АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНСЬКОЇ РСР
Відділ технічних наук

АВТОМАТИКА

404-и

3

1956

ВИДАВНИЦТВО АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНСЬКОЇ РСР
КИЇВ—1956

Зо 4/V

ДО ПИТАННЯ ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ПОМИЛОК ГІРОГОРИЗОНТА НА КАЧЦІ ПРИ НАЯВНОСТІ КОРЕКЦІЇ РЕЛЕЙНОГО ТИПУ

О. Ю. Ішлінський

(Інститут математики АН УРСР)

1°. Значний інтерес для теорії автоматичного регулювання має досліджене в даній статті диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt}=\mu+\nu\,\mathrm{sign}\,(\xi-x),$$

за допомогою якого описується в окремому випадку поведінка покажчика горизонтальної площини на хитному кораблі (гіроазимут). Тут μ і ν — сталі, x — шукана, а ξ — задана функція часу t. Ця функція приймається або просто гармонічною, або такою, що подається у вигляді суми двох гармонічних функцій з несумірними періодами. В останньому випадку, який має для практики найбільший інтерес, виявляється можливим відшукати середнє за часом значення шуканої функції x, якщо, наслідуючи А. М. Колмогорова, прийняти функцію $\xi(t)$, складену з суми двох випадкових незалежних величин з відповідними законами розподілу.

Залишається недослідженим загальний випадок випадкової функції $\xi(t)$ з заданими ймовірнісно статистичними характеристиками.

Дослідження проводиться нижче відповідно до теорії гіроскопів, проте, як легко бачити, воно має і більш загальний характер.

2°. Гіроскопи з ряду причин, зокрема через тертя в осях підвісу, через сили інерції, переносного руху, обертання Землі, неврівноваженість і т. п., схильні порівняно швидко змінювати орієнтацію своїх осей в просторі. Тому при використанні гіроскопів для зберігання горизонтальної площини на хитному кораблі (або на іншому об'єкті, що рухається) доводиться діяти на них спеціальними коректуючими моментами, які повинні повертати гіроскопи до вихідного напряму. Згадані коректуючі моменти створюються за допомогою пристроїв, які реагують на зміну напряму динамічної вертикалі відносно палуби корабля *.

Через те що при качці динамічна вертикаль змінює свій напрям, коректуючі моменти змушують безперервно змінювати в різних напрямах орієнтацію гіроскопів, від чого створюється помилка при визначенні розміщення горизонтальної площини, яка зумовлена качкою корабля.

Щоб не ускладнювати дослідження, розглянемо випадок тільки однієї качки корабля, наприклад бортової, умовно вважаючи, що ри-

* Під динамічною вертикаллю будемо надалі розуміти напрям геометричної суми вектора прискорення сили тяжіння і вектора переносного прискорення місця розміщення приладу, взятого з оберненим знаком. У напрямі динамічної вертикалі розміщується маятник (сферичний), якщо період його власних коливань досить малий порівняно з періодом качки корабля.

скання корабля і іншої його качки немає і, крім того, корабель не маневрує. Тоді видимий рух гіроскопів буде зумовлений кутовою швидкістю Землі і дією коректуючих моментів. Незначним впливом кутової швидкості корабля, яка створюється за рахунок його власного руху по криволінійній поверхні Землі, можна, як правило, нехтувати.

3°. Нехай гірогоризонт має єдиний гіроскоп з вертикально орієнтованою власною віссю *, кардановий підвіс якого має осі, паралельні поздовжній і поперечній осям корабля.

Якщо через x позначити кут відхилу вектора кінетичного моменту гіроскопа від вертикалі в площині шпангоута корабля в напрямі лівого борту і вважати, що ніс корабля орієнтований по лінії північ—південь, то рух гіроскопа при наявності однієї бортової качки буде визначатися очевидним рівнянням

$$H\left(\frac{dx}{dt} - \omega \cos \varphi\right) = K(\gamma). \tag{1}$$

Тут ω — кутова швидкість Землі, φ — широта місця, $K(\gamma)$ — величина коректуючого моменту і γ — кут між напрямом динамічної вертикалі місця розташування приладу на кораблі і напрямом кінетичного моменту H.

Легко переконатися, що при незначній качці

$$\gamma = \frac{w}{g} - x, \tag{2}$$

де w — горизонтальна складова прискорення місця розташування приладу, зумовлена качкою корабля, і g — прискорення сили тяжіння **. Вважатимемо, що

$$\frac{w}{g} = \alpha \sin(pt+\delta) + \beta \sin(qt+\varepsilon), \tag{3}$$

тобто розглянемо випадок складної качки, що складається з двох періодичних, з різними частотами p і q і, власне кажучи, з різними амплітудами α і β початковими фазами δ і ε.

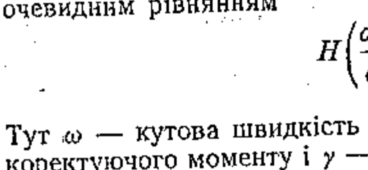

Рис. 1.

Функціональна залежність $K(\gamma)$ у більшості приладів має вигляд, вказаний на рис. 1. Зона лінійності $[-\gamma_1 \leqslant \gamma \leqslant +\gamma_1]$, де коректуючий момент K пропорціональний кутові γ, буває, звичайно, невеликою, а в деяких приладах її зовсім немає. Тому у дальшому дослідженні візьмемо до уваги, що має місце так званий контактний режим управління коректуючим моментом, тобто будемо вважати, що

$$K(\gamma) = K_1 \operatorname{sign} \gamma \tag{4}$$

і, отже,

$$K = -K_1, \text{ якщо } \gamma < 0; \qquad K = +K_1, \text{ якщо } \gamma > 0. \tag{5}$$

Вводячи позначення

$$\omega \cos \varphi = \mu, \quad \xi = \frac{w}{g} \tag{6}$$

і

$$\frac{K_1}{H} = \nu, \tag{7}$$

---

* Інші схеми гірогоризонтів досліджуються цілком аналогічно.

** Точніше $\gamma = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{w}{g - w'} - x$, де w' — вертикальна складова того ж прискорення.

а також, беручи до уваги формули (2), (4) і (5), подамо рівняння (1) у вигляді

$$\frac{dx}{dt}=\mu+\nu\,\mathrm{sign}\,(\xi-x). \tag{8}$$

4°. Рівняння (8) для випадку простої качки, при якій

$$\xi=\frac{w}{g}=\alpha\sin pt, \tag{9}$$

дослідив за допомогою елементарних прийомів М. І. Зайцев *.

Великі значення помилок, одержані теоретичним шляхом, він підтвердив результатами спеціального експериментального дослідження в лабораторних умовах.

Дослідження рівняння (8) в умовах складної качки за методом М. І. Зайцева натрапляє на великі труднощі; воно проведено в цій статті зовсім іншим способом, при використанні міркувань ймовірнісного характеру. Варте уваги те, що теоретичні величини помилок при складній качці виявляються значно меншими, ніж для простої качки з тією ж самою амплітудою. Це узгоджується з результатами випробувань гірогоризонта в умовах його експлуатації.

5°. Розглянемо спочатку елементарний розв'язок рівняння (8). Для цього побудуємо графік (рис. 2), рівняння якого має вигляд

$$\xi=\alpha\sin pt. \tag{10}$$

Нехай в початковий момент часу $t=0$ кут x має значення $x_0>0$ (інші початкові умови досліджуються аналогічно). У цьому випадку для початкового моменту часу і близьких наступних $x>\xi$ і, отже,

$$\xi-x<0, \tag{11}$$

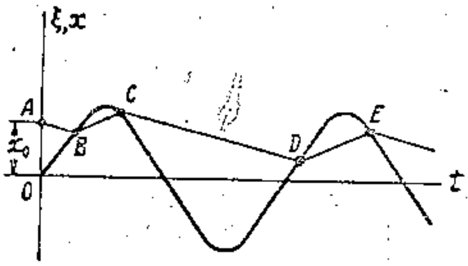

Рис. 2.

внаслідок чого, згідно з рівнянням (8), дістаємо

$$\frac{dx}{dt}=\mu-\nu. \tag{12}$$

На основі рівняння (12) зміна x, тобто кута відхилення осі гіроскопа від вертикалі, відбуватиметься за законом

$$x=x_0-(\nu-\mu)\,t \tag{13}$$

і зобразиться на тому ж рис. 2 похилою прямою AB. Безпосередньо помічаємо, що для успішної роботи приладу цілком необхідна наявність нерівності

$$\nu>\mu, \tag{14}$$

тобто потрібно, щоб коректуючий момент K_1 був досить великим. Точка B перетину прямої (13) і кривої (10) відповідає перетворенню кута

$$\gamma=\xi-x \tag{15}$$

в нуль і зміні його знака.

Надалі зміна x, як це випливає з рівняння (8), відбуватиметься за законом

$$\frac{dx}{dt}=\mu+\nu. \tag{16}$$

---

* Дослідження М. І. Зайцева, на жаль, залишилось не опублікованим.

і зображатиметься на рис. 2 прямою BC з додатним кутовим коефіцієнтом. Точці C знову відповідає зміна знака кута γ; наступна зміна x знов підпадатиме під рівняння (12) і т. д.

Таким чином, графік функції $x=x(t)$ являє собою ламану лінію $ABCДE\ldots$, зломи якої знаходяться на синусоїді (10), причому кутові коефіцієнти відрізків ламаної мають то додатні, то від'ємні значення, залежно від того, вище чи нижче розташовуються частки відповідних дуг синусоїди.

Якщо точка B опиниться поблизу вершини синусоїди (10), то може трапитись, що в цій точці

$$\frac{d\xi}{dt}<\mu+\nu. \tag{17}$$

У цьому випадку відрізок BC замінюється дугою синусоїди, причому положення точки C визначається умовою

$$\frac{d\xi}{dt}=\mu+\nu. \tag{18}$$

Надалі побудова функції $x=x(t)$ провадиться так, як указано вище.

Очевидно, що подібну ж побудову можна здійснити при якому завгодно вигляді кривої $\xi=\xi(t)$ і, зокрема, для випадку складної качки за законом (3); проте висновки про закономірності розташування відрізків ламаної у цьому випадку зробити важко.

6°. У випадку синусоїди це питання розв'язується просто, бо й без формальних математичних викладок видно, що ламана дуже швидко стає періодичною, з тим самим періодом, що й синусоїда (10).

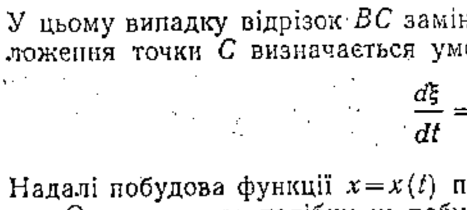

Рис. 3.

Розглянемо три послідовні точки злому періодичної ламаної (див. рис. 3). Позначимо абсциси цих точок через t_1, t_2, t_3, а ординати, відповідно, через x_1, x_2 і x_3.

По-перше, згідно з співвідношеннями (12) і (16) справедливі рівності:

$$\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\mu+\nu; \tag{19}$$

$$\frac{x_3-x_2}{t_3-t_2}=\mu-\nu. \tag{20}$$

Далі, в силу періодичності маємо:

$$x_3=x_1, \tag{21}$$

$$t_3-t_1=\frac{2\pi}{p}. \tag{22}$$

Нарешті, через те що точки злому лежать на синусоїді (10),

$$x_1=\alpha\sin pt_1, \tag{23}$$

$$x_2=\alpha\sin pt_2. \tag{24}$$

Співвідношення (19)— (24) являють собою шість рівнянь з шістьма невідомими координатами трьох точок злому. Рівняння (19) і (20) після виключення з останнього величин x_3 і t_3 можна за допомогою співвідношень (21) і (22) привести до вигляду:

$$x_2-x_1=(\mu+\nu)\ (t_2-t_1), \tag{25}$$

$$x_2-x_1=(\nu-\mu)\left(\frac{2\pi}{p}+t_1-t_2\right), \tag{26}$$

звідки

$$p\,(t_2-t_1)=\frac{\nu-\mu}{\nu}\pi, \tag{27}$$

і, отже,

$$x_2-x_1=\frac{\nu^2-\mu^2}{p\nu}\pi. \tag{28}$$

З другого боку, згідно з рівностями (23), (24) і (27), маємо:

$$x_2-x_1=2\alpha\cos\left(\frac{\nu-\mu}{2\nu}\pi+pt_1\right)\sin\frac{\nu-\mu}{2\nu}\pi. \tag{29}$$

Порівнюючи співвідношення (28) і (29), дістанемо рівняння

$$\frac{\nu^2-\mu^2}{p\nu}\pi=2\alpha\cos\left(\frac{\nu-\mu}{2\nu}\pi+pt_1\right)\sin\frac{\nu-\mu}{2\nu}\pi \tag{30}$$

для визначення координати t_1, після чого задача швидко доводиться до кінця.

Особливий інтерес являє собою середнє відхилення від вертикалі, тобто величина

$$x_{\text{сер}}=\frac{x_1+x_2}{2}. \tag{31}$$

Згідно з співвідношеннями (23) і (24), дістаємо:

$$x_{\text{сер}}=\alpha\sin p\frac{t_1+t_2}{2}\cos p\frac{t_1-t_2}{2}. \tag{32}$$

Використовуючи далі співвідношення (27), приходимо до виразу

$$x_{\text{сер}}=\alpha\sin\left(\frac{\nu-\mu}{2\nu}\pi+pt_1\right)\cos\frac{\nu-\mu}{2\nu}\pi. \tag{33}$$

З рівності (30) випливає, що

$$\sin\left(\frac{\nu-\mu}{2\nu}\pi+pt_1\right)=\sqrt{1-\left(\frac{\nu^2-\mu^2}{2p\nu\alpha}\ \frac{\pi}{\sin\frac{\nu-\mu}{2\nu}\pi}\right)^2}; \tag{34}$$

отже, формула (33) приводиться до вигляду:

$$x_{\text{сер}}=\alpha\cos\frac{\nu-\mu}{2\nu}\pi\sqrt{1-\left(\frac{\nu^2-\mu^2}{2p\nu\alpha}\ \frac{\pi}{\sin\frac{\nu-\mu}{2\nu}\pi}\right)^2}. \tag{35}$$

Якщо $\mu=0$, тобто коли вплив обертання Землі на прилад усунути будь-яким допоміжним способом (наприклад, спеціальним компенсуючим моментом), то згідно з рівнянням (35), як і слід було чекати,

$$x_{\text{сер}}=0. \tag{36}$$

Величина ν являє собою, як це легко бачити з рівняння (8), кутову швидкість корекції. Звичайно, ця величина значно більша за горизонтальну складову кутової швидкості Землі μ. Тому наближено маємо:

$$\cos\frac{\nu-\mu}{2\nu}\pi=\sin\frac{\mu\pi}{2\nu}\approx\frac{\mu\pi}{2\nu}; \tag{37}$$

$$\sin\frac{\nu-\mu}{2\nu}\pi=\cos\frac{\mu\pi}{2\nu}\approx 1. \tag{38}$$

Беручи до уваги рівності (37) і (38), з формули (35) з достатньою точністю дістаємо

$$x_{\text{сер}}=\frac{\alpha\mu}{\nu}\frac{\pi}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\nu\pi}{2p\alpha}\right)^2}. \tag{39}$$

З другого боку, добуток $p\alpha$ являє собою кутову швидкість відхилення динамічної вертикалі від справжньої. Ця швидкість значно більша від кутової швидкості корекції ν. Тому в формулі (39) можна підкореневий вираз замінити одиницею. В результаті приходимо до наближеної формули М. І. Зайцева

$$x_{\text{сер}}\approx\frac{\alpha\mu}{\nu}\frac{\pi}{2}. \tag{40}$$

Наскільки значним може виявитись середнє відхилення кінетичного моменту від вертикалі із-за качки, показує такий числовий приклад. Нехай

$$\frac{w}{g}=0{,}1\sin pt,\ \text{тобто}\ \alpha=0{,}1;\ \ p=1\ {}^1/\text{сек};\ \ \mu=10\ {}'/\text{хв};\ \ \nu=100\ {}'/\text{хв}.$$

Тоді, згідно з формулою (40), дістанемо:

$$x_{\text{сер}}=\frac{\alpha\mu}{\nu}\frac{\pi}{2}=0{,}01571\,(54'),$$

що являє собою дуже помітну помилку в показаннях приладу. Точна формула (35) дає

$$x_{\text{сер}}=0{,}01564.$$

7°. Другий метод дослідження базується на припущенні про близькість однієї до одної границь зміни величини x порівняно з відповідною зміною ξ. Інакше кажучи, у випадку простої чи складної качки вважається, що відхилення x кінетичного моменту від вертикалі змінюється незначно в порівнянні, наприклад, з амплітудою відхилення динамічної вертикалі, якщо розглядати інтервали часу порядку періоду качки. Інтегруючи праву й ліву частини диференціального рівняння (8)

$$\frac{dx}{dt}=\mu+\nu\,\text{sign}\,(\xi-x)$$

в границях від $t=0$ до $t=T$, дістанемо:

$$\frac{x(T)-x(0)}{T}=\mu+\frac{\nu}{T}\int_0^T\text{sign}\,(\xi-x)\,dt. \tag{41}$$

При достатньо великому T ліву частину рівності (41) можна відкинути. Отже, можна вважати, що

$$\frac{\mu}{\nu}+\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sign}(\xi-x)\,dt=0. \tag{42}$$

Зауважимо, що у випадку сталого періодичного руху гіроскопічного приладу в умовах простої качки корабля ліва частина рівняння (41) точно дорівнює нулеві, якщо за час T взяти період качки.

Згідно із зробленим вище припущенням, в інтегральному виразі (42) величину x можна вважати сталою. Тоді очевидно, що

$$\int_0^T \operatorname{sign}(\xi-x)\,dt=T_2-T_1, \tag{43}$$

де T_1 — сума інтервалів часу, протягом яких крива $\xi=\xi(t)$, розташована нижче прямої $\xi=x=\text{const}$, а T_2, аналогічно, — сума для випадку оберненого розташування кривої $\xi=\xi(t)$.

Для випадку складної качки, що характеризується рівнянням типу (3), слід чекати, що

$$\lim_{T\to\infty}\frac{T_1-T_2}{T}=f(x), \tag{44}$$

де $f(x)$ — функція, властивості якої визначаються видом функції $\xi=\xi(t)$.

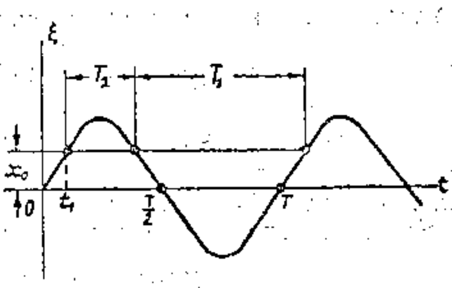

Рис. 4.

В силу рівнянь (42), (43) і (44) визначення кореня рівняння

$$f(x)=\frac{\mu}{\nu} \tag{45}$$

розв'язує поставлену задачу.

8°. У випадку простої качки за законом (10)

$$\xi=\alpha\sin pt$$

за час T можна, як уже згадувалось, взяти період качки

$$T=\frac{2\pi}{p}. \tag{46}$$

Проводячи на графіку кривої (10) пряму, паралельну осі абсцис на віддалі x_0 від останньої (рис. 4), безпосередньо переконуємось, що

$$\begin{aligned}T_2&=\frac{T}{2}-2t_1\\ T_1&=\frac{T}{2}+2t_1\end{aligned} \tag{47}$$

і, отже,

$$\frac{T_1-T_2}{T}=\frac{4t_1}{T}=\frac{2pt_1}{\pi}. \tag{48}$$

Тут t_1 — найменший корінь рівняння

$$\alpha\sin pt=x. \tag{49}$$

При малому значенні x порівняно з α маємо:

$$\frac{x}{\alpha}=\sin pt_1\approx pt_1 \tag{50}$$

і, отже,

$$\frac{T_1-T_2}{T}=\frac{2x}{\pi\alpha}. \tag{51}$$

Відповідно до рівнянь (42), (43) і (51) маємо тепер

$$\frac{\mu}{\nu}-\frac{2x}{\pi\alpha}=0, \tag{52}$$

звідки

$$x=\frac{\alpha\mu}{\nu}\cdot\frac{\pi}{2},$$

тобто знову одержуємо формулу (40).

9°. Розглянемо тепер випадок складної качки, яка відбувається за законом (3). У цьому випадку маємо:

$$\xi(t)=\frac{w}{g}=\alpha\sin(pt+\delta)+\beta\sin(qt+\varepsilon). \tag{53}$$

Для розв'язання поставленої задачі при припущеннях, викладених вище, досить знайти границю відношення $T_2:T$ при $T\to\infty$, де T_2, як і раніше, являє суму тих інтервалів часу, при яких $\xi(t)>x$. При несумірних p і q можна вважати $\xi(t)$ за суму двох величин:

$$\eta(t)=\alpha\sin(pt+\delta)\quad \text{і}\quad \zeta(t)=\beta\sin(qt+\varepsilon), \tag{54}$$

які можна розглядати як випадкові незалежні.

Ймовірність знаходження величин η в інтервалі $(\eta, \eta+d\eta)$ має вигляд

$$\frac{1}{\pi}\frac{d\eta}{\sqrt{\alpha^2-\eta^2}}. \tag{55}$$

Вираз (55) являє собою, по суті, частку періоду, на протязі якого точка, що коливається за законом

$$\eta=\alpha\sin(pt+\delta), \tag{56}$$

знаходиться в інтервалі $(\eta, \eta+d\eta)$. Оскільки, згідно з законом (56),

$$d\eta=p\alpha\cos(pt+\delta)\,dt=\sqrt{\alpha^2-\eta^2}\,p\,dt, \tag{57}$$

то час проходження точкою інтервалу довжиною $d\eta$ виражається формулою

$$dt=\frac{d\eta}{p\sqrt{\alpha^2-\eta^2}}. \tag{58}$$

За один період цей інтервал проходиться точкою двічі; отже, шукана частка періоду дорівнює

$$\frac{2dt}{\frac{2\pi}{p}}=\frac{d\eta}{\pi\sqrt{\alpha^2-\eta^2}}. \tag{59}$$

Аналогічно ймовірність випадкової величини $\zeta(t)$ можна представити виразом

$$\frac{1}{\pi}\frac{d\zeta}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}}. \tag{60}$$

(50)

(51)

(52)

відбувається за

(53)

ікладених вище,
T_2, як і раніше,
іесумірних p і q

(54)

, $\eta+d\eta$) має ви-

(55)

тязі якого точка,

(56)

шаконом (56).

(57)

виражається фор-

(58)

кі; отже, шукана

(59)

жна представити

(60)

Відповідно до відомої теореми множення, ймовірність того, що величини η і ζ одночасно опиняться в заданих інтервалах $(\eta,\ \eta+d\eta)$, $(\zeta,\ \zeta+d\zeta)$ має такий вираз:

$$\frac{1}{\pi^2}\,\frac{d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(\alpha^2-\eta^2)(\beta^2-\zeta^2)}}. \tag{61}$$

Для того щоб узнати, на протязі якого достатньо великого проміжку часу T величини η і ζ залишались в границях якоїсь заданої області S (рис. 5), слід на цю область поширити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_S \frac{1}{\pi^2}\,\frac{d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(\alpha^2-\eta^2)(\beta^2-\zeta^2)}}. \tag{62}$$

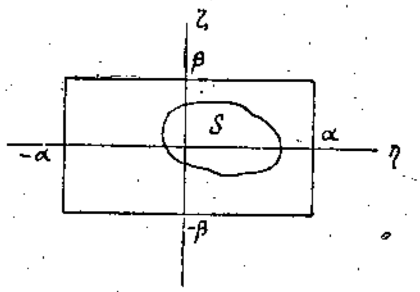

Рис. 5.

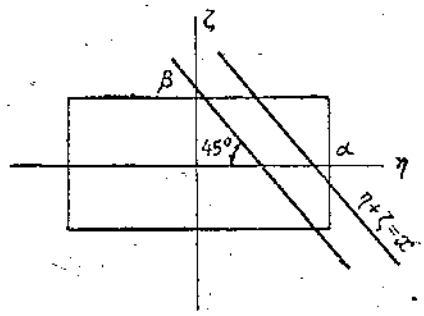

Рис. 6.

З геометричної точки зору можлива область сумісних значень величин η і ζ являє собою на площині H прямокутник з вершинами в точках $\pm\alpha$; $\pm\beta$. Легко перевірити, що

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\alpha}^{+\alpha}\int\limits_{-\beta}^{+\beta}\frac{d\eta\, d\zeta}{\sqrt{(\alpha^2-\eta^2)(\beta^2-\zeta^2)}}=1, \tag{63}$$

як і повинно бути.

Поза областю згаданого прямокутника сумісні значення η і ζ неможливі і, отже, густина ймовірності їх одночасних заданих значень дорівнює нулеві.

Умові

$$\xi \geqslant x \tag{64}$$

відповідає область прямокутника (рис. 6), праворуч і вище прямої

$$\eta+\zeta=x. \tag{65}$$

Таким чином, шукане відношення $T_2 : T$, яке позначимо через $f_2(x)$, являє собою подвійний інтеграл, поширений на цю область.

При $x>0$ можливі два види області $\xi>x$: трикутний і трапецоїдальний, залежно від того, більше чи менше число x від модуля різниці $\alpha-\beta$. При $\alpha=\beta$ область являє собою тільки трикутник. Випадок трапецоїдальної області найбільш реальний. Тому обмежимось розглядом випадку трапецоїдальної області, приймаючи для означеності $\alpha>\beta$. У цьому випадку інтегрування по змінній ζ проходитиме в границях $(-\beta, \beta)$, а по змінній η — в границях $(x-\zeta,\ \alpha)$.

Отже,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{T_2}{T}=f_2(x)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\beta}^{+\beta}\left\{\int\limits_{x-\zeta}^{\alpha}\frac{d\eta}{\sqrt{\alpha^2-\eta^2}}\right\}\frac{d\zeta}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}}. \tag{66}$$

Внутрішній інтеграл (неозначений) по змінній η є $\arcsin \frac{\eta}{\alpha}$. Таким чином,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{T_2}{T} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\beta}^{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x-\zeta}{\alpha} \right) \frac{d\zeta}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^2} \int_{-\beta}^{+\beta} \arcsin \frac{x-\zeta}{\alpha} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}}. \qquad (67)$$

Оскільки

$$T_1 = T - T_2, \qquad (68)$$

то в силу виразів (67) і (68), одержуємо:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{T_1 - T_2}{T} = \lim_{T\to\infty} \left(1 - 2\frac{T_2}{T} \right) = \frac{2}{\pi^2} \int_{-\beta}^{+\beta} \arcsin \frac{x-\zeta}{\alpha} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}}. \qquad (69)$$

Звертаючись тепер до рівнянь (44) і (45), одержимо для шуканої величини x рівняння

$$\frac{2}{\pi^2} \int_{-\beta}^{\beta} \arcsin \frac{x-\zeta}{\alpha} \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{\beta^2-\zeta^2}} = \frac{\mu}{\nu}. \qquad (70)$$

Заміною змінної

$$\zeta = \beta \sin \theta \qquad (71)$$

це рівняння приводиться до вигляду

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \arcsin \frac{x - \beta \sin \theta}{\alpha} \, d\theta = \frac{\pi^2}{2} \frac{\mu}{\nu}. \qquad (72)$$

Із структури виразу (72) випливає, що

$$\frac{x}{\alpha} = \varphi \left(\frac{\beta}{\alpha}; \frac{\mu}{\nu} \right), \qquad (73)$$

де функцію двох змінних φ можна побудувати за допомогою числових розрахунків.

Вважаючи $x \ll \beta$, легко дати наближений розв'язок рівняння (72), замінивши підінтегральну функцію першими двома членами її розкладу в ряд Маклорена

$$\arcsin \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \sin \theta \right) = -\arcsin \left(\frac{\beta}{\alpha} \sin \theta \right) + \frac{x}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \sin \theta \right)^2}} + \dots \qquad (74)$$

Оскільки функція $\arcsin \left(\frac{\beta}{\alpha} \sin \theta \right)$ — непарна, то

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \arcsin \left(\frac{\beta}{\alpha} \sin \theta \right) d\theta = 0 \qquad (75)$$

і, отже, рівняння (72) замінюється наближеним рівнянням

$$\frac{x}{\alpha}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\sin\theta\right)^2}}=\frac{\mu}{\nu}\,\frac{\pi^2}{2}, \tag{76}$$

звідки

$$x=\frac{\alpha}{K\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\cdot\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\pi^2}{4}, \tag{77}$$

де $K\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду.

Варте уваги те, що у випадку простої качки, тобто при $\beta=0$, формула (77) приводиться до формули (40). Для цього досить взяти до уваги, що

$$K(0)=\frac{\pi}{2}. \tag{78}$$

Взагалі ж

$$K\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{2}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2+\dots\right]>\frac{\pi}{2}. \tag{79}$$

Внаслідок цього, при наявності складної качки за законом (3), помилка приладу має бути меншою, ніж навіть при простій гармонічній качці, що входить до складу складної.

Мабуть, саме цією обставиною пояснюється той факт, що на кораблі при качці помилка гірогоризонта при наявності контактної корекції не буває такою великою, як то мало бути за формулою (40). Дійсно, максимальне відхилення динамічної вертикалі при качці типу (53) дорівнює сумі $\alpha+\beta$. Якщо цю суму прийняти умовно за амплітуду простої качки, то помилка, згідно з формулою (40), дорівнюватиме величині

$$x^*=\frac{(\alpha+\beta)\,\mu}{\nu}\cdot\frac{\pi}{2}, \tag{80}$$

яка перевищує величину x, що одержується за формулою (77), в

$$2\,\frac{\alpha+\beta}{\pi\alpha}\,K\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \tag{81}$$

раз. Наприклад, якщо $\alpha=0{,}06$, а $\beta=0{,}04$, то

$$2\,\frac{\alpha+\beta}{\pi\alpha}\,K\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=1{,}92$$

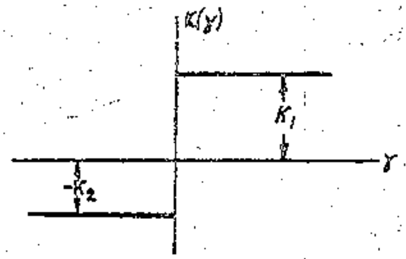

Рис. 7.

і, відповідно до наведеного вище прикладу, помилка на качці буде вже 28′, замість 54′ при простій качці з амплітудою відхилення динамічної вертикалі, рівною сумі чисел 0,06 та 0,04.

Зауважимо, що визначення помилки за допомогою числового інтегрування і інтерполяції рівняння (72) дає величину

$$x=0{,}0090,$$

якій відповідає кут в 31′. Таким чином, наближена формула (81) є цілком задовільною.

Слід чекати, що складні качки, які містять три і більше гармонічних складових, зумовлять ще меншу помилку гірогоризонта.

10°. Усе викладене вище стосується також випадку несиметричного коректуючого моменту (рис. 7), коли

$$K=K_1 \quad \text{при} \quad \gamma>0$$
$$K=-K_2 \quad \text{при} \quad \gamma<0, \tag{82}$$

причому $K_1 \neq K_2$. У цьому випадку

$$\mu=\omega \cos \varphi+\frac{K_2-K_1}{2H}$$

і, отже, помилка на качці матиме місце навіть і при повній компенсації впливу обертання Землі на прилад.

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. В. Булгаков, Прикладная теория гироскопов, ГИТТЛ, 1955.
2. Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, 1949.

Надійшла до редакції
12. III 1956 р.

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОШИБОК ГИРОГОРИЗОНТА НА КАЧКЕ ПРИ НАЛИЧИИ КОРРЕКЦИИ РЕЛЕЙНОГО ТИПА

А. Ю. Ишлинский

Резюме

В статье исследуется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt}=\mu+\nu \operatorname{sign}[\xi(t)-x(t)],$$

где μ и ν — заданные постоянные, $x(t)$ — искомая, а $\xi(t)$ — заданная функция времени t. Такое уравнение встречается в теории автоматического регулирования. Здесь оно рассматривается в связи с описанием поведения гироскопического прибора — указателя горизонтальной плоскости на качающемся корабле (гирогоризонт).

Функция $\xi(t)$ принимается в простейшем случае простой гармонической, а в более общем — состоящей из суммы двух гармонических с несоизмеримыми периодами. Наибольший интерес для практики представляет отыскание среднего значения искомой функции $x(t)$ по времени. В случае, когда $\xi(t)$ — простая гармоническая, эта задача элементарна; с достаточным для практики приближением ее решение дается формулой

$$x=\frac{\alpha\mu}{\nu}\frac{\pi}{2},$$

где α — амплитуда функции $\xi(t)$. Более точная формула, учитывающая угловую частоту p синусоиды $\xi(t)$, имеет вид

$$x=\frac{\alpha\mu}{\nu}\frac{\pi}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\nu\pi}{2p\alpha}\right)^2}.$$

Формула (35) в тексте статьи дает точное решение этой задачи.

Среднее значение по времени функции $x(t)$ при медленном ее изменении по сравнению с функцией $\xi(t)$ может быть определено посредством решения уравнения

$$\frac{\mu}{\nu} + \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \operatorname{sign}(\xi - x)\, dt = 0,$$

где T — достаточно большой интервал времени. Если ввести функцию

$$f(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{T_2 - T_1}{T},$$

где T_2 — сумма подинтервалов времени, в течение которых в интервале времени T функция $\xi(t)$ превышает постоянное количество x, а T_1 — аналогичная сумма подинтервалов, в течение которых $\xi(t)$ не больше этой постоянной, — то указанное выше уравнение приводится к виду:

$$f(x) = \frac{\mu}{\nu}.$$

Следуя А. Н. Колмогорову в случае несоизмеримых периодов двух гармонических функций, можно выражение

$$\xi(t) = \eta(t) + \zeta(t),$$

где

$$\eta(t) = \alpha \sin(pt + \delta),$$

$$\zeta(t) = \beta \sin(qt + \varepsilon),$$

рассматривать как сумму независимых случайных функций с законом распределения

$$\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\pi\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}} & (|\eta| < \alpha) \\ 0 & (|\eta| > \alpha) \end{array}$$

для функции $\eta(t)$ и аналогичным законом распределения для функции $\zeta(t)$.

Если $\alpha > \beta$, то подсчет функции $f(x)$ сводится к определению величины двойного интеграла

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\beta}^{\beta}\int_{x-\zeta}^{\alpha} \frac{d\eta\, d\zeta}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}\sqrt{\beta^2 - \zeta^2}}.$$

Среднее значение x с достаточной для практики точностью дает формула

$$x = \frac{\alpha}{K\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \cdot \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\pi^2}{4},$$

где $K\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При $\beta = 0$ эта формула приводится к указанной выше приближенной формуле, выведенной для случая гармонической функции $\xi(t)$.