1944 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том XIV, в. 4—5
1944 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. XIV, № 4—5

О СКАЧКАХ ПРИ ТРЕНИИ

А. Ю. Ишлинский и И. В. Крагельский

В литературе за последнее время появилось значительное количество заметок и статей, посвященных вопросу о скачкообразном перемещении соприкасающихся поверхностей, наблюдаемом при малых скоростях скольжения [1, 2, 3].

Указанное явление было положено в основу теории сухого трения, предложенной Боуденом и его сотрудниками.

По Боудену причиной трения являлось сваривание в точках контакта соприкасающихся поверхностей, периодически возникающее при их скольжении. По мнению Боудена, это явление и вызывает скачкообразное перемещение поверхностей [1].

Хайкин [4] указал на неправильность утверждений Боудена, доказывая, что скачки при трении являются механическими релаксационными колебаниями, исследованию которых была посвящена его совместная с Кайдановским работа [5], опубликованная еще в 1933 г.

Указанная работа нашла широкий отклик за границей. Некоторые исследователи, подобно Хайкину, показали, что скачки зависят от механических параметров, измеряющих силу трения системы [6, 7].

В одном из последних номеров Nature Боуден [8] в ответ на эту критику указывает, что наличие скачков безусловно должно зависеть от механичесих параметров системы, напоминая, что это отмечалось им ранее [9]. Однако он полагает, что сами неровности соприкасающихся поверхностей, обладая некоторой упругостью, и являются причиной скачков.

Это утверждение является неправильным, так как частота колебания такой системы должна быть очень высокой, тогда как практически наблюдаемые колебания имеют очень малую частоту.

В чем же истинная причина скачков, как объяснить их и каковы условия их существования?

Анализ явления скачков имеет не только принципиальный интерес, позволяя вскрыть природу трения, но имеет также прикладное значение (вибрация при обработке металлов резанием, невозможность медленного плавного взаимного перемещения частей механизмов и др.).

Эксперимент показывает, что: 1) скачки, имея место при малых скоростях взаимного скольжения, исчезают при увеличении скорости, 2) амплитуда и частота скачков зависят от скорости скольжения, массы ползуна и жесткости системы, 3) первый скачок значительно больше последующих.

Хайкин показал, что скачки будут иметь место в том случае, если система обладает некоторой упругостью и сила трения, как функция скорости, имеет падающую характеристику. Однако эти предположения не позволяют объяснить того, что амплитуда падает при увеличении скорости и что первый скачок больше последующих.

Опыт показывает, что сила трения, как функция скорости (в зоне малых скоростей), имеет возрастающую характеристику [1] [10]. Указан-

[1] Точнее, сила трения, как функция скорости, проходит через максимум, причем для большинства трущихся пар этот максимум лежит в зоне, соответствующей скорости 1—2 м/сек.

ное естественно, исходя из представления о механизме трения, как о процессе вязкого разрушения материала.

С нашей точки зрения, объяснение явления скачка правильнее базировать на учете возрастания силы трения в зависимости от продолжительности неподвижного контакта.

Механический анализ процесса скачкообразного перемещения

Для анализа явления скачка обратимся к следующей механической модели (рис. 1).

Пусть образец A весом Q положен на плоскость B. Образец A посредством пружины, имеющей жесткость c, связан с неподвижной опорой.

Примем, что сила трения T является следующей функцией времени t — продолжительности неподвижного контакта [11]:

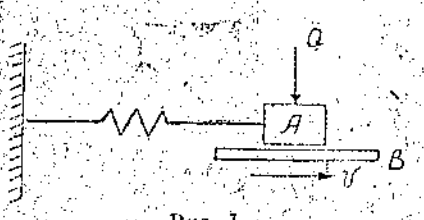

Рис. 1

$$T(t) = T_\infty - (T_\infty - T_0)\, e^{-bt},$$

где T_∞ — сила трения при бесконечно большом времени контакта,
T_0 — сила трения при нулевом времени контакта, равная силе трения скольжения. Примем, что последняя от скорости не зависит [2].

Для описания процесса возникновения упомянутых скачков примем, что образец был положен на плоскость и лежал на ней достаточно долгое время, после чего плоскость пришла в движение и скорость ее стала равной $v = \text{const}$.

Так как образец будет перемещаться вместе с плоскостью, то пружина, прикрепленная одним своим концом к образцу, начнет растягиваться. Очевидно, что когда сила натяжения пружины станет равной максимальному значению силы трения, то образец начнет перемещаться относительно плоскости.

Обозначим через x смещение образца от того его положения, при котором пружина не растянута. Очевидно, что значение $x = x_0$ в момент начала скольжения определится из уравнения:

$$cx_0 = T_\infty. \tag{1}$$

Здесь мы приняли, что максимальная величина силы трения достигла своего наибольшего значения (что будет иметь место лишь спустя бесконечно долгое время).

Далее образец двигается под действием силы пружины и силы трения скольжения, возникающей между образцом и движущейся плоскостью.

Значение силы трения равно $T_0 = \text{const}$, причем $T_0 < T_\infty$. Это движение будет колебательным около положения равновесия $x = a$, определяемого соотношением $ca = T_0$.

В начальный момент движения скорость образца равна скорости движущейся плоскости, т. е. равна v.

Образец перемещается по плоскости до того момента, при котором скорость его не примет вновь значения v.

Нетрудно видеть (см. рис. 2), что значение скорости, равное v

[2] Это приближение допустимо, поскольку рассматриваемый нами процесс протекает в зоне малых скоростей скольжения.

образец будет иметь в тот момент, когда значение $x = x_1$ будет определяться равенством:

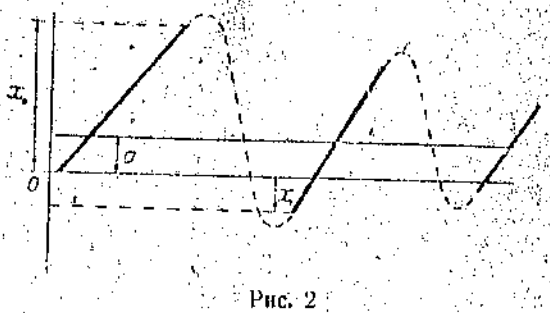
Рис. 2

$$x_1 = 2a - x_0,$$

так как

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = a.$$

Дальнейшее перемещение образца по плоскости невозможно потому, что в этот момент сила трения меняет свой знак, а величина ее оказывается больше упругой силы пружины.

Таким образом, образец вновь начнет двигаться вместе с плоскостью до тех пор, пока сила натяжения пружины не станет опять равной силе трения при некотором значении $x = x_2$.

Чтобы найти значение x_2 и время t_2, надо решить уравнение:

$$c(x_1 + vt_2) = T(t_2), \tag{2}$$

так как $x_2 = x_1 + vt_2$, а максимальное значение силы трения к моменту нового срыва будет определяться временем t_2 неподвижного контакта образца с плоскостью.

Далее образец совершит новое колебательное движение, которое при значении $x = x_3 = 2a - x_2$ перейдет в равномерное движение вместе с плоскостью. Затем, при некотором значении $x = x_4$ еще раз произойдет срыв образца и т. д.

Может случиться, что последовательность величин $x_0, x_2, x_4, \ldots$ будет стремиться к некоторому значению $x = b$, отличному от a, т. е. установятся релаксационные колебания. Если же эта последовательность будет стремиться к значению $x = a$, то скачки прекратятся, образец будет стоять на месте и сила натяжения пружины будет уравновешиваться силой трения скольжения плоскости по образцу.

Условия существования скачков

Определим те условия, при которых возможны релаксационные колебания.

Если колебания установились, то в предыдущем рассуждении значение x в момент начала срыва следует считать равным b, а в момент сцепления с плоскостью — равным $2a - b$. Время, в течение которого образец будет перемещаться вместе с плоскостью, будет равно частному от деления разности этих величин на скорость плоскости, т. е.

$$t = \frac{2b - 2a}{v}, \tag{3}$$

откуда

$$b = \frac{vt}{2} + a. \tag{3'}$$

С другой стороны, в момент срыва значение силы трения $T(t)$ равно натяжению пружины cb, поэтому для определения времени t имеем уравнение:

$$T(t) = cb = \left(\frac{vt}{2} + a\right) c. \tag{4}$$

На рис. 3 изображен график изменения силы трения в зависимости от продолжительности неподвижного контакта, а также график изменения натяжения пружины во времени. В момент времени $t=0$ оба графика имеют общую точку, ибо $ca = T_0 = T(0)$.

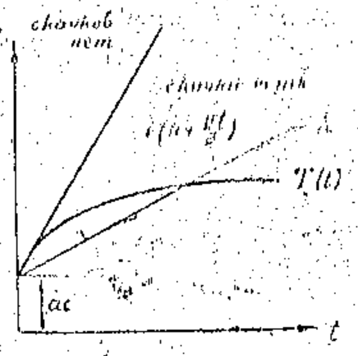

Рис. 3

Эта точка будет единственной, если угол между касательной к кривой $T(t)$ и осью абсцисс в точке $t=0$ будет меньше угла наклона прямой:

$$P = c\left(\frac{vt}{2} + a\right),$$

где P — значение натяжения пружины.

В этом случае релаксационные колебания не будут иметь места.

Если же (что всегда возможно при малом значении скорости v) прямая $T(t)$ пересечет график $P(t)$ также и в другой точке с абсциссой t, то релаксационные колебания будут иметь место. Амплитуду и частоту их, учитывая вышеизложенное, нетрудно определить.

Выше для функции $T(t)$ было предложено выражение:

$$T(t) = T_\infty - (T_\infty - T_0)\, e^{-\delta t}. \tag{5}$$

Дифференцируя это выражение по переменной t и полагая t равным нулю, получим величину $\delta(T_\infty - T_0)$, которая представляет собой тангенс угла наклона касательной к графику $T(t)$ в точке с абсциссой $t=0$. Тангенс угла наклона графика $P(t) = c\left(\frac{vt}{2} + a\right)$, очевидно, равен $\frac{cv}{2}$.

Таким образом, релаксационные колебания будут иметь место, если соблюдаются условия:

$$\delta(T_\infty - T_0) < \frac{cv}{2},$$

или при

$$v < \frac{2(T_\infty - T_0)\,\delta}{c}, \tag{6}$$

т. е. чем больше жесткость системы, тем при меньших значениях скорости будут иметь место релаксационные колебания.

Об устойчивости периодического движения

Покажем, что при выполнении условия (6) релаксационное колебание будет устойчивой формой движения образца, а положение его равновесия $x = a$ будет при этом неустойчиво. Для этого обратимся вновь к кривой зависимости силы трения от времени и рассмотрим при помощи нее процесс установления релаксационных колебаний при любых начальных положениях тела на движущейся плоскости.

Условимся по оси ординат той же диаграммы откладывать значения силы натяжения пружины, как функции времени. Нетрудно видеть, что начальному положению тела при установившемся релаксационном колебании будет соответствовать точка A на оси ординат, отстоящая от прямой $T = T_0$, параллельной оси абсцисс, ровно на такое же расстояние, как и точка B пересечения кривой $T(t)$ с прямой $c\left(\frac{vt}{2}+a\right)$ (см. рис. 4).

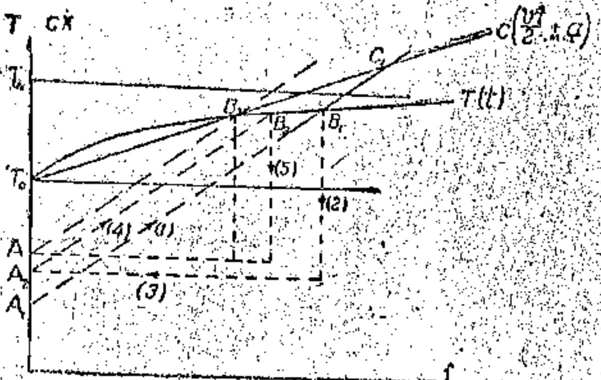

Рис. 4.

Действительно, эти расстояния равны, так как они пропорциональны отклонениям образца от положения равновесия в моменты начала и конца его скольжения по плоскости (т. е. начала и конца срыва). Представим себе, что в начальный момент времени тело было помещено левее (см. рис. 4) того положения, которое соответствует концу срыва при установившемся релаксационном колебании. Этому положению будет соответствовать точка A_1 на оси ординат (рис. 4); тогда сила натяжения пружины будет изменяться по закону прямой, проходящей через точку A_1 параллельно прямой AB, изображающей изменение силы натяжения пружины при установившемся релаксационном колебании. Срыв образца произойдет в момент времени, определяемый абсциссой точки B_1 пересечения прямой изменения силы натяжения пружины с кривой изменения силы трения. Отклонение образца от положения равновесия будет при этом несколько больше, чем при установившемся колебании. Однако нетрудно видеть, что концу скачка или, что то же, началу нового движения образца вместе с плоскостью будет соответствовать точка A_2, находящаяся между точками A_1 и A. Эта точка должна находиться на том же расстоянии от прямой $T = T_0$, как и точка B_1, в то время как точка C_1, находящаяся на том же расстоянии от этой прямой (но по другую ее сторону), как и точка A_1, соответствует пересечению прямой A_1B_1 с прямой $c\left(\frac{vt}{2}-a\right)$. Однако это пересечение произойдет выше кривой $T = T(t)$. Таким образом, при дальнейшем движении образца сила натяжения пружины будет изменяться по прямой A_2B_2, параллельной AB, причем точка B_2 пересечения этой прямой с кривой $T = T(t)$ будет соответствовать началу нового момента срыва, концу которого будет соответствовать точка A_3, находящаяся между точками A_2 и A, и т. д. Следовательно, амплитуда колебаний будет уменьшаться, имея своим пределом установившееся релаксационное колебание.

Если, наоборот, в начальный момент времени поместить образец на плоскости правее того положения, которое соответствует концу срыва при установившемся релаксационном колебании, то, аналогично предыдущему, можно показать, что в этом случае амплитуды последовательных колебаний будут увеличиваться, имея вновь своим пределом амплитуду установившегося релаксационного колебания. Тем самым доказана устойчивость релаксационного движения.

Аналогично, нетрудно показать, что положение равновесия $x = a$, соответствующее точке M кривой $T = T(t)$ при значениях скорости, удовлетворяющих условию (6), будет положением неустойчивого равновесия.

При больших значениях скорости, когда релаксационное движение невозможно, положение равновесия $x=a$ будет устойчивым, что нетрудно увидеть, построив график, аналогичный рис. 4.

О зависимости амплитуды и частоты колебаний от скорости, массы и характера кривой $T=T(l)$

Остановимся теперь на вопросе о величине амплитуды релаксационных колебаний и продолжительности времени одного колебания.

Характер изменения этих величин в зависимости от скорости v движения плоскости нетрудно выяснить, если обратиться к рис. 3.

Ордината точки пересечения прямой $c\left(\frac{vt}{2}+a\right)$ с кривой $T=T(t)$ равна произведению коэффицента жесткости пружины c на то значение координаты $x=b$, при котором происходит срыв. Так как упомянутая ордината увеличивается при уменьшении скорости (ибо при этом точка пересечения удаляется от начала координат), то при достаточно малых значениях скорости v амплитуда релаксационных колебаний всегда тем больше, чем меньше значение v.

Само значение амплитуды может быть найдено из следующих соображений. В момент начала срыва образец имеет скорость v и находится на расстоянии $b-a$ от положения равновесия $x=a$. Так как движение в процессе срыва происходит по гармоническому закону, то на основании общеизвестных формул значение амплитуды составит величину:
$$M=\sqrt{(b-a)^2+k^2v^2},$$
где
$$k^2=\frac{c}{m}\ (\text{ибо}\ \ m\ddot{x}+cx=T_0=ca).$$

Заметим, что по мере увеличения скорости разность $(b-a)$ уменьшается до нуля при предельном значении скорости, при которой скачки исчезают. Интересно отметить, что амплитуда установившихся релаксационных колебаний не стремится к нулю при увеличении скорости, а стремится к значению kv_1, где v_1 — упомянутая предельная скорость. Очевидно, что разность $(v-a)$ является функцией скорости v. Эту функцию нетрудно построить по данным графика рис. 3. Таким образом можно исследовать до конца зависимость амплитуды M от скорости v для заданной кривой $T=T(t)$ и заданного значения параметров c, m, v. Для подсчета периода заметим, что движение образца состоит из двух частей: гармонического движения во время срыва и движения образца вместе с плоскостью со скоростью v. Последнее движение имеет продолжительностью время t, которое на рис. 4 изображается абсциссой точки B. Это время тем меньше, чем больше значение скорости v; оно обращается в нуль при $v=v_1$; что же касается продолжительности гармонического колебания, то оно совершается в течение времени, продолжительность которого больше полупериода и меньше полного периода гармонического колебания, определяемого по известной формуле:
$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

При весьма малых значениях скорости v эта продолжительность практически равна полупериоду. Напротив, при значениях скорости v, близких к предельному значению v_1, она близка к полному периоду. Вообще же она выражается формулой:

$$T'' = \pi\sqrt{\frac{m}{c}} + 2\tau,$$

где величина τ находится из соотношения: $\dfrac{b-a}{\sqrt{(b-a)^2+k^2v^2}} = \cos k\tau.$

Таким образом, полный период установившегося релаксационного колебания может быть выражен формулой:

$$T_\Sigma = 2\frac{b-a}{v} + \pi\sqrt{\frac{m}{c}} + 2\tau,$$

где $2(b-a)$ представляет собой длину пути, совершаемого образцом вместе с плоскостью.

Не составляет трудности при заданном графике $T = T(t)$ и известных величинах c, m, v найти период колебаний. Заметим, что при стремлении скорости v к предельному значению v_1 период колебаний стремится к значению $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}$.

Выводы

1. Причиной скачкообразного перемещения трущихся поверхностей (механических релаксационных колебаний) является наличие упругости системы и увеличение силы трения с увеличением продолжительности неподвижного контакта.

2. Механические релаксационные колебания могут иметь место лишь в том случае, если скорость скольжения v не превышает значения, определяемого неравенством:

$$v < \frac{2(T_m - T_0)\delta}{c}.$$

3. В интервале скорости от 0 до v указанные колебания будут устойчивыми.

4. Амплитуда и период релаксационных колебаний зависят от скорости. При достаточно малых значениях скорости амплитуда колебаний всегда тем больше, чем меньше значение скорости. При увеличении скорости амплитуда релаксационных колебаний стремится к некоторому предельному значению, отличному от нуля.

Период колебаний уменьшается при увеличении скорости. При увеличении скорости он стремится к некоторому предельному значению, отличному от нуля.

5. Первый скачок обычно больше следующих, поскольку перед скольжением образец лежал достаточно длительное время на плоскости.

Литература

[1] Bowden and Leben. Proc. Roy. Soc. A., 169, 371, 1939. — [2] Block SAE. J., 46, 2, Febr. 1940. — [3] Thomas. Phil. Mag., 9, 329, 1930. — [4] Хайкин, Соломонович, Лисовский. Тр. конф. по трению и износу в машинах, I, 480. — [5] Н. Л. Кайдановский и С. Э. Хайкин. ЖТФ, 3, 1, 1933. — [6] Morgan, Muscat and Reed. J. applied Phys., 12, 743, 1941. — [7] Brictow. Nature, 149, 169, 1942. — [8] Bowden and Tabor, 150, 197, 1942. — [9] Bowden, Leben and Tabor. Engineer, London, 168, 214, 1939. — [10] И. В. Крагельский. О зависимости силы трения скольжения от скорости. Тр. Ин-та машиноведения, сб. 1, 1941. — [11] И. В. Крагельский. ЖТФ, 14, 173, 1944.

Поступило в редакцию
6 августа 1943 г.