Доклады Академии Наук СССР
1954. Том XCV, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Действительный член АН УССР А. Ю. ИШЛИНСКИЙ,
Н. В. ЗВОЛИНСКИЙ и И. З. СТЕПАНЕНКО

К ДИНАМИКЕ ГРУНТОВЫХ МАСС

Грунтовые массы представляют собой сложные образования, содержащие, наряду с основным веществом грунта (например глиной), пустоты, частично заполненные водой. При действии на грунт больших давлений, возникающих при взрыве, происходит своеобразная «упаковка» грунта, приводящая к заметному (порядка 30%) увеличению объемного веса грунта. В этом отношении показательны опыты Н. М. Сытого* по образованию в глинистых грунтах стволов шахт глубиной до нескольких десятков метров посредством взрыва. В глубокое, сравнительно узкое (диаметром 10—15 см) отверстие в грунте опускался длинный марлевый мешок, наполненный пироксилиновым порохом. Отверстие заполнялось водой, после чего инициировался толовым запалом взрыв. В результате в грунте образовалось цилиндрическое отверстие диаметром около 1 м, окруженное уплотненным грунтом, годное для различных технических применений (устройство колодцев, уплотнение фундаментов и т. п.).

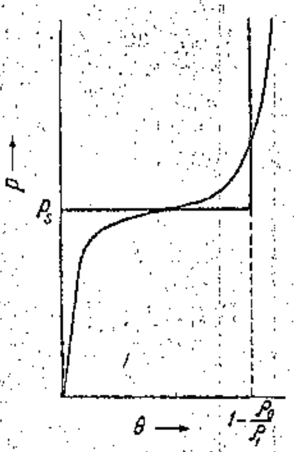

Рис. 1

Для математического описания подобных явлений представляет интерес следующая схема деформации грунта, предложенная А. Ю. Ишлинским. При давлениях, не превышающих некоторой характерной для данного грунта константы p_s, грунт деформируется по законам несжимаемой идеальной жидкости данной плотности ρ_0. При давлении, равном p_s, происходит «упаковка» грунта до плотности ρ_1, после чего грунт вновь деформируется как идеальная жидкость, но уже новой постоянной плотности ρ_1.

На рис. 1 показана примерная диаграмма зависимости между давлением p и объемной деформацией грунта $\theta = 1 - \frac{\rho_0}{\rho}$ и идеализированная диаграмма, соответствующая указанной выше схеме.

Идея пренебрежения касательными усилиями в сплошной среде (например в металле) при наличии больших давлений принадлежит М. А. Лаврентьеву.

Рассмотрим систему уравнений, описывающих осесимметрическую деформацию грунта под действием давления p_a, приложенного к грани круглого отверстия. В соответствии с принятой схемой следует

* Произведены в Институте математики Академии наук УССР.

различать три области деформирования грунта: внешнюю ($b \geqslant r \geqslant r_s''$), где давление $p < p_s$ и плотность $\rho = \rho_0$; среднюю ($r_s'' \geqslant r \geqslant r_s'$), где $p = p_s$, и происходит «упаковка» грунта, и, наконец, внутреннюю ($r_s' \geqslant r \geqslant a$), где $p > p_s$ и $\rho = \rho_1 > \rho_0$.

Обозначим через $u(r, t)$ радиальную скорость точек грунта. Функция $u(r, t)$ удовлетворяет в соответствующих областях следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (b \geqslant r \geqslant r_s'')$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (r_s'' \geqslant r \geqslant r_s'');$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (r_s' \geqslant r \geqslant a)$$

Давление $p = p(r, t)$ должно удовлетворять тем или иным граничным условиям на переменных границах $r = a$ и $r = b$ и изменяется вместе с плотностью $\rho = \rho(r, t)$ непрерывно при переходе из одной области в другую (если область $r_s'' \geqslant r \geqslant r_s'$ не вырождается в окружность). Так например, при расширении идеального газа внутри полого цилиндра по закону политропы степени n

$$p_a = \frac{\text{const}}{a^{2n}}, \quad p_b = 0.$$

В случае бесконечных размеров внешней области грунт в ней неподвижен, а давление равно критическому p_s. Средняя область вырождается в окружность изменяющегося радиуса $r = r_s$. При переходе через эту окружность давление p и плотность ρ терпят разрыв, причем

$$\frac{dr_s}{dt} = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_0}\,u(r_s, t),$$

$$p(r_s - 0, t) - p_s = \frac{\rho_1\rho_0}{\rho_1 - \rho_0}\,u^2(r_s, t).$$

В силу условия несжимаемости

$$u(r, t) = \frac{a}{r}\,\frac{da}{dt}, \quad r_s = \sqrt{\frac{\rho_1 a^2 - \rho_0 a_0^2}{\rho_1 - \rho_0}},$$

где a_0 — начальное значение радиуса отверстия.

Решение задачи сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{da} = \frac{2}{a}\left\{\left[\frac{2(p_s - p_a)}{\rho_1} + \rho_0\,\frac{a^2 + a_0^2}{\rho_1 a^2 - \rho_0 a_0^2}\,x\right]\frac{1}{\ln\dfrac{(\rho_1 - \rho_0)a^2}{\rho_1 a^2 - \rho_0 a_0^2}} - x\right\},$$

где $x = (da/dt)^2$, а функция p_a определяется в соответствии с особенностями задачи.

Начальное значение x определяется из соотношения

$$p_a\Big|_{t=0} = p_s + \frac{\rho_1\rho_0}{\rho_1 - \rho_0}\left(\frac{da}{dt}\right)^2\Big|_{t=0}.$$

Для построения решения упомянутого дифференциального уравнения приближенными методами следует знать значение производной переменной x по аргументу a в начальный момент времени.

Нахождение этой производной связано с раскрытием неопределенности довольно сложного вида. Результат существенно зависит от характера изменения давления p_a. Если, например, давление возникает мгновенно и далее изменяется по закону политропы степени $n = 1{,}5$ (см. выше), то, как показал И. З. Степаненко,

$$\left.\frac{dx}{da}\right|_{t=0} = \frac{2\left[(5\rho_0 - 3\rho_1)\, p_a\big|_{t=0} + (6\rho_1 - 8\rho_0)\, p_s\right]}{3\rho_0\rho_1 a_0}.$$

На рис. 2 приведен график, иллюстрирующий результаты численного интегрирования приведенного выше дифференциального уравнения для одного конкретного случая.

В момент, когда переменная x обращается в нуль, все точки грунта останавливаются. Полное время расширения отверстия определяется несобственным интегралом

$$T = \int\limits_{a_0}^{a_{\max}} \frac{da}{\sqrt{x}}.$$

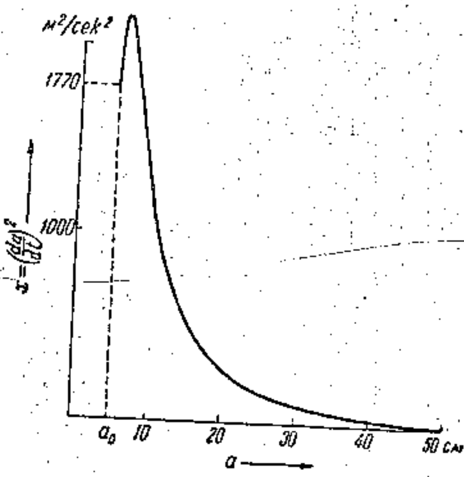

Рис. 2. $p_a|_{t=0} = 178\,000$ кГ/см²; $n = 1{,}5$; $p_s = 1000$ кГ/см²; $\rho_0 = 2$ г/см³; $\rho_1 = 2{,}5$ г/см³; $a_0 = 5$ см; $a_{\max} = 51$ см; $T = 0{,}003$ сек.

Для гипотетической среды с большой степенью уплотнения ($\rho_1 \gg \rho_0$) Н. В. Зволинский получил приближенное дфференциальное уравнение

$$\frac{z - a_0^2}{z}\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{2}\,\frac{z + a^2}{z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{4\,(p_a - p_s)\,\rho_1}{\rho_0\,(\rho_1 - \rho_0)},$$

где $z = r_s^2$.

В ряде случаев это уравнение интегрируется в элементарных функциях. Так, для случая внезапно приложенного и в дальнейшем постоянного давления $p_a > p_s$ получается

$$r_s = t\sqrt{\frac{(p_a - p_s)\,\rho_1}{\rho_0\,(\rho_1 - \rho_0)}} + a_0.$$

Если давление $p > p_s$ возникло внезапно и в течение некоторого времени t_1 постоянно, после чего скачком снижается до значения p_s, то радиус зоны уплотнения грунта будет также неограниченно расти. Для больших значений t имеет место асимптотическая формула

$$r_s = \text{const}\cdot t^{1/2}.$$

В случае изменения давления p по адиабатическому закону уравнение интегрируется в квадратурах. Отыскание окончательного радиуса уплотненной зоны грунта сводится при этом к решению некоторого алгебраического уравнения.

Аналогично может быть рассмотрена задача о расширении сферического отверстия в грунте, деформирование которого подчиняется той же схеме.

Поступило
5 I 1954