Ученые записки Моск. гос. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат. Вып. 3. 1940 г. Т. 7.

А. Ю. Ишлинский

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУОБРАТНОГО МЕТОДА К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Идея полуобратного метода Сен-Венана [1]) заключается в уменьшении числа неизвестных функций, подлежащих определению при решении конкретной задачи теории упругости, путем задания некоторым из них вполне определенных аналитических выражений.

Если при этом оставшиеся неизвестными функции (обычно эти функции либо компоненты тензора напряжений, либо компоненты смещения точек упругого тела) удается определить так, чтобы уравнения равновесия и граничные условия оказывались выполненными, то задача решена, так как решение задач теории упругости единственно. Таким образом, успех решения задачи зависит от того, насколько удачно подобраны аналитические выражения для некоторых из функций, подлежащих определению. Обычно такие аналитические выражения дают формулы сопротивления материалов.

В некоторых случаях не удается в точности удовлетворить граничным условиям задачи, именно — на некотором участке поверхности, ограничивающей тело, распределение усилий оказывается отличающимся от заданного, на систему, статически эквивалентную нулю. На это обстоятельство обычно не обращают внимания, ибо согласно принципу Сен-Венана напряжения, вызываемые системой сил, статически эквивалентной нулю, и приложенной к небольшому участку поверхности тела, почти не меняет картины распределения напряжений вдали от этого участка. Такие приближенные решения обычно получаются при интегрировании уравнений теории упругости, написанных для компонент тензора напряжений.

В этой работе мы разовьем некоторые приближенные решения задач теории упругости, интегрируя уравнения, написанные для компонент смещения точек упругого тела.

---

[1]) См. Ляв, Математическая теория упругости, ОНТИ, 1935.

Эти уравнения имеют вид

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u=X,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v=Y \qquad \left(\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w=Z.$$

Если на границе S перемещения должны принимать заданные значения, то граничные условия имеют вид:

$$\text{на } S \quad u=f(x,\ y,\ z),\ v=g(x,\ y,\ z),\ w=h(x,\ y,\ z),$$

где

$f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$, $h(x, y, z)$ — заданные функции.

Если же на границе упругого тела задано распределение поверхностных усилий, то граничные условия записываются в виде:

$$X_x\cos x\nu+X_y\cos y\nu+X_z\cos z\nu=X_\nu(x,\ y,\ z),$$
$$Y_x\cos x\nu+Y_y\cos y\nu+Y_z\cos z\nu=Y_\nu(x,\ y,\ z),$$
$$Z_x\cos x\nu+Z_y\cos y\nu+Z_z\cos z\nu=Z_\nu(x,\ y,\ z),$$

где

$X_\nu(x, y, z)$, $Y_\nu(x, y, z)$, $Z_\nu(x, y, z)$ — заданные функции, а

$$X_x=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x};\qquad X_y=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \text{ и т. д.}$$

Весьма часто условия на границе бывают смешанными, т. е. частично оказываются заданными поверхностные усилия и частично перемещения.

Предположим теперь, что мы взяли некоторую систему функций $u=u_1$, $v=v_1$ и $w=w_1$ от переменных x, y и z, удовлетворяющих граничным условиям задачи. Подставляя эти функции в левые части уравнения равновесия, получим:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\mu\nabla^2 u_1=X_1,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+\mu\nabla^2 v_1=Y_1, \quad \theta_1=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z},$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta_1}{\partial z}+\mu\nabla^2 w_1=Z_1,$$

где X_1, Y_1 и Z_1 — некоторые функции x, y и z, определяемые выбором функций u_1, v_1, w_1. Если окажется, что в точности $X=X_1$, $Y=Y_1$ и $Z=Z_1$, то функции u_1, v_1 и w_1 представляют, в силу теоремы единственности, точное решение задачи. Если же этого нет, то система функций u_1, v_1 и w_1 соответствует решению задачи теории упругости для тех же граничных условий на поверхности тела, но с новыми компонентами массовых сил $X_1(x, y, z)$, $Y_1(x, y, z)$ и $Z_1(x, y, z)$.

Может случиться так, что полученные компоненты X_1, Y_1, Z_1 будут незначительно отличаться от заданных X, Y, Z. В этом случае задачу можно считать решенной приближенно и принять $u \simeq u_1(x, y, z)$, $v \simeq v_1(x, y, z)$ и $w \simeq w_1(x, y, z)$.

Подобный метод подбора функций u_1, v_1 и w_1 соответствует обратному методу Сен-Венана.

Мы получим соответствие полуобратному методу, если будем подбирать лишь некоторые из функций u_1, v_1, w_1 (например, u_1 и v_1), а остальные (w_1) будем определять из уравнений равновесия так, чтобы, при соблюдении на границе, массовые силы X_1, Y_1, Z_1 возможно менее отличались от заданных X, Y, Z. При этом число уравнений равновесия сокращается соответственно числу неизвестных функций компонента смещения.

Рис. 1.

Пусть, например, следует решить задачу о распределении напряжений в полубесконечной полосе (плоская задача) шириною $2a$, жестко заделанной по двум краям (рис. 1) с нормальной нагрузкой $p(x)$, приложенной по третьему краю.

Граничные условия для задачи запишутся так:

$$x = \pm a, \quad u = v = 0,$$

$$y = 0, \quad Y_y = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = p(x) \quad \text{и} \quad X_y = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

$$y \to \infty, \quad u, v \to 0 \quad \text{и} \quad Y_y, X_y \to 0.$$

Перемещения u и v должны удовлетворить уравнениям:

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u = 0,$$

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\nabla^2 v = 0,$$

так как массовые силы отсутствуют.

В этой задаче наиболее существенное значение очевидно имеют перемещения, параллельные закрепленным краям полосы. Поэтому для первого приближения можно положить:

$$u = 0.$$

Тогда в правых частях уравнений равновесия появятся компоненты массовых сил, ибо деформированное состояние с компонентой смещения u, обращающейся в нуль, поддержать для данной задачи без наличия массовых сил невозможно.

Так как при $u=0$ будем иметь:

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

то уравнения равновесия будут иметь вид:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=X,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=Y.$$

Распоряжаясь лишь одной функцией $v(x, y)$, нельзя, конечно, удовлетворить обоим этим уравнениям, так, чтобы правые части обратились в нуль. Если бы это было возможно, то приближенное выражение $u=0$ оказалось бы точным.

Для данной задачи наиболее существенное значение имеет компонента массовой силы вдоль оси полосы, т. е. компонента Y. Полагая ее равной нулю, как это и имеет место в условиях задачи, получим для функций v уравнение Лапласа:

$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Причем граничные условия для функции $v(x, y)$ запишутся так:

$$x=\pm a,\ v=0,$$

$$y=0,\ Y_y=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y}=p(x),$$

$$y\to\infty,\ v\to 0.$$

Что касается условия

$$y=0\quad X_y=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\mu\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

то оно окажется невыполненным.

Точно так же компонента массовой силы в направлении оси x, равная

$$X=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y},$$

не будет равна нулю, как это требует точная постановка задачи.

Интегрируем уравнение Лапласа, пользуясь обычным способом Фурье разделения переменных. Для этого ищем частное решение в виде:

$$v=X(x)\cdot Y(y).$$

Подставляя выражение v в уравнение и разделяя переменные, получим:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Так как справа и слева получившегося равенства стоят функции разных независимых переменных, то эти функции суть константы.

Поэтому имеем:

$X''+k^2X=0$ и $Y''-m^2Y=0$, где $m^2=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}k^2$ и k^2 — произвольная константа.

Таким образом, частное решение имеет вид:

$$v=(A\cos kx+B\sin kx)(Ce^{my}+De^{-my}).$$

Из обстоятельства обращения в нуль перемещения v на бесконечности ($y\to\infty$) сразу следует обращение в нуль константы C.

Если ограничиться перемещениями, симметричными относительно оси y, то следует положить в решении $B=0$.

Следовательно, имеем:

$$v=A\,De^{-my}\cos kx.$$

Используя условия жесткой заделки: $v=0$, при $x=\pm a$ получим:

$$ka=\frac{\pi}{2}+\pi n,$$

и, таким образом, частное решение примет вид:

$$v_n=A_n e^{-m_n y}\cos k_n x,$$

$$\text{где } k_n=\frac{\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right) \text{ и } m_n=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}\frac{\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Очевидно, что если бесконечная сумма $v=\sum A_n e^{-m_n y}\cos k_n x$ сходится, то она также представляет решение уравнения Лапласа.

Чтобы удовлетворить условию

$$Y_y=p(x) \text{ при } y=0,$$

заметим, что так как, по предположению, $u=0$, то

$$Y_y=(\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y}=(\lambda+2\mu)\sum -m_n A_n e^{-m_n y}\cos k_n x,$$

если воспользоваться решением в виде бесконечной суммы. Полагая теперь $y=0$, получим:

$$p(x)=-m_n(\lambda+2\mu)\sum A_n\cos k_n x.$$

Разложим функцию $p(x)$, которую будем считать четной в интервале $(-a,a)$, в ряд

$$p(x)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos\left[\frac{\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right],$$

что всегда можно сделать, и коэфициенты P_n будут представляться формулами:

$$P_n=\frac{2}{a}\int_0^a p(x)\cos\left[\frac{\pi}{a}\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right].$$

Теперь очевидно следует положить:

$$-m_n(\lambda+2\mu)A_n=P_n,$$

и выражение для перемещения v примет вид:

$$v=-\sum\frac{P_n}{m_n(\lambda+2\mu)}\cos k_n x\, e^{-m_n y}=$$

$$=-\frac{a}{\pi}\sum\frac{P_n}{\sqrt{\mu(\lambda+2\mu)}}\frac{\cos k_n x\, e^{-m_n y}}{n+\frac{1}{2}}.$$

Подсчитаем теперь компоненту X массовых сил:

$$X=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=-(\lambda+\mu)\frac{a}{\pi}\sum\frac{P_n k_n m_n \sin k_n x\cdot e^{-m_n y}}{\sqrt{\mu(\lambda+2\mu)}\left(n+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{\pi}{a}\cdot\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\sum\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n\sin k_n x\, e^{-m_n y}.$$

Наличие множителя $n+\frac{1}{2}$ у каждого члена этой бесконечной суммы ухудшает ее сходимость. Поэтому может случиться, что, несмотря на сходимость ряда для v, ряд для x при $y=0$ будет расходиться и, следовательно, решение в этой форме не будет иметь смысла. (Можно показать, что при $y>0$ упомянутый ряд, при условии ограниченности коэфициентов, всегда сходится.)

Так, например, это будет иметь место, если положить

$$p(x)=\text{const}.$$

Причиною этого обстоятельства является возможность появления бесконечно больших усилий в углах полосы, вследствие жесткого закрепления двух ее краев.

Для напряжения X_y будем иметь выражение:

$$X_y=\mu\frac{\partial v}{\partial x}=\sum\frac{\mu P_n}{\sqrt{\mu(\lambda+2\mu)}}\sin k_n x e^{-m_n y}.$$

Таким образом, при $y=0$ напряжение X_y не обращается в нуль, как это должно быть на основании граничных условий. Однако, в практических условиях, это несущественно, ибо случаев приложения только нормальных усилий по свободному краю полосы не встречается. Обычно полоса продолжается за пределы закрепления (рис. 2), и напряжения X_y фактически имеют место, вызывая искривление поперечных сечений полосы.

Максимальное касательное усилие X_y следует ожидать в углах полосы.

Имеем при $x=a$, $y=0$:

$$\max X_y = \sum \frac{\mu P_n}{\sqrt{\mu(\lambda+2\mu)}} \sin \pi\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sum \frac{(-)^n}{\sqrt{\lambda+\mu}} \sqrt{\mu P_n}.$$

Бесконечный ряд, представляющий X_y, может расходиться при $y=0$, что физически будет означать концентрацию напряжения в углу полосы. Напряжения X_y быстро затухают при увеличении ординаты y и, следовательно, полосу, в основном, удерживают места закрепления, наиболее близко расположенные к свободному концу. Для обеспечения отсутствия резкой концентрации напряжений, следует добиваться уменьшения растягивающих усилий $p(x)$ к закрепленным краям полосы. Поэтому целесообразно, на наш взгляд, в практических случаях делать утончение полосы тотчас же за окончанием ее закрепления (рис. 3). Это может относиться к сварным соединениям, а также и к заклепочным, где в первом приближении можно принять два параллельных ряда заклепок за жесткое закрепление полосы.

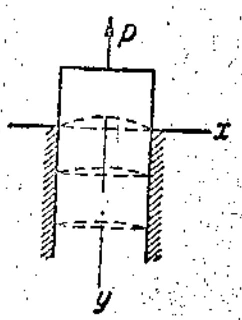

Рис. 2.

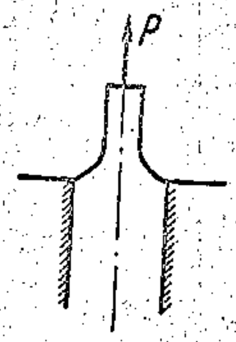

Рис. 3.

Если принять, что усилие $p(x)$ при этом распределится приближенно по закону

$$p(x) = P_1 \cos\frac{\pi}{a} x,$$

то вся растягивающая нагрузка на полосу составит величину:

$$P = \int_{-a}^{+a} P_1 \cos\frac{\pi}{a} x \cdot b\,dx = \frac{2ab}{\pi} P_1,$$

где b — толщина полосы, P — полная нагрузка на полосу. Следовательно,

$$P_1 = \frac{\pi P}{2ab} = \frac{\pi}{2}\sigma,$$

где σ — среднее растягивающее напряжение в полосе.

Максимальное касательное усилие X_y будет иметь величину:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\lambda + \mu}} \cdot P_1.$$

Если принять $\lambda = 2\mu$, что в обобщенном плоском напряженном состоянии будет соответствовать коэфициенту Пуассона $\nu = 0{,}3$, то получим:

$$\max X_y = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot P_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma = 1{,}282\,\sigma.$$

Эта формула может применяться при практических расчетах для оценки величин касательных усилий, возникающих по закрепленным краям достаточно длинной полосы.

Аналогично можно произвести приближенный расчет напряжений в полосе при упругой заделке полосы по краям. В этом случае вместо граничного условия $v = 0$ при $x = \pm a$ следует принять

$$v = \pm \alpha X_y \text{ при } x = \pm a\,[1]),$$

если ограничиться простейшим законом упругой заделки. (Более сложные и, соответственно, более точные законы приведут к решению интегральных уравнений.)

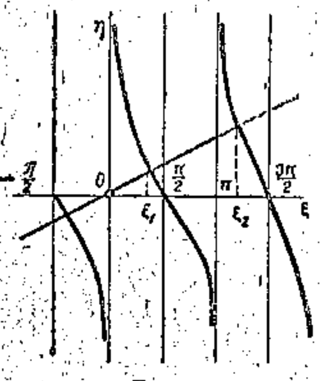

Рис. 4.

Точно так же без труда можно решить с тем же приближением задачу о полосе конечной длины, считая ее, например, закрепленной жестко по прямой $y = l$.

В качестве примера рассмотрим полосу шириной $2a$, упруго заделанную по краям $x = \pm a$ и жестко по концу $y = l$, несущую нагрузку на конце $y = 0$ (рис. 4).

Положив, как и выше, перемещение u равным нулю, мы получим для v уравнение:

$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

[1]) Коэфициент $\frac{1}{\alpha}$ в сварочном деле принимается равным 150 000 $кг/см^2$.

для которого

$$v=\left(A\cos kx+B\sin kx\right)\left(Ce^{my}+De^{-my}\right),\quad m=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}\,k$$

служит частным решением.

Из условия v при $y=l$ имеем:

$$Ce^{ml}+De^{-ml},$$

после чего получим:

$$v=(A'\cos kx+B'\sin kx)\operatorname{sh} m(l-y),$$

где A' и B' — новые константы.

Если ограничиться лишь симметричными случаями загружения полосы, т. е. считать

$$v(+x)=v(-x),$$

то следует принять

$$B'=0.$$

Далее, при предположении $u=0$, следует:

$$X_y=\mu\frac{\partial v}{\partial x}=-\mu kA'\sin kx\operatorname{sh} m(l-y),$$

и условие

$$v=\mp\alpha X_y \quad \text{при } x=\pm a$$

примет вид:

$$A'\cos ka\operatorname{sh} m(l-y)=\alpha\mu kA'\sin ka\operatorname{sh} m(l-y),$$

откуда

$$\operatorname{ctg} ka=\alpha\mu k$$

трансцендентное уравнение для определения значения k.

Если $\alpha=0$, то вернемся к предыдущей задаче и получим

$$ka=\frac{\pi}{2}+n\pi.$$

Если же α не нуль, то значения k можно получить, определяя абсциссы точек пересечения кривой (рис. 4)

$$\eta=\operatorname{ctg}\xi$$

с прямой

$$\eta=\frac{\alpha\mu}{a}\xi,$$

где положено

$$\xi=ka.$$

Легко при этом заметить, что корней будет бесчисленное множество, каждый из корней будет расположен в интервале

$$\left(n\pi,\ n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

и, по мере возрастания числа n, будет стремиться к значению $n\pi$. Обозначая соответствующий числу n корень через k_n, получим частное решение уравнения для v в виде:

$$v = A'_n \cos k_n x \operatorname{sh} m_n (l - y), \quad \text{где} \quad m_n = k_n \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}.$$

Бесконечная сумма

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos k_n x \operatorname{sh} m_n (l - y),$$

при условии ее сходимости, будет также являться решением уравнения, удовлетворяющим граничным условиям задачи на краях $x = \pm a$ и $y = l$.

На крае полосы $y = 0$ получим для напряжений Y_y значение:

$$Y_y = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} = (\lambda + 2\mu) \sum m_n A_n \cos k_n x \operatorname{ch} m_n l.$$

А так как на границе Y_y должно обращаться в функцию $p(x)$, то имеет место:

$$p(x) = \sum (\lambda + 2\mu) m_n A_n \cos k_n x \operatorname{ch} m_n l.$$

Коэфициенты A_n могут быть определены обычным приемом, применяющимся в рядах Фурье.

Умножим правую и левую части равенства на $\cos k_j x$ и проинтегрируем в пределах от $x = -a$ до $x = +a$.

Если $j_n \neq n$, то будем иметь:

$$\int_{-a}^{+a} \cos k_n x \cos k_j x \, dx = \Bigg|_{-a}^{+a} \frac{k_j \cos k_n x \sin k_j x - k_n \sin k_n x \cos k_j x}{k_j^2 - k_n^2} =$$

$$= \frac{2}{k_j^2 - k_n^2} \sin k_j a \sin k_n a \, (k_j \operatorname{ctg} k_n a - k_n \operatorname{ctg} k_j a) = 0,$$

ибо

$$\operatorname{ctg} k_n a = a\mu k_n \text{ и } \operatorname{ctg} k_j a = a\mu k_j$$

согласно уравнению, определяющему корни k_j.

Если $j = n$, то

$$\int_{-a}^{+a} \cos^2 k_n x \, dx = a + \frac{\sin 2k_n a}{4k_n}.$$

Таким образом получается

$$A_n = \int_{-a}^{+a} p(x) \cos k_n x \, dx \cdot \frac{1}{(\lambda + 2\mu)\, m_n \left(a + \frac{\sin 2k_n a}{4k_n}\right)}.$$

Напряжение X_y на грани $y = 0$ может быть подсчитано, как в предыдущей задаче, по формуле:

$$X_y = \mu \frac{\partial v}{\partial x} = -\mu \sum k_n A_n \sin k_n x \operatorname{sh} m_n (l - y).$$

Для ориентировочного расчета предположим, что усилие $p(x)$ распределяется по закону:

$$p(x) = P_1 \cos k_1 x,$$

где k_1 наименьший корень уравнения:

$$\operatorname{ctg} ka = \alpha \mu k.$$

Величина P_1 определится из соотношения:

$$P = \int_{-a}^{+a} P_1 \cos k_1 x dx = \frac{2}{k_1} P \sin k_1 a b = 2abP_1 \frac{\sin k_1 a}{k_1 a},$$

и, таким образом,

$$P_1 = \frac{P}{2ab} \frac{k_1 a}{\sin k_1 a} = \sigma \frac{k_1 a}{\sin k_1 a},$$

где σ — среднее растягивающее напряжение в полосе.

Подставляя выражение для $p(x)$ в соотношение

$$p(x) = (\lambda + 2\mu) \sum m_n A_n \cos k_n x \operatorname{ch} m_n l,$$

замечаем, что все коэфициенты A_n, за исключением A_1, следует положить равными нулю. Имеем:

$$A_1 = -\sigma \frac{a k_1}{(\lambda + 2\mu)\, m_1 \sin k_1 a \operatorname{ch} m_1 l}.$$

Подставляя значения коэфициентов A в выражение для касательного напряжения X_y, получим

$$X_y = -\mu\sigma \frac{a k_1^2 \sin k_1 x \operatorname{sh} m_1 (l - y)}{(\lambda + 2\mu)\, m_1 \sin k_1 a \operatorname{ch} m_1 l}.$$

Максимального значения касательное напряжение достигает в точке $x = \pm a$, $y = 0$, ибо

$$k_1 a_1 < \frac{\pi}{2}.$$

При этом, замечая, что

$$m_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}\, k_1,$$

получим

$$\max X_y = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}\, \sigma k_1 a \operatorname{tgh} m_1 l,$$

где величина $k_1 a$ находится решением уравнения:

$$\operatorname{ctg} ak = \alpha \mu k.$$

Заметим, что абсолютно жесткому закреплению соответствует значение коэфициента $\alpha = 0$, при этом

$$k_1 a = \frac{\pi}{2},$$

и если, кроме того, будем считать длину полосы l очень большой, то получим

$$\max X_y = \frac{\pi}{2} \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma,$$

формула, выведенная ранее для случая абсолютно жесткого закрепления. Таким образом, в случае упругой заделки, касательное напряжение меньше, чем в случае жесткого закрепления, ибо

$$k_1 a < \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} m_1 l < 1.$$

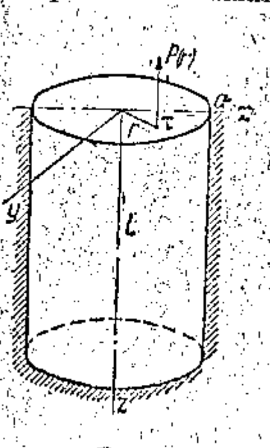

Рис. 5.

Рассмотрим теперь аналогичную пространственную задачу теории упругости, именно задачу о распределении напряжений в круговом цилиндре длиной l, упруго заделанного по боковой поверхности и жестко по нижнему основанию (рис. 5). По верхнему основанию будем предполагать некоторое распределенное нормальное усилие p и касательное τ.

Расположим начало координат в центре верхнего сечения и направим ось z по оси цилиндра, а оси x и y в плоскости сечения.

Основную роль в данной задаче будут играть смещения w и поэтому в уравнениях равновесия:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v = 0 \quad \left(\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w = 0,$$

в первом приближении можно пренебречь перемещениями u и v. При этом, согласно общей теории, развитой в начале этой работы, следует ввести соответствующие компоненты массовых сил X и Y. Что же касается компоненты Z массовых сил, то можно найти такое решение для w, чтобы эта компонента отсутствовала. Таким образом, для единственной неизвестной функции получим уравнение Лапласа:

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0,$$

а компоненты массовых сил найдутся из соотношений:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}=X,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}=Y.$$

Считая распределение напряжений на свободном основании цилиндра осесимметричным, будем искать частное решение уравнения Лапласа в виде:

$$w=R(r)\cdot Z(z),\ r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

При этом будем иметь:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=Z\frac{dR}{dr}\frac{x}{r},\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=Z\frac{d^2R}{dr^2}\frac{x^2}{r^2}-Z\frac{dR}{dr}\frac{x^2}{r^3}+Z\frac{dR}{dr}\frac{1}{r}\ \text{и}\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{d^2Z}{dz^2}R.$$

Подставляя значения производных в уравнение Лапласа, получим:

$$(\lambda+2\mu)R\frac{d^2Z}{dz^2}+\mu Z\left(\frac{d^2R}{dr^2}\frac{x^2+y^2}{r^2}-\frac{dR}{dr}\frac{x^2+y^2}{r^3}+2\frac{dR}{dr}\frac{1}{r}\right)=0,$$

откуда

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{Z''}{Z}=-k^2,$$

где k^2 не может быть ни функцией r, ни функцией z и, следовательно, может быть лишь постоянной. Поэтому для определения функции $R(r)$ и $Z(z)$ имеем два уравнения:

$$Z''-m^2Z=0,\ \text{где}\ m^2=\frac{\mu}{\lambda+\mu}k^2,$$

$$R''+\frac{1}{r}R'+k^2R=0$$

и, следовательно,

$$Z=Ae^{mz}+Be^{-mz},$$
$$R=CJ_0(kr)+DI_0(kr),$$

где $J_0(kr)$ и $I_0(kr)$ — функции Бесселя первого и второго рода.

Итак, частное решение имеет вид:

$$w=(Ae^{mz}+Be^{-mz})(CJ_0(kr)+DI_0(kr)).$$

Из условия обращения перемещения w в нуль, при $z=l$, получим:

$$Ae^{ml}=-Be^{-ml}=-\frac{1}{2}A',$$

где A' — новая константа.

А так как

$$Ae^{mz}+Be^{-mz}=A'\frac{1}{2}\left(-e^{m(z-l)}+e^{-m(z-l)}\right)=A'\operatorname{sh}m(l-z),$$

то

$$w=A'\operatorname{sh}m(l-x)\,(CJ_0(kr)+DI_0(kr)).$$

Перемещение w должно быть всюду конечным, поэтому постоянная D должна обращаться в нуль, ибо при $r=0$, т. е. на оси цилиндра, функция $I_0(kr)$ обращается в бесконечность.

Таким образом,

$$w=A\operatorname{sh}m(l-z)\,J_0(kr),\ \text{где } A \text{ — константа.}$$

Если длина цилиндра весьма велика, то выражение для w будет иметь вид:

$$w=Ae^{-mz}J_0(kr).$$

Вследствие осевой симметрии достаточно рассмотреть выполнения условий на боковой поверхности для точек цилиндра, расположенных, например, на прямой $y=0$, $x=a$.

Касательное усилие на боковой поверхности цилиндра в точках этой прямой будет иметь вид:

$$X_y=\mu\frac{\partial w}{\partial x}=Ake^{-mz}J_0(kr)\frac{x}{r}\bigg|_{x=a}=kAe^{-mz}J_0'(ka).$$

Предполагая заделку упругой, следует, как и ранее, положить на границе

$$w=-\alpha X_y,$$

и, таким образом,

$$Ae^{-mz}J_0(ka)=-\alpha kAe^{-mz}J_0'(ka),$$

откуда получаем уравнение

$$J_0(ka)=-\alpha kJ_0'(ka)$$

для определения величин k.

Так как

$$J_0'(ka)=-J_1(ka),$$

где $J_1(ka)$ — функция Бесселя первого порядка, то отыскание корней уравнения, приведенного выше, не представит больших затруднений, ибо таблицы функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$ имеются[1]).

---

[1]) См., например, Р.О. Кузьмин, Бесселевы функции, ГНТИ, 1933.

В частности для случая жесткого закрепления боковой поверхности цилиндра будем иметь уравнение:

$$J_0(ka) = 0,$$

первыми корнями которого служат числа:

$$ka = 2{,}40;\ 5{,}52;\ 8{,}65.$$

Очевидно, что бесконечная сумма

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-m_n z} J_0(k_n r)$$

также будет являться решением уравнения Лапласа для функции w, в предположении, что цилиндр имеет бесконечную длину. Если же длина цилиндра конечна, то соответствующее выражение будет иметь вид:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} m_n (l - z) J_0(k_n r),$$

где k_n — корень уравнения

$$J_0(ka) = -\alpha k J_0'(ka).$$

Для нормального напряжения на верхнем основании цилиндра получим выражение:

$$J_z = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} = \sum - m_n(\lambda + 2\mu) A_n e^{-m_n z} J_0(k_n r)\Big|_{z=0} =$$

$$= \sum - m_n(\lambda + 2\mu) A_n J_0(k_n r).$$

По условию задачи, это напряжение равно заданной нагрузке $p(r)$.

Таким образом,

$$p(r) = \sum - m_n(\lambda + 2\mu) A_n J_0(k_n r),$$

что представляет собой разложение функции $p(r)$ в ряд по бесселевым функциям нулевого порядка. Для определения коэфициентов A_n следует умножить обе части равенства на $rJ_0(kr)$ и проинтегрировать в пределах от 0 до a. По свойству функций Бесселя и учета соотношений между $J_0(ka)$ и $J_0'(ka)$, приведенного выше, для $i \neq n$ будем иметь:

$$\int_0^a r J_i(k_i r) J_0(k_n r)\, dr = 0$$

и для $l=n$:

$$\int\limits_0^a rJ_0^2(k_nr)dr=\frac{1}{2}a^2J_1(k_1a)=\frac{a^2}{2ak_n}J_0(k_na).$$

Вследствие этого для коэфициента A_n в разложении функции $p(r)$ получим значение:

$$A_n=-\frac{1}{m_n}\int\limits_0^a\frac{2}{a^2J_1(k_na)}r'p(r)J_0(kr)\,dr.$$

Касательное усилие τ, возникающее на боковой стенке цилиндра, может быть определено, вследствие симметрии, подсчетом напряжения Z_x на прямой $x=a$, $y=0$:

$$Z_x=\mu\frac{\partial w}{\partial x}=\mu\sum k_nA_n\operatorname{sh}m_n(l-z)J_0'(k_nr)\frac{x}{r}\bigg|_{x=r=a}.$$

Максимальной величины касательное усилие достигает у верхнего основания цилиндра и имеет значение

$$\mu\sum k_nA_n\operatorname{sh}m_nl\,J_0'(k_na),$$

в случае цилиндра конечной длины, и значение

$$\mu\sum k_nA_nJ_0'(k_na)$$

— в случае цилиндра бесконечной длины.

Приведем пример. Пусть нагрузка $p(r)$ на основание цилиндра распределяется по закону

$$p(r)=BJ_0(k_1r)=-m_1A_1(\lambda+2\mu)J_0(k_1r),\text{ т. е. }A_1=\frac{-B}{m_1(\lambda+2\mu)},$$

где

$$k_1=\frac{2{,}40}{a}.$$

Если равнодействующая всей нагрузки составляет величину P, то имеет место соотношение:

$$P=\int\limits_0^a2\pi r\,p(r)\,dr=2\pi B\int\limits_0^a rJ_0(k_1r)\,dr=2\pi B\frac{a}{k_1}J_0'(ka)=$$

$$=-2\pi m_1(\lambda+2\mu)aA_1\frac{J_0'(ka)}{k_1}.$$

Действительно, функция $J_0(k_1r)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2J_0}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dJ_0}{dr}+k_1^2J_0(k_1r)=0.$$

Откуда следует:

$$k_1^2\int\limits_0^a J_0(k_1 r)\, r dr=\int\limits_0^a\left(r\frac{d^2J_0}{dr^2}+\frac{dJ_0}{dr}\right)dr=r\frac{dJ_0}{dr}\Bigg|_0^a=rk_1\frac{dJ_0}{d(k_1 r)}\Bigg|_0^a.$$

Выражение для максимального касательного усилия примет для этого случая вид:

$$\tau=\mu k_1 A_1 J_0'(ka)=-\mu k_1^2\frac{P}{2\pi a m_1(\lambda+2\mu)},$$

в случае бесконечно длинного цилиндра, и выражение

$$\tau=\mu k_1^2\frac{P\,\mathrm{ch}\, m_1(l-z)}{2\pi a m_1(\lambda+2\mu)\,\mathrm{sh}\, m_1 l}$$

— для цилиндра конечной длины.

Считая, как и в случае полосы $\lambda=2\mu$, получим для бесконечно длинного цилиндра, жестко закрепленного по боковой грани, касательное усилие

$$|\tau|=\mu\frac{k_1^2 P}{2\pi a(\lambda+2\mu)\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}\,k_1}=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}\,\frac{2{,}40}{2}\,\frac{P}{\pi a^2}\approx 0{,}6\,\sigma,$$

где σ — среднее растягивающее напряжение по верхнему основанию цилиндра.

Полученной формулой можно пользоваться при ориентировочных расчетах резьбы, анкерных болтов, пайки по цилиндрической поверхности и т. п.

Как уже было показано на примере полосы, следует уменьшать нагрузку $p(r)$ у края цилиндра, чтобы избежать возможных концентраций напряжений и, следовательно, срыва резьбы или пайки и у края закрепления. Поэтому и здесь следует придавать выходящей части бруса некоторое сужение, как это было показано на рис. 3.

Заметим, что подобным же образом, т. е. пренебрежением перемещения u в плоской задаче, может быть развита более простая теория расчета балки, лежащей на упругом основании.

A. Schlinsky

L'APPLICATION DE LA MÉTHODE SEMI-RÉVERSIBLE À LA SOLUTION APPROXIMATIVE DE CERTAINS PROBLÈMES DE LA THÉORIE D'ÉLASTICITÉ

RÉSUMÉ

Si en procédant à la résolution d'un problème quelconque de la théorie d'élasticité on prend une partie de composantes de déplacement, l'autre partie se trouvand déterminée de façon que

es équations de la théorie d'élasticité soient aisément vérifiées, on pourra obtenir des solutions approximatives pour toute une série de problèmes pratiques.

L'étude ci-dessus traite le problème d'une barre rigide, fixée à ses extrêmités, qu'on chargerait à l'une des extrêmités d'efforts de tension. Un problème analogue est posé par rapport au cylindre.

Les solutions obtenues ont une importance pratique pour le calcul des jonctions soudées ou rivées des chevilles à barbe, de la coupe, de la soudure etc.