

из точки b радиусом bf . Далее опускаем из g перпендикуляр на bo . Тогда $\overline{bh} = \overline{W_{nb}}$. Нормальную составляющую относительного ускорения

$$W_{nba} = \frac{v_{ba}^2}{ab} = \frac{(ef)^2}{ab}$$

построим аналогичным методом и получаем $\overline{ek} = W_{nb}$. На пересечении уже проведенных лучей gh и ik получаем точку m — конец ускорения точки b , так что $\overline{bm} = \overline{W_b}$. В правильности построения убеждаемся по чертежу, рассматривая геометри-

ческие суммы bhm и $bekt$, соответственно эквивалентные уравнениям формулы (19). Если известны траектории скорости и ускорения двух точек плоской фигуры, то решение задачи для любых других точек не представляет затруднений. Траектории можно определять способом засечек, а скорости и ускорения — методами, хорошо известными из прикладной механики для промежуточных точек. В настоящее время нами разрабатывается динамика поворота, на основании которой определяются действующие усилия. 24/X 1936

М.-п. Сельскохозяйственная машина, 1937, № 1

Теория движения прицепа трактора

Инж. А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

При с.-х. работах трактор тянет за собой различного рода прицепки, несущие на себе с.-х. машины. Всегда важно бывает знать, как будут двигаться прицепки, если трактор будет описывать тот или иной путь, в частности, как скоро при перемене направления движения трактора (например поворот в конце поля) прицепки займут вновь положение рабочего хода.

Общее исследование этого вопроса встречает большие математические затруднения. Быть может именно поэтому в литературе о с.-х. машинах нет решений задач подобного рода, если не считать нахождения картины скоростей прицепок для частного их положения, что в сущности дает немного для решения общего вопроса о движении прицепок.

Вместе с этим, как мы увидим ниже, если ограничиться изучением движения одной прицепки, то задача решается сравнительно элементарно для случая движения трактора по прямой и по окружности. Приходится поэтому удивляться, почему оно не было указано ранее.

В настоящей статье дано решение задачи для этих простых случаев движения и выведено дифференциальное уравнение для общего случая движения трактора.

Каждая прицепка считается двухколесной, причем колеса могут свободно вращаться вокруг общей оси, а сама прицепка приводится в движение за дышло, жестко связанное с осью колес и шарнирно скрепленное с трактором, или представляющей прицепкой.

Если прицепка осуществляет качение без скольжения, то скорости центров колес перпендикулярны к их оси, и, следовательно, мгновенная ось вращения остова прицепки находится в пересечении двух вертикальных плоскостей: плоскости, проходящей через ось прицепки, и плоскости, проходящей через шарнир дышла перпендикулярно к скорости его движения.

1. Движение трактора по прямой

Если в некотором положении движения прицепки (рис. 1) образует с траекторией трактора угол φ , то, строя мгновенную ось вращения

по указанному выше правилу, найдем точку C пересечения этой оси с плоскостью чертежа. При этом

$$AC = \frac{l}{\sin \varphi},$$

где l — длина прицепки.

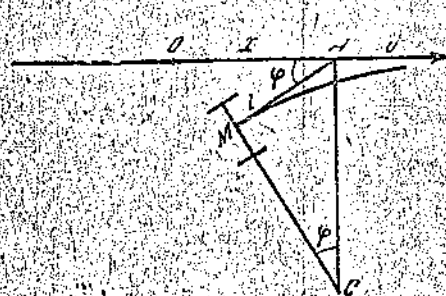


Рис. 1

Так как точка C принадлежит прицепке, то ее элементарное перемещение дается равенством:

$$dx = AC d\varphi,$$

где $d\varphi$ — элементарный угол поворота прицепки. Если считать положительное перемещение вправо, то при этом угол φ будет уменьшаться и, следовательно:

$$d\varphi = -d\varphi, \quad dx = -AC d\varphi = -\frac{l}{\sin \varphi} d\varphi.$$

Откуда немедленно получаем:

$$\frac{d\varphi}{\sin \varphi} = -\frac{dx}{l}, \quad \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \ln c = -\frac{x}{l},$$

где c — произвольная постоянная интегрирования. Если в начале движения, когда точка A (шарнир) находилась в положении 0 , угол φ был некоторым углом φ_0 , то, очевидно,

$$\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} + \ln c = 0 \quad \text{и} \quad \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} = -\frac{x}{l},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} e^{-\frac{x}{l}}$$

Найденное соотношение дает решение задачи, ибо положение прицепа вполне определяется двумя координатами — углом φ и расстоянием x .

Из анализа соотношения следует, что $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, следовательно, и угол φ асимптотически стремятся к нулю при передвижении трактора по прямой. Практически прицепка уже после малого пути трактора становится по движению, например при длине прицепа в 1,5 метра и начальном угле в 90° , угол прицепа с направлением движения после 5 метров пути составляет 4° , а после 7 метров 1° , в чем легко убедиться подсчетом.

Заметим, что точка M прицепа — основание перпендикуляра, опущенного из шарнира дышла на вертикальную плоскость, проходящую через ось прицепа, описывает кривую, именуемую трактриссой (рис. 3). Характерное ее свойство — постоянство длины отрезка касательной между точкой касания и точкой пересечения касательной с данной прямой (в разобранном случае отрезок $AM = l$).

Все остальные точки прицепа описывают кривые, эквидистантные трактриссе, которые легко изучить и построить¹.

Если дышло прицепа, как это часто бывает, имеет иную конструкцию, то рис. 2 уясняет,

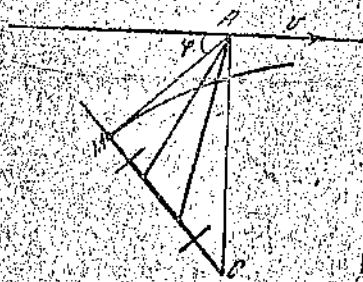


Рис. 2



Рис. 3

что следует понимать в этом случае под длиной прицепа и под углом прицепа с направлением движения. Анализ движения остается тем же.

2. Движение трактора по дуге окружности

Строим аналогично предыдущему ось мгновенного вращения (рис. 4), получим для элементарного перемещения шарнира A дышла выражение:

$$ds = l \sin \varphi d\varphi = \frac{l}{\sin \varphi} d\varphi,$$

где $d\varphi$ — угол поворота прицепа, который легко связать с изменением угла φ . Действительно,

¹ «Эквидистантность» здесь следует понимать в обобщенном смысле, как это указано на рис. 3, где точка описывает кривую, эквидистантную трактриссе в указанном смысле.

угол φ при этом элементарном перемещении уменьшается на величину $d\psi$ и увеличивается на величину $\frac{ds}{a}$, представляющую соответствующий

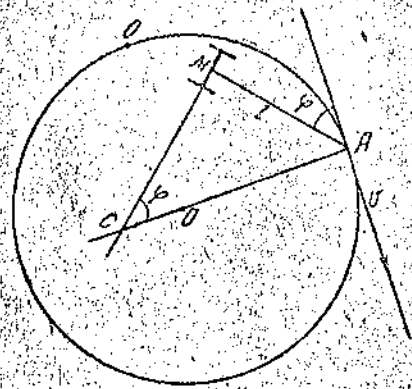


Рис. 4

угол поворота скорости, направление которой служит одной из сторон угла φ .

Соответственно этому имеем:

$$d\varphi = -d\psi + \frac{ds}{a}, \quad d\psi = \frac{ds}{a} - d\varphi$$

и, следовательно:

$$ds = \frac{l}{\sin \varphi} \left(\frac{ds}{a} - d\varphi \right),$$

откуда

$$d\varphi = \left(-\frac{\sin \varphi}{l} + \frac{1}{a} \right) ds,$$

$$\frac{ds}{a} = \frac{d\varphi}{\frac{a}{l} \sin \varphi - 1}.$$

Вводя новую переменную $u = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, получим:

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} u, \quad d\varphi = \frac{2du}{1+u^2},$$

$$\sin \varphi = 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\frac{ds}{a} = \frac{2du}{2 \frac{a}{l} u - (1+u^2)} =$$

$$= \frac{2d \left(\frac{a}{l} - u \right)}{\left(\frac{a}{l} - u \right)^2 + 1 - \frac{a^2}{l^2}} = \frac{2d\vartheta}{\vartheta^2 + \beta},$$

$$= \frac{a}{l} - u, \quad \beta = 1 - \frac{a^2}{l^2},$$

где

$$\text{Таким образом } \frac{s}{a} = \int \frac{2d\vartheta}{\vartheta^2 + \beta}.$$

Здесь при интегрировании следует различать три случая:

$$\beta > 0, \quad \beta = 0 \quad \text{и} \quad \beta < 0.$$

Случай 1: $\beta > 0$ или $1 - \frac{a^2}{l^2} > 0$ и $l > a$, т. е.

длина прицепа более радиуса окружности, по которой перемещается точка A трактора.

Интегрирование дает:

$$\frac{s-s_0}{a} = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \operatorname{arctg} \sqrt{\beta} \frac{v}{\sqrt{\beta}}$$

откуда

$$v = \sqrt{\beta} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\beta}(s-s_0)}{2a}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = u = \frac{a}{l} - v = \frac{a}{l} +$$

$$+ \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}}(s-s_0)}{2a}$$

где s_0 — константа интегрирования.

Анализ этой формулы, дающей решение задачи, показывает, что при увеличении пути s , пройденного трактором, угол φ ни к чему не стремится.

Изменение угла φ полностью повторяется при изменении s на величину:

$$\frac{2a}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}}} \pi > 2\pi a$$

Таким образом в случае $l > a$ движение прицепки имеет периодический характер, причем после каждого повторения движения прицепка оказывается сдвинутой в сторону движения трактора, т. е. в сторону вращения, как легко усмотреть из приведенного выше неравенства.

Это смещение тем менее, чем длиннее прицепка.

Случай 2: $\beta = 0$ или $a = l$. Интегрирование в этом случае особенно просто и дает:

$$\frac{s-s_0}{a} = -\frac{2}{v}$$

откуда

$$v = \frac{a}{l} - u = \frac{2a}{s-s_0}$$

т. е.

$$u = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 1 - \frac{2a}{s-s_0}$$

ибо

$$\frac{a}{l} = 1$$

и, следовательно, при безграничном увеличении пути, пройденном точкой A , $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ стремится к единице, а угол φ — к 90° . Иначе говоря, прицепка асимптотически стремится занять любое положение, изображенное на рис. 5. В этом положении через точку M проходит ось мгновенного вращения прицепки, и, естественно, она остается на месте.

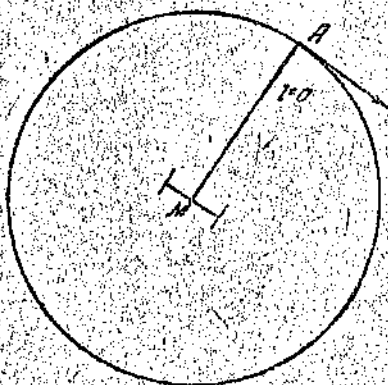


Рис. 5

Случай 3: $\beta < 0$, $l < a$ — случай, обычно встречающийся в практике.

Положим $\beta = -a^2$, $a = \sqrt{\frac{a^2}{l^2} - 1}$,

получим:

$$\frac{s-s_0}{a} = \int \frac{2dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dv}{v-a}$$

$$- \frac{1}{a} \int \frac{dv}{v+a} = \frac{1}{a} \ln \frac{v-a}{v+a}$$

откуда

$$v-a = (v+a) e^{-\frac{(s-s_0)a}{a}}$$

$$v = a \frac{1 + e^{-\frac{(s-s_0)a}{a}}}{1 - e^{-\frac{(s-s_0)a}{a}}} = \frac{a}{l} - u$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = u = \frac{a}{l} - a \frac{1 + e^{-\frac{(s-s_0)a}{a}}}{1 - e^{-\frac{(s-s_0)a}{a}}}$$

$$u = \sqrt{\frac{a^2}{l^2} - 1}$$

где s_0 — постоянная интегрирования.

Полученная формула решает задачу о движении прицепки. Из ее структуры видно, что по мере возрастания пути s , $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ стремится (и достаточно быстро) к предельному значению.

$$\frac{a}{l} - a = \frac{a}{l} - \sqrt{\frac{a^2}{l^2} - 1} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}$$

что даст:

$$\sin \varphi_1 = 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} =$$

$$= 2 \frac{\frac{a}{l} - \sqrt{\frac{a^2}{l^2} - 1}}{1 + 2 \frac{a^2}{l^2} - 2 \frac{a}{l} \sqrt{\frac{a^2}{l^2} - 1} - 1} = \frac{l}{a}$$

φ_1 — значение предельного угла.

Это предельное положение легко может быть построено (рис. 6). Точка M прицепки будет

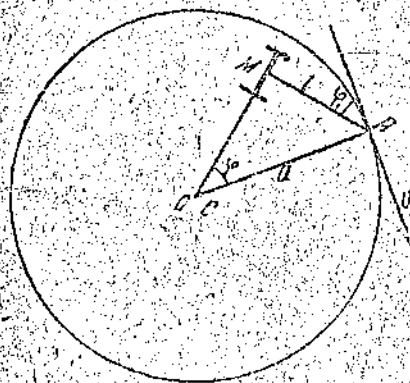


Рис. 6

совершать движение по окружности радиуса

$$OM = l \cos \varphi_1$$

а ось мгновенного вращения будет постоянно проходить через центр окружности, по которой движется точка A — шарнир дышла прицепки.

Так же, как и при движении трактора по прямой, практически это предельное положение достигается весьма быстро.

При $l = a \sin \varphi$ обращается в единицу, а угол φ , — в прямую, т. е. достигается положение рис. 6, разобранного во втором случае движения.

3. Движение трактора по произвольному пути

Пусть трактор движется таким образом, что точка А прицепа описывает некоторую кривую. Составим внутреннее уравнение этой кривой:

$$\rho = \rho(s),$$

где ρ — радиус кривизны кривой, а s — длина дуги, отсчитываемая от некоторого положения отсчета O . Совершенно аналогично предшествующему (рис. 7) составим выражение элементарного перемещения точки А прицепа:

$$ds = AC d\varphi = \frac{l}{\sin \varphi} \left(-d\varphi + \frac{ds}{\rho(s)} \right),$$

где $d\varphi$ — элементарный угол поворота прицепа, $\frac{ds}{\rho(s)}$ — угол поворота касательной к кривой движения точки А.

Преобразовывая полученное выражение, имеем:

$$\frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sin \varphi}{l} = \frac{1}{\rho(s)}$$

Вводя новую функцию $u = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, найдем

$$\varphi = \operatorname{arctg} u, \quad d\varphi = 2 \frac{du}{1+u^2}, \quad \sin \varphi = \frac{2u}{1+u^2}$$

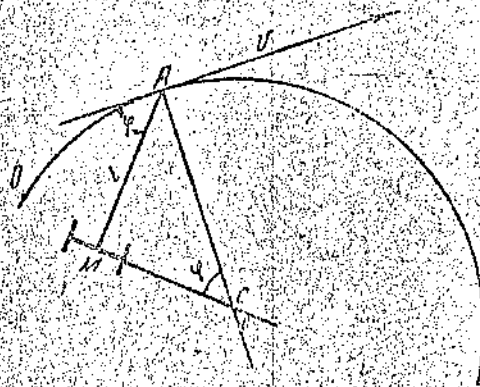


Рис. 7

и, следовательно:

$$\frac{du}{ds} + \frac{u}{l} = \frac{1+u^2}{2\rho(s)}$$

Полученное уравнение является уравнением типа Риккати и, следовательно, за исключением частных случаев вида функции $\rho(s)$ проинтегрировано в элементарных функциях быть не может. Двумя из них являются случаи $\rho = \infty$ и $\rho = a = \text{const}$, рассмотренные выше.

Пневматические шины низкого давления на с.-х. машинах

Инж. Б. И. ЗАРЕЦКИЙ
Лаборатория энергетики ВИСХОМ

Появление пневматических шин на машинах, работающих в сельском хозяйстве, представляет в определенной степени подлинный технический переворот, потому что преимуществ, даваемые пневматическими шинами, другими техническими средствами недостижимы. И действительно, какими средствами можно, не изменяя конструкции и даже изменяя ее, достичь снижения тягового сопротивления на 40—50 и даже 60%?

Какими средствами можно при всех прочих равных условиях достичь экономии горючего в 20—25%? Конечно, пневматические шины дороги, требуют значительно более внимательного ухода, в некоторых случаях (при повышенной влажности) повышают буксование ведущих колес трактора. Но зато шины улучшают условия работы на машине, служат прекрасными амортизаторами, удлиняя тем самым срок службы машины. И неудивительно поэтому, что пневматические шины для тракторов, с.-х. повозок и с.-х. машин, появившиеся за границей в самый разгар экономического кризиса, поразившего капиталистические страны, все же распространились очень быстро, захватывая все новые типы с.-х. машин. В настоящее время в США нет ни одной более или менее значительной тракторостроительной фирмы, которая не выпускала бы несколько марок тракторов на пневматических шинах либо добавочных колес с пневматическими шинами.

Огромнейшим преимуществом пневматических шин является возможность использования трактора на транспорте, а также возможность повышения рабочих скоростей машин, предел которых часто ставит быстрое разбалтывание машин от тряски.

И если в СССР вопрос о переводе тракторов и с.-х. машин на пневматические шины по известным причинам был поставлен позже, чем за границей, то уже в 1935 г. научно-исследовательские организации начали заниматься изучением применения пневматических шин на тракторах и с.-х. маши-

нах. Работы эти велись параллельно в ВИСХОМ и НАТИ, НАТИ были спроектированы, построены и испытаны несколько тракторов ХТЗ на пневматических шинах низкого давления¹. Результаты испытаний были вполне удовлетворительны.

В ВИСХОМ инж. А. З. Громовым был оборудован пневматическими шинами комбайн «Сталинец 1» захватом 3,1 м, работающий от вала отъема мощности трактора СТЗ. Напряженность энергетического баланса этого агрегата заставила в первую очередь применить здесь пневматические шины.

Испытания комбайна, проведенные во время уборочной кампании 1935 г. в Учебно-опытном зерносовхозе № 2, показали, что тяговое сопротивление комбайна снизилось по сравнению с комбайном на стальных колесах на 26—35%. Надо при этом заметить, что комбайн был оборудован автомобильными шинами высокого давления, и лучшие результаты не могли быть достигнуты, шины же низкого давления в 1935 г. достать не удалось.

В 1936 г. работа по изучению пневматических шин была направлена на исследование шин низкого давления. Пневматическими шинами были оборудованы комбайн «Сталинец 1» завода Росгсельмаш им. Сталина и тракторная 24-рядная селялка 3-да «Красная звезда». Причины выбора этих машин были следующие: как известно, в ряде районов этой страны комбайн «Сталинец 1» перегружает трактор СХТЗ, заставляя при полном буксуре работать на первой скорости, чем резко понижается производительность. С другой стороны, необходимо было изучить этот вопрос с точки зрения агрегатирования комбайнов союзного производства с новым трактором СТЗ НАТИ. И, наконец, материалов по применению

¹ Инж. Д. А. Чудakov, Баллонные шины для тракторов и с.-х. машин. Механизация соц. с.-х. № 11, 1936 г., стр. 23.
Инж. А. З. Громов, Примененные баллоны на с.-х. машинах. С.-х. машина № 7, 1936 г., стр. 20.