Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCVI, № 4

ФИЗИКА

Действительный член АН УССР А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

О ФОКУСИРОВКЕ НАЭЛЕКТРИЗОВАННЫХ ЧАСТИЦ

Известно, что если наэлектризованная частица массы m и заряда e движется в плоскости, перпендикулярной силовым линиям некоторого магнитного поля, то радиус кривизны ее траектории ρ связан с напряжением магнитного поля H соотношением

$$\frac{1}{\rho} = \frac{eH}{mcv}, \tag{1}$$

где c — скорость света. Скорость частицы v при ее движении в магнитном поле остается неизменной.

Рассмотрим следующую задачу*. Пусть из начала системы координат xy вылетают с одной и той же скоростью v по разным направлениям, лежащим в плоскости xy, наэлектризованные частицы с одним и тем же зарядом e и одной и той же массой m, а напряжение поля H является функцией координаты x, т. е.

$$H = H(x). \tag{2}$$

Спрашивается: какова должна быть функция $H(x)$, чтобы траектории всех упомянутых частиц прошли через одну и ту же точку F, расположенную на оси y на заданном расстоянии l от начала координат (см. рис. 1).

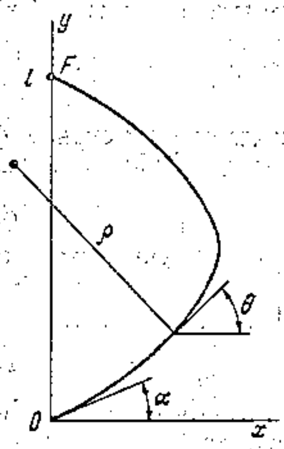

Рис. 1

Заметим прежде всего, что

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}, \tag{3}$$

где θ — угол наклона скорости какой-либо частицы к оси x и ds — элемент дуги ее траектории, и, кроме того,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta. \tag{4}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos\theta\, d\theta}{dx}. \tag{5}$$

Учитывая соотношения (1) и (2), получим теперь равенство

$$\cos\theta\, d\theta = \frac{eH(x)\,dx}{mcv}, \tag{6}$$

* Постановкой задачи автор обязан М. В. Пасечнику и В. Е. Дьяченко.

откуда

$$\sin\theta = \sin\alpha + \int\limits_0^x \frac{eH(x)\,dx}{mcv}, \tag{7}$$

где α — начальное значение угла θ, т. е. угла наклона скорости частицы к оси x в момент ее вылета из начала координат.

Введем обозначения:

$$V(x) = \int\limits_0^x \frac{eH(x)\,dx}{mcv}, \tag{8}$$

$$\zeta = \sin\theta - \sin\alpha. \tag{9}$$

Тогда, согласно этим обозначениям

$$\zeta = V(x), \tag{10}$$

где $V(x)$ — новая искомая функция.

Введем далее функцию

$$x = \Phi(\zeta), \tag{11}$$

обратную функции $\zeta = V(x)$.

Дифференцируя тождество

$$x \equiv \Phi[V(x)], \tag{12}$$

приходим к равенству

$$\Phi'(\zeta)\,V'(x) = 1. \tag{13}$$

Отсюда, учитывая формулу (8), получим соотношение

$$H(x) = \frac{mcv}{e\Phi'(\zeta)}, \tag{14}$$

сводящее отыскание функции $H(x)$ к определению функции $\Phi'(\zeta)$. Согласно обозначениями (11) и (9)

$$dx = \Phi'(\zeta)\,d\zeta, \quad d\zeta = \cos\theta\,d\theta; \tag{15}$$

поэтому, учитывая, что

$$dy = dy\cdot\operatorname{tg}\theta, \tag{16}$$

получим равенство

$$dy = \Phi'(\sin\theta - \sin\alpha)\sin\theta\,d\theta. \tag{17}$$

В момент вылета частицы из начала координат $\theta = \alpha$ и $x = y = 0$, поэтому

$$y = \int\limits_\alpha^\theta \Phi'(\sin\theta - \sin\alpha)\sin\theta\,d\theta. \tag{18}$$

Радиус кривизны траектории частицы зависит лишь от координаты x и притом однозначно. Вследствие этого траектория частицы симметрична относительно прямой, параллельной оси x и проходящей через ее вершину, т. е. через ту ее точку, в которой касательная параллельна оси y.

В вершине траектории $y = l/2$ и $\theta = \pi/2$. Следовательно, в согласии с равенством (18),

$$\int\limits_\alpha^{\pi/2} \Phi'(\sin\theta - \sin\alpha)\sin\theta\,d\theta = \frac{l}{2}. \tag{19}$$

Последнее соотношение приводится к обычному виду интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода относительно функции $\Phi'(\zeta)$, если, в соответствии с обозначением (9), совершить в нем замену переменных, используя формулы

$$\sin\theta = 1-(\eta-\zeta), \quad \cos\theta\, d\theta = d\zeta, \quad \cos\theta = \sqrt{(\eta-\zeta)\left[2-(\eta-\zeta)\right]}, \tag{20}$$

в которых, в свою очередь, обозначено:

$$\eta = 1-\sin\alpha. \tag{21}$$

В результате получим сингулярное интегральное уравнение

$$\int_0^\eta K(\eta-\zeta)\,\Phi'(\zeta)\,d\zeta = \frac{l}{2} \tag{22}$$

с ядром класса Абеля

$$K(\tau) = \frac{1-\tau}{\sqrt{\tau(2-\tau)}}, \quad \tau = \eta-\zeta. \tag{23}$$

Решение интегрального уравнения вида (22) может быть представлено при помощи трансформации Лапласа — Меллина в форме контурного интеграла. Однако для фактического построения функции $\Phi'(\zeta)$, повидимому, удобнее искать решение в форме ряда

$$\Phi'(\zeta) = \frac{A}{\sqrt{\zeta}}\left(1+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\ldots\right). \tag{24}$$

Предварительно представим ядро $K(\tau)$ в виде разложения

$$K(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}}(1-\tau)\left(1-\frac{\tau}{2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(1-\frac{3\tau}{4}-\frac{5\tau^2}{32}+\ldots\right). \tag{25}$$

Теперь уравнение (22) принимает следующий вид:

$$\int_0^\eta \frac{(1+a_1\zeta+a_2\zeta^2+\ldots)\left[1-{}^3/_4(\eta-\zeta)-{}^5/_{32}(\eta-\zeta)^2+\ldots\right]}{\sqrt{\zeta(\eta-\zeta)}}\,d\zeta = \frac{l}{A\sqrt{2}}. \tag{26}$$

Согласно известной формуле анализа имеем:

$$\int_0^a x^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\,a^{m+n-1}, \tag{27}$$

и, в частности, в наших обозначениях получим:

$$\int_0^\eta \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\eta-\zeta)}} = \pi, \quad \int_0^\eta \frac{\zeta\,d\zeta}{\sqrt{\zeta(\eta-\zeta)}} = \frac{\pi}{2}\eta, \quad \int_0^\eta \frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{\zeta(\eta-\zeta)}} = \frac{3}{8}\pi\eta^2, \ldots \tag{28}$$

Используя формулы вида (28), можно почленно проинтегрировать левую часть уравнения (26) и придти к равенству

$$1+\left(\frac{1}{2}a_1-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\eta+\left(\frac{3}{8}a_2-\frac{1\cdot 3}{8\cdot 4}a_1-\frac{3\cdot 5}{8\cdot 32}\right)\eta^2+\ldots = \frac{l}{\pi A\sqrt{2}}. \tag{29}$$

Отсюда немедленно получаем

$$A = \frac{l}{\pi\sqrt{2}}, \quad a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{11}{32}, \ldots, \tag{30}$$

и, следовательно, согласно разложению (24),

$$\Phi'(\zeta) = \frac{l}{\pi\sqrt{2\zeta}}\left(1 + \frac{3}{4}\zeta + \frac{11}{32}\zeta^2 + \ldots\right). \qquad (31)$$

Как уже упоминалось выше, при $\theta = \alpha$ и, следовательно, при $\zeta = 0$ имеем $x = y = 0$. Учитывая это обстоятельство и интегрируя ряд (31), находим

$$x = \Phi(\zeta) = \frac{l\sqrt{2\zeta}}{\pi}\left(1 + \frac{1}{4}\zeta + \frac{11}{160}\zeta^2 + \ldots\right), \qquad (32)$$

откуда, после обращения ряда относительно $\sqrt{\zeta}$, получим

$$\sqrt{\zeta} = \xi - \frac{1}{4}\xi^3 + \frac{19}{160}\xi^5 - \ldots, \qquad (33)$$

где

$$\xi = \frac{\pi x}{l\sqrt{2}}. \qquad (34)$$

Согласно формулам (14) и (31) имеем

$$H(x) = \frac{mcv}{e\Phi'(\zeta)} = \frac{mcv\pi\sqrt{2\zeta}}{el\left(1 + \frac{3}{4}\zeta + \frac{11}{32}\zeta^2 + \ldots\right)}. \qquad (35)$$

Заменяя здесь переменную ζ ее представлением (33) через ξ и учитывая далее формулу (34), получим искомую функцию $H(x)$ в виде ряда

$$H(x) = \frac{\pi^2 mcv}{el^2}\left(x - \frac{\pi^2 x^3}{2l^2} + \frac{9\pi^4 x^5}{40 l^4} - \ldots\right).$$

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
8 III 1954

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Е. Тамм, Основы теории электричества, 1946. [2] Г. Б. Двайт, Таблицы интегралов и другие математические формулы, 1948, стр. 196.