Прикладная математика и механика. Том XXI, 1957
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

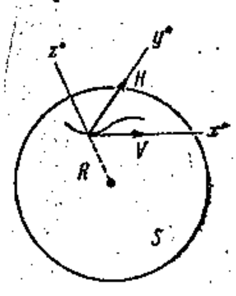
А. Ю. Ишлинский

(Киев)

В статьях автора [1, 2] рассматривались задачи о движении физического маятника и двухроторного гироскопического компаса[1] при произвольном движении их точки подвеса по поверхности Земли, принимаемой за сферу.

Как оказалось, параметры физического маятника и начальные обстоятельства его движения могут быть выбраны так, что прямая, соединяющая точку подвеса маятника с его центром тяжести, будет постоянно проходить через центр Земли. Точно таким же свойством обладает чувствительный элемент двухроторного гирокомпаса, если соответствующим образом выбрать его параметры и начальные обстоятельства его движения.

Кроме того, суммарный собственный кинетический момент гирокомпаса в этом случае оказывается всегда перпендикулярным к направлению скорости движения точки подвеса относительно невращающейся сферы S с тем же центром и тем же радиусом, что и Земля (фиг. 1); величина упомянутой скорости связана простым тригонометрическим соотношением с углом между осями собственного вращения гироскопов.



Фиг. 1

Указанные свойства имеют место, разумеется, лишь при отсутствии трения в точке подвеса, а для гирокомпаса — и в осях кожухов гироскопов.

Вопрос о теоретической возможности осуществления подобных физических маятников и гирокомпасов был в той или иной мере предметом исследований многих авторов, начиная с М. Шулера [3]. Однако, как нам кажется, этот вопрос так и не был решен в самом общем случае с надлежащей степенью строгости. Причина заключалась чаще всего в том, что движение точки подвеса рассматривалось по отношению к Земле, наличие вращения которой значительно усложняло уравнения движения. Кроме того, учет сил инерции переносного движения не всегда производился точно.

Введение в работах [1, 2] упомянутой выше невращающейся сферы S, а также поступательно перемещающейся исходной системы координат ξ^*, η^*, ζ^* с началом в точке подвеса физического маятника (или соответственно двухроторного гироскопического компаса) упростило исследования и сделало результаты их в значительной мере ясными.

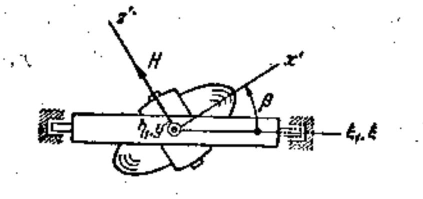
Несмотря на наличие обстоятельного исследования Б. В. Булгакова [3], аналогично обстоит дело и с теорией гироскопического маятника. Для строгого изложения этого вопроса, чему и посвящена настоящая статья, можно воспользоваться методами, введенными в работах [1, 2]; кроме того, необходимо четкое рассмотрение игры сил в кардановом подвесе ротора гиромаятника, что также ранее оставалось без внимания.

1°. Дадим предварительно в рамках прецессионной теории гироскопов вывод общих уравнений движения оси гироскопа, ротор которого под-

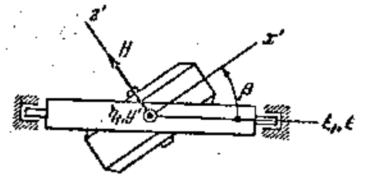
---

[1] Последняя задача рассматривалась в рамках прецессионной (элементарной) теории гироскопов.

вешен в кардановом подвесе (фиг. 2). Подшипники оси внешнего кольца этого подвеса расположены в теле некоторого подвижного основания. Внутреннее кольцо подвеса конструктивно может иметь, в частности, форму кожуха, в подшипниках которого вращается ротор гироскопа (фиг. 3).

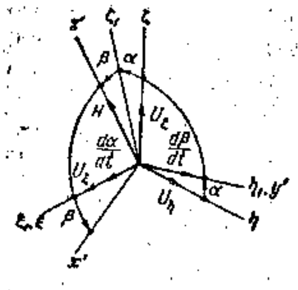


Фиг. 2



Фиг. 3

Свяжем с основанием, внешним кольцом и внутренним кольцом (кожухом), соответственно три системы координат $\xi\eta\zeta$, $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $x'y'z'$ с общим началом в центре карданова подвеса. Оси ξ и ξ_1 направим по оси внешнего кольца, оси η_1 и y' — по оси внутреннего кольца (кожуха), а ось z' — по оси ротора гироскопа.



Фиг. 4

Введем угол α поворота внешнего кольца относительно основания (фиг. 4). При $\alpha > 0$ система $\xi_1\eta_1\zeta_1$ повернута против стрелки часов относительно системы координат $\xi\eta\zeta$, если наблюдать за поворотом со стороны положительной части оси $\xi\,(\xi_1)$. Аналогично введем угол β поворота внутреннего кольца (кожуха) относительно внешнего кольца карданова подвеса. Относительные угловые скорости $d\alpha/dt$ и $d\beta/dt$ вращения системы координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$ относительно $\xi\eta\zeta$ и системы $x'y'z'$ относительно $\xi_1\eta_1\zeta_1$ направлены (фиг. 4) соответственно по осям $\xi_1\,(\xi)$ и $\eta_1\,(y')$.

Обозначим через $\omega'_{x'}$, $\omega'_{y'}$ и $\omega'_{z'}$ проекции угловой скорости внутреннего кольца относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ (т. е. относительно неподвижных звезд) на оси связанной с ним системы координат $x'y'z'$. Эти проекции могут быть выражены (фиг. 4) через угловую скорость основания u и углы α и β посредством формул

$$\begin{gathered}
\omega'_{x'} = u_\xi \cos\beta + u_\eta \sin\alpha \sin\beta - u_\zeta \cos\alpha \sin\beta + \frac{d\alpha}{dt}\cos\beta \\
\omega'_{y'} = u_\eta \cos\alpha + u_\zeta \sin\alpha + \frac{d\beta}{dt} \qquad (1) \\
\omega'_{z'} = u_\xi \sin\beta - u_\eta \sin\alpha \cos\beta + u_\zeta \cos\alpha \cos\beta + \frac{d\alpha}{dt}\sin\beta
\end{gathered}$$

Здесь u_ξ, u_η и u_ζ — проекции угловой скорости основания относительно той же системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ на оси системы координат $\xi\eta\zeta$, жестко связанной с основанием (фиг. 4).

2°. Обозначим суммы моментов сил воздействия основания на внешнее кольцо подвеса относительно осей ξ_1, η_1 и ζ_1 соответственно через K_{ξ_1}, K_{η_1} и K_{ζ_1}. Введем далее обозначения $L_{x'}$, $L_{y'}$ и $L_{z'}$ для сумм моментов сил воздействия внешнего кольца на внутреннее относительно осей x', y' и z'. Наконец, через $M_{x'}$, $M_{y'}$ и $M_{z'}$ обозначим суммы моментов сил воздействия внутреннего кольца (кожуха) на ротор гироскопа[1] относительно тех же осей x', y' и z'.

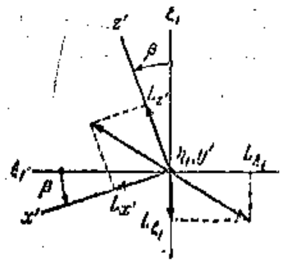
Через k_{ξ_1}, k_{η_1} и k_{ζ_1} обозначим суммы моментов относительно соответствующих осей сторонних сил[2], приложенных к внешнему кольцу, через $l_{x'}$, $l_{y'}$ и $l_{z'}$ — к внутреннему кольцу (кожуху) и через $m_{x'}$, $m_{y'}$ и $m_{z'}$ — к ротору.

В число сил, непосредственно действующих на элементы массы внешнего кольца, внутреннего кольца (кожуха) и ротора следует включить силы инерции (переносного движения и кориолисовы силы), обусловленные движением системы координат, относительно которой изучается движение гироскопа. Такой системой в данном случае выбрана система координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$, о которой было упомянуто выше.

Так как дальнейшие исследования проводятся в рамках прецессионной (элементарной) теории гироскопов, то кинетические моменты колец карданова подвеса в их движении относительно исходной системы координат (в нашем случае системы $\xi^*\eta^*\zeta^*$) могут не учитываться. Как следствие этого полагаем равным нулю главный момент системы сил, приложенных к внешнему кольцу. Точно таким же свойством должна наделяться система сил, приложенных к внутреннему кольцу (кожуху). Центром приведения сил в обоих случаях должен быть центр карданова подвеса.

Равенство нулю сумм моментов всех сил, действующих на внешнее кольцо, относительно каждой из осей ξ_1, η_1 и ζ_1 приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} K_{\xi_1} + k_{\xi_1} - L_{\xi_1} &= 0 \\ K_{\eta_1} + k_{\eta_1} - L_{\eta_1} &= 0 \\ K_{\zeta_1} + k_{\zeta_1} - L_{\zeta_1} &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$



Фиг. 5

В эти уравнения входят суммы моментов вокруг осей ξ_1, η_1 и ζ_1 сил воздействия внутреннего кольца (кожуха) на внешнее, обозначенные через $-L_{\xi_1}$, $-L_{\eta_1}$ и $-L_{\zeta_1}$. На основании III закона Ньютона они связаны (фиг. 5) с моментами $L_{x'}$, $L_{y'}$ и $L_{z'}$ сил воздействия внешнего кольца на внутреннее (кожух) соотношениями

$$\begin{aligned} L_{\xi_1} &= L_{x'} \cos\beta + L_{z'} \sin\beta \\ L_{\eta_1} &= L_{y'} \\ L_{\zeta_1} &= -L_{x'} \sin\beta + L_{z'} \cos\beta \end{aligned} \qquad (3)$$

Уравнения равновесия внутреннего кольца (кожуха) карданова подвеса в свою очередь имеют вид:

$$\begin{aligned} L_{x'} + l_{x'} - M_{x'} &= 0 \\ L_{y'} + l_{y'} - M_{y'} &= 0 \\ L_{z'} + l_{z'} - M_{z'} &= 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

---

[1] В некоторых случаях (например, в гироскопическом приборе Обри) имеются силы взаимодействия между ротором и внешним кольцом. Их учет приводит к небольшому усложнению последующих выкладок.

[2] То-есть не являющихся силами взаимодействия между телами, входящими в состав механической системы гиромаятника, — ротор, внутреннее кольцо (кожух) и внешнее кольцо карданова подвеса.

Здесь величины $-M_{x'}$, $-M_{y'}$ и $-M_{z'}$ — соответствующие суммы моментов сил воздействия ротора гироскопа.

Исключим посредством соотношений (3) величины L_{ξ_1}, L_{η_1} и L_{ζ_1}, которые входят в уравнения (2). Получим

$$
\begin{aligned}
&K_{\xi_1} + k_{\xi_1} = L_{x'} \cos\beta + L_{z'} \sin\beta \\
&K_{\eta_1} + k_{\eta_1} = L_{y'} \\
&K_{\zeta_1} + k_{\zeta_1} = -L_{x'} \sin\beta + L_{z'} \cos\beta
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Для дальнейшего существенное значение имеют выражения $M_{x'}$ и $M_{y'}$ для сумм моментов относительно осей x' и y' сил воздействия внутреннего кольца (кожуха) на ротор гироскопа. Совместно с неизвестными K_{η_1}, K_{ζ_1}, $L_{x'}$ и $L_{z'}$ их можно определить, пользуясь уравнениями (4) и (5).

Величины K_{η_1} и K_{ζ_1} представляют собой суммы моментов относительно осей η_1 и ζ_1 сил нормальных реакций в подшипниках внешнего кольца. Аналогично суммы $L_{x'}$ и $L_{z'}$ образуются за счет нормальных реакций подшипников внутреннего кольца (кожуха). Знание сил реакций может оказаться, например, полезным для определения сил трения в подшипниках подвеса.

Разрешим уравнения (4) и (5) относительно величин K_{η_1}, K_{ζ_1}, $L_{x'}$, $L_{z'}$, $M_{x'}$ и $M_{y'}$, считая остальные, т. е. k_{ξ_1}, k_{η_1}, k_{ζ_1}, $l_{x'}$, $l_{y'}$, $l_{z'}$, K_{ξ_1}, $L_{y'}$ и $M_{z'}$, как бы заданными. Имеем

$$
\begin{aligned}
&K_{\eta_1} = -k_{\eta_1} + L_{y'} \\
&K_{\zeta_1} = -k_{\zeta_1} - (K_{\xi_1} + k_{\xi_1}) \operatorname{tg}\beta + (M_{z'} - l_{z'}) \sec\beta \\
&L_{x'} = (K_{\xi_1} + k_{\xi_1}) \sec\beta - (M_{z'} - l_{z'}) \operatorname{tg}\beta \\
&L_{z'} = -l_{z'} + M_{z'} \\
&M_{x'} = l_{x'} + (K_{\xi_1} + k_{\xi_1}) \sec\beta - (M_{z'} - l_{z'}) \operatorname{tg}\beta \\
&M_{y'} = l_{y'} + L_{y'}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Следует обратить внимание на то, каким образом входит в состав выражения $M_{x'}$ сумма k_{ξ_1} моментов относительно оси ξ_1 сторонних сил, непосредственно приложенных к внешнему кольцу, а также сумма K_{ξ_1}, образуемая силами трения оси внешнего кольца и силами взаимодействия основания и кольца, стремящимися повернуть внешнее кольцо относительно основания.

Нередко здесь допускают ошибку, непосредственно проектируя моменты K_{ξ_1} и k_{ξ_1} на ось x', забывая, что они приложены не к внутреннему кольцу (кожуху), а к другому телу—к внешнему кольцу карданова подвеса. В результате в состав выражения $M_{x'}$ величины K_{ξ_1} и k_{ξ_1} входят с множителем $\cos\beta$, что, разумеется, неверно. По-видимому, эта часто встречающаяся ошибка осталась незамеченной вследствие того, что угол β, как правило, предполагался малым и $\cos\beta$ сразу же заменялся единицей.

В образовании $M_{x'}$ участвует также (при $\beta \neq 0$) сумма $l_{z'}$ моментов относительно оси ротора z' сил, непосредственно приложенных к внутреннему кольцу карданова подвеса, и сумма $M_{z'}$ моментов сил воздействия этого кольца на ротор гироскопа. Последнее обстоятельство на первый взгляд кажется неожиданным.

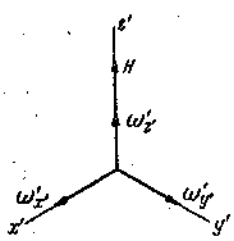
3°. Обратимся теперь к уравнениям движения ротора. В соответствии с прецессионной теорией гироскопов кинетический момент ротора H считается направленным по его собственной оси вращения и равным произведению момента инерции ротора C относительно этой оси на его угловую скорость n, т. е.

$$H = Cn \tag{7}$$

Строго говоря, под величиной n следует понимать проекцию на ось ротора его угловой скорости относительно неподвижных звезд. Однако из-за чрезвычайно большой величины так называемой собственной угловой скорости ротора, т. е. его угловой скорости относительно внутреннего кольца (кожуха) по сравнению с угловой скоростью самого кольца, можно не делать различия между величиной n и упомянутой собственной угловой скоростью.

Рассмотрим скорость конца вектора H относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$, считая, что его начало совпадает с началом этой системы. Нетрудно видеть (фиг. 6), что проекции этой скорости на оси системы координат $x'y'z'$ представляются выражениями

$$\omega'_{y'}H, \qquad -\omega'_{x'}H, \qquad dH/dt \tag{8}$$



Фиг. 6

где $\omega'_{x'}$, $\omega'_{y'}$ и $\omega'_{z'}$, как уже упоминалось выше, являются проекциями на оси $x'y'z'$ угловой скорости внутреннего кольца (кожуха) относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Как известно по законам механики, выражения (8) соответственно равны суммам моментов сил, действующих на ротор относительно тех же осей x', y' и z', т. е.

$$\omega'_{y'}H = m_{x'} + M_{x'}, \qquad -\omega'_{x'}H = m_{y'} + M_{y'}, \qquad \frac{dH}{dt} = m_{z'} + M_{z'} \tag{9}$$

Заметим, что величина $m_{z'}$ представляет собой, как правило, момент торможения ротора со стороны внешней среды в случае отсутствия, например, термически закрытого кожуха. Величина $M_{z'}$ слагается из момента трения (как в подшипниках, так и через среду) ротора о внутреннее кольцо (кожух) и момента, вращающего ротор; чаще всего последним является момент, развиваемый магнитным полем статора, жестко связанного с кожухом.

Заменяя в равенствах (9) выражения $M_{x'}$ и $M_{y'}$ согласно двум последним формулам (6), получаем следующие уравнения движения ротора гироскопа при наличии карданова подвеса:

$$\begin{aligned}
\omega'_{y'}H &= m_{x'} + l_{x'} + (K_{\xi_1} + k_{\xi_1})\sec\beta - (M_{z'} - l_{z'})\operatorname{tg}\beta \\
-\omega'_{x'}H &= m_{y'} + l_{y'} + L_{y'} \\
dH/dt &= m_{z'} + M_{z'}
\end{aligned} \tag{10}$$

Соотношения (10) при учете формул (7) и (1) представляют собой совокупность трех дифференциальных уравнений, содержащих три искомые функции времени $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $n(t)$.

4°. При исследовании теории гироскопического маятника примем, что силы трения в осях карданова подвеса отсутствуют, равно как отсутствуют и силы взаимодействия, стремящиеся повернуть внешнее кольцо относительно основания и внутреннее кольцо (кожух) относительно внешнего, т. е.

$$K_{\xi_1} = L_{y'} = 0 \tag{11}$$

Далее, если считать, что ротор вращается в закрытом кожухе с постоянной угловой скоростью n, то

$$m_{z'} = 0, \qquad M_{z'} = 0 \tag{12}$$

Примем, наконец, что сторонние силы, приложенные к внешнему кольцу, не создают суммарного момента вокруг оси этого кольца ξ_1, а силы, приложенные к внутреннему кольцу, — относительно оси z', т. е.

$$k_{\xi_1} = 0, \qquad l_{z'} = 0 \tag{13}$$

В практических условиях это означает, что внешнее кольцо уравновешено, а центр тяжести внутреннего кольца лежит на оси z', т. е. на оси ротора гироскопа.

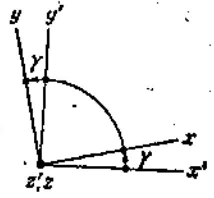
При сделанных предположениях уравнения (10) значительно упрощаются и сводятся к виду

$$\omega_{y'}' H = m_{x'} + l_{x'}, \qquad -\omega_{x'}' H = m_{y'} + l_{y'} \tag{14}$$

где H — постоянная величина.

5°. Для дальнейшего существенно заметить, что вид этих уравнений сохраняется для произвольной системы координат xyz, если ее начало также расположено в центре карданова подвеса, а ось z совпадает с осью z' системы координат $x'y'z'$, жестко связанной с внутренним кольцом подвеса (кожухом).

Действительно (фиг. 7), проекции ω_x, ω_y и ω_z угловой скорости такой системы координат xyz на ее собственные оси связаны с проекциями $\omega_{x'}'$, $\omega_{y'}'$ и $\omega_{z'}'$ угловой скорости системы координат $x'y'z'$ на оси последней соотношениями



Фиг. 7

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{x'}' \cos\gamma + \omega_{y'}' \sin\gamma \\ \omega_y &= -\omega_{x'}' \sin\gamma + \omega_{y'}' \cos\gamma \\ \omega_z' &= \omega_{z'}' + d\gamma / dt \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь γ — угол между осями x' и x; при $\gamma > 0$ система координат xyz повернута против стрелки часов относительно системы $x'y'z'$, если наблюдать за поворотом со стороны положительной части оси $z'(z)$.

Подставим в первые две формулы (15) величины $\omega_{x'}'$ и $\omega_{y'}'$ согласно равенствам (14). Замечая, что выражения

$$\begin{aligned} (m_{x'} + l_{x'}) \cos\gamma + (m_{y'} + l_{y'}) \sin\gamma &= m_x + l_x \\ -(m_{x'} + l_{x'}) \sin\gamma + (m_{y'} + l_{y'}) \cos\gamma &= m_y + l_y \end{aligned} \tag{16}$$

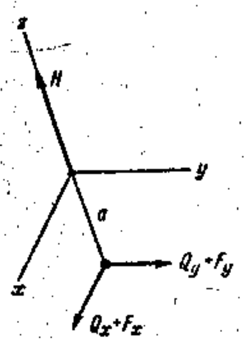
представляют собой суммы моментов относительно осей x и y сил, приложенных к внутреннему кольцу и к ротору гироскопа, получим уравнения [1]

$$\omega_y H = m_x + l_x, \qquad -\omega_x H = m_y + l_y \tag{17}$$

6°. Перейдем теперь к основному вопросу — исследованию поведения гироскопического маятника, точка подвеса которого перемещается произвольным образом по поверхности Земли, а следовательно, и по поверхности невращающейся сферы S.

Как уже отмечалось выше, движение оси гиромаятника будем изучать относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$, не изменяющей своей ориентации по отношению к неподвижным звездам.

В уравнения (17) входят лишь сторонние силы, приложенные к внутреннему кольцу карданова подвеса (кожуху) и к ротору гироскопа; моменты сил реакций со стороны внешнего кольца в данном случае отсутствуют. Согласно законам механики относительного движения, в число действующих на внутреннее кольцо (кожух) и ротор сил, помимо сил тяготения, должны быть также включены силы инерции переносного движения и кориолисовы силы, обусловленные движением исходной системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$. Однако последние отсутствуют, так как система $\xi^*\eta^*\zeta^*$ перемещается поступательно. Элементарные силы инерции переносного движения, будучи по той же причине параллельными, сводятся к единственной силе Q, приложенной к общему центру тяжести внутреннего кольца (кожуха) и ротора гироскопа.



Фиг. 8

Обозначим через w_x, w_y и w_z проекции на оси x, y и z ускорения центра карданова подвеса гироскопа, или, что то же, системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$. В соответствии с теоремами механики относительного движения формулы

$$Q_x = -mw_x, \qquad Q_y = -mw_y, \qquad Q_z = -mw_z \tag{18}$$

определяют проекции на те же оси искомой силы инерции переносного движения.

Как и в работах [1,2], предположим, что силы тяготения к Земле элементарных частиц кольца и ротора сводятся к единственной силе F, проходящей через их общий центр тяжести и направленной к центру Земли. Примем, что общий центр тяжести внутреннего кольца (кожуха) и ротора лежит на отрицательной части оси $z\,(z')$ (т. е. на оси ротора) на расстоянии a от начала координат. Тогда в соответствии с известными формулами статики (см. также фиг. 8) имеем

$$m_x + l_x = a\,(Q_y + F_y), \qquad m_y + l_y = -a\,(Q_x + F_x) \tag{19}$$

---

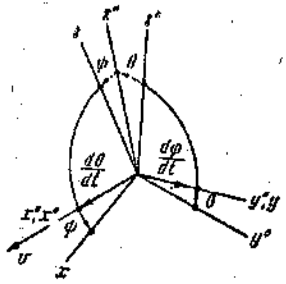
[1] Разумеется, уравнения (17) могут быть получены и без приведенных выкладок, если обратиться к векторному характеру соотношений (14), согласно которым вектор с компонентами $\omega_{x'}$ и $\omega_{y'}$ перпендикулярен вектору с компонентами $m_{x'} + l_{x'}$ и $m_{y'} + l_{y'}$, а модули их пропорциональны.

В этих формулах через F_x и F_y обозначены проекции силы F на оси x и y. Подставляя формулы (19) в равенства (17), получим окончательные уравнения движения гироскопического маятника

$$\omega_x H = a\,(Q_x + F_x), \qquad \omega_y H = a\,(Q_y + F_y) \tag{20}$$

На основании изложенного выше эти уравнения справедливы при произвольном выборе системы координат xyz с началом в центре карданова подвеса и осью z, направленной по оси ротора, при отсутствии сил трения в осях подвеса и усилий, стремящихся повернуть внешнее кольцо относительно основания.

7°. Введем трехгранник Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$ с вершиной в центре карданова подвеса, ребро z° которого нормально сфере S, а ребро x° направлено по вектору скорости v центра подвеса (положение трехгранника тем самым определяется однозначно). Нетрудно убедиться (фиг. 1), что проекции угловой скорости ω° трехгранника относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ (или, что то же, относительно невращающейся сферы S) на его ребра x°, y° и z° определяются равенствами



Фиг. 9

$$\omega_{x^\circ}{}^\circ = 0, \qquad \omega_{y^\circ}{}^\circ = \frac{v}{R} \tag{21}$$

Что же касается проекции упомянутой угловой скорости на ребро z°, то она может быть произвольной функцией времени [2], которую обозначим через $\omega(t)$. Таким образом,

$$\omega_{z^\circ}{}^\circ = \omega(t) \tag{22}$$

Заметим, что соотношением

$$v(t) = \rho_g\,\omega(t) \tag{23}$$

определяется геодезический радиус кривизны ρ_g сферической траектории вершины трехгранника.

Проекции ускорения вершины трехгранника на его ребра x°, y° и z° выражаются [2] формулами

$$w_{x^\circ} = \frac{dv}{dt}, \qquad w_{y^\circ} = \omega v, \qquad w_{z^\circ} = -\frac{v^2}{R} \tag{24}$$

Пользуясь некоторой произвольностью выбора системы координат xyz, направим ось x этой системы в плоскости zx°, содержащей ось ротора $z'(z)$ и ребро x° трехгранника Дарбу (фиг. 9). Тем самым ось y, как перпендикулярная к ребру x° (x° содержится в плоскости xz), окажется в плоскости $y^\circ z^\circ$.

Обозначим через ψ угол между осью x и ребром x°, а через θ — угол между осью y и ребром y°.

Относительная угловая скорость системы координат xyz относительно трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$ равна геометрической сумме относительной угловой скорости $d\theta/dt$, имеющей направление ребра x°, и угловой скорости $d\psi/dt$, направленной по оси y.

Нетрудно построить таблицу косинусов углов между осями системы координат xyz и ребрами трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$. Она имеет вид:

	x°	y°	z°
x	$\cos\psi$	$\sin\theta\sin\psi$	$-\cos\theta\sin\psi$
y	0	$\cos\theta$	$\sin\theta$
z	$\sin\psi$	$-\sin\theta\cos\psi$	$\cos\theta\cos\psi$

(25)

При построении этой таблицы полезно ввести вспомогательную систему координат $x''y''z''$ (фиг. 8), ось x'' которой совпадает с ребром x° трехгранника Дарбу, а ось y'' — с осью y системы координат xyz. Положительному значению угла θ соответствует поворот вспомогательной системы координат $x''y''z''$ против стрелки часов вокруг ребра x° (оси x''), если наблюдать за поворотом со стороны положительной части оси x''. При $\psi > 0$ система координат xyz повернута аналогичным образом относительно вспомогательной системы $x''y''z''$ вокруг оси $y''(y)$.

Используя таблицу (25), учитывая формулы (21) и (22) и принимая во внимание сделанные выше замечания о направлении относительных угловых скоростей $d\theta/dt$ и $d\psi/dt$, получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \frac{v}{R}\sin\theta\sin\psi - \omega\cos\theta\sin\psi + \frac{d\theta}{dt}\cos\psi \\
\omega_y &= \frac{v}{R}\cos\theta + \omega\sin\theta + \frac{d\psi}{dt} \\
\omega_z &= -\frac{v}{R}\sin\theta\cos\psi + \omega\cos\theta\cos\psi + \frac{d\theta}{dt}\sin\psi
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь, как и ранее, ω_x, ω_y и ω_z — проекции угловой скорости системы координат xyz относительно неподвижных звезд на ее собственные оси.

Сила тяготения F направлена по радиусу сферы S к ее центру, т. е. вдоль отрицательного направления z°. Согласно таблице (25), имеем следующие формулы:

$$F_x = F\cos\theta\sin\psi, \qquad F_y = -F\sin\theta, \qquad F_z = -F\cos\theta\cos\psi \tag{27}$$

для проекций этой силы на соответствующие оси системы координат xyz.

Посредством той же таблицы (25) и формул (24) получаем для проекций ускорения центра подвеса на оси системы координат xyz следующие выражения:

$$\begin{aligned}
w_x &= \frac{dv}{dt}\cos\psi + \omega v\sin\theta\sin\psi + \frac{v^2}{R}\cos\theta\sin\psi \\
w_y &= \omega v\cos\theta - \frac{v^2}{R}\sin\theta \\
w_z &= \frac{dv}{dt}\sin\psi - \omega v\sin\theta\cos\psi - \frac{v^2}{R}\cos\theta\cos\psi
\end{aligned} \tag{28}$$

Далее по формулам (18) находим проекции на те же оси силы инерции Q. Подставим их вместе с выражениями (27) в правые части уравнений (20). В левых частях уравнений (20) заменим ω_x и ω_y их представлениями согласно формулам (26).

В результате получим следующую совокупность двух дифференциальных уравнений для отыскания искомых функций времени $\theta(t)$ и $\psi(t)$:

$$\left(\frac{v}{R}\sin\theta\sin\psi - \omega\cos\theta\sin\psi + \frac{d\theta}{dt}\cos\psi\right)H =$$
$$= a\left[\left(F - \frac{mv^2}{R}\right)\cos\theta\sin\psi - m\left(\frac{dv}{dt}\cos\psi + \omega v\sin\theta\sin\psi\right)\right] \qquad (29)$$
$$\left(\frac{v}{R}\cos\theta + \omega\sin\theta + \frac{d\psi}{dt}\right)H = a\left[-\left(F - \frac{mv^2}{R}\right)\sin\theta - m\omega v\cos\theta\right]$$

Если на сфере S задано движение точки подвеса гиромаятника и тем самым трехгранника Дарбу, то функции

$$v = v(t), \qquad \omega = \omega(t)$$

в уравнениях (29) следует считать известными. Таким образом, соотношения (29) представляют собой при сделанных в конце п. 6° предположениях точные уравнения движения оси гироскопического маятника.

8°. При произвольных заданных функциях $v(t)$ и $\omega(t)$ и конечных значениях искомых углов θ и ψ решение уравнений (29) представляет значительные трудности. Однако если ограничиться малыми значениями углов θ и ψ и сохранить в уравнениях (29) лишь члены первого порядка малости, то соответствующие уравнения

$$\frac{d\theta}{dt} - \left[\omega + \frac{a}{H}\left(F - \frac{mv^2}{R}\right)\right]\psi = -\frac{a}{H}m\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{d\psi}{dt} + \left[\omega + \frac{a}{H}\left(F - \frac{mv^2}{R}\right)\right]\theta = -\frac{v}{R} - \frac{a}{H}m\omega v \qquad (30)$$

оказываются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, допускающими интегрирование в квадратурах.

Воспользуемся прежде всего в уравнениях (30) подстановкой

$$\theta = -\frac{ma}{H}v + \vartheta \qquad (31)$$

Получим в результате следующую совокупность уравнений:

$$\frac{d\vartheta}{dt} - p(t)\psi = 0, \qquad \frac{d\psi}{dt} + p(t)\vartheta = q(t) \qquad (32)$$

где

$$p(t) = \omega + \frac{a}{H}\left(F - \frac{mv^2}{R}\right), \qquad q(t) = \left[\frac{ma^2}{H^2}\left(F - \frac{mv^2}{R}\right) - \frac{1}{R}\right]v \qquad (33)$$

Уравнения (32) могут быть заменены одним, а именно

$$\frac{d\chi}{dt} + ip(t)\chi = iq(t) \qquad (34)$$

Здесь $\chi(t)$— подлежащая определению комплекснозначная функция времени, связанная с искомыми функциями $\vartheta(t)$ и $\psi(t)$ соотношением

$$\chi(t) = \vartheta(t) + i\psi(t) \qquad (35)$$

Общее решение уравнения (34) имеет следующий вид:

$$\chi(t) = C\exp\left(-i\int_0^t p(t)\,dt\right) + i\left(\int_0^t q(t)\exp\left(i\int_0^t p(t)\,dt\right)dt\right)\exp\left(-i\int_0^t p(t)\,dt\right) \qquad (36)$$

Значение комплекснозначной произвольной постоянной C решения (36) определяется начальным положением оси гиромаятника. Действительно,

$$C = \chi(0) = \vartheta(0) + i\psi(0) \tag{37}$$

9°. Особый интерес представляет случай

$$q(t) \equiv 0 \tag{38}$$

что, согласно второму равенству (33), возможно при соответствующем выборе параметров H, m и a лишь при постоянном значении скорости v движения точки подвеса гиромаятника по сфере S. При малой скорости движения точки подвеса относительно Земли по сравнению, например, с окружной скоростью точек экватора Земли с известным приближением можно считать

$$F - \frac{mv^2}{R} = mg \tag{39}$$

где g — ускорение силы тяжести в месте нахождения гиромаятника. Условие (38) приводится теперь с учетом второго равенства (33) и (39) к виду

$$\frac{mga}{H} = \sqrt{\frac{g}{R}} \tag{40}$$

т. е. к известному условию Шулера — Булгакова [3].

Пусть тождество (38) осуществлено и, кроме того, начальные обстоятельства движения таковы, что

$$\vartheta(0) = 0, \qquad \psi(0) = 0 \tag{41}$$

Тогда, согласно формулам (36) и (38), имеем

$$\chi(t) \equiv 0 \tag{42}$$

Отсюда в соответствии с равенством (35) имеют место тождества

$$\vartheta(t) \equiv 0, \qquad \psi(t) \equiv 0 \tag{43}$$

Из второго тождества (43) следует (фиг. 9), что ось x системы координат xyz и ребро x° трехгранника Дарбу совпадают. Вектор скорости вершины трехгранника v (точки подвеса гиромаятника) относительно сферы S направлен по ребру x°. Следовательно, ось z (ось ротора гироскопа) расположена в плоскости $y^\circ z^\circ$, перпендикулярной скорости v.

В соответствии с первым тождеством (43) и равенством (31) имеем

$$\theta = -\frac{ma}{H} v \tag{44}$$

Это означает, что ось z отклоняется от ребра z°, т. е. от геоцентрической вертикали (радиуса Земли) в сторону положительной части направления y° на угол, пропорциональный скорости v.

Таким образом, при известных величине и направлении постоянной скорости v геоцентрическая вертикаль может быть построена без особых затруднений. Так, например, обстоит дело на плавучем маяке, где скорость v равна окружной скорости точек соответствующей параллели Земли и направлена на восток.

В случае гиромаятника, расположенного, например, на корабле, для построения вертикали необходимо знать, помимо его курса, также и скорость его движения относительно Земли, что с точностью до скорости течения обеспечивается лагом. При этом считается, что условие (38) соблюдается с достаточной степенью точности.

Если начальные условия (41) не выполнены, то согласно формуле (36) ось z (ось ротора гироскопа) будет совершать коническое движение с угловой скоростью обхода [1] $-p(t)$ вокруг положения, которому соответствуют углы

$$\theta = -\frac{ma}{H}v, \qquad \psi = 0 \tag{45}$$

Учитывая приближенное равенство (39), можно, согласно первой формуле (33), представить $p(t)$ в виде

$$p(t) = \omega + \nu \tag{46}$$

Отсюда следует, что при неподвижной относительно Земли точке подвеса величина

$$\nu = \frac{mga}{H} = \sqrt{\frac{g}{R}} \tag{47}$$

представляет собой видимую (т. е. относительно Земли) угловую скорость обхода вокруг положения (45).

10°. Представляется возможным построение геоцентрической вертикали без знания величины и направления скорости v. Для этой цели следует иметь два гироскопических маятника, гироскопы которых вращаются в противоположные стороны. Тогда при соблюдении соответствующих начальных обстоятельств и условия (38) ось ротора одного из них будет отклоняться от геоцентрической вертикали на угол, определяемый формулой (45), а ось другого — на такой же по величине угол, но противоположного знака.

При этом обе оси согласно изложенному выше будут лежать в плоскости, перпендикулярной вектору скорости v. Следовательно, биссектриса угла между осями роторов будет направлена по геоцентрической вертикали, а самый угол в масштабе воспроизведет величину скорости v.

Подобное двухгироскопическое устройство имеет свойства, сходные с гирогоризонткомпасом, описанным в работе [2]. Действительно, при движении точки подвеса по параллели плоскость, содержащая оси обоих роторов, совпадает с плоскостью меридиана. При каком-либо другом движении точки подвеса эта плоскость, как можно показать, отклоняется от плоскости меридиана на угол, равный классической скоростной девиации гирокомпаса [3,2].

Указанные заключения являются следствием рассмотрения линейных дифференциальных уравнений (30) и, следовательно, верны лишь с некоторым приближением. Можно, однако, соединяя оба гироскопа в одну механическую систему [2], получить те же результаты с большей принципиальной точностью.

Поступила 8 IX 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
2. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, т. XX, вып. 4, 1956.
3. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, М., 1955.

[1] Под угловой скоростью обхода здесь следует понимать составляющую вдоль прямой (45) угловой скорости воображаемого тела, насаженного на эту прямую, как на ось, и увлекаемого связанной с телом осью z (заметим, что угол между упомянутой осью и осью z в силу равенства (36) при $q(t) \equiv 0$ остается неизменным).