ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК 1944, № 9 CLASSE DES SCIENCES TECHNIQUES

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ СТАТИСТИКИ К ОПИСАНИЮ ЗАКОНОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕЛ

Представлено академиком *Н. Е. Кочиным*

Простейшие законы деформирования не вполне упругих и пластических тел выражают линейные соотношения между напряжением, деформацией и их производными по времени[1]. Характер этих соотношений может быть для одного и того же материала различным и зависит от величин напряжений, деформаций и их производных по времени.

Качественная сторона деформирования реальных тел описывается такими законами в общем удовлетворительно, однако количественные соотношения, определяемые ими, подчас весьма сильно отличаются от действительности. Попытки изменить законы таким образом, чтобы они точнее описывали деформирование реальных тел, приводят к увеличению числа констант, входящих в математическое выражение этих законов, причем эти константы перестают иметь наглядно физический смысл.

Вместе с тем неоднородность микроструктуры материалов и большой диапазон изменения некоторых величин, характерных для деформации данного материала (например, предела упругости), позволяют надеяться, что, представляя себе реальное тело в виде конструкции весьма большого числа элементов с простейшими законами деформирования, но с разными константами, входящими в выражение этих законов, можно, подбирая соответствующим образом распределение таких элементов, описывать в достаточной мере точно деформирование реальных тел и с количественной стороны. Автором приведено ниже несколько примеров, иллюстрирующих это положение применительно к деформации простого растяжения-сжатия. При этом деформирующееся тело представляется состоящим из большого числа геометрически одинаковых волокон, ориентированных по направлению растягивающей или сжимающей силы P. Относительное удлинение-сжатие всех волокон будет одинаково, а усилия, приходящиеся на отдельные волокна, будут различаться вследствие разницы констант, которые входят в закон деформирования волокон. Ограничимся различием в значениях одной константы, причем будем считать ее существенно положительной величиной. Пусть на долю волокон, у которых значение константы заключено в пределах

$$\alpha, \alpha + d\alpha,$$

приходится площадь поперечного сечения, равная

$$Fp(\alpha)d\alpha,$$

[1] А. Ю. Ишлинский. Линейные законы деформирования не вполне упругих тел. ДАН XXVI, № 1, стр. 23

где F — площадь всего сечения растягиваемого тела, а $p(\alpha)$ — некоторая функция распределения данной константы, удовлетворяющая очевидному соотношению

$$\int_0^\infty p(\alpha)\, d\alpha = 1.$$

Напряжение σ каждого волокна, помимо общих обстоятельств деформирования тела, определяется также значением константы α для данного волокна. Поэтому общее усилие, развиваемое по поперечному сечению тела, представится выражением

$$P = F \int_0^\infty \sigma p(\alpha)\, d\alpha,$$

где σ есть некоторая функция α и других параметров, например величины деформации и времени.

Считая, что волокна с разными константами расположены беспорядочным образом относительно друг друга и сечения их исчезающе малы, можно принять усилие, которое приходится на некоторую часть площади, пропорциональным величине этой площади.

Отношение

$$\frac{T}{F} = \bar{\sigma}$$

представит, таким образом, напряжение растяжения-сжатия материала в обычном понимании этого термина, являясь вместе с тем статическим средним напряжений отдельных волокон. Очевидно, что

$$\bar{\sigma} = \int_0^\infty \sigma p(\alpha)\, d\alpha.$$

В качестве первого примера рассмотрим случай линейного упрочнения отдельных волокон, имеющих разные пределы пропорциональности σ_s, но одинаковые модули упругости E и коэффициенты упрочнения h. При монотонном растяжении волокон имеем последовательно

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{при } \varepsilon < \alpha,$$

где $\alpha = \sigma_s / E$ и

$$\sigma = \varepsilon\alpha + h(\varepsilon - \alpha) \quad \text{при } \varepsilon > \alpha.$$

Для среднего напряжения получаем выражение

$$\bar{\sigma} = \int_0^\varepsilon \left[E\alpha + h\;(\varepsilon - \alpha)\right] p(\alpha)\, d\alpha + \int_\varepsilon^\infty E\varepsilon p(\alpha)\, d\alpha.$$

Последовательно дифференцируя это выражение ε по переменной ε, получаем:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} = \int_0^\varepsilon h p(\alpha)\, d\alpha + \int_\varepsilon^\infty E p(\alpha)\, d\alpha \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^2} = -(E - h)\, p(\varepsilon).$$

Таким образом при известном аналитическом выражении зависимости $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\varepsilon)$ нахождение функций распределения $p(\alpha)$ не представляет труда. Заметим, что при ограниченной по своему значению функции $p(\alpha)$ имеем

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} = \int_0^\infty E p(\alpha)\, d\alpha = E \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} = h \quad \text{при} \quad \varepsilon \to \infty.$$

Следовательно, константа E равна угловому коэффициенту графика $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$, а константа h — при $\varepsilon \to \infty$ (при достаточно больших, но не превышающих временного сопротивления напряжениях).

Кроме того, так как $p(\alpha) \geqslant 0$, то

$$\frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^2} \leqslant 0$$

и, следовательно, кривая графика обращена выпуклостью кверху. Пусть, например, имеет место

$$p(\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha < \alpha_1, \quad p(\alpha) = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad \text{при} \quad \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2,$$
$$p(\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha > \alpha_2.$$

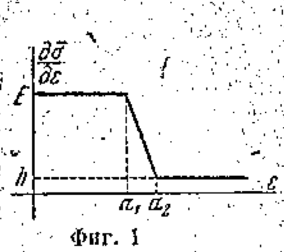
На основании формулы

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} = -(E - h) \int_0^{\varepsilon} p(\alpha)\, d\alpha + E$$

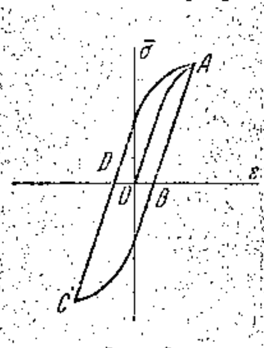
получаем (фиг. 1)

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} = E \quad \text{при} \quad \varepsilon \leqslant \alpha_1, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} = E - \frac{(E-h)(E-\alpha_1)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \quad \text{при} \quad \alpha_1 \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha_2,$$
$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon} = h \quad \text{при} \quad \varepsilon \geqslant \alpha_2.$$

Интегрируя выражение производной $\partial \bar{\sigma} / \partial \varepsilon$ или, что проще, подсчитывая соответствующим образом площади на графике этой производной (аналогично построению эпюры изгибающих моментов по эпюре перерезывающих силы в сопротивлении материалов), получаем



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon \leqslant \alpha_1, \quad \bar{\sigma} = E\varepsilon - (E - h)\frac{(\varepsilon - \alpha_1)^2}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad \text{при} \quad \alpha_1 \leqslant \varepsilon \leqslant \alpha_2,$$
$$\bar{\sigma} = E\alpha_1 + \frac{E+h}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) + h(\varepsilon - \alpha_2) \quad \text{при} \quad \varepsilon > \alpha_2.$$

График зависимости $\bar{\sigma}$ от ε, построенный на основании этих формул, имеет вид, показанный на фиг. 2, и близок по форме к диаграмме растяжения некоторых сортов стали.

Если учесть характер зависимости напряжения $\bar{\sigma}$ от деформации ε для отдельного волокна при переходе от его растяжения к последующему сжатию и обратно, то получим для диаграмм $(\varepsilon, \bar{\sigma})$ петлю гистерезиса, близкую по форме к наблюдаемым (фиг. 2).

Рассмотрим более подробно построение петли гистерезиса для случаев

$$p(\alpha) = \frac{1}{\beta} \quad \text{при} \quad \alpha < \beta \quad \text{и} \quad p(\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha > \beta,$$

причем будем считать β достаточно большим числом, а коэффициент упрочнения h равным нулю. Тогда закон деформирования волокна, предел упругости которого равен $E\alpha$, примет вид

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{при } \varepsilon < \alpha, \quad \sigma = E\alpha \quad \text{при } \varepsilon > \alpha,$$

если до деформации волокно находилось в естественном состоянии.

Величина среднего напряжения всего материала при деформировании его из естественного состояния определяется выражением

$$\bar{\sigma} = \int_0^\infty \sigma p(\alpha)\, d\alpha = \int_0^\varepsilon E\alpha \frac{1}{\beta}\, d\alpha + \int_\varepsilon^\infty E\varepsilon \frac{1}{\beta}\, d\alpha = E\varepsilon - E\frac{\varepsilon^2}{2\beta}.$$

Пусть деформация ε достигла некоторого значения a, после чего начала уменьшаться до значения $-a$, а затем вновь увеличиваться. Волокна, предел упругости которых выше величины Ea, будут изменять свое напряжение по закону Гука

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon,$$

Что же касается волокон с пределами упругости, меньшими Ea, то при уменьшении деформации напряжение в них будет изменяться по закону

$$\bar{\sigma} = E\alpha - E(a - \varepsilon),$$

пока не будет достигнуто напряжение $\sigma = -E\alpha$ (фиг. 3). Это произойдет при значении деформации

$$\varepsilon = a - 2\alpha,$$

после чего, т. е. при $-a < \varepsilon < a - 2\alpha$, для таких волокон будет иметь место постоянное напряжение

$$\sigma = -E\alpha.$$

Таким образом при данном значении деформации ε имеют место три группы волокон: со значением коэффициента α, большим a, со значением α, заключенным в пределах $\left(a, \frac{a-\varepsilon}{2}\right)$, и, наконец, со значением коэффициента α, меньшим $\frac{a-\varepsilon}{2}$. Соответственно получаем

$$\bar{\sigma} = \int_0^\infty \sigma p(\alpha)\, d\alpha = \int_0^{\frac{a-\varepsilon}{2}} (-E\alpha)\frac{1}{\beta}\, d\alpha + \int_{\frac{a-\varepsilon}{2}}^{\varepsilon} [E\alpha - E(a-\varepsilon)]\frac{1}{\beta}\, d\alpha + \int_a^{\frac{1}{\beta}} E\varepsilon \frac{1}{\beta}\, d\alpha,$$

или, после подсчета интегралов и упрощений,

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon + \frac{E}{4\beta}(a-\varepsilon)^2 - \frac{Ea^2}{2\beta}.$$

На графике зависимости $\bar{\sigma}$ от ε (фиг. 4) деформированию материала из естественного состояния соответствует кривая OA, а деформированию от значения ε, равного a, до значения $-a$ — кривая ABC. Обе кривые представляют собой дуги парабол. При значении $\varepsilon = -a$ имеем

$$\bar{\sigma} = -\left(Ea - \frac{Ea^2}{2\beta}\right),$$

т. е. напряжение $\bar{\sigma}$ принимает значение, обратное тому, какое имело место при $\varepsilon=+a$.

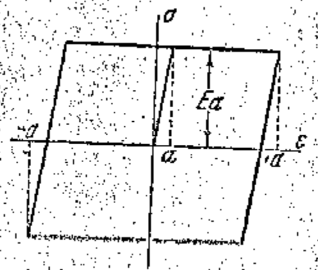
Нетрудно показать, проводя аналогичное рассуждение, что при последующем увеличении деформации ε от $-a$ до $+a$, будем иметь

$$\bar{\sigma}=\int_0^{\frac{a+\varepsilon}{2}} E\alpha\frac{1}{\beta}\,d\alpha+\int_{\frac{a+\varepsilon}{2}}^{a}\left[-E\alpha+E(a+\varepsilon)\right]\frac{1}{\beta}\,d\alpha+\int_a^{\beta}E\varepsilon\frac{1}{\beta}\,d\alpha$$

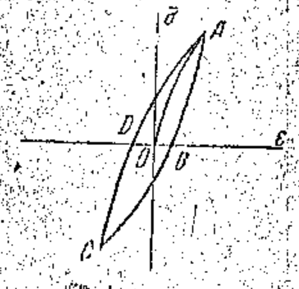
или

$$\bar{\sigma}=E\varepsilon-\frac{E}{4\beta}(a+\varepsilon)^2+\frac{Ea^2}{2\beta}$$

(см. кривую CDA на фиг. 4).



Фиг. 3



Фиг. 4

При $\varepsilon=a$ вновь получаем

$$\bar{\sigma}=Ea-\frac{Ea^2}{2\beta}.$$

Таким образом петля гистерезиса состоит из кусков двух парабол. Площадь, ограниченная этой петлей, имеет величину

$$\frac{E}{3\beta}a^3$$

и представляет собой потерю энергии на одно циклическое деформирование материала.

В теории колебаний систем за меру затухания колебаний принимают отношение потери энергии при одном колебании к полной энергии системы. Последняя пропорциональна квадрату амплитуды колебания. В нашем примере мы имеем дело с затуханием, пропорциональным амплитуде.

Не проводя детального исследования, заметим, что можно дать полную картину затухания колебаний с одной степенью свободы, основываясь на вышеизложенном представлении материала как совокупности идеально пластических волокон с разными пределами упругости. Пусть, например, стержень длиной l, материал которого подчиняется только что описанным законам деформирования, одним концом жестко заделан, а на другом конце несет массу m. Если стержень растянуть, а затем предоставить самому себе, то, пренебрегая собственной массой стержня, будем иметь

$$m\ddot{x}=\bar{\sigma}F=-F\left\{E\varepsilon+\frac{E}{4\beta}(a-\varepsilon)^2-\frac{Ea^2}{2\beta}\right\},\qquad (x=\varepsilon l),$$

где m — величина массы, x — удлинение стержня, a — первоначальное значение удлинения и F — площадь сечения стержня.

Умножим обе части равенства на $2\dot{x}$ и проинтегрируем по времени. Получим

$$m\dot{x}^2 = -\frac{EF}{l}\left\{x^2 - \frac{(la-x)^3}{3\cdot\beta\cdot 2l} - \frac{a^2}{\beta}lx\right\} + \text{const}.$$

Так как в начальный момент времени, т. е. при $x = x_0 = al$, скорость конца стержня $\dot{x}$ равна нулю, то, определяя из этого условия константу интеграции, имеем

$$\frac{ml}{EF}\dot{x}^2 = x_0^2 - x^2 + \frac{(x_0-x)^3}{6\beta l} - \frac{x_0^2}{\beta l}(x_0 - x).$$

К концу первого полуколебания будем вновь иметь $\dot{x} = 0$. Следовательно,

$$0 = x_0^2 - x_1^2 + \frac{(x_0-x_1)^3}{6\beta l} - \frac{x_0^2}{\beta l}(x_0 - x_1),$$

где x_1 — значение x к концу первого полуколебания. Произведя сокращение на множитель $x - x_1$, отличный от нуля, и введя обозначения

$$\frac{x_0}{\beta l} = \varkappa, \qquad x_1 = -(1-\xi)\,x_0,$$

получим уравнение

$$\xi + \frac{\varkappa}{6}(2-\xi)^2 - \varkappa = 0,$$

откуда

$$\xi = \frac{-1 + \frac{2}{3}\varkappa \pm \sqrt{1 - \frac{4}{3}\varkappa + \frac{2}{3}\varkappa^2}}{\frac{1}{3}\varkappa}.$$

Считая параметр $\varkappa$ малым и сохраняя перед радикалом знак плюс, так как $0 < \xi < 1$, получаем с точностью до малых порядка $\varkappa^2$.

$$\xi = \frac{1}{3}\varkappa \quad \text{или} \quad x_1 = -\left(x_0 - \frac{x_0^2}{3\beta l}\right).$$

Таким образом уменьшение амплитуды к концу полуколебания приблизительно пропорционально квадрату начальной амплитуды.

Определение величины x как функции времени приводит к эллиптическим функциям, и, следовательно, продолжительность полуколебания выражается соответствующим эллиптическим интегралом. Трудности, связанные с операциями под эллиптическими функциями, могут быть обойдены при приближенном решении задачи по методу малого параметра, роль которого здесь может играть параметр $\varkappa$, введенный выше.

В качестве второго примера, иллюстрирующего применение статистики к описанию законов деформирования тел, рассмотрим растяжение тела, составленного из волокон, деформирование которых подчиняется закону линейной наследственности

$$\dot{\sigma} + r\sigma = b\dot{\varepsilon} + bn\varepsilon.$$

Модуль быстрых деформирований волокон b и модуль весьма медленных деформирований $bn/r = c$ будем считать у всех волокон одинаковым. Разными у волокон явятся, таким образом, коэффициенты релаксации r и пропорциональные им в данном случае коэффициенты последействия n. Если в начальный момент времени $t = 0$

имеет место $\varepsilon = 0$ и $\sigma = 0$ (естественное состояние волокна), то закон деформирования волокна может быть записан в виде

$$\sigma(t) = b\varepsilon(t) - \int_0^t b(r-n)\, e^{-r(t-\tau)}\, \varepsilon(\tau)\, d\tau.$$

Для среднего напряжения $\overline{\sigma}$ имеем выражение

$$\overline{\sigma}(t) = \int_0^\infty \left\{ b\varepsilon(t) - (b-c)\, r \int_0^t e^{-r(t-\tau)}\, \varepsilon(\tau)\, d\tau \right\} p(r)\, dr, \text{ так как } bn = cr.$$

Переставив порядок интегрирования, получим

$$\overline{\sigma}(t) = b\varepsilon(t) - \int_0^t \varepsilon(\tau) \left\{ (b-c) \int_0^\infty r e^{-r(t-\tau)} p(r)\, dr \right\} d\tau.$$

Вводя обозначение

$$K(\alpha) = (b-c) \int_0^\infty r e^{-r\alpha} p(r)\, dr,$$

приходим к известному закону теории наследственности Вольтерра

$$\overline{\sigma}(t) = b\varepsilon(t) - \int_0^t K(t-\tau)\, \varepsilon(\tau)\, d\tau,$$

где $K(x)$ — ядро релаксации.

Остановимся на одном частном виде функции распределения $p(r)$. Пусть

$$p(r) = 0 \qquad \text{при } 0 < r < a,$$

$$p(r) = \frac{M}{r^{2-\alpha}} \qquad \text{при } a < r < \infty \quad (0 < \alpha < 1).$$

Так как

$$\int_0^\infty p(r)\, dr = \int_a^\infty \frac{M\, dr}{r^{2-\alpha}} = \frac{M}{(1-\alpha)\, a^{1-\alpha}} = 1,$$

то из трех величин: a, M и α произвольно можно задать лишь две. Далее имеем

$$K(x) = (b-c) \int_a^\infty r e^{-rx} \frac{M}{r^{2-\alpha}}\, dr.$$

Вводя переменную $\xi = rx$, получим

$$K(x) = \frac{b-c}{x^\alpha} \int_{ax1}^\infty e^{-\xi}\, \xi^{\alpha-1}\, d\xi.$$

При стремлении переменной x к нулю интеграл, стоящий в правой части равенства, сходится к конечному пределу, так как при $x = 0$ представляет собой гамму-функцию аргумента α.

Таким образом при малых значениях переменной x полученное нами ядро имеет особенность вида $\frac{1}{x^\alpha}$ и, следовательно,

$$K(t-\tau) \approx \frac{(b-c)\,\Gamma(\alpha)}{(t-\tau)^\alpha},$$

если разность $t-\tau$ невелика.

Экспериментальные данные показывают, что ядро релаксации имеет при малых значениях аргумента именно такой характер.

Заметим, что определение функции распределения по данному виду ядра $p(r)$ приводит к решению интегрального уравнения

$$(b-c)\int_{0}^{\infty} re^{-rx}p(r)\,dr = K(x)$$

относительно функции $p(r)$.

Интеграл, стоящий в правой части уравнения, представляет собой лапласову трансформацию над функцией $rp(r)$.

Применяя известное обращение Меллина, получим

$$(b-c)\,rp(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} K(x)\,e^{rx}\,dx,$$

причем положительное число s выбирается таким, чтобы бесконечная прямая, параллельная мнимой оси, по которой производится интегрирование, была бы расположена правее всех особых точек ядра $K(x)$ в комплексной плоскости переменной x.

Существуют способы приближенного подсчета интеграла обращения Меллина, которые пригодны для случая ядра $K(x)$, заданного таблицей или эмпирической формулой[1].

Поступила в редакцию
17 марта 1944 г.

---

[1] См. А. И. Лурье. Операционное исчисление в применении к задачам механики. М.—Л., 1938.