АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
MECHANICAL INSTITUT
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS
V. III, № 2

1939

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Т. III, в. 2

ЗАМЕТКА К СТАТЬЕ А. Н. ГЕРАСИМОВА „ПРОБЛЕМА УПРУГОГО ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ И ВНУТРЕННЕЕ ТРЕНИЕ“[1]

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

(Москва)

А. Н. Герасимов в указанной статье рассмотрел вопрос об единственности решения уравнения колебаний упруговязкой нити:

$$\eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - H \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

где искомая функция $u(x, t)$ должна удовлетворять некоторым граничным условиям, именно: обращаться в нуль при $x = 0$ и $x = l$, и начальным условиям $u = \varphi(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial x} = \psi(x)$ в момент времени $t = 0$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции, причем, конечно, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Приведенное автором статьи доказательство было в дальнейшем несколько исправлено.[2]

Однако и в несколько исправленном виде доказательство автора базируется на расширении рассматриваемой части области существования решения окаймлением этой части (прямоугольника $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$) полосой шириной ε и взятием некоторых двойных интегралов по этой расширенной области и предположении, что функция $u(x, t)$ может быть продолжена в это окаймление. Кроме того, из физических соображений считается, что u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ стремятся к нулю при неограниченном возрастании времени. С обоими указанными предположениями нельзя согласиться при построении строгого доказательства теоремы единственности.

Вместе с тем это построение не составляет большого труда. Действительно, если $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ суть два различных решения рассматриваемого уравнения, удовлетворяющие начальным и граничным условиям, то, очевидно, их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению с граничными условиями $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ и начальными условиями $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$. Можно показать, что u будет тождественно нулем в области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$.

Для этой цели рассмотрим двойной интеграл:

$$D = \int\int \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)^2 dt\, dx,$$

распространенный на область S прямоугольника $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$.

Замечая, что

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$$

[1] Сборн. „Прикладная математика и механика“, новая серия, т. I, вып. 4, 1937.
[2] Сборн. „Прикладная математика и механика“, новая серия, т. II, вып. 1, 1938.

ors frei
man ans
nd h die
ung R_0
rd man
hörung
τ_{kp} aus

и согласно формуле Грина

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t}\right) dx\, dt = \int\limits_L P\, dx + Q\, dt,$$

где криволинейный интеграл берется в положительном направлении обхода контура (против стрелки часов в рассматриваемом случае), получим:

$$\iint\limits_S \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t}\right)^2 dx\, dt = \int\limits_L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t}\, dt - \iint\limits_S \eta\, \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial t}\, dx\, dt.$$

Стоящий в правой части получившегося выражения криволинейный интеграл равен нулю, ибо на сторонах прямоугольника $t = 0$ и $t = T$ обращается в нуль dt, а на сторонах $x = 0$ и $x = l$ в нуль обращается $\frac{\partial u}{\partial t}$ согласно условиям на границе.

Из дифференциального уравнения имеем:

$$\eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial t} = -M \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + H \frac{\partial u}{\partial t}$$

и таким образом

$$\iint\limits_S \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t}\right)^2 dx\, dt = \iint\limits_S M \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx\, dt - \iint\limits_S \rho\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dt - \iint\limits_S H \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\, dt =$$

$$= \iint\limits_S M \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx\, dt - \iint\limits_S \frac{1}{2}\, \rho\, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\, dt -$$

$$- \iint\limits_S H \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\, dt.$$

Откуда, применяя формулу Грина:

$$\iint\limits_S \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t}\right)^2 dx\, dt + \iint\limits_S H \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\, dt = \int\limits_L M \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x}\, dt + \int\limits_L \frac{1}{2}\left[M\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dx.$$

Первый криволинейный интеграл, стоящий в правой части равенства, равен нулю в силу граничных условий. Второй интеграл на прямых $x = 0$, $x = l$ и $t = 0$ также даст нуль, а на прямой $t = T$ величину:

$$-\int\limits_0^l \frac{1}{2}\left[M\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\Bigg|_{t=T} dx,$$

ибо интегрирование по прямой $t = T$ ведется в направлении отрицательной оси x.

Таким образом имеем:

$$\iint\limits_S \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t}\right)^2 dx\, dt + \iint\limits_S H \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx\, dt + \int\limits_0^l \left\{\frac{1}{2} M \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\, \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\}_{t=T} dx = 0.$$

Откуда следует вследствие положительности всех интегралов, что в области S всюду функция u тождественно равна нулю, что и доказывает единственность решения.

UNE REMARQUE SUR L'ARTICLE DE A. N. GUÉRASSIMOV „LE PROBLÈME DE L'ACTION POSTÉRIEURE ÉLASTIQUE ET LA FRICTION INTÉRIEURE".

A. J. ISHLINSKY

Dans cette note on demontre l'unicité de la solution de la équation d'oscillations du fil elastique et visquieux obtenue dans l'article de A. Guérassimov.
