МИНИСТЕРСТВО СУДОСТРОИТЕЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ
С.С.С.Р.

Журнал "ПРИБОРОСТРОЕНИЕ", 1944г. №1.

А.Ю. И ш л и н с к и й

ГЕОМЕТРИЯ БИКАРДАНОВА ПОДВЕСА.

Геометрия бикарданова подвеса

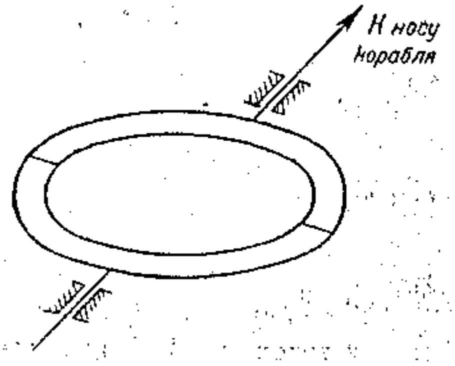
Доктор физико-матем. наук А. Ю. Ишлинский

Карданов подвес является составной частью новейших корабельных артиллерийских и навигационных приборов и служит для создания искусственной горизонтальной площадки для различного рода оптических наблюдений и измерений.

При этом оказывается, что при качке корабля две подобные площадки могут иметь вращение одна относительно другой, если кардановы подвесы их не идентичны и не расположены одинаковым образом относительно корабля. Это обстоятельство может быть причиной заметных погрешностей приборов корабля, фиксирующих направление в горизонтальной плоскости.

Причиной погрешностей приборов может служить также конструктивное различие связанных между собой кардановых подвесов и их приводов.

В данной статье рассмотрим некоторые вопросы геометрии кардановых подвесов с приложениями к подсчету неточности работы комплексов корабельных приборов, происходящей из-за возможной несогласованности расположения и конструкции их.



Фиг. 1.

Рассмотрим карданов подвес (фиг. 1), у которого ось внешнего кольца параллельна продольной оси корабля, т. е. линии пересечения плоскости симметрии корабля с плоскостью палубы.

Угол поворота плоскости этого кольца относительно палубы обозначим через β и будем считать его положительным при повороте кольца против часовой стрелки и при наблюдении с носа корабля.

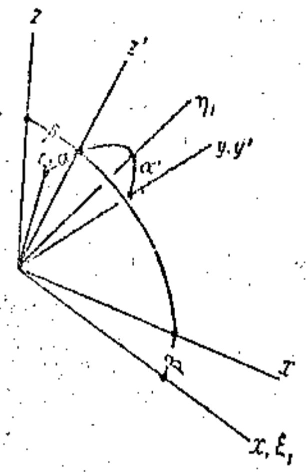
Обозначим через α' угол поворота плоскости внутреннего карданова кольца относительно внешнего, причем будем считать этот угол положительным при повороте внутреннего кольца относительно внешнего против часовой стрелки, если наблюдать с правого борта корабля при угле β, близком к нулю.

Введем в рассмотрение систему координат xyz, связанную с кораблем и имеющую начало координат в центре карданова подвеса. Пусть при этом ось x имеет положительное направление к правому борту и параллельна плоскости палубы, ось y параллельна продольной оси корабля и направлена к носу корабля, а ось z перпендикулярна плоскости палубы и направлена вверх.

Теперь рассмотрим систему координат $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$, связанную с внутренним кардановым кольцом и с началом в центре карданова подвеса. Расположим оси $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ так, чтобы они соответственно совпадали с осями xyz при углах α' и β, равных нулю, т. е. при параллельности плоскости внутреннего кольца и плоскости палубы (см. фиг. 2).

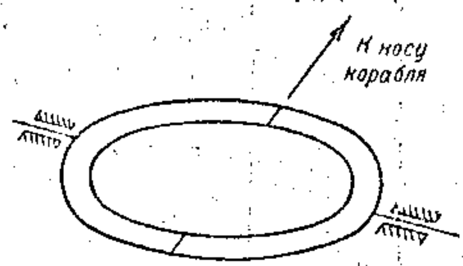
Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае ось ξ_1 направлена по оси внутреннего карданова кольца, а ось ζ_1 перпендикулярна его плоскости.

Заметим, что угол β можно рассматривать как меру двухгранного угла между диаметральной плоскостью корабля и плоскостью, проходящей через продольную ось корабля параллельно оси ζ_1, т. е. угла между плоскостями yz и $y\zeta_1$.



Фиг. 2.

Для дальнейшего существенна таблица косинусов углов между осями систем xyz и $\xi_1\eta_1\zeta_1$. Для составления этой таблицы следует подсчитать проекции на оси xyz отрезков, расположенных на осях $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и равных по



Фиг. 3.

длине единице. При подсчете удобно пользоваться вспомогательной системой координат $x'y'z'$, которая связана с внешним кардановым кольцом и совпадает с осями системы xyz при угле β, равном нулю. Ось y' системы $x'y'z'$ совпадает с осью y системы xyz, а ось x' — с осью ξ_1 системы $\xi_1\eta_1\zeta_1$.

Таблица косинусов углов имеет вид:

	ξ_1	η_1	ζ_1
x	$\cos\beta$	$\sin\alpha'\sin\beta$	$\cos\alpha'\sin\beta$
y	0	$\cos\alpha'$	$-\sin\alpha'$
z	$-\sin\beta$	$\sin\alpha'\cos\beta$	$\cos\alpha'\cos\beta$

Рассмотрим другой карданов подвес, ось внешнего кольца которого перпендикулярна плоскости симметрии корабля (фиг. 3).

Обозначим через α угол поворота плоскости внешнего кольца относительно плоскости палубы, считая его положительным при повороте кольца против часовой стрелки, если наблюдать за вращением со стороны правого борта корабля. Через β' обозначим угол поворота плоскости внутреннего карданова кольца относительно плоскости внешнего кольца. Этот угол будем считать положительным при повороте внутреннего кольца против часовой стрелки, если наблюдать вращение с носа корабля при малом значении угла α.

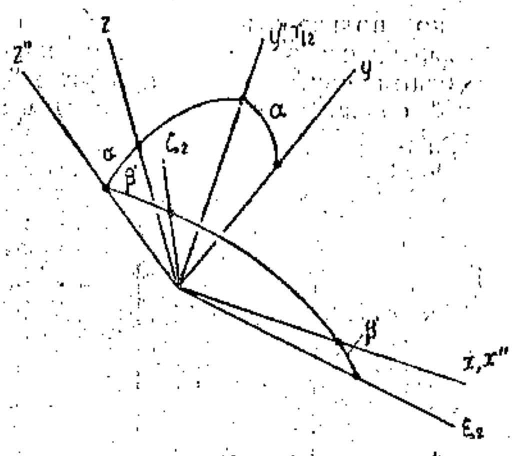
Аналогично предыдущему рассмотрим: а) систему координат xyz, связанную с кораблем осями, соответственно направленными перпендикулярно плоскости симметрии корабля (ось x) к правому борту, параллельно продольной оси к носу корабля (ось y) и, наконец, перпендикулярно плоскости палубы кверху (ось z), и б) систему координат $\xi_2\eta_2\zeta_2$, связанную с внутренним кардановым кольцом и совпадающую с системой xyz при углах α и β', равных нулю. Кроме того, для дальнейшего полезно связать с внешним кардановым кольцом систему координат $x''y''z''$, совпадающую с системой xyz при угле α, равном нулю (фиг. 4).

Ось x'' системы координат $x''y''z''$ постоянно совпадает с осью x системы xyz (ось внешнего кольца), а ось y'' — с осью η_2 системы $\xi_2\eta_2\zeta_2$ (ось внутреннего карданова кольца).

Таблица косинусов между осями координат системы xyz и системы $\xi_2\eta_2\zeta_2$ имеет вид:

	ξ_2	η_2	ζ_2
x	$\cos\beta'$	0	$\sin\beta'$
y	$\sin\beta'\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\beta'\sin\alpha$
z	$-\sin\beta'\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\beta'\cos\alpha$

Для составления этой таблицы необходимо подсчитать проекции на оси x, y, z отрезков, длиною равных единице и расположенных на осях ξ_2, η_2, ζ_2.



Фиг. 4.

Заметим, что угол α можно рассматривать как меру двухгранного угла между плоскостью шпангоута (т. е. плоскостью, перпендикулярной к плоскости палубы и к плоскости симметрии корабля) и плоскостью, проходящей через поперечную ось корабля (перпендикуляр к плоскости симметрии) параллельно оси z (перпендикуляр к плоскости внутреннего карданова кольца). Таким образом угол α есть угол между плоскостями xz и $x\zeta_2$.

Пусть оси ζ_1 и ζ_2 обоих карданов параллельны, тогда, сравнивая между собой косинусы углов этих осей с осями системы координат xyz, получим равенства:

$$\cos\alpha'\sin\beta = \sin\beta'$$

$$-\sin\alpha' = -\cos\beta'\sin\alpha$$

$$\cos\alpha'\cos\beta = \cos\beta'\cos\alpha.$$

Каждое из этих равенств является следствием двух остальных.

Деля первое и второе равенства соответственно на третье, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\alpha\cos\beta,$$

$$\operatorname{tg}\beta' = \operatorname{tg}\beta\cos\alpha.$$

Далее имеем

$$\cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha'}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\beta}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}},$$

$$\sin\alpha' = \operatorname{tg}\alpha'\cos\alpha' = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}}$$

и точно так же

$$\cos\beta' = \frac{1}{R}\cos\beta, \quad \sin\beta' = \frac{1}{R}\sin\beta\cos\alpha,$$

где

$$R = \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Заметим, что величина радикала R весьма близка к единице при малых углах α и β. Например, если $\alpha = 7^\circ$ и $\beta = 15^\circ$, то

$$R = \sqrt{1-0{,}122^2\cdot 0{,}259^2} = \sqrt{1-0{,}00100} \doteq 0{,}99950,$$

т. е. R отличается от единицы на пять сотых процента. Если же $\alpha = 3^\circ$ и $\beta = 7^\circ$, то

$$R = \sqrt{1-0{,}0523^2\cdot 0{,}122^2} = \sqrt{1-0{,}0000408} = 0{,}99998,$$

т. е. отличие становится еще меньшим.

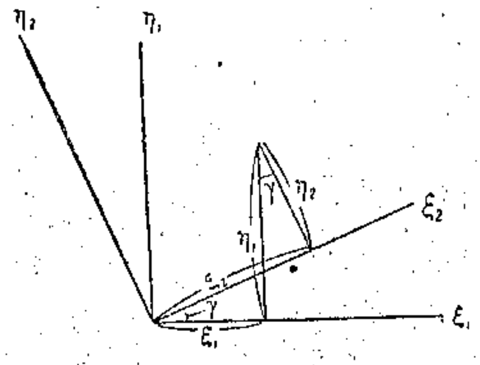
Таблицы косинусов углов между осями систем $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $\xi_2\eta_2\zeta_2$ и осями системы xyz теперь принимают следующий вид:

	ξ_1	η_1	ζ_1
x	$\cos\beta$	$\frac{1}{R}\sin\alpha\sin\beta\cos\beta$	$\frac{1}{R}\cos\alpha\sin\beta$
y	0	$\frac{1}{R}\cos\alpha$	$-\frac{1}{R}\sin\alpha\cos\beta$
z	$-\sin\beta$	$\frac{1}{R}\sin\alpha\cos^2\beta$	$\frac{1}{R}\cos\alpha\cos\beta$

	ξ_2	η_2	ζ_2
x	$\frac{1}{R}\cos\beta$	0	$\frac{1}{R}\sin\beta\cos\alpha$
y	$\frac{1}{R}\sin\beta\cos\alpha\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\frac{1}{R}\cos\beta\sin\alpha$
z	$-\frac{1}{R}\sin\beta\cos^2\alpha$	$\sin\alpha$	$\frac{1}{R}\cos\beta\cos\alpha$

Из рассмотрения этих таблиц следует, что система координат $\xi_2\eta_2\zeta_2$ повернута относительно системы $\xi_1\eta_1\zeta_1$ вокруг общей оси ζ на некоторый угол γ, который будем считать положительным при повороте системы $\xi_2\eta_2\zeta_2$ против часовой стрелки относительно системы координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$, если наблюдать за вращением со стороны положительной части оси ζ.

Необходимо отметить, что если проекции какого-либо отрезка на оси $\xi_1\eta_1$ (фиг. 5) составляют величины соответственно ξ_1 и η_1, а на оси $\xi_2\eta_2$ — ξ_2 и η_2, то между этими проекциями имеет место следующая зависимость:



Фиг. 5.

$$\xi_2 = \xi_1 \cos\gamma + \eta_1 \sin\gamma,$$

$$\eta_2 = -\xi_1 \sin\gamma + \eta_1 \cos\gamma.$$

Например, подставляя вместо ξ_1 и η_1, ξ_2 и η_2 проекции отрезка оси z длиною, равной единице, на оси ξ_1, η_1, ξ_2 и η_2, т. е. соответствующие косинусы углов между этими осями и осью z, получим

$$\frac{1}{R} \sin\beta \cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{R} \cos\alpha \sin\gamma,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{R} \cos\alpha \cdot \cos\gamma,$$

откуда следует, что

$$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta} = R.$$

Таким образом, если установить на корабле два кардановых подвеса так, чтобы ось внешнего кольца одного из них имела направление, параллельное продольной оси корабля, а ось внешнего кольца второго была перпендикулярна плоскости симметрии, затем стабилизировать тем или иным способом плоскости внутренних кардановых колец в горизонтальной плоскости, то стабилизированные кольца будут иметь вращение относительно друг друга при качке корабля.

При угле килевой качки $\alpha = 7°$ и бортовой качки $\beta = 15°$ получим

$$\sin\gamma = 0{,}122 \cdot 0{,}259 = 0{,}0313$$

и

$$\gamma = 1°35'.$$

Если же $\alpha = 3°$ и $\beta = 7°$, то

$$\sin\gamma = 0{,}0523 \cdot 0{,}122 = 0{,}0064$$

и

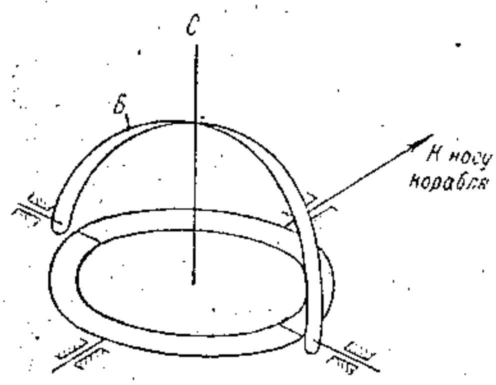
$$\gamma = 20'.$$

Так как величина γ оказывается достаточно большой, то для избежания погрешности стабилизированные в горизонте приборы должны иметь одинаковое относительно корабля расположение кардановых подвесов, если для их работы существенна фиксация какого-либо направления в горизонтальной плоскости.

Многие приборы имеют две кардановых системы, одна из которых является подвесом, а роль другой, имеющей иное конструктивное оформление, сводится к передаче вращения внутреннего карданова кольца относительно внешнего. Таковы, например, кинематические схемы гировертикалей «Газон», «Шар» и других приборов.

Вторая карданова система (фиг. 6) состоит из бугеля *Б*, имеющего прорезь, по которой может перемещаться стержень *C*, влекущий за собой внутреннее карданово кольцо основного подвеса.

Из вышеизложенного следует, что стержень *C* должен иметь некоторую свободу вращения в прорези бугеля, если он составляет одно целое с внутренним кардановым кольцом.



Фиг. 6.

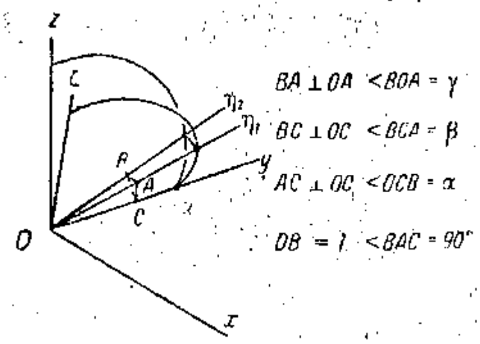
Заметим, что для гировертикалей несущественно (если исключить из рассмотрения конструктивные соображения), как расположена ось бугеля — параллельно продольной оси корабля или перпендикулярно плоскости симметрии, т. к. углы α и β входят в выражения косинусов углов вертикали (оси ζ) с осями xyz корабля совершенно симметрично.

Поэтому, если какой-либо прибор стабилизируется в горизонтальной плоскости при помощи синхронной связи с гировертикалью, а его подвес имеет ту же двукарданову кинематическую схему, что и гировертикаль, то несущественно, как расположены оси бугелей этих подвесов — параллельно или перпендикулярно друг другу.

Теперь изложим элементарный вывод формулы

$$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

для угла взаимного поворота двух параллельных площадок, кардановы подвесы которых имеют перпендикулярные друг к другу оси внешних колец. Будем для определенности считать площадки стабилизированными в горизонтальной плоскости. Углы α и β будут углами килевой и бортовой качки, регистрируемые гировертикалью. Совместим (фиг. 7) мысленно центры обоих кардановых подвесов; рассмотрим оси y, η_1 и η_2, где y — прямая, параллельная продольной оси корабля, η_1 — прямая, лежащая в плоскости внутреннего карданова кольца первого карданова подвеса и совпадающая при углах α и β, равных нулю, с осью y, и, наконец, η_2 — аналогичная прямая второго подвеса. Пусть ось внешнего кольца первого карданова подвеса параллельна продольной оси корабля. Тогда ось η_1 будет лежать в вертикальной плоскости, проходящей через ось y, и образующей с плоскостью yz (параллельной плоскости симметрии корабля) угол β. Так как ось внешнего карданова кольца второго подвеса перпендикулярна плоскости симметрии корабля, то ось η_2 лежит в плоскости yz и образует с осью y угол α.



Фиг. 7.

Возьмем точку B на оси η_2, находящуюся на расстоянии, равном единице от начала координат, и опустим из нее перпендикуляр BA на ось η_1. Длина этого перпендикуляра, очевидно, равна $\sin\gamma$, где γ — угол между осями η_1 и η_2. Так как горизонтальная плоскость

$\eta_1\eta_2$ перпендикулярна вертикальной плоскости $\eta_1 y$, то упомянутый перпендикуляр BA к оси η_1 является одновременно перпендикуляром к плоскости $\eta_1 y$. Построим плоскость, нормальную к оси y и проходящую через перпендикуляр BA. Эта плоскость пересечет плоскости $\eta_1 y$ и $\eta_2 y$ по двум перпендикулярам к оси y, угол между которыми, очевидно, равен β, как мера двухгранного угла между вертикальной плоскостью $\eta_1 y$ и плоскостью yz, содержащей ось η_2. Длина перпендикуляра, лежащего в плоскости $\eta_2 y$, равна $\sin\alpha$, так как он является катетом прямоугольного треугольника, двумя другими сторонами которого являются отрезки осей y и η_2. При этом угол между ними равен α, а длина отрезка оси η_2 равна единице.

Треугольник BAC, образуемый тремя перпендикулярами,—прямоугольный, так как перпендикуляр к оси η_1, лежащей в плоскости $\eta_1\eta_2$, перпендикулярен к перпендикуляру к оси y, лежащему в плоскости $\eta_1 y$, ибо он является одновременно перпендикуляром к этой плоскости.

Таким образом, третий перпендикуляр, лежащий в плоскости $\eta_2 y$, является гипотенузой (длиной $\sin\alpha$) прямоугольного треугольника с катетом длиной $\sin\gamma$ (перпендикуляр в плоскости $\eta_1\eta_2$), лежащим против острого угла β (угол между перпендикулярами к оси y, лежащими в плоскостях $\eta_1 y$ и $\eta_2 y$).

На основании известной формулы тригонометрии получаем,

$$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$