ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК 1945, № 1—2 CLASSE DES SCIENCES TECHNIQUES

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

УРАВНЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕ ВПОЛНЕ УПРУГИХ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Представлено академиком *Н. Е. Кочиным*

Механические свойства реальных тел весьма разнообразны. Наряду с телами в достаточной мере упругими встречаются тела, почти лишенные этого свойства (пластические тела).

Напряженное состояние таких тел в значительной степени зависит от скорости деформирования (вязкопластические тела).

Некоторые тела обладают свойством заметным образом изменять напряженное состояние при постоянной деформации (свойство релаксации), а также заметным образом изменять деформированное состояние при постоянном напряжении (свойство последействия).

Многие тела ведут себя как упругие при достаточно малых деформациях и как пластические при больших деформациях.

Весьма часто явления релаксации и последействия, известные под общим названием наследственности, наблюдаются у тел, которые при быстрых деформированиях неотличимы от вполне упругих. Эти же явления могут проявляться лишь при пластической деформации тел и быть почти незаметными при упругих деформациях.

При пластических деформациях, сопровождающихся возрастанием напряжения при монотонном увеличении деформации (явление упрочнения), наблюдается повышение предела упругости при повторном деформировании (эффект Баушингера). Иначе говоря, при повторном деформировании (например, при растяжении) увеличивается значение напряжения, являющегося верхним пределом для чисто-упругих деформаций (повышение предела упругости).

Совместное математическое описание всех механических свойств тел, разумеется, невозможно. Изучение отдельных свойств тел составляет предмет различных дисциплин, например математической теории упругости, теории пластичности, теории наследственности. При построении этих дисциплин принимается та или иная идеализация свойств тела. Так, в математической теории упругости тела принимаются абсолютно упругими при любых значениях напряжений, развивающихся внутри тела, а в классической теории пластичности (теории Сен-Венана) максимальное касательное напряжение считается постоянным при любой, отличной от нуля величине деформации.

Характер внутренней структуры тел обычно не имеет значения для построения упомянутых дисциплин. Оказывается вполне достаточным представление тела в виде некоторого континуума, наделенного теми или иными механическими свойствами, проявляющимися при простейших экспериментах над телом, например при растяжении и при всестороннем сжатии.

Большие трудности обычно представляет переход от законов, характеризующих одномерные явления, к законам, описывающим мехаические явления пространственного характера. Это имело место, например, при построении уравнений пространственной задачи пластичности. То же в еще большей степени относится к теориям, делающим попытку совместного математического описания нескольких механических свойств одного и того же тела[1].

Простейшими законами, которым подчиняется деформирование реальных тел, являются те, которые выражаются линейными соотношениями между характерными переменными деформирования, как то: напряжением, деформацией и их производными по времени. Реальные тела, вообще говоря, не подчиняются таким линейным законам. Тем не менее, надлежащим образом используя линейные законы, можно построить идеализированные тела, механические свойства которых имеют тот же качественный характер, что и у реальных тел. При помощи соображений, основанных на применении статистики, можно пытаться в достаточной мере точно передать и количественные соотношения [4]. В настоящей статье автор излагает законы простейшего одномерного деформирования идеализированного тела, обладающего наряду со свойством упругости также и другими механическими свойствами, а именно вязкостью, пластичностью (с упрочнением), релаксацией и последействием. Тела абсолютно упругие, абсолютно пластические, вязкопластические, обладающие наследственной упругостью простейшего типа, и некоторые другие могут рассматриваться как частные случаи такого тела.

Примем, что наше тело при весьма медленном растяжении (или сжатии[2]) из естественного состояния вначале имеет чисто упругую деформацию ε, пока напряжение σ, растягивающее или сжимающее тело, не достигнет некоторого характерного для данного материала значения σ_s (пластической постоянной). Затем деформация становится пластической и изменяется по линейному закону

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E} + \frac{1}{h}(\sigma - \sigma_s)$$

или

$$\sigma = a + h\varepsilon, \quad a = \frac{E - h}{E}\sigma_s,$$

где E — модуль упругости и h — коэффициент упрочнения материала. Диаграмма растяжения такого тела имеет вид ломаной OAB (фиг. 1), причем участок OA соответствует упругой деформации

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma,$$

а участок AB — так называемому линейному упрочнению.

При коэффициенте упрочнения h равном нулю получим известную диаграмму Прандтля (фиг. 2) для пластических тел.

Пусть напряжение σ при растяжении материала достигнет некоторого значения $\sigma_1 > \sigma_s$ (предполагаем также, что $\sigma_1 < 2\sigma_s$) и затем монотонно убывает. Примем, что при этом деформация будет уменьшаться по закону

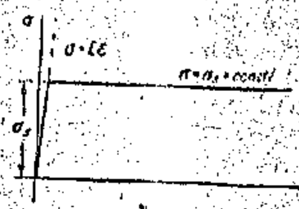
$$(\varepsilon_1 - \varepsilon) = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \sigma),$$

[1] В следующей статье автор предполагает сделать одну из таких попыток, ограничиваясь телами, обладающими в известной мере свойствами упругости, пластичности, вязкости, релаксации и последействия. Абсолютно упругие тела, а также тела идеально пластические, вязкопластические и прочие будут рассматриваться при этом как частные случаи таких тел.

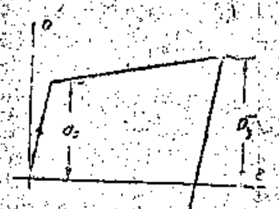
[2] В следующей статье автора будет показано, что в данном случае было бы более точно говорить не о растяжении-сжатии, а о чистом сдвиге. Термины растяжение и сжатие оставлены здесь для большей наглядности изложения.

где ε_1—то значение деформации, которое было достигнуто при напряжении σ_1 (фиг. 3).

Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

При полной разгрузке, т. е. при $\sigma=0$, будет иметь место остаточная деформация ε_0. Для величины ее нетрудно получить формулу

$$\varepsilon_0=\frac{E-h}{Eh}(\sigma_1-\sigma_s).$$

Если имеет место дальнейшее изменение напряжения σ в сторону отрицательных значений, то будем считать, что деформация ε уменьшается по тому же закону, пока напряжение не достигнет значения

$$-(2\sigma_s-\sigma_1).$$

При последующем весьма медленном монотонном уменьшении напряжения примем, что деформация изменяется по закону $\varepsilon=-\frac{\sigma_s}{E}+\frac{1}{h}(\sigma+\sigma_s)$ или $\sigma=-a+h\varepsilon$ (где опять $a=\frac{E-h}{E}\sigma_s$), т. е. вновь становится пластической (фиг. 4).

Наконец, если после достижения некоторого значения σ_2 напряжение вновь начнет увеличиваться, то деформация будет увеличиваться по закону

$$\varepsilon-\varepsilon_2=\frac{1}{E}(\sigma-\sigma_2), \quad \text{где} \quad \sigma_2=-a+h\varepsilon_2,$$

пока разность $\sigma-\sigma_2$ не превысит значения $2\sigma_s$, после чего изменение будет происходить опять по закону пластических деформаций при наличии линейного упрочнения

$$\sigma=a+h\varepsilon.$$

На фиг. 5 показана диаграмма медленного деформирования рассматриваемого тела при увеличении напряжения от нуля до значения σ_1 ($\sigma_s<\sigma_1<2\sigma_s$) с последующим уменьшением напряжения до значения σ_2 ($\sigma_1-\sigma_2>2\sigma_s$) и увеличением от значения σ_2 до σ_1 («петля гистерезиса»).

Прямые $\sigma=\pm a+h\varepsilon$ ограничивают, таким образом, область совместных для тела значений напряжения σ и деформации ε, имеющих место при весьма медленном деформировании (фиг. 6).

Если точка, изображающая совместное значение величин σ и ε, находится внутри этой области, то изменение напряжения $d\sigma$ и соответствующее изменение деформации $d\varepsilon$ связаны равенством

$$d\sigma=E\,d\varepsilon.$$

Если же точка находится на верхней прямой ($\sigma=+a+h\varepsilon$), то имеет место

$$d\sigma=h\,d\varepsilon \quad \text{при} \quad d\varepsilon>0$$

и

$$d\sigma=E\,d\varepsilon \quad \text{при} \quad d\varepsilon<0.$$

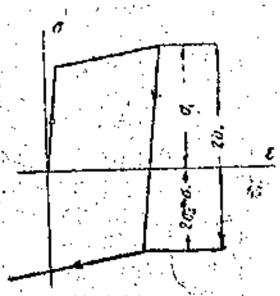
Наконец, для точек нижней границы ($\sigma=-a+h\varepsilon$)

$$d\sigma=E\,d\varepsilon \quad \text{при} \quad d\varepsilon>0$$

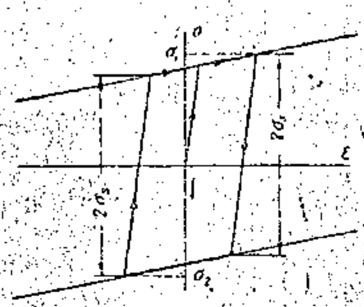
и

$$d\sigma=h\,d\varepsilon \quad \text{при} \quad d\varepsilon<0.$$

Приведенные выше соотношения включают в себя свойство повышения предела упругости при повторном растяжении (наклеп), что легко усмотреть из данных фиг. 1, и свойство понижения предела упругости при сжатии, если имело место предварительное растяжение за пределы упругих деформаций (так называемый эффект Баушингера, см. фиг. 4).



Фиг. 4



Фиг. 5

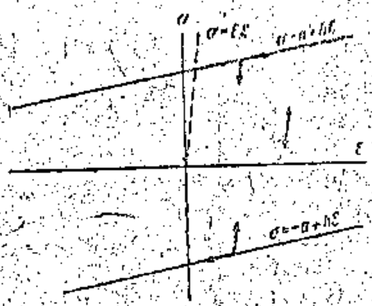
При сравнительно больших скоростях деформирования тела примем, что соотношение

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad \text{или} \quad \sigma = E\varepsilon + \text{const}$$

сохраняется для совместных значений величин σ и ε, соответствующих внутренним точкам области, ограниченной прямыми $\sigma = \pm a + h\varepsilon$.

Примем соотношение $d\sigma = E d\varepsilon$ также справедливым для точек верхней границы ($\sigma = a + h\varepsilon$) при условии $d\sigma < 0$ и для точек нижней границы ($\sigma = -a + h\varepsilon$) при $d\sigma > 0$.

В упомянутых случаях скорости изменения напряжения и деформации $\dot\sigma$ и $\dot\varepsilon$ не играют роли при деформировании тела и деформация имеет чисто упругий характер.



Фиг. 6

Напротив, при нарастании пластических деформаций того или иного знака примем справедливым соотношение

$$\dot\sigma + r\sigma = b\dot\varepsilon + bn\varepsilon + c,$$

где r, b, n, и c — характерные для данного тела константы. Так как это соотношение должно остаться справедливым и для весьма медленно растущих пластических деформаций, то, сравнивая его с соотношениями $\sigma = \pm a + h\varepsilon$, получаем, что

$$h = \frac{bn}{r} \quad \text{и} \quad c = \pm ra.$$

При весьма быстром деформировании имеем

$$\dot\sigma \approx b\dot\varepsilon \quad \text{или} \quad \sigma \approx b\varepsilon + \text{const},$$

т. е. тело ведет себя вновь как вполне упругое. Примем константу b равной модулю упругости тела E.

Так как

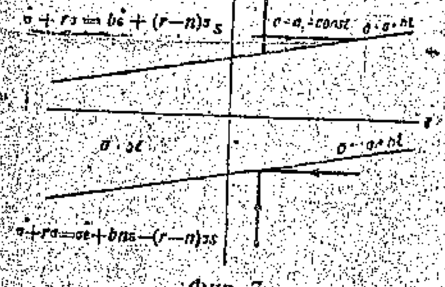
$$a = \frac{E-h}{E}\sigma_s, \qquad E = b \quad \text{и} \quad h = \frac{bn}{r},$$

то

$$c = \pm ra = \pm(r - n)\sigma_s.$$

При этом знак плюс относится к точкам (ε, σ), расположенным выше прямой $\sigma = h\varepsilon + a$, и минус — к точкам, расположенным ниже прямой $\sigma = h\varepsilon - a$.

В первом случае, если удерживать деформацию тела постоянной, происходит убывание напряжения, причем точка, изображающая совместное значение напряжения σ и деформации ε, движется вниз к граничной прямой $\sigma = h\varepsilon + a$ (фиг. 7). Во втором случае соответствующая точка движется вверх.



Фиг. 7

Явление изменения напряжения тела при неизменной деформации именуется обычно релаксацией.

Пусть, например, в начальный момент времени $t = 0$ напряжение тела имело значение σ_0, а деформация — значение ε_0, причем имело место

$$\sigma_0 > h\varepsilon_0 + a.$$

Тогда при условии постоянства деформации тела получим

$$\dot\sigma + r\sigma = e^{-rt}\frac{\partial}{dt}(e^{rt}\sigma) = bn\varepsilon_0 + ra,$$

откуда

$$\sigma = (\sigma_0 - h\varepsilon_0 - a)\,e^{-rt} + h\varepsilon_0 + a \qquad \left(h = \frac{bn}{r}\right),$$

и, следовательно, напряжение убывает, стремясь к значению $h\varepsilon_0 + a$. Изменение напряжения происходит тем интенсивнее, чем больше значение константы r, которую можно назвать коэффициентом релаксации.

Если же, наоборот, поддерживать постоянным напряжение тела, то в первом случае точка (ε, σ) движется направо и деформация увеличивается, а во втором случае — налево (фиг. 7). Явление изменения деформации при неизменном напряжении именуется обычно последействием.

Пусть, например, напряжение тела $\sigma = \sigma_0$ постоянно, а деформация ε в начальный момент принимала некоторое значение ε_0, удовлетворяющее условию

$$\sigma > h\varepsilon_0 + a.$$

Согласно основному соотношению для этого случая имеем

$$r\sigma_0 = b\dot\varepsilon + bn\varepsilon + ra = be^{-nt}\frac{d}{dt}(e^{nt}\varepsilon) + ra,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{r(\sigma_0 - a)}{bn} - \left[\frac{r(\sigma_0 - a)}{bn} - \varepsilon_0\right]e^{-nt} = \frac{\sigma_0 - a}{h} - \frac{\sigma_0 - h\varepsilon_0 - a}{h}\,e^{-nt},$$

и, следовательно, деформация возрастает, стремясь к значению

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_0 - a}{h}.$$

Нетрудно видеть, что точка $(\varepsilon_1, \sigma_0)$ лежит на верхней граничной прямой.

Изменение деформации происходит тем интенсивнее, чем больше значение константы n, которую можно назвать коэффициентом последействия.

Так как

$$ra = (r - n)\sigma_s, \quad \text{ибо} \quad r > 0 \quad \text{и} \quad a = \frac{E - h}{E}\sigma_s > 0,$$

то

$$r > n,$$

т. е. релаксация происходит интенсивнее последействия. При $\sigma_s = 0$, т. е. при отсутствии у материала области чисто упругих деформаций, доказательство обстоятельства $r > n$ требует более тонких рассуждений [1].

Рассмотрим более общий случай. Пусть напряжение σ меняется по заданному закону $\sigma = \sigma(t)$. Если в начальный момент времени деформация ε и напряжения σ были таковы, что изображающая точка (ε, σ) находилась внутри области чисто упругих деформаций, то будем иметь соотношение

$$\sigma - \sigma_0 = b(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad \text{или} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\sigma - \sigma_0}{b},$$

где σ_0 и ε_0 — значения величин σ и ε в начальный момент времени. Это соотношение будет справедливо до тех пор, пока точка (ε, σ) не покинет области чисто упругих деформаций. Если же в начальный момент времени точка (ε, σ) находится в области пластических деформаций, например, выше граничной прямой $\sigma = h\varepsilon + a$, то, преобразуя основное соотношение, имеем

$$e^{-rt}\frac{d}{dt}(e^{-rt}\sigma) = e^{-nt}\frac{d}{dt}(b\varepsilon e^{nt}) + ra,$$

откуда

$$b(e^{nt}\varepsilon - \varepsilon_0) = -\frac{ra}{n}(1 - e^{nt}) + \int_0^t e^{-(r-n)t}\frac{d}{dt}(\sigma e^{rt})\,dt,$$

что можно привести к виду

$$b\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_0^t (r - n)e^{-n(t-\tau)}\sigma(\tau)\,d\tau - \frac{ra}{n} + \left(b\varepsilon_0 - \sigma_0 + \frac{ra}{n}\right)e^{-nt}.$$

Последнее соотношение имеет характер формулы теории последействия Больтцмана [2], осложненной дополнительными членами в правой части равенства. Оно справедливо, пока точка (ε, σ) находится выше граничной прямой $\sigma = h\varepsilon + a$. При обратной задаче, когда задан закон изменения деформации $\varepsilon = \varepsilon(t)$ и требуется найти закон изменения напряжения, можно, поступая совершенно аналогично предыдущему, притти к формуле

$$\sigma(t) = b\varepsilon(t) - \int_0^t (r - n)e^{-r(t-\tau)}b\varepsilon(\tau)\,d\tau + \frac{ra}{n} + \left(\sigma_0 - b\varepsilon_0 - \frac{ra}{n}\right)e^{-rt}.$$

Функции

$$(r - n)e^{-n(t-\tau)} \quad \text{и} \quad (r - n)e^{-r(t-\tau)}$$

могут быть названы соответственно функциями последействия и релаксации. С точки зрения теории интегральных уравнений Вольтерра одна из них является резольвентной другой. Количественную сторону наследственных явлений, в частности явлений последействия и релаксации, такие функции описывают недостаточно точно. Однако, можно показать [4], ядра Вольтерра достаточно общего типа могут быть получены линейной комбинацией ядер типа показательной функции.

Основное соотношение

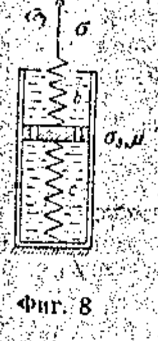
$$\dot{\sigma} + r\sigma = b\dot{\varepsilon} + bn\varepsilon \pm \sigma_s (r - n)$$

можно вместе с тем рассматривать как простейшее из соотношений типа

$$f(\sigma, \varepsilon, \dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}, t) = 0,$$

справедливых для некоторых тел, скорости деформирования которых оказывают влияние на напряжение.

Механические свойства одномерного растяжения-сжатия нашего идеализированного тела могут быть легко обозрены на некоторой модели, состоящей из двух пружин жесткости b и c, соединенных последовательно, причем в месте их соединения укреплен поршень, движущийся с кулоновым трением σ_s внутри цилиндра (фиг. 8), наполненного вязкой жидкостью. Жидкость имеет возможность проходить сквозь отверстия в поршне при перемещении последнего. Возникающее при этом дополнительное сопротивление перемещению поршня пропорционально его скорости. Если конец пружины жесткости c прикрепить к неподвижному дну цилиндра, а к свободному концу пружины жесткости b приложить силу σ, то перемещение этого конца ε и сила σ будут связаны соотношением



Фиг. 8

$$\dot{\sigma} + \frac{b+c}{\mu}\sigma = b\dot{\varepsilon} + \frac{bc}{\mu}\varepsilon \pm \frac{b}{\mu}\sigma_s,$$

где μ — коэффициент вязкого трения.

Это соотношение нетрудно получить, исключив величины ε_1 и ε_2 из очевидных равенств $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\sigma = b\varepsilon_1$, $\sigma \mp \sigma_s - \mu\dot{\varepsilon}_2 = c\varepsilon_2$, в которых ε_1 означает деформацию внешней пружины (жесткости b), а ε_2 — внутренней.

Введя обозначения

$$r = \frac{b+c}{\mu} \quad \text{и} \quad n = \frac{c}{\mu},$$

придем к основному соотношению

$$\dot{\sigma} + r\sigma = b\dot{\varepsilon} + bn\varepsilon \pm (r - n)\sigma_s.$$

Таким образом законы деформирования нашего тела и модели идентичны.

Пусть модель находится в «естественном состоянии», при котором внутренняя и внешняя пружины не натянуты. Если к модели приложить возрастающую от нуля растягивающую силу σ, то вначале будет иметь место растяжение одной внешней пружины («упругая деформация»). Затем, когда сила σ превысит величину σ_s кулонова трения, начнется перемещение поршня и растяжение внутренней пружины («пластическая деформация»). Наличие вязкого трения обусловит при этом изменение во времени натяжения пружин после внезапного растяжения модели (релаксация) и изменение с течением времени деформации при действии постоянной силы (последействие). При весьма быстрых деформированиях модели поршень вследствие наличия вязкого трения не будет успевать перемещаться и, следовательно, деформироваться будет одна внешняя пружина («упругий» характер деформирования).

Вследствие наличия кулонова трения поршень, сдвинутый при растяжении модели с места, не возвращается к первоначальному положению при снятии нагрузки σ («остаточная деформация»). При последующей перемене знака σ поршень уже при меньшем абсолютном значении, чем σ_s, может быть вновь сдвинут с места вследствие натяжения внутренней пружины («эффект Баушингера»).

Аналогично могут быть продемонстрированы на модели и другие свойства нашего тела при одномерном растяжении, например упрочнение и наклеп.

Основываясь на свойствах данной модели, можно построить теорию хрупкого и вязкого разрушений материала, принимая, что хрупкому разрушению соответствует разрыв внешней пружины модели, а вязкому — разрыв внутренней пружины [3]. При больших скоростях деформирования или больших внезапно приложенных нагрузках будет иметь место хрупкое разрушение, характеризуемое малой деформацией (поршень модели не успеет сдвинуться с места). При достаточно большой, но не разрывающей внешней пружины, нагрузке будет иметь место вязкое разрушение, характеризуемое значительной предварительной деформацией материала и наличием некоторого интервала времени между моментом приложения нагрузки и моментом разрыва внутренней пружины. При этом, конечно, предполагается, что внутренняя пружина менее прочна, чем внешняя, и жесткость внешней пружины значительно больше жесткости внутренней пружины.

Разрыв внутренней пружины может произойти также и спустя некоторое время после внезапного деформирования модели, не разрушающего однако внешней пружины. При этом разрыву будут предшествовать перемещение поршня (рост «пластической деформации» за счет «упругой») и некоторое ослабление натяжения внешней пружины (релаксация). Примерно такие же свойства проявляют при разрыве перетянутые жильные струны.

Несколько усложняя конструкцию модели [1], можно сделать обозримыми и некоторые другие механические свойства тел при растяжении-сжатии, например, наличие площадки текучести и понижение напряжения при переходе через предел пропорциональности.

Рассмотрим теперь частные случаи нашего тела.

Пусть константа σ_s (пластическая постоянная) равна нулю. В этом случае наследственные явления будут иметь место при любых комбинациях значений напряжения и деформации тела, и соотношение, связывающее их, примет вид:

$$\dot{\sigma} + r\sigma = b\dot{\varepsilon} + bn\varepsilon.$$

Мы назовем это соотношение законом линейной наследственности.

Если принять, что в момент t_0 состояние тела было естественным, т. е. имело место

$$\sigma = 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon = 0,$$

то из основного соотношения получим формулы

$$\sigma(t) = b\varepsilon(t) - \int_{t_0}^{t} (r - n)\, e^{-r(t-\tau)}\, b\varepsilon(\tau)\, d\tau$$

и

$$b\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_{t_0}^{t} (r - n)\, e^{-n(t-\tau)}\, \sigma(\tau)\, d\tau.$$

В частности, можно принять, что $t_0 = -\infty$.

Написанные формулы являются частным случаем формул

$$\sigma(t) = b\varepsilon(t) - \int_{t_0}^{t} K(t-\tau)\, b\varepsilon(\tau)\, d\tau$$

и

$$b\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_{t_0}^{t} \Gamma(t-\tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau,$$

выражающих закон Больтцмана—Вольтерра для тел, обладающих свойством наследственности.

Можно показать [4], что при параллельном соединении бесконечного числа волокон, деформирование которых подчиняется закону линейной наследственности, можно образовать тело, подчиняющееся закону деформирования Больтцмана—Вольтерра. Для этого следует, сообразуясь соответствующим образом с видом функции наследственности $K(t-\tau)$ или ее резольвенты $\Gamma(t-\tau)$, подобрать статистическое распределение констант закона деформирования отдельных волокон.

Изучение продольных колебаний и волн [5] в теле, подчиняющемся закону линейной наследственности, приводит к рассмотрению уравнения

$$\rho\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \rho r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + bn\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Как оказывается, колебания высоких тонов сравнительно быстро затухают, и, следовательно, происходит явление «освобождения» основного тона колебаний.

Некоторые из собственных форм колебаний могут иметь мнимые частоты. Соответствующее им движение имеет апериодический характер.

Волновые движения обладают свойством дисперсии, т. е. скорость распространения волн зависит от их частоты.

Предельными случаями линейной наследственности являются тела, деформирование которых подчиняется законам

$$b\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + r\sigma, \qquad \sigma = h\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}.$$

Первый из этих законов был предложен еще Максвеллом [6]. Тело, подчиняющееся закону Максвелла, обладает свойством релаксации, но лишено последействия.

Второй закон был использован для описания явления последействия Томпсоном [7]. Из закона линейного последействия закон Томпсона получается посредством предельного перехода при условии

$$r \to \infty \text{ и } b \to \infty,$$

причем $\frac{r}{b} = \mu$, где μ — ограниченная величина, имеющая размерность коэффициента вязкости. Явление релаксации не имеет места в телах, подчиняющихся этому закону, ибо при $\varepsilon = \text{const}$ немедленно получаем $\sigma = h\varepsilon = \text{const}$.

Два последних закона были использованы автором для построения теории трения качения [8].

Заметим, что закон деформирования типа вязкой жидкости

$$\sigma = \mu\dot{\varepsilon}$$

можно также рассматривать как предельный случай закона линейной наследственности. Пусть константа σ_s отлична от нуля и так же, как и в предыдущем случае, константы r и b закона деформирования нашего тела

$$\dot{\sigma} + r\sigma = b\dot{\varepsilon} + bn\varepsilon \pm (r-n)\,\sigma_s$$

стремятся к бесконечности, а отношение их — к постоянной μ. В пределе получим соотношение

$$\sigma = \pm\sigma_s + \mu\dot{\varepsilon} + h\varepsilon \; (h = \mu n),$$

определяющее закон деформирования так называемого вязкопластического тела с упрочнением. Это тело не имеет чисто-упругих деформаций и лишено свойства релаксации.

В области, ограниченной прямыми

$$\sigma = \pm\sigma_s + h\varepsilon,$$

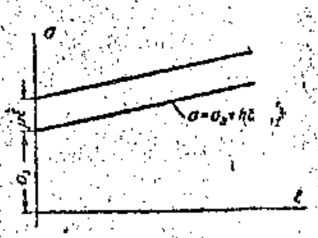
при заданном постоянном значении деформации значение напряжения не является определенным и может заключаться в пределах

$$\sigma_s + h\varepsilon \geqslant \sigma \geqslant -\sigma_s + h\varepsilon.$$

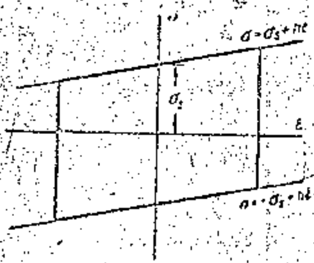
На фиг. 9 показана диаграмма растяжения такого тела при постоянной скорости деформирования из естественного состояния. При весьма малой скорости деформирования имеем на диаграмме растяжения прямую

$$\sigma = \sigma_s + h\varepsilon,$$

где h — коэффициент упрочнения. «Петля» гестерезиса при весьма медленном деформировании вязкопластического тела с упрочнением представлена на фиг. 10.



Фиг. 9



Фиг. 10

Если коэффициент упрочнения принять равным нулю, то получим закон деформирования

$$\sigma = \pm\sigma_s + \mu\dot{\varepsilon} \text{ при } \dot{\varepsilon} \neq 0 \text{ и } -\sigma_s < \sigma < \sigma_s \text{ при } \dot{\varepsilon} = 0,$$

предложенный, повидимому, впервые Сен-Венаном [9]. Тело, подчиняющееся этому закону, принято называть вязкопластическим (без упрочнения). Вязкопластическое тело лишено свойств релаксации и последействия. Пластическое сжатие металлов при больших скоростях деформирования довольно хорошо согласуется с этим законом [10].

Выше описывались механические свойства нашего идеализированного тела при весьма медленном деформировании. Если эти свойства сохраняются и при произвольном деформировании, то такое тело будет также лишено наследственности, т. е. не будет обладать свойством релаксации и последействия. Будем называть его упругим телом с упрочнением. Внутри области, ограниченной прямыми

$$\sigma = \pm\sigma_s + h\varepsilon$$

(фиг. 6), изменения напряжения $d\sigma$ и деформации $d\varepsilon$ связаны соотношением

$$d\sigma = E d\varepsilon.$$

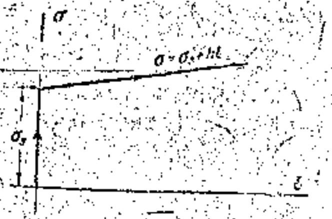
То же соотношение («упругая деформация») имеет место на верхней прямой при условии $d\varepsilon < 0$ и на нижней — при $d\varepsilon > 0$. Если точка (ε, σ), изображающая совместное значение величин деформации и напряжения тела, находится на верхней прямой ($\sigma = \sigma_s + h\varepsilon$), то при условии $d\varepsilon > 0$ имеем

$$d\sigma = h d\varepsilon.$$

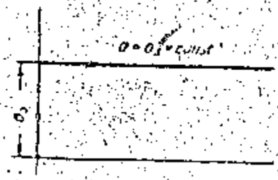
То же соотношение имеем и на нижней прямой ($\sigma = -\sigma_s + h\varepsilon$) при условии $d\varepsilon < 0$.

Совместные значения величин σ и ε, лежащие за пределом области, ограниченной упомянутыми прямыми, для этого тела невозможны.

Частным случаем упругого тела с упрочнением являются пластическое тело с упрочнением и упруго-пластическое тело, лишенное упрочнения. На фиг. 11 и 2 и показаны диаграммы растяжения этих тел из естественного состояния.



Фиг. 11



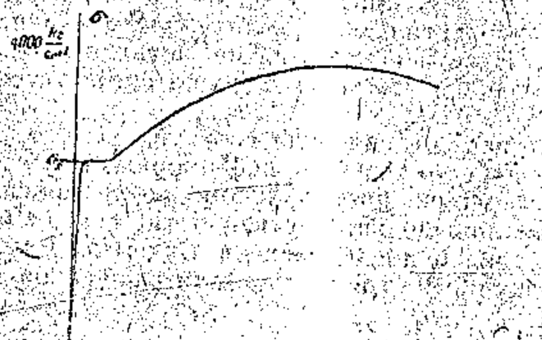
Фиг. 12

Идеально пластическое тело, диаграмма растяжения которого изображена на фиг. 12, может быть рассматриваемо либо как частный случай двух предыдущих тел, либо как предельный случай вязкопластического тела при коэффициенте вязкости, равном нулю.

Для идеально пластического тела имеем:

$$\sigma = +\sigma_s \text{ при } d\varepsilon > 0,$$
$$\sigma = -\sigma_s \text{ при } d\varepsilon < 0,$$
$$-\sigma_s < \sigma < +\sigma_s \text{ при } \varepsilon = \text{const}.$$

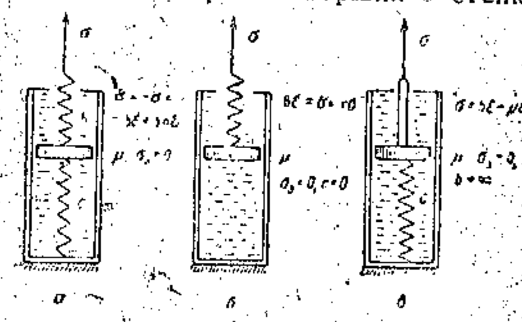
Следует отметить, что тела, лишенные свойств упругости: вязкопластическое, пластическое с упрочнением и идеально пластическое, не являются далеко идущими идеализациями реальных тел, ибо величина упругих деформаций обычно во много раз меньше величины пластических деформаций. На фиг. 13 представлена для сравнения диаграмма растяжения стали к моменту разрыва. Упругая деформация ее составляет лишь незначительную часть общей деформации.



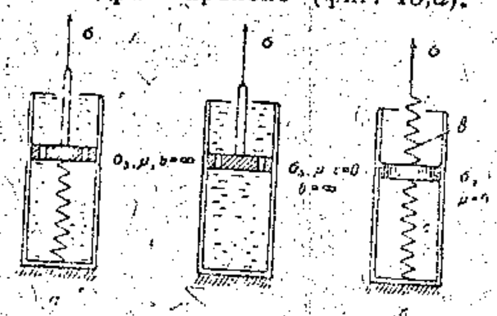
Фиг. 13

Заметим, что частные случаи нашего тела могут быть иллюстрированы на упоминавшейся выше механической модели с соответствующим упрощением ее конструкции. Например, телу с линейной наследственностью соответствует модель с устраненным кулоновым трением о стенку цилиндра (фиг. 14,*а*). Если удалить внутреннюю пружину (фиг. 14,*б*), то получится модель, соответствующая телу Максвелла (лишенному последействия); а если, оставив внутреннюю пружину, заменить внешнюю пружину жестким стержнем ($b = \infty$), фиг. 14,*в*), то модель будет соответствовать телу Томсона (лишенному свойства релаксации).

Вязкопластическому телу с упрочнением соответствует модель, внешняя пружина которой также заменена жестким стержнем, но кулоново трение поршня о стенки цилиндра сохранено (фиг. 15,*а*).

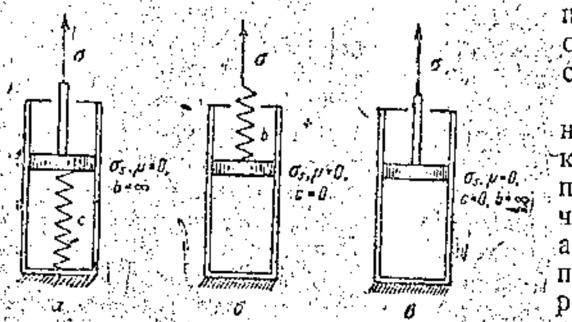


Фиг. 14



Фиг. 15

Если, кроме того, устранить внутреннюю пружину, то такая модель будет соответствовать вязкопластическому телу без упрочнения (фиг. 15,*б*). При устранении вязкого сопротивления движению поршня получается модель, соответствующая упругому телу с упрочнением (фиг. 15,*в*).



Фиг. 16

Если в такой модели заменить внешнюю пружину жестким стержнем (фиг. 16,*а*), то получим соответствие пластическому телу с упрочнением, а при сохранении внешней пружины и удалении внутренней — упругопластическому телу (фиг. 16,*б*).

Наконец, идеально пластическому телу соответствует простейшая модель, имеющая лишь поршень, движущийся в цилиндре с кулоновым трением σ_s (фиг. 16,*в*).

Поступила в редакцию
17 марта 1944 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Линейные законы деформирования не вполне упругих тел. ДАН СССР, XXVI, № 1, 1940.
2. Boltzmann. Wiss. Abh., vol. I, Berlin—Wien, 10, 1875.
3. Ишлинский А. Ю. Разрушение не вполне упругих тел. Сб. ВИСХОМ, 1938.
4. Ишлинский А. Ю. Некоторые применения статистики к описанию законов деформирования тел. Известия ОТН АН СССР, № 9, 1944.
5. Ишлинский А. Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксаций. Прикладная математика и механика, т. IV, вып. I, 1940.
6. Clerk I. Maxwell. On the Dynamical Theory of Gases. Trans. R. Soc. London, vol. 157. Part I, 1867.
7. Исакович М. А. ДАН СССР, XXII, № 8, 1939.
8. Ишлинский А. Ю. Трение качения. Прикладная математика и механика, т. II, вып. 2, 1938; Ишлинский А. Ю. Теория сопротивления перекатыванию (трение качения) и смежных явлений. Сб. по трению и износу в машинах. АН СССР, т. II, 1940, стр. 255—264.
9. Saint-Venant. Sur l'établissement des équation des mouvements intérieurs après dans les caps solides.
10. Ильюшин А. А. Об испытаниях металлов при больших скоростях. Инженерный сборник, т. I, вып. 1, 1941.