

ПРО ПРЕЦЕСІЙНІ КОЛИВАННЯ НАВАНТАЖЕНОГО ОДНОВІСНОГО ГІРОСКОПІЧНОГО СТАБІЛІЗАТОРА

О. Ю. Ішлінський

(Інститут математики АН УРСР)

Гіроскопічні системи із стабілізуючим двигуном (рис. 1) знаходять собі широке застосування для стабілізації всіляких пристроїв навколо однієї осі в різноманітних системах автоматичного регулювання*. Кожух гіроскопа такої системи має вільне обертання з мінімальним тертям в підшипниках карданового кільця.

При відхиленні кожуха від середнього положення, при якому вісь ротора перпендикулярна до площини карданового кільця, за допомогою контактної пристрою вмикається електричний двигун, зв'язаний з віссю карданового кільця. Напрям зусилля, яке розвиває двигун при обертанні, погоджений так, щоб прецесія гіроскопа, викликана цим зусиллям, повертала гіроскоп в його середнє положення.

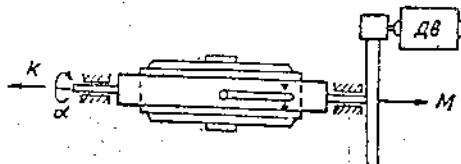


Рис. 1.

У подібних гіроскопічних системах спостерігаються періодичні рухи кожуха гіроскопа відносно карданового кільця, причому частота і амплітуда цих рухів істотно залежать від величини так званого дестабілізуючого моменту, прикладеного до карданового кільця системи.

Згадана частота виявляється значно меншою, ніж частота нутаційних рухів системи; остання має порядок куткової швидкості ротора. Внаслідок цього при теоретичному дослідженні таких явищ досить обмежитись вивченням прецесійних рухів гіроскопа, тобто залишатись в рамках елементарної теорії гіроскопів.

Надалі можна залишити без уваги можливі зазори (люфти) в передачах від двигуна до карданового кільця, моменти тертя в осях кожуха гіроскопа і карданового кільця, екстраструми контактних пристроїв та інші другорядні обставини.

В цьому випадку диференціальне рівняння руху кожуха гіроскопа відносно карданового кільця матиме вигляд

$$H \frac{d\alpha}{dt} = M - K. \quad (1)$$

Тут H — власний кінетичний момент гіроскопа, α — кут відхилення кожуха гіроскопа від середнього положення, M — величина дестабілізуючого моменту, яка вважається надалі сталою величиною, K — момент, який накладається на карданове кільце електричним двигуном.

* Б. В. Булгаков, Прикладная теория гироскопов, ГИТТЛ, 1955.

Через те що двигун працює в режимі короткого замикання, слід вважати, що момент K змінюється за відомим законом

$$K = \varphi(t). \quad (2)$$

Тут початок відліку часу $t=0$ відповідає моменту спрацьовування контактної пристрою. Зараз же після розриву контакту, якщо нехтувати екстраструмом розмикання, момент двигуна дорівнює нулеві.

Якщо вважати, що перехідний процес режиму короткого замикання в основному визначає індуктивний опір якоря двигуна, то

$$K = K_1 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad (3)$$

де K_1 — сталі значення зусилля двигуна, що виникає при його обертанні в режимі короткого замикання, R і L — відповідно омичний опір і коефіцієнт самоіндукції в ланцюгу якоря двигуна.

В більш складних випадках при наявності значного часу запізнення проміжних реле і підсилювачів функція $\varphi(t)$ матиме складніший вигляд. Однак розв'язок задачі про визначення частоти і амплітуди рухів гіроскопа в цих випадках не дуже ускладнюється.

Для інтервалу часу, протягом якого контактний пристрій замкнений, маємо, порівнюючи рівняння (1) і (3),

$$H \frac{d\alpha}{dt} = M - K_1 (1 - e^{-\nu t}), \quad (4)$$

де

$$\nu = \frac{R}{L}. \quad (5)$$

Звідси після інтегрування одержуємо

$$H\alpha = -\left(K_1 - M\right)t - \frac{K_1}{\nu} e^{-\nu t} + C. \quad (6)$$

Контактний пристрій спрацьовує в середньому положенні гіроскопа, тому слід покласти $\alpha=0$ при $t=0$; після чого, згідно з співвідношенням (6), одержимо величину константи C , а саме:

$$C = \frac{K_1}{\nu}. \quad (7)$$

Беручи до уваги формулу (7), рівняння (6) можна звести до вигляду

$$\frac{\nu H}{K_1} \alpha = 1 - e^{-\nu t} - (1 - \mu) \nu t. \quad (8)$$

Тут

$$\mu = \frac{M}{K_1}. \quad (9)$$

Рівняння (8) визначає рух гіроскопа до моменту часу $t=t_1$, при якому кут α знову дорівнює нулеві.

Легко бачити, що рівняння

$$1 - \mu - \frac{1 - e^{-\nu t_1}}{\nu t_1} = 0, \quad (10)$$

де

$$\tau_1 = \nu t_1, \quad (11)$$

дозволяє з'ясувати, що момент K змінюється за відомим законом

Тут початок відліку часу $t=0$ відповідає моменту спрацьовування контактної пристрою. Зараз же після розриву контакту, якщо нехтувати екстраструмом розмикання, момент двигуна дорівнює нулеві.

Якщо вважати, що перехідний процес режиму короткого замикання в основному визначає індуктивний опір якоря двигуна, то

де K_1 — сталі значення зусилля двигуна, що виникає при його обертанні в режимі короткого замикання, R і L — відповідно омичний опір і коефіцієнт самоіндукції в ланцюгу якоря двигуна.

В більш складних випадках при наявності значного часу запізнення проміжних реле і підсилювачів функція $\varphi(t)$ матиме складніший вигляд. Однак розв'язок задачі про визначення частоти і амплітуди рухів гіроскопа в цих випадках не дуже ускладнюється.

Для інтервалу часу, протягом якого контактний пристрій замкнений, маємо, порівнюючи рівняння (1) і (3),

де

Звідси після інтегрування одержуємо

Контактний пристрій спрацьовує в середньому положенні гіроскопа, тому слід покласти $\alpha=0$ при $t=0$; після чого, згідно з співвідношенням (6), одержимо величину константи C , а саме:

Беручи до уваги формулу (7), рівняння (6) можна звести до вигляду

Тут

Рівняння (8) визначає рух гіроскопа до моменту часу $t=t_1$, при якому кут α знову дорівнює нулеві.

Легко бачити, що рівняння

де

Приклад $\nu = 5$ 1/сек. τ_1

дозволяє знайти період прецесійних рухів гіроскопа. Дійсно, після розмикання контактів в момент часу $t=t_1$ момент двигуна стрибкоподібно (якщо нехтувати екстраструмом розмикання) зникає, і гіроскоп під дією дестабілізуючого моменту M починає переміщуватись в напрямку зростання кута α . Негайно знову відбувається замикавання контактів, і рух повторюється.

Цікаво, що період t_1 не залежить від власного кінетичного моменту гіроскопа H , а лише від величин

$$\mu = \frac{M}{K_1} \text{ і } \nu = \frac{R}{L},$$

які характеризують відносно завантаження двигуна дестабілізуючим моментом (K_1 — максимальний момент, який може розвинути двигун при обертанні) і електричні властивості ланцюга якоря.

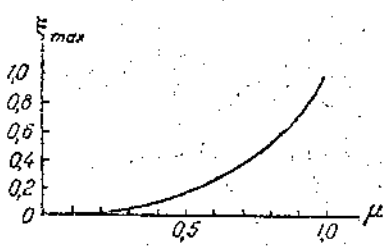


Рис. 2.

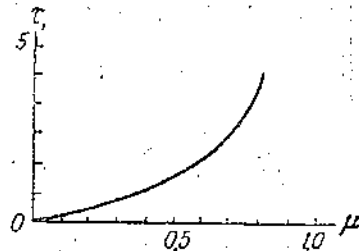


Рис. 3.

Максимальне відхилення α_{\max} гіроскопа від вихідного середнього положення досягається в якийсь-то момент часу $t=t_m$, коли швидкість прецесії дорівнює нулеві.

Згідно рівнянню (4), одержуємо для відшукування величини t_m співвідношення

$$M - K_1(1 - e^{-\nu t_m}) = 0, \quad (12)$$

звідки, маючи на увазі рівність (9), одержимо

$$t_m = -\frac{1}{\nu} \ln(1 - \mu). \quad (13)$$

Підставляючи в формулу (8) вираз (13) для t_m , одержимо шукане максимальне відхилення гіроскопа

$$\alpha_{\max} = \frac{K_1}{\nu H} [\mu + (1 - \mu) \ln(1 - \mu)]. \quad (14)$$

Нижче за рівняннями (13) і (14), а також числовим розв'язком рівняння (10) наведена таблиця значень величин

$$\xi_{\max} = \frac{\nu H}{K_1} \alpha_{\max} \text{ і } \tau_1 = \nu t_1; \quad \tau_m = \nu t_m \quad (15)$$

для різноманітних значень μ ($0 < \mu < 1$) та ілюструючі її графіки (рис. 2 і 3).

При малих значеннях μ справедливі наближені формули

$$\xi_{\max} = \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{6}; \quad \tau_1 = 2\mu + \frac{4}{3}\mu^2. \quad (16)$$

Приклад. Нехай $H=5000$ г·см·сек; $M=40$ г·см; $K_1=50$ г·см; $\nu=5$ 1/сек. Тоді за формулою (9) маємо

$$\mu = \frac{M}{K_1} = 0,8$$

і, отже, згідно з таблицею

$$\tau_1 = 4,965; \quad \tau_{\max} = 1,609; \quad \xi_{\max} = 0,478.$$

Використовуючи формули (15), одержимо

$$\alpha_{\max} = \frac{K_1}{rH} \xi_{\max} \approx 0,000956 (3,3') \quad \text{і} \quad t_1 = \frac{\tau_1}{r} \approx 1 \text{ сек.}$$

Таким чином, в даному випадку гіроскопічний стабілізатор зробить одно коливання в секунду.

| μ | 0,05 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 | 0,70 | 0,80 | 0,90 | 0,95 |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| τ_1 | 0,103 | 0,213 | 0,464 | 0,762 | 1,126 | 1,594 | 2,231 | 3,197 | 4,965 | 10,000 | 20,000 |
| τ_{\max} | 0,051 | 0,105 | 0,223 | 0,357 | 0,511 | 0,693 | 0,916 | 1,204 | 1,609 | 2,303 | 2,996 |
| ξ_{\max} | 0,0013 | 0,0052 | 0,0215 | 0,0501 | 0,0935 | 0,153 | 0,234 | 0,339 | 0,478 | 0,670 | 0,800 |

На рис. 4 наведено графік руху гіроскопа в змінних ξ і τ для декількох числових значень параметра μ . Ці криві відтворюють в масштабі $\frac{K_1}{rH}$ кут α — відхилення гіроскопа від середнього положення і в масштабі $\frac{L}{R}$ — час t .

Для загального випадку, коли зусилля двигуна, що виникає внаслідок обертання, після замикання контактів розвивається за довільним законом (2)

$$K = \varphi(t), \quad (17)$$

слід побудувати інтегральну криву

$$f(t) = \int_0^t \varphi(t) dt \quad (18)$$

і провести на тому ж самому графіку через початок координат пряму з кутовим коефіцієнтом M . Різниця ординат кривої і прямої, як це впливає з рівняння (1), являє собою

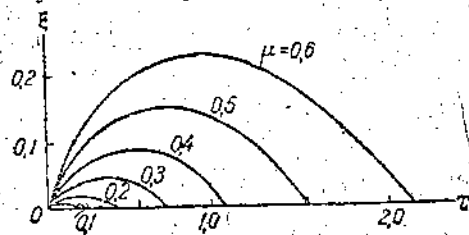


Рис. 4.

добуток H_0 і, отже, визначає кут відхилення гіроскопа в різні моменти часу. Абсциса точки перетину згаданих ліній визначає період прецесійних рухів гіроскопа. При поворотах кожуха гіроскопа відносно зовнішнього кільця сили тертя в підшипниках осі кожуха викликають прецесію гіроскопа навколо осі зовнішнього кільця. Позначимо через F момент кулонового тертя в осі кожуха. Момент тертя змінює свій напрям разом з кутовою швидкістю прецесії $\frac{d\alpha}{dt}$ гіроскопа навколо осі кожуха.

Тому на кут

в один бі

в другий

являє соб
Через
кутова ш
навантаж

Надій.
€

О
Од:

Кожу постійні прецесії ходит показує для їх в гіроскопа В м иєм кож гателя М якоря. П кожуха с ческая ц бречь эк в нуль в такти вн Срає в период веиства в стабилиз. ново трем от велич лением.

Тому на протязі інтервалу часу $(0, t_m)$ зовнішнє кільце повернеться на кут

$$\frac{F t_m}{H} \quad (19)$$

в один бік, а в інтервалі (t_m, t_1) — на кут

$$\frac{F(t_1 - t_m)}{H} \quad (20)$$

в другий бік. Вираз

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{\text{ср}} = \frac{F}{H} \cdot \frac{2t_m - t_1}{t_1} = \frac{F}{H} \cdot \frac{2\tau_m - \tau_1}{\tau_1} \quad (21)$$

являє собою середню кутову швидкість повороту зовнішнього кільця.

Через те що час t_m залежить від величини дестабілізуючого моменту, кутова швидкість відходу зовнішнього кільця виявляється залежною від навантаження на гіроскопичний стабілізатор.

Надійшла до редакції
8.VI 1956 р.

О ПРЕЦЕССИОННЫХ КОЛЕБАНИЯХ НАГРУЖЕННОГО ОДНООСНОГО ГИРОСКОПИЧЕСКОГО СТАБИЛИЗАТОРА

А. Ю. Ишлинский

Резюме

Кожухи одноосных гироскопических стабилизаторов, нагруженных постоянным моментом, совершают незатухающие колебания вокруг оси прецессии, если только управление стабилизирующим двигателем происходит посредством контактного устройства. Частота этих колебаний, как показывает практика, значительно ниже частоты нутаций, что позволяет для их изучения пользоваться прецессионной (элементарной) теорией гироскопов.

В момент замыкания контакта, вызванного прецессионным движением кожуха под действием дестабилизирующего момента K , момент двигателя M возрастает постепенно из-за наличия индуктивности в цепи его якоря. После превышения им значения момента K движение (вращение) кожуха совершается в обратном направлении до тех пор, пока электрическая цепь якоря не разорвется. В это мгновение времени, если пренебречь экстратоком размыкания, момент двигателя M сразу обращается в нуль и кожух вновь начинает движение под действием момента K , контакты вновь замыкаются и т. д.

Сравнительно простыми средствами могут быть найдены амплитуда и период описанных периодически повторяющихся движений. Из-за неравенства времен движения кожухов в ту и другую сторону возможен уход стабилизатора вокруг оси стабилизатора. Причиной этого является кулоново трение в оси прецессии, величина которого практически не зависит от величины угловой скорости прецессии и определяется лишь ее направлением.

сек.
атор зробить одно

| | | |
|-------|--------|--------|
| 0,80 | 0,90 | 0,95 |
| 4,965 | 10,000 | 20,000 |
| 1,609 | 2,303 | 2,996 |
| 0,478 | 0,670 | 0,800 |

к § і г для декіль-
ь в масштабі $\frac{K_1}{rH}$
кня і в масштабі

ко виникає внаслі-
і за довільним за-
(17)

(18)

координат пряму
ямой, як це випли-
(1), являє собою
тже, визначає кут
скопа в різні мо-
сиса точки пере-
ліній визначає пе-
их рухів гіроскопа.
отах кожуха гіро-
зовнішнього кільця
дшипниках осі ко-
ть прецесію гіро-
з F момент кулоно-
дрям разом з куту-
куха.