0} &= 1.436743567 \cdot 10^{-4}, & \lambda_{C0} &= 5.960549281 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{vx0} &= 0.449497297, & \lambda_{vy0} &= 0.575794605, \\
 \lambda_{vz0} &= 0.682944180, & \lambda_{m0} &= 0.003432328, \\
 \lambda_{xc61} &= -3.399712303 \cdot 10^{-4}, & \lambda_{yc61} &= -5.715333053 \cdot 10^{-7}, \\
 \lambda_{zc61} &= -6.631455256 \cdot 10^{-7}, & \lambda_{vxc61} &= 0.002399917, \\
 \lambda_{vyc61} &= -0.746508235, & \lambda_{vzc61} &= -0.812323082, \\
 \lambda_{x6ез} &= -4.193663873 \cdot 10^{-5}, & \lambda_{y6ез} &= 1.892263836 \cdot 10^{-6}, \\
 \lambda_{z6ез} &= 4.116542352 \cdot 10^{-6}, & \lambda_{vx6ез} &= 0.006146945, \\
 \lambda_{vy6ез} &= 0.122312621, & \lambda_{vz6ез} &= 0.269695043, \\
 \lambda_{xц} &= 2.703792975 \cdot 10^{-7}, & \lambda_{yц} &= -4.126764370 \cdot 10^{-11}, \\
 \lambda_{zц} &= -6.715609630 \cdot 10^{-13}, & \lambda_{vxц} &= 1.879775738 \cdot 10^{-5}, \\
 \lambda_{vyц} &= 0.124576252, & \lambda_{vzц} &= 0.153931042, \\
 \lambda_{\tau c61} &= 0, & \lambda_{c61} &= 4.549626942 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{m\tau1} &= 0.005636177, & \lambda_{m\tau2} &= 0, \\
 \lambda_{\tau} &= 0, & \lambda_{\tau c62} &= 0, \\
 \lambda_{\tau 6ез} &= 0, & \lambda_{6ез} &= -2.899498452 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{\tau ц} &= 0, & \lambda_{ц} &= -1.153809791 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{дов} &= 1.160163043, & \lambda_{T} &= 4.654111658 \cdot 10^{-6}, \\
 \lambda_{mT1} &= -0.009874571, & \lambda_{mT2} &= 8.198142760 \cdot 10^{-4}, \\
 & & \lambda_0 &= 0.009862407.
 \end{aligned}$$

Включение двигателя КА происходит в начальный момент времени $t = 0$ при угловом положении на опорной орбите $\varphi_0 = -0.771672567$ рад:

$$\begin{aligned}
 x(0) &= 4714.862 \text{ км}, & y(0) &= -2851.435 \text{ км}, \\
 z(0) &= -3593.260 \text{ км}, & v_x(0) &= 5.428237 \text{ км/с}, \\
 v_y(0) &= 3.468168 \text{ км/с}, & v_z(0) &= 4.370441 \text{ км/с}, \\
 p_x(0) &= 2.982102572 \cdot 10^{-4}, & p_y(0) &= -5.126225455 \cdot 10^{-4}, \\
 p_z(0) &= -5.968845830 \cdot 10^{-4}, & p_{vx}(0) &= 0.449497297, \\
 p_{vy}(0) &= 0.575794605, & p_{vz}(0) &= 0.682944180, \\
 m(0) &= 1, & p_m(0) &= 0.003432328.
 \end{aligned}$$

Продолжительность первого активного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{акт}} = 1234.561$ с. КА переходит на эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a1} = 15498.929$ км, перигеем $r_{п1} = 6702.903$ км и углом наклона $i_1 = 0.8955081$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_1^{\text{акт}} = 1234.561$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5318.072 \text{ км}, & y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3081.300 \text{ км}, \\
z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3847.993 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -4.436835 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 4.608606 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5.753726 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3.214107134 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3.882913896 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 4.514030706 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -0.374768994, \\
p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.631477555, & p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.748309653, \\
m(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= m(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.6472684, & p_m(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_m(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.005559546.
\end{aligned}$$

Продолжительность первого пассивного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{пасс}} = 5216.073$ с. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_1^{\text{пасс}} = 6450.634$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -15498.469 \text{ км}, & y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 58.745 \text{ км}, \\
z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 71.348 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -0.039064 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2.463329 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -3.075714 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 1.198202289 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -1.519388295 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2.176230213 \cdot 10^{-6}, \\
p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.002761705, \\
p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.596768273, & p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.861999443, \\
m(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= m(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.6472684, & p_m(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_m(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.005559546.
\end{aligned}$$

Продолжительность второго активного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{акт}} = \Delta\tau_{с61}^{\text{ДТБ}} = 30.801$ с. КА переходит на эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a2} = 15498.928$ км, перигеем $r_{п2} = 6478.155$ км и углом наклона $i_2 = 0.8946672$ рад — на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{с61}^{\text{ДТБ}} = 6481.435$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{с61-}^{\text{ДТБ}}) &= x(\tau_{с61+}^{\text{ДТБ}}) = -15498.884 \text{ км}, & y(\tau_{с61-}^{\text{ДТБ}}) &= y(\tau_{с61+}^{\text{ДТБ}}) = -16.719 \text{ км}, \\
z(\tau_{с61-}^{\text{ДТБ}}) &= z(\tau_{с61+}^{\text{ДТБ}}) = -22.795 \text{ км}, & v_x(\tau_{с61-}^{\text{ДТБ}}) &= v_x(\tau_{с61+}^{\text{ДТБ}}) = 0.012086 \text{ км/с},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_y(\tau_{c61-}^{ДТБ}) = v_y(\tau_{c61+}^{ДТБ}) &= -2.436653 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{c61-}^{ДТБ}) = v_z(\tau_{c61+}^{ДТБ}) &= -3.037162 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{c61-}^{ДТБ}) &= 1.198354673 \cdot 10^{-4}, & p_y(\tau_{c61-}^{ДТБ}) &= 4.485343119 \cdot 10^{-7}, \\
p_z(\tau_{c61-}^{ДТБ}) &= 6.663347583 \cdot 10^{-7}, & p_{vx}(\tau_{c61-}^{ДТБ}) &= -9.292365690 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vy}(\tau_{c61-}^{ДТБ}) &= 0.596784765, & p_{vz}(\tau_{c61-}^{ДТБ}) &= 0.862022696, \\
p_x(\tau_{c61+}^{ДТБ}) &= -3.399712303 \cdot 10^{-4}, & p_y(\tau_{c61+}^{ДТБ}) &= -5.715333053 \cdot 10^{-7}, \\
p_z(\tau_{c61+}^{ДТБ}) &= -6.631455256 \cdot 10^{-7}, & p_{vx}(\tau_{c61+}^{ДТБ}) &= 0.002399917, \\
p_{vy}(\tau_{c61+}^{ДТБ}) &= -0.746508235, & p_{vz}(\tau_{c61+}^{ДТБ}) &= -0.812323082, \\
m(\tau_{c61-}^{ДТБ}) &= 0.6384681, & p_m(\tau_{c61-}^{ДТБ}) &= 0.005636177.
\end{aligned}$$

Продолжительность второго пассивного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{пасс}} = 120$ с — на этом участке происходит отстыковка ДТБ от КА. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{c62}^{ДТБ} = 6601.435$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{c62-}^{ДТБ}) = x(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= -15485.486 \text{ км}, & y(\tau_{c62-}^{ДТБ}) = y(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= -309.029 \text{ км}, \\
z(\tau_{c62-}^{ДТБ}) = z(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= -387.143 \text{ км}, & v_x(\tau_{c62-}^{ДТБ}) = v_x(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= 0.211221 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{c62-}^{ДТБ}) = v_y(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= -2.434559 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{c62-}^{ДТБ}) = v_z(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= -3.034527 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{c62-}^{ДТБ}) = p_x(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= -3.398403350 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{c62-}^{ДТБ}) = p_y(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= -1.016510282 \cdot 10^{-5}, \\
p_z(\tau_{c62-}^{ДТБ}) = p_z(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= -1.110285016 \cdot 10^{-5}, \\
p_{vx}(\tau_{c62-}^{ДТБ}) = p_{vx}(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= 0.043190922, \\
p_{vy}(\tau_{c62-}^{ДТБ}) = p_{vy}(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= -0.745864117, & p_{vz}(\tau_{c62-}^{ДТБ}) = p_{vz}(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= -0.811617220, \\
m(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= 0.5864681, & p_m(\tau_{c62+}^{ДТБ}) &= 0.006455991.
\end{aligned}$$

Продолжительность третьего активного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{без}} = 12.581$ с. КА переходит на эллиптическую орбиту с апогеем $r_{\text{аз}} = 15499.046$ км, перигеем $r_{\text{пз}} = 6578.155$ км и углом наклона $i_3 = 0.8943066$ рад — «безопасная» орбита. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{без}} = 6614.016$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{\text{без-}}) = x(\tau_{\text{без+}}) &= -15482.692 \text{ км}, & y(\tau_{\text{без-}}) = y(\tau_{\text{без+}}) &= -339.745 \text{ км}, \\
z(\tau_{\text{без-}}) = z(\tau_{\text{без+}}) &= -425.414 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{без-}}) = v_x(\tau_{\text{без+}}) &= 0.232969 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{\text{без-}}) = v_y(\tau_{\text{без+}}) &= -2.448388 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{без-}}) = v_z(\tau_{\text{без+}}) &= -3.049503 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{без-}}) &= -3.398132020 \cdot 10^{-4}, & p_y(\tau_{\text{без-}}) &= -1.117154843 \cdot 10^{-5}, \\
p_z(\tau_{\text{без-}}) &= -1.219813768 \cdot 10^{-5}, & p_{vx}(\tau_{\text{без-}}) &= 0.047466294, \\
p_{vy}(\tau_{\text{без-}}) &= -0.745729899, & p_{vz}(\tau_{\text{без-}}) &= -0.811470645, \\
p_x(\tau_{\text{без+}}) &= -4.193663873 \cdot 10^{-5}, & p_y(\tau_{\text{без+}}) &= 1.892263836 \cdot 10^{-6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_z(\tau_{\bar{6}e3+}) &= 4.116542352 \cdot 10^{-6}, & p_{vx}(\tau_{\bar{6}e3+}) &= 0.006146945, \\
p_{vy}(\tau_{\bar{6}e3+}) &= 0.122312621, & p_{vz}(\tau_{\bar{6}e3+}) &= 0.269695043, \\
m(\tau_{\bar{6}e3-}) &= m(\tau_{\bar{6}e3+}) = 0.5828735, & p_m(\tau_{\bar{6}e3-}) &= p_m(\tau_{\bar{6}e3+}) = 0.006495806.
\end{aligned}$$

Продолжительность третьего пассивного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{пасс}} = 5211.247$ с. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_3^{\text{пасс}} = 11825.263$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 5806.314 \text{ км}, & y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -2321.308 \text{ км}, \\
z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -2890.411 \text{ км}, & v_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 3.537319 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 5.128138 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 6.387757 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 7.012479017 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -3.586575744 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -4.198052957 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vx}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vx}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.374123346, \\
p_{vy}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vy}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.670909947, & p_{vz}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vz}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.791683209, \\
m(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= m(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.5828735, & p_m(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_m(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.006495806.
\end{aligned}$$

Продолжительность четвертого активного участка составляет $\Delta\tau_4^{\text{акт}} = 780.499$ с. КА переходит на целевую орбиту с апогеем $r_{a4} = 226213.803$ км, перигеем $r_{п4} = 6645.520$ км и углом наклона $i_4 = 0.8904109$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_4^{\text{акт}} = 12605.762$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6085.698 \text{ км}, & y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2388.894 \text{ км}, \\
z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2952.938 \text{ км}, & v_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -2.941317 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6.261342 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 7.736199 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 7.067128158 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2.874142826 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 3.365068216 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vx}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vx}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -0.316617982, \\
p_{vy}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vy}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.694691617, & p_{vz}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vz}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.819503428, \\
m(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= m(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.3598738, & p_m(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_m(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.010682221.
\end{aligned}$$

На целевой орбите спутник отделяется от ЦБ. Масса спутника на целевой орбите (полезная масса) $m_{\Pi} = 0.2962459$ (6665.533 кг). В момент τ_{Π} происходит последнее включение двигателя для понижения высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ до условной границы атмосферы. Для удобства при расчетах скачок массы (после отстыковки спутника) учитывается в момент последнего включения

двигателя. Продолжительность четвертого пассивного участка (пассивного полета ЦБ на целевой орбите) $\Delta\tau_4^{\text{пасс}} = \Delta\tau_{\text{ц}} = 197324.095$ с. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{ц}} = 209929.857$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
 x(\tau_{\text{ц-}}) &= x(\tau_{\text{ц+}}) = -226213.801 \text{ км}, & y(\tau_{\text{ц-}}) &= y(\tau_{\text{ц+}}) = 34.097 \text{ км}, \\
 z(\tau_{\text{ц-}}) &= z(\tau_{\text{ц+}}) = 0.031 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{ц-}}) &= v_x(\tau_{\text{ц+}}) = -3.103631 \cdot 10^{-5} \text{ км/с}, \\
 v_y(\tau_{\text{ц-}}) &= v_y(\tau_{\text{ц+}}) = -0.199507 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{ц-}}) &= v_z(\tau_{\text{ц+}}) = -0.246518 \text{ км/с}, \\
 p_x(\tau_{\text{ц-}}) &= -7.149203705 \cdot 10^{-7}, & p_y(\tau_{\text{ц-}}) &= 1.049288716 \cdot 10^{-10}, \\
 p_z(\tau_{\text{ц-}}) &= -2.013992772 \cdot 10^{-10}, & p_{vx}(\tau_{\text{ц-}}) &= -1.074458412 \cdot 10^{-4}, \\
 p_{vy}(\tau_{\text{ц-}}) &= -0.670043157, & p_{vz}(\tau_{\text{ц-}}) &= 0.615225519, \\
 p_x(\tau_{\text{ц+}}) &= 2.703792975 \cdot 10^{-7}, & p_y(\tau_{\text{ц+}}) &= -4.126764370 \cdot 10^{-11}, \\
 p_z(\tau_{\text{ц+}}) &= -6.715609630 \cdot 10^{-13}, & p_{vx}(\tau_{\text{ц+}}) &= 1.879775738 \cdot 10^{-5}, \\
 p_{vy}(\tau_{\text{ц+}}) &= 0.124576252, & p_{vz}(\tau_{\text{ц+}}) &= 0.153931042, \\
 m(\tau_{\text{ц-}}) &= 0.3598738, & m(\tau_{\text{ц+}}) &= 0.0636279, \\
 p_m(\tau_{\text{ц-}}) &= p_m(\tau_{\text{ц+}}) = 0.010682221.
 \end{aligned}$$

Продолжительность пятого (последнего) активного участка составляет $\Delta\tau_5^{\text{акт}} = \Delta T = 0.253$ с — ЦБ переводится на орбиту, касающуюся границы атмосферы с апогеем $r_{a5} = 226213.803$ км, перигеем $r_{п5} = 6478.155$ км и углом наклона $i_5 = 0.8904109$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $T = 209930.110$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
 x(T) &= -226213.801 \text{ км}, & y(T) &= 34.047 \text{ км}, \\
 z(T) &= -0.031 \text{ км}, & v_x(T) &= -2.869307e - 005 \text{ км/с}, \\
 v_y(T) &= -0.197049 \text{ км/с}, & v_z(T) &= -0.243481 \text{ км/с}, \\
 p_x(T) &= 2.703792976 \cdot 10^{-7}, & p_y(T) &= -4.018105410 \cdot 10^{-11}, \\
 p_z(T) &= 6.710694703 \cdot 10^{-13}, & p_{vx}(T) &= 1.872926814 \cdot 10^{-5}, \\
 p_{vy}(T) &= 0.124576252, & p_{vz}(T) &= 0.153931042, \\
 m(T) &= 0.0635556, & p_m(T) &= 0.010694385.
 \end{aligned}$$

Величины импульсов довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО:

$$\Delta v_{\text{доб1}} = 0.029713 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{доб2}} = 0.491235 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{доб3}} = 0.979052 \text{ км/с}.$$

Ф. Экстремаль Понтрягина во второй постановке задачи с большой ограниченной тягой с учетом второй зональной гармоник

В приложении к разделу 5.5 приводится экстремаль Понтрягина во второй постановке задачи с большой ограниченной тягой с учетом второй зональной гармоник при $n = 0.1$, $\Delta v^* = 1.5$ км/с, $M(0) = 22500$ кг, сухая масса ДТБ $m^{\text{ДТБ}} = 0.052$ (соответствует массе 1170 кг), сухая масса ЦБ $m^{\text{ЦБ}} = 0.0635556$ (соответствует массе 1430 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ДТБ, $m_{\text{топл.}}^{\text{ДТБ}} = 0.6488889$ (соответствует массе 14600 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ЦБ $m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}} = 0.2266667$ (соответствует массе 5100 кг).

Функциональные множители Лагранжа (сопряженные переменные) могут быть получены численным интегрированием уравнений (5.1), (3.30), (5.16). Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 с. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам.

Представленная экстремаль может использоваться при отработке методики проверки локальной оптимальности 2-го порядка или, например, условий оптимальности на основе принципа Кротова.

При необходимости уточнение представленных значений может быть произведено классическим методом Ньютона при использовании вычислительной схемы из раздела 5.4.

Числовые множители Лагранжа:

$$\begin{aligned} \lambda_{R0} &= 1.433854633 \cdot 10^{-4}, & \lambda_{C0} &= 5.918805022 \cdot 10^{-4}, \\ \lambda_{vx0} &= 0.454025001, & \lambda_{vy0} &= 0.573822788, \\ \lambda_{vz0} &= 0.681607443, & \lambda_{m0} &= 0.003461501, \\ \lambda_{xc61} &= -3.413198516 \cdot 10^{-4}, & \lambda_{yc61} &= 9.967002232 \cdot 10^{-7}, \\ \lambda_{zc61} &= -1.050642091 \cdot 10^{-7}, & \lambda_{vxc61} &= -0.007622014, \\ \lambda_{vyc61} &= -0.749577997, & \lambda_{vzc61} &= -0.815323611, \\ \lambda_{x6ез} &= -4.191350699 \cdot 10^{-5}, & \lambda_{y6ез} &= 1.818363454 \cdot 10^{-6}, \\ \lambda_{z6ез} &= 3.277205116 \cdot 10^{-6}, & \lambda_{vxc6ез} &= 0.005613947, \\ \lambda_{vy6ез} &= 0.122603263, & \lambda_{vz6ез} &= 0.271337056, \\ \lambda_{xц} &= 2.712347829 \cdot 10^{-7}, & \lambda_{yц} &= -1.140214421 \cdot 10^{-9}, \\ \lambda_{zц} &= -3.139340907 \cdot 10^{-12}, & \lambda_{vxcц} &= 5.244886679 \cdot 10^{-4}, \\ \lambda_{vyц} &= 0.125005619, & \lambda_{vzц} &= 0.154495098, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{\tau\text{сб}1} &= 0, & \lambda_{\text{сб}1} &= 4.574422900 \cdot 10^{-4}, \\
\lambda_{m\tau 1} &= 0.005674770, & \lambda_{m\tau 2} &= 0, \\
\lambda_{\tau} &= 0, & \lambda_{\tau\text{сб}2} &= 0, \\
\lambda_{\tau\text{бес}} &= 0, & \lambda_{\text{бес}} &= -2.911494984 \cdot 10^{-4}, \\
\lambda_{\tau\text{ц}} &= 0, & \lambda_{\text{ц}} &= -0.020746440, \\
\lambda_{\text{дов}} &= 1.164512147, & \lambda_T &= 4.669856718 \cdot 10^{-6}, \\
\lambda_{mT1} &= -0.009928222, & \lambda_{mT2} &= 8.044667808 \cdot 10^{-4}, \\
\lambda_0 &= 0.009916185.
\end{aligned}$$

Включение двигателя КА происходит в начальный момент времени $t = 0$ при угловом положении на опорной орбите $\varphi_0 = -0.781801045$ рад:

$$\begin{aligned}
x(0) &= 4668.160 \text{ км}, & y(0) &= -2880.973 \text{ км}, \\
z(0) &= -3630.482 \text{ км}, & v_x(0) &= 5.484467 \text{ км/с}, \\
v_y(0) &= 3.433815 \text{ км/с}, & v_z(0) &= 4.327150 \text{ км/с}, \\
p_x(0) &= 2.847827683 \cdot 10^{-4}, & p_y(0) &= -5.159476750 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(0) &= -6.014186470 \cdot 10^{-4}, & p_{vx}(0) &= 0.454025001, \\
p_{vy}(0) &= 0.573822788, & p_{vz}(0) &= 0.681607443, \\
m(0) &= 1, & p_m(0) &= 0.003461501.
\end{aligned}$$

Продолжительность первого активного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{акт}} = 1234.201$ с. КА переходит на мгновенную эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a1} = 15500.379$ км, перигеем $r_{п1} = 6702.705$ км и углом наклона $i_1 = 0.8956400$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_1^{\text{акт}} = 1234.201$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5359.974 \text{ км}, & y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3045.828 \text{ км}, \\
z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3807.322 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -4.376739 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 4.634944 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5.786073 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3.310154426 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3.869680842 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 4.525055881 \cdot 10^{-4}, & p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -0.371930978, \\
p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.637415678, & p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.754886279, \\
m(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= m(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.6473710, & p_m(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_m(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.005597222.
\end{aligned}$$

Продолжительность первого пассивного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{пасс}} = 5215.957$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на мгновенной эллиптической орбите с апогеем $r_{a2} = 15497.050$ км, перигеем $r_{п2} = 6704.050$ км и уг-

лом наклона $i_2 = 0.8956701$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{1-}^{\text{пасс}} = 6450.158$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -15495.550 \text{ км}, & y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 141.697 \text{ км}, \\
z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 141.814 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -0.067048 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2.462931 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -3.076381 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 1.210025259 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2.516533295 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -3.840226972 \cdot 10^{-6}, \\
p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.007478912, & p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.600607505, \\
p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.868158616, & m(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= m(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.6473710, \\
p_m(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_m(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.005597222.
\end{aligned}$$

Продолжительность второго активного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}} = 30.962$ с. КА переходит на мгновенную эллиптическую орбиту с апогеем $r_{\text{а3}} = 15497.050$ км, перигеем $r_{\text{п3}} = 6478.155$ км и углом наклона $i_3 = 0.8948231$ рад — на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}} = 6481.120$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -15496.825 \text{ км}, & y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = 65.849 \text{ км}, \\
z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = 47.157 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= v_x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -0.015396 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= v_y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -2.436407 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= v_z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -3.037857 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 1.210580124 \cdot 10^{-4}, & p_y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= -5.244911781 \cdot 10^{-7}, \\
p_z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= -9.590649930 \cdot 10^{-7}, & p_{vx}(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.003731423, \\
p_{vy}(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.600654585, & p_{vz}(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.868232916, \\
p_x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) &= -3.413198516 \cdot 10^{-4}, & p_y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) &= 9.967002232 \cdot 10^{-7}, \\
p_z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) &= -1.050642091 \cdot 10^{-7}, & p_{vx}(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) &= -0.007622014, \\
p_{vy}(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) &= -0.749577997, & p_{vz}(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) &= -0.815323611, \\
m(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.6385248, & p_m(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.005674770.
\end{aligned}$$

Продолжительность второго пассивного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{пасс}} = 120$ с — на этом участке происходит отстыковка ДТБ от КА. В конце пассивного участка КА оказывается на мгновенной эллиптической орбите с апогеем $r_{\text{а4}} = 15497.054$ км, перигеем $r_{\text{п4}} = 6478.151$ км и углом наклона $i_4 = 0.8948230$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}} = 6601.120$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{\text{с62-}}^{\text{ДТБ}}) &= x(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) = -15486.718 \text{ км}, & y(\tau_{\text{с62-}}^{\text{ДТБ}}) &= y(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) = -226.496 \text{ км}, \\
z(\tau_{\text{с62-}}^{\text{ДТБ}}) &= z(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) = -317.328 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{с62-}}^{\text{ДТБ}}) &= v_x(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) = 0.183859 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{\text{с62-}}^{\text{ДТБ}}) &= v_y(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) = -2.435374 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{с62-}}^{\text{ДТБ}}) &= v_z(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) = -3.036118 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{с62-}}^{\text{ДТБ}}) &= p_x(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) = -3.412261120 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{\text{с62-}}^{\text{ДТБ}}) &= p_y(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) = -8.642244003 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{\text{с62-}}^{\text{ДТБ}}) &= p_z(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) = -1.059458510 \cdot 10^{-5}, \\
p_{vx}(\tau_{\text{с62-}}^{\text{ДТБ}}) &= p_{vx}(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) = 0.033333072, \\
p_{vy}(\tau_{\text{с62-}}^{\text{ДТБ}}) &= p_{vy}(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) = -0.749119336, & p_{vz}(\tau_{\text{с62-}}^{\text{ДТБ}}) &= p_{vz}(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) = -0.814681702, \\
m(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.5865248, & p_m(\tau_{\text{с62+}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.006479237.
\end{aligned}$$

Продолжительность третьего активного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{бес}} = 12.584$ с. КА переходит на мгновенную эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a5} = 15497.165$ км, перигеем $r_{п5} = 6578.155$ км и углом наклона $i_5 = 0.8944599$ рад — «безопасная» орбита. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{бес}} = 6613.704$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{\text{бес-}}) &= x(\tau_{\text{бес+}}) = -15484.269 \text{ км}, & y(\tau_{\text{бес-}}) &= y(\tau_{\text{бес+}}) = -257.229 \text{ км}, \\
z(\tau_{\text{бес-}}) &= z(\tau_{\text{бес+}}) = -355.629 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{бес-}}) &= v_x(\tau_{\text{бес+}}) = 0.205435 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{\text{бес-}}) &= v_y(\tau_{\text{бес+}}) = -2.449325 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{бес-}}) &= v_z(\tau_{\text{бес+}}) = -3.051191 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{бес-}}) &= -3.412027723 \cdot 10^{-4}, & p_y(\tau_{\text{бес-}}) &= -9.653601656 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{\text{бес-}}) &= -1.169516804 \cdot 10^{-5}, & p_{vx}(\tau_{\text{бес-}}) &= 0.037626807, \\
p_{vy}(\tau_{\text{бес-}}) &= -0.749004221, & p_{vz}(\tau_{\text{бес-}}) &= -0.814541459, \\
p_x(\tau_{\text{бес+}}) &= -4.191350699 \cdot 10^{-5}, & p_y(\tau_{\text{бес+}}) &= 1.818363454 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{\text{бес+}}) &= 3.277205116 \cdot 10^{-6}, & p_{vx}(\tau_{\text{бес+}}) &= 0.005613947, \\
p_{vy}(\tau_{\text{бес+}}) &= 0.122603263, & p_{vz}(\tau_{\text{бес+}}) &= 0.271337056, \\
m(\tau_{\text{бес-}}) &= m(\tau_{\text{бес+}}) = 0.5829294, & p_m(\tau_{\text{бес-}}) &= p_m(\tau_{\text{бес+}}) = 0.006519200.
\end{aligned}$$

Продолжительность третьего пассивного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{пасс}} = 5216.590$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на мгновенной эллиптической орбите с апогеем $r_{a6} = 15511.260$ км, перигеем $r_{п6} = 6576.895$ км и углом наклона $i_6 = 0.8945146$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_3^{\text{пасс}} = 11830.294$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 5800.802 \text{ км}, & y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -2325.065 \text{ км}, \\
z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -2873.492 \text{ км}, & v_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 3.552264 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 5.123362 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 6.398468 \text{ км/с},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 7.054223272 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -3.626253181 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -4.221703307 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vx}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vx}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.375673845, \\
p_{vy}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vy}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.672269289, \quad p_{vz}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = p_{vz}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.795480731, \\
m(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= m(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.5829294, \quad p_m(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) = p_m(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.006519200.
\end{aligned}$$

Продолжительность четвертого активного участка составляет $\Delta\tau_4^{\text{акт}} = 780.500$ с. КА переходит на целевую орбиту (мгновенную эллиптическую) с апогеем $r_{a7} = 227836.188$ км, перигеем $r_{п7} = 6644.228$ км и углом наклона $i_7 = 0.8906533$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_4^{\text{акт}} = 12610.794$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6084.641 \text{ км}, & y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2384.567 \text{ км}, \\
z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2973.948 \text{ км}, & v_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -2.938096 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6.263615 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 7.730770 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 7.082115241 \cdot 10^{-4}, \\
p_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2.864552818 \cdot 10^{-4}, \\
p_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 3.401552221 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vx}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vx}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -0.318637686, \\
p_{vy}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vy}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.697738820, \quad p_{vz}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = p_{vz}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.821883611, \\
m(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= m(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.3599295, \quad p_m(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = p_m(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.010720651.
\end{aligned}$$

На целевой орбите спутник отделяется от ЦБ. Масса спутника на целевой орбите (полезная масса) $m_{п} = 0.2963025$ (6666.807 кг). В момент $\tau_{ц}$ происходит последнее включение двигателя для понижения высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ до условной границы атмосферы. Для удобства при расчетах скачок массы (после отстыковки спутника) учитывается в момент последнего включения двигателя. Продолжительность четвертого пассивного участка $\Delta\tau_4^{\text{пасс}} = \Delta\tau_{ц} = 197377.177$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на мгновенной эллиптической орбите с апогеем $r_{a8} = 226260.537$ км, перигеем $r_{п8} = 6643.199$ км и углом наклона $i_8 = 0.8905127$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{ц} = 209987.971$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{ц-}) &= x(\tau_{ц+}) = -226258.546 \text{ км}, & y(\tau_{ц-}) &= y(\tau_{ц+}) = 949.143 \text{ км}, \\
z(\tau_{ц-}) &= z(\tau_{ц+}) = 0.146 \text{ км}, & v_x(\tau_{ц-}) &= v_x(\tau_{ц+}) = -8.409906 \cdot 10^{-4} \text{ км/с},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_y(\tau_{\text{Ц-}}) &= v_y(\tau_{\text{Ц+}}) = -0.199405 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{Ц-}}) &= v_z(\tau_{\text{Ц+}}) = -0.246446 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{Ц-}}) &= -7.173434570 \cdot 10^{-7}, & p_y(\tau_{\text{Ц-}}) &= 2.002973239 \cdot 10^{-9}, \\
p_z(\tau_{\text{Ц-}}) &= -3.573643954 \cdot 10^{-8}, & p_{vx}(\tau_{\text{Ц-}}) &= -0.003979472, \\
p_{vy}(\tau_{\text{Ц-}}) &= -0.672844707, & p_{vz}(\tau_{\text{Ц-}}) &= 0.617474684, \\
p_x(\tau_{\text{Ц+}}) &= 2.712347829 \cdot 10^{-7}, & p_y(\tau_{\text{Ц+}}) &= -1.140214421 \cdot 10^{-9}, \\
p_z(\tau_{\text{Ц+}}) &= -3.139340907 \cdot 10^{-12}, & p_{vx}(\tau_{\text{Ц+}}) &= 5.244886679 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vy}(\tau_{\text{Ц+}}) &= 0.125005619, & p_{vz}(\tau_{\text{Ц+}}) &= 0.154495098, \\
m(\tau_{\text{Ц-}}) &= 0.3599295, & m(\tau_{\text{Ц+}}) &= 0.0636269, \\
p_m(\tau_{\text{Ц-}}) &= p_m(\tau_{\text{Ц+}}) = 0.010720651.
\end{aligned}$$

Продолжительность пятого (последнего) активного участка составляет $\Delta\tau_5^{\text{акт}} = \Delta T = 0.250 \text{ с}$ — ЦБ переводится на мгновенную эллиптическую орбиту, касающуюся границы атмосферы с апогеем $r_{a9} = 226260.537 \text{ км}$, перигеем $r_{п9} = 6478.155 \text{ км}$ и углом наклона $i_9 = 0.8905127 \text{ рад}$. Фазовые и сопряженные переменные в момент $T = 209988.221 \text{ с}$ выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(T) &= -226258.546 \text{ км}, & y(T) &= 949.093 \text{ км}, \\
z(T) &= 0.084 \text{ км}, & v_x(T) &= -8.288812 \cdot 10^{-4} \text{ км/с}, \\
v_y(T) &= -0.196982 \text{ км/с}, & v_z(T) &= -0.243452 \text{ км/с}, \\
p_x(T) &= 2.712347875 \cdot 10^{-7}, & p_y(T) &= -1.139139988 \cdot 10^{-9}, \\
p_z(T) &= -1.811439981 \cdot 10^{-12}, & p_{vx}(T) &= 5.244209221 \cdot 10^{-4}, \\
p_{vy}(T) &= 0.125005620, & p_{vz}(T) &= 0.154495098, \\
m(T) &= 0.0635556, & p_m(T) &= 0.010732689.
\end{aligned}$$

Величины импульсов довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО:

$$\Delta v_{\text{дов1}} = 0.029676 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{дов2}} = 0.491272 \text{ км/с}, \quad \Delta v_{\text{дов3}} = 0.979052 \text{ км/с}.$$

Г. Экстремаль во второй постановке задачи в упрощенной модели с учетом второй зональной гармоники

В приложении к разделу 6.5 приводится экстремаль во второй постановке задачи в упрощенной модели с учетом влияния второй зональной гармоники при $n = 0.1$, $\Delta v^* = 1.5 \text{ км/с}$, $m(0) = 1$ ($M(0) = 22500 \text{ кг}$), сухая масса ДТБ $m^{\text{ДТБ}} = 0.052$ (соответствует массе 1170 кг), сухая масса ЦБ $m^{\text{ЦБ}} = 0.0635556$ (соответствует массе 1430 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ДТБ, $m_{\text{топл.}}^{\text{ДТБ}} = 0.6488889$ (соответствует массе 14600 кг), максимальная масса топлива, вмещающегося в ЦБ $m_{\text{топл.}}^{\text{ЦБ}} = 0.2266667$ (соответствует массе 5100 кг).

Функциональные множители Лагранжа (сопряженные переменные) могут быть получены численным интегрированием уравнений (6.1), (6.3), (6.4). Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 с. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам.

Представленная экстремаль может использоваться при отработке методики проверки локальной оптимальности 2-го порядка.

При необходимости уточнение представленных значений может быть произведено классическим методом Ньютона при использовании вычислительной схемы из раздела 6.4.

Числовые множители Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{R0} &= 0.000143484, & \lambda_{C0} &= 0.000601140, \\
 \lambda_{vx0} &= 0.455059468, & \lambda_{vy0} &= 0.5737603, \\
 \lambda_{vz0} &= 0.680969901, & \lambda_{m0} &= 0.003452392, \\
 \lambda_{xc61} &= -3.414145581 \cdot 10^{-4}, & \lambda_{yc61} &= 9.867448405 \cdot 10^{-7}, \\
 \lambda_{zc61} &= -1.028932989 \cdot 10^{-7}, & \lambda_{vxc61} &= -0.007862172, \\
 \lambda_{vyc61} &= -0.749907787, & \lambda_{vzc61} &= -0.814603233, \\
 \lambda_{x6ез} &= -4.221699520 \cdot 10^{-5}, & \lambda_{y6ез} &= 1.785382118 \cdot 10^{-6}, \\
 \lambda_{z6ез} &= 3.213928312 \cdot 10^{-6}, & \lambda_{vxc6ез} &= 0.005531858, \\
 \lambda_{vy6ез} &= 0.121786990, & \lambda_{vz6ез} &= 0.270647145, \\
 \lambda_{xц} &= 2.717184415 \cdot 10^{-7}, & \lambda_{yц} &= -1.107200794 \cdot 10^{-9}, \\
 \lambda_{zц} &= -3.319735517 \cdot 10^{-12}, & \lambda_{vxц} &= 5.087681805 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{vyц} &= 0.125118788, & \lambda_{vzц} &= 0.154485119, \\
 \lambda_{\tau c61} &= 0, & \lambda_{c61} &= 4.570399430 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{m\tau1} &= 0.005666330, & \lambda_{m\tau2} &= 0, \\
 \lambda_{\tau} &= 0, & \lambda_{\tau c62} &= 0, \\
 \lambda_{\tau6ез} &= 0, & \lambda_{6ез} &= -2.908825306 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_{\tauц} &= 0, & \lambda_{ц} &= -0.022010686, \\
 \lambda_{дов} &= 1.165270664, & \lambda_T &= 4.674665953 \cdot 10^{-6}, \\
 \lambda_{mT1} &= -0.009923813, & \lambda_{mT2} &= 8.123006191 \cdot 10^{-4}, \\
 \lambda_0 &= 0.009911850.
 \end{aligned}$$

Включение двигателя КА происходит в начальный момент времени $t = 0$ при угловом положении на опорной орбите $\varphi_0 = -0.7828754$ рад:

$$\begin{aligned}
x(0) &= 4663.178 \text{ км}, & y(0) &= -2884.089 \text{ км}, & z(0) &= -3634.409 \text{ км}, \\
v_x(0) &= 5.490399 \text{ км/с}, & v_y(0) &= 3.430150 \text{ км/с}, & v_z(0) &= 4.322532 \text{ км/с}, \\
p_x(0) &= 0.000284907, & p_y(0) &= -0.000517018, & p_z(0) &= -0.000602005, \\
p_{vx}(0) &= 0.455059468, & p_{vy}(0) &= 0.573760294, & p_{vz}(0) &= 0.680969901, \\
a(0) &= 0.001030560, & b(0) &= 0.872818471, & c(0) &= 2.498504201 \cdot 10^{-5}, \\
d(0) &= 0.819146446, & p_a(0) &= 0, & p_b(0) &= 0, \\
p_c(0) &= 0, & p_d(0) &= 0, & m(0) &= 1, \\
& & p_m(0) &= 0.003452392.
\end{aligned}$$

Продолжительность первого активного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{акт}} = 1235.087$ с. КА переходит на мгновенную эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a1} = 15497.662$ км, перигеем $r_{п1} = 6699.084$ км и углом наклона $i_1 = 0.8952702$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_1^{\text{акт}} = 1235.087$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5354.575 \text{ км}, & y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3048.862 \text{ км}, \\
z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 3807.456 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -4.381008 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 4.636465 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= v_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 5.784210 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_x(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.000331337, & p_y(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_y(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.000387760, \\
p_z(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_z(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.000452968, & p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = -0.372696710, \\
p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.637772130, & p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.754621769, \\
a(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= 0.001030560, & b(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= 0.872818471, \\
c(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= 2.498504201 \cdot 10^{-5}, & d(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= 0.819146446, \\
p_a(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= 0, & p_b(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= 0, \\
p_c(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= 0, & p_d(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= 0, \\
m(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= m(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.6471181, & p_m(\tau_{1-}^{\text{акт}}) &= p_m(\tau_{1+}^{\text{акт}}) = 0.005590100.
\end{aligned}$$

Продолжительность первого пассивного участка составляет $\Delta\tau_1^{\text{пасс}} = 5213.526$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на мгновенной эллиптической орбите с апогеем $r_{a2} = 15494.346$ км, перигеем $r_{п2} = 6700.431$ км и углом наклона $i_2 = 0.8953006$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_1^{\text{пасс}} = 6448.613$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -15492.855 \text{ км}, & y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 140.449 \text{ км}, \\
z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 142.341 \text{ км}, & v_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -0.066847 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2.463974 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= v_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -3.075345 \text{ км/с},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_x(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_x(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.000120595, \\
p_y(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_y(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -2.511136397 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_z(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = -3.877599594 \cdot 10^{-6}, \\
p_{vx}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vx}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.007350636, \\
p_{vy}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vy}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.599566507, & p_{vz}(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_{vz}(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.866745571, \\
a(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) &= 0.001030560, & b(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) &= 0.872818471, \\
c(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) &= 2.498504201 \cdot 10^{-5}, & d(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) &= 0.819146446, \\
p_a(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) &= 0, & p_b(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) &= 0, \\
p_c(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) &= 0, & p_d(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) &= 0, \\
m(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= m(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.6471181, & p_m(\tau_{1-}^{\text{пасс}}) &= p_m(\tau_{1+}^{\text{пасс}}) = 0.005590100.
\end{aligned}$$

Продолжительность второго активного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}} = 30.469$ с. КА переходит на мгновенную эллиптическую орбиту с апогеем $r_{\text{а3}} = 15494.346$ км, перигеем $r_{\text{п3}} = 6478.155$ км и углом наклона $i_3 = 0.8944620$ рад — на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}} = 6479.082$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -15494.117 \text{ км}, & y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = 65.770 \text{ км}, \\
z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = 49.214 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= v_x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -0.016003 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= v_y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -2.437865 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= v_z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) = -3.037426 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.000120651, & p_y(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= -5.531898365 \cdot 10^{-7}, \\
p_z(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= -1.045449906 \cdot 10^{-6}, & p_{vx}(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.003675223, \\
p_{vy}(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.599613192, & p_{vz}(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.866820573, \\
p_x(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) &= -0.000341415, & p_y(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) &= 9.867448405 \cdot 10^{-7}, \\
p_z(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) &= -1.028932989 \cdot 10^{-7}, & p_{vx}(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) &= -0.007862172, \\
p_{vy}(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) &= -0.749907787, & p_{vz}(\tau_{\text{сб1+}}^{\text{ДТБ}}) &= -0.814603233, \\
a(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.000201190, & b(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 1.558536873, \\
c(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 9.983364152 \cdot 10^{-7}, & d(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.965598774, \\
p_a(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0, & p_b(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0, \\
p_c(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0, & p_d(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0, \\
m(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.6384127, & p_m(\tau_{\text{сб1-}}^{\text{ДТБ}}) &= 0.005666330.
\end{aligned}$$

Продолжительность второго пассивного участка составляет $\Delta\tau_2^{\text{пасс}} = 120$ с — на этом участке происходит отстыковка ДТБ от КА. В конце пассивного участка КА оказывается на мгновенной эллиптической орбите с апогеем $r_{\text{а4}} = 15494.350$ км, перигеем $r_{\text{п4}} = 6478.151$ км и углом наклона $i_4 = 0.8944618$ рад.

Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{с62}^{\text{ДТБ}} = 6599.082$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{с62-}^{\text{ДТБ}}) &= x(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) = -15484.079 \text{ км}, & y(\tau_{с62-}^{\text{ДТБ}}) &= y(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) = -226.749 \text{ км}, \\
z(\tau_{с62-}^{\text{ДТБ}}) &= z(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) = -315.222 \text{ км}, & v_x(\tau_{с62-}^{\text{ДТБ}}) &= v_x(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) = 0.183321 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{с62-}^{\text{ДТБ}}) &= v_y(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) = -2.436829 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{с62-}^{\text{ДТБ}}) &= v_z(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) = -3.035713 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{с62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_x(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) = -0.000341319, \\
p_y(\tau_{с62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_y(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) = -8.661431391 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{с62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_z(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) = -1.058855889 \cdot 10^{-5}, \\
p_{vx}(\tau_{с62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_{vx}(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) = 0.033104154, \\
p_{vy}(\tau_{с62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_{vy}(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) = -0.749447375, & p_{vz}(\tau_{с62-}^{\text{ДТБ}}) &= p_{vz}(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) = -0.813961813, \\
a(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) &= 0.000455014, & b(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) &= -1.526653527, \\
c(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) &= 1.139054814 \cdot 10^{-5}, & d(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) &= -0.826155694, \\
p_a(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) &= 0, & p_b(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) &= 0, \\
p_c(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) &= 0, & p_d(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) &= 0, \\
m(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) &= 0.586412657, & p_m(\tau_{с62+}^{\text{ДТБ}}) &= 0.006478631.
\end{aligned}$$

Продолжительность третьего активного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{акт}} = \Delta\tau_{\text{бес}} = 12.583$ с. КА переходит на мгновенную эллиптическую орбиту с апогеем $r_{a5} = 15494.461$ км, перигеем $r_{п5} = 6578.155$ км и углом наклона $i_5 = 0.8940971$ рад — «безопасная» орбита. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{бес}} = 6611.665$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned}
x(\tau_{\text{бес-}}) &= x(\tau_{\text{бес+}}) = -15481.636 \text{ км}, & y(\tau_{\text{бес-}}) &= y(\tau_{\text{бес+}}) = -257.499 \text{ км}, \\
z(\tau_{\text{бес-}}) &= z(\tau_{\text{бес+}}) = -353.514 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{бес-}}) &= v_x(\tau_{\text{бес+}}) = 0.204899 \text{ км/с}, \\
v_y(\tau_{\text{бес-}}) &= v_y(\tau_{\text{бес+}}) = -2.450792 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{бес-}}) &= v_z(\tau_{\text{бес+}}) = -3.050781 \text{ км/с}, \\
p_x(\tau_{\text{бес-}}) &= -0.000341295, & p_y(\tau_{\text{бес-}}) &= -9.673669607 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{\text{бес-}}) &= -1.168863985 \cdot 10^{-5}, & p_{vx}(\tau_{\text{бес-}}) &= 0.037398716, \\
p_{vy}(\tau_{\text{бес-}}) &= -0.749332022, & p_{vz}(\tau_{\text{бес-}}) &= -0.813821660, \\
p_x(\tau_{\text{бес+}}) &= -4.221699520 \cdot 10^{-5}, & p_y(\tau_{\text{бес+}}) &= 1.785382118 \cdot 10^{-6}, \\
p_z(\tau_{\text{бес+}}) &= 3.213928312 \cdot 10^{-6}, & p_{vx}(\tau_{\text{бес+}}) &= 0.005531858, \\
p_{vy}(\tau_{\text{бес+}}) &= 0.121786990, & p_{vz}(\tau_{\text{бес+}}) &= 0.270647145, \\
a(\tau_{\text{бес-}}) &= 0.000455014, & b(\tau_{\text{бес-}}) &= -1.526653527, \\
c(\tau_{\text{бес-}}) &= 1.139054814 \cdot 10^{-5}, & d(\tau_{\text{бес-}}) &= -0.826155694, \\
p_a(\tau_{\text{бес-}}) &= 0, & p_b(\tau_{\text{бес-}}) &= 0, \\
p_c(\tau_{\text{бес-}}) &= 0, & p_d(\tau_{\text{бес-}}) &= 0,
\end{aligned}$$

$$m(\tau_{\text{бэз-}}) = m(\tau_{\text{бэз+}}) = 0.5828176, \quad p_m(\tau_{\text{бэз-}}) = p_m(\tau_{\text{бэз+}}) = 0.006518595.$$

Продолжительность третьего пассивного участка составляет $\Delta\tau_3^{\text{пасс}} = 5215.947$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на мгновенной эллиптической орбите с апогеем $r_{\text{а6}} = 15508.570$ км, перигеем $r_{\text{п6}} = 6576.891$ км и углом наклона $i_6 = 0.8941519$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_3^{\text{пасс}} = 11827.612$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned} x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 5801.079 \text{ км}, & y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -2325.201 \text{ км}, \\ z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -2872.338 \text{ км}, & v_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 3.551743 \text{ км/с}, \\ v_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 5.126030 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= v_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 6.396542 \text{ км/с}, \\ p_x(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_x(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.000706191, & p_y(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_y(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -0.000363053, \\ p_z(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_z(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = -0.000422306, & p_{vx}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vx}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.375834007, \\ p_{vy}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vy}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.673077513, & p_{vz}(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_{vz}(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.795664362, \\ a(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) &= 0.000455014, & b(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) &= -1.526653527, \\ c(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) &= 1.139054814 \cdot 10^{-5}, & d(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) &= -0.826155694, \\ p_a(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) &= 0, & p_b(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) &= 0, \\ p_c(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) &= 0, & p_d(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) &= 0, \\ m(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= m(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.5828176, & p_m(\tau_{3-}^{\text{пасс}}) &= p_m(\tau_{3+}^{\text{пасс}}) = 0.006518595. \end{aligned}$$

Продолжительность четвертого активного участка составляет $\Delta\tau_4^{\text{акт}} = 780.502$ с. КА переходит на целевую орбиту (мгновенную эллиптическую) с апогеем $r_{\text{а7}} = 227667.151$ км, перигеем $r_{\text{п7}} = 6643.028$ км и углом наклона $i_7 = 0.8901794$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_4^{\text{акт}} = 12608.114$ с выключения двигателя:

$$\begin{aligned} x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6082.837 \text{ км}, & y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2387.173 \text{ км}, \\ z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 2973.301 \text{ км}, & v_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -2.940058 \text{ км/с}, \\ v_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 6.267058 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= v_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 7.728003 \text{ км/с}, \\ p_x(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_x(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.000708710, & p_y(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_y(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.000286970, \\ p_z(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_z(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.000340395, & p_{vx}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vx}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = -0.319104722, \\ p_{vy}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vy}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.698498954, & p_{vz}(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= p_{vz}(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.822025192, \\ a(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= 0.001241862, & b(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= 1.047734403, \\ c(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= 1.275539975 \cdot 10^{-5}, & d(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= 0.842477604, \\ p_a(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= 0, & p_b(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= 0, \\ p_c(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= 0, & p_d(\tau_{4-}^{\text{акт}}) &= 0, \end{aligned}$$

$$m(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = m(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.3598169, \quad p_m(\tau_{4-}^{\text{акт}}) = p_m(\tau_{4+}^{\text{акт}}) = 0.010724150.$$

На целевой орбите спутник отделяется от ЦБ. Масса спутника на целевой орбите (полезная масса) $m_{\text{ц}} = 0.2961904$ кг (6664.285 кг). В момент $\tau_{\text{ц}}$ происходит последнее включение двигателя для понижения высоты перигея орбиты, на которой находится ЦБ до условной границы атмосферы. Для удобства при расчетах скачок массы (после отстыковки спутника) учитывается в момент последнего включения двигателя. Продолжительность четвертого пассивного участка $\Delta\tau_4^{\text{пасс}} = \Delta\tau_{\text{ц}} = 197162.100$ с. В конце пассивного участка КА оказывается на мгновенной эллиптической орбите с апогеем $r_{\text{а8}} = 226092.879$ км, перигеем $r_{\text{п8}} = 6642.002$ км и углом наклона $i_8 = 0.8900388$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $\tau_{\text{ц}} = 209770.214$ с включения двигателя:

$$\begin{aligned} x(\tau_{\text{ц-}}) &= x(\tau_{\text{ц+}}) = -226091.011 \text{ км}, & y(\tau_{\text{ц-}}) &= y(\tau_{\text{ц+}}) = 919.165 \text{ км}, \\ z(\tau_{\text{ц-}}) &= z(\tau_{\text{ц+}}) = 0.154 \text{ км}, & v_x(\tau_{\text{ц-}}) &= v_x(\tau_{\text{ц+}}) = -0.000816 \text{ км/с}, \\ v_y(\tau_{\text{ц-}}) &= v_y(\tau_{\text{ц+}}) = -0.199650 \text{ км/с}, & v_z(\tau_{\text{ц-}}) &= v_z(\tau_{\text{ц+}}) = -0.246510 \text{ км/с}, \\ p_x(\tau_{\text{ц-}}) &= -7.189109533 \cdot 10^{-7}, & p_y(\tau_{\text{ц-}}) &= 1.853478710 \cdot 10^{-9}, \\ p_z(\tau_{\text{ц-}}) &= -3.794070606 \cdot 10^{-8}, & p_{vx}(\tau_{\text{ц-}}) &= -0.003960558, \\ p_{vy}(\tau_{\text{ц-}}) &= -0.672426183, & p_{vz}(\tau_{\text{ц-}}) &= 0.617607076, \\ p_x(\tau_{\text{ц+}}) &= 2.717184415 \cdot 10^{-7}, & p_y(\tau_{\text{ц+}}) &= -1.107200794 \cdot 10^{-9}, \\ p_z(\tau_{\text{ц+}}) &= -3.319735517 \cdot 10^{-12}, & p_{vx}(\tau_{\text{ц+}}) &= 0.000508768, \\ p_{vy}(\tau_{\text{ц+}}) &= 0.125118788, & p_{vz}(\tau_{\text{ц+}}) &= 0.154485119, \\ a(\tau_{\text{ц+}}) &= 0.001241862, & b(\tau_{\text{ц+}}) &= 1.047734403, \\ c(\tau_{\text{ц+}}) &= 1.275539975 \cdot 10^{-5}, & d(\tau_{\text{ц+}}) &= 0.842477604, \\ p_a(\tau_{\text{ц+}}) &= 0, & p_b(\tau_{\text{ц+}}) &= 0, \\ p_c(\tau_{\text{ц+}}) &= 0, & p_d(\tau_{\text{ц+}}) &= 0, \\ m(\tau_{\text{ц-}}) &= 0.3598169, & m(\tau_{\text{ц+}}) &= 0.0636265, \\ & & p_m(\tau_{\text{ц-}}) &= p_m(\tau_{\text{ц+}}) = 0.010724150. \end{aligned}$$

Продолжительность пятого (последнего) активного участка составляет $\Delta\tau_5^{\text{акт}} = \Delta T = 0.248$ с — ЦБ переводится на мгновенную эллиптическую орбиту, касающуюся границы атмосферы с апогеем $r_{\text{а9}} = 226092.879$ км, перигеем $r_{\text{п9}} = 6478.155$ км и углом наклона $i_9 = 0.8900388$ рад. Фазовые и сопряженные переменные в момент $T = 209770.462$ с выключения двигателя:

$$x(T) = -226091.011 \text{ км}, \quad y(T) = 919.116 \text{ км},$$

$$\begin{aligned}
z(T) &= 0.093 \text{ км}, & v_x(T) &= -0.000805 \text{ км/с}, \\
v_y(T) &= -0.197242 \text{ км/с}, & v_z(T) &= -0.243536 \text{ км/с}, \\
p_x(T) &= 2.717184459 \cdot 10^{-7}, & p_y(T) &= -1.106130002 \cdot 10^{-9}, \\
p_z(T) &= -1.997616944 \cdot 10^{-12}, & p_{vx}(T) &= 0.000508701, \\
p_{vy}(T) &= 0.125118788, & p_{vz}(T) &= 0.154485119, \\
a(T) &= 2.171683847 \cdot 10^{-6}, & b(T) &= 1.566730068, \\
c(T) &= 0, & d(T) &= 0.890038798, \\
p_a(T) &= 0, & p_b(T) &= 0, \\
p_c(T) &= 0, & p_d(T) &= 0, \\
m(T) &= 0.0635556, & p_m(T) &= 0.010736113.
\end{aligned}$$

Величины импульсов довыведения спутника с целевой орбиты на ГСО:

$$\begin{aligned}
\Delta v_{\text{доб1}} &= 0.029787729 \text{ км/с}, & \Delta v_{\text{доб2}} &= 0.491159863 \text{ км/с}, \\
\Delta v_{\text{доб3}} &= 0.979052408 \text{ км/с}.
\end{aligned}$$