Доклады Академии наук СССР
1962. Том 144, № 4

*МЕХАНИКА*

Академик А. Ю. ИШЛИНСКИЙ и Г. И. БАРЕНБЛАТТ

# ОБ УДАРЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ

Нестационарные задачи движения вязко-пластических сред рассматривались в работах ряда исследователей ([1-4]). Подробный анализ имеющихся точных и приближенных решений нестационарных задач вязко-пластического течения дан в монографии А. Х. Мирзаджанзаде ([4]). В предлагаемой заметке дается постановка и эффективное приближенное решение задачи об ударе о жесткую преграду вязко-пластического стержня конечной длины.

1°. Задача ставится следующим образом. Стержень конечной длины $l$ из вязко-пластического материала, двигавшийся поступательно в направлении своей оси (которую мы выбираем за ось $x$) со скоростью $-v_0$, в начальный момент $t = 0$ ударяется о жесткую преграду $x = 0$.

Движение стержня считаем квазиодномерным, т. е. осредняем напряжения, скорости и т. п. по сечению стержня. Связь напряжения $\sigma$ и скорости деформации $\partial v/\partial x$ записывается для рассматриваемого случая в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sigma + \sigma_0}{\mu} \quad (|\sigma| > \sigma_0); \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (|\sigma| < \sigma_0), \tag{1}$$

где $v(x, t)$ — скорость данного сечения стержня в момент $t$, $\sigma_0 > 0$ — предельное напряжение, $\mu$ — коэффициент вязкости материала; очевидно, что $\sigma \leqslant 0$ во всех точках стержня.

При $t > 0$ картина движения имеет следующий вид. Скорость распространения упругих возмущений в рассматриваемой среде бесконечно велика, поэтому возмущение охватывает сразу весь стержень и скорость движения при любом $t > 0$ отличается от $-v_0$ во всех точках стержня. Стержень разделяется на две части: в одной части ($0 \leqslant x \leqslant x_0(t)$) — в я з к о - п л а с т и ч е с к о й  о б л а с т и — напряжения по модулю превосходят $\sigma_0$ и имеет место вязко-пластическое течение; в другой части ($x_0(t) < x \leqslant l$) — ж е с т к о й  о б л а с т и — напряжения по модулю меньше $\sigma_0$, так что эта часть стержня движется как твердое тело. На неизвестной подвижной границе вязко-пластической и жесткой областей $x = x_0(t)$ напряжения и скорости непрерывны.

2°. Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{\mu t}{\rho l^2}, \quad u(\xi, \tau) = -\frac{v(x, t)}{v_0}, \quad \xi_0(\tau) = \frac{x_0(t)}{l}. \tag{2}$$

В вязко-пластической области функция $u(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0(\tau)), \tag{3}$$

а в жесткой области уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi_0(\tau) \leqslant \xi \leqslant 1). \tag{4}$$

Интегрируя (4), находим

$$u(\xi, \tau) = u_0(\tau) \quad (\xi_0(\tau) \leqslant \xi \leqslant 1), \tag{5}$$

где $u_0(\tau) = v_0(t)/v_0$ — безразмерная скорость движения жесткой области — пока неопределенная функция времени.

Уравнение движения жесткой области стержня имеет вид:

$$M\frac{dv_0}{dt} = \rho F\left[l - x_0(t)\right]\frac{dv_0}{dt} = \left[\sigma_{x=x_0(t)-0}\right]F, \tag{6}$$

где $M$ — масса жесткой части стержня, $F$ — площадь сечения стержня. Используя условие непрерывности напряжения на подвижной границе $x = x_0(t)$ и переходя к безразмерным переменным, приводим соотношение (6) к виду

$$\frac{du_0(\tau)}{d\tau} = -\frac{s}{1-\xi_0(\tau)}, \tag{7}$$

где $s = \sigma_0 l/\mu v_0$ — параметр Сен-Венана — безразмерная комбинация определяющих параметров, характеризующая движение. В силу непрерывности напряжения и скорости на подвижной границе $x = x_0(t)$ имеем

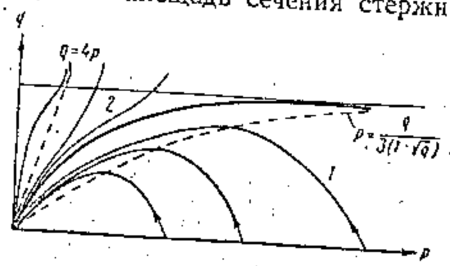

Рис. 1

$$u\left[\xi_0(\tau), \tau\right] = u_0(\tau), \quad \frac{\partial u\left[\xi_0(\tau), \tau\right]}{\partial\xi} = 0. \tag{8}$$

Имеют место также очевидные граничное и начальные условия:

$$u(0, \tau) = 0 \ (\tau > 0),$$
$$u(\xi, 0) = 1 \ (0 < \xi \leqslant 1),$$
$$u_0(0) = 1, \quad \xi_0(0) = 0. \tag{9}$$

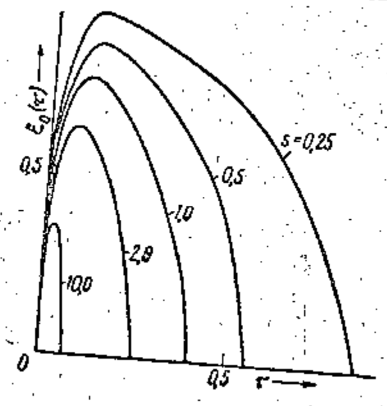

Рис. 2

Таким образом, рассматриваемая задача привелась к определению функций $u(\xi, \tau)$, $u_0(\tau)$ и $\xi_0(\tau)$, удовлетворяющих соотношениям (3), (5), (7), (8) и (9), т. е. к задаче с подвижной границей для уравнения теплопроводности, не приводящейся к традиционным краевым задачам математической физики.

3°. Для приближенного решения полученной системы воспользуемся идеей метода Кармана — Польгаузена теории пограничного слоя ([5]); именно, представим функцию $u(\xi, \tau)$ приближенно в виде

$$u(\xi, \tau) = \begin{cases} 2u_0(\tau)\dfrac{\xi}{\xi_0(\tau)} - u_0(\tau)\dfrac{\xi^2}{\xi_0^2(\tau)} & (0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0(\tau)), \\ u_0(\tau) & (\xi_0(\tau) < \xi \leqslant 1). \end{cases} \tag{10}$$

Если функции $u_0(\tau)$ и ${}_0\xi(\tau)$ удовлетворяют двум последним условиям (9), то функция (10) удовлетворяет всем условиям (9). Естественно, что функция (10) в вязко-пластической области не удовлетворяет уравнению (3) точно; потребуем, чтобы она удовлетворяла этому уравнению в среднем, т. е. удовлетворяла интегральному соотношению, которое получается интегрированием (3) по всей вязко-пластической области $(0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0(\tau))$:

$$\frac{d}{d\tau}\int_0^{\xi_0(\tau)} u(\xi, \tau)\,d\xi - u_0(\tau)\frac{d\xi_0}{d\tau} = -\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}. \tag{11}$$

Используя (10) и (7), получаем отсюда дифференциальное уравнение

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = \frac{6}{\xi_0(\tau)} - \frac{2s\xi_0(\tau)}{[1-\xi_0(\tau)]\,u_0(\tau)}, \tag{12}$$

которое наряду с уравнением (7) и последними двумя условиями (9) определяет неизвестные функции $u_0(\tau)$ и $\xi_0(\tau)$ и тем самым приближенное

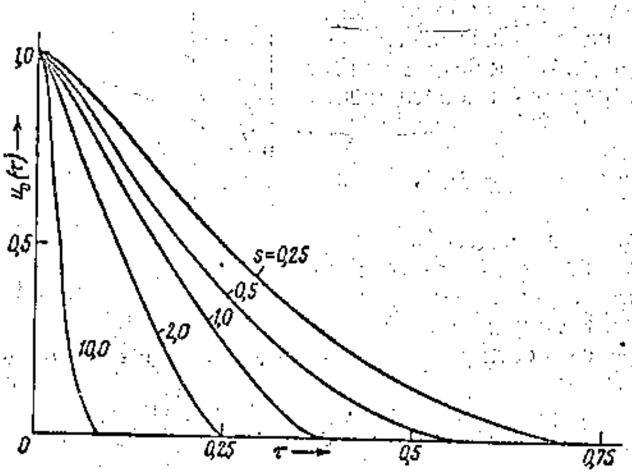


Рис. 3

решение задачи. Вводя новые зависимые переменные $p = u_0(\tau)/s$, $q = \xi_0^2(\tau)$, перепишем систему уравнений (7), (10) в следующем виде:

$$\frac{dq}{d\tau} = 12 - \frac{4q}{p(1-\sqrt{q})}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{1}{1-\sqrt{q}}, \tag{13}$$

не содержащем параметра Сен-Венана $s$. Начальные условия примут, соответственно, вид:

$$p(0) = \frac{1}{s}, \quad q(0) = 0. \tag{14}$$

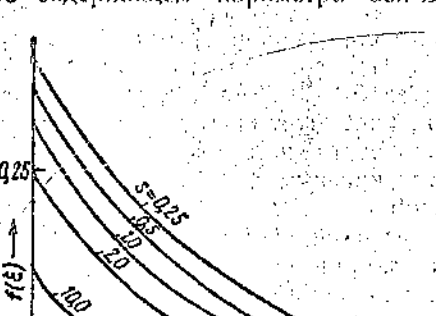


Рис. 4

Деля первое уравнение (13) почленно на второе, получаем уравнение первого порядка, не содержащее независимой переменной $\tau$:

$$\frac{dq}{dp} = -12(1-\sqrt{q}) + \frac{4q}{p}. \tag{15}$$

Простое качественное исследование показывает, что в интересующей нас области ($p \geqslant 0, 0 \leqslant q \leqslant 1$) интегральные кривые ведут себя, как показано на рис. 1. Исследуемой задаче отвечают кривые класса I, лежащие под сепаратрисой и имеющие один максимум, меньший единицы,— только эти кривые пересекают ось абсцисс в конечных точках и дают возможность удовлетворить условию (14). Соответствующая задаче интегральная кривая пересекает ось абсцисс в точке $p = 1/s$, направление движения изображающей точки по интегральной кривой при возрастании времени показано на рис. 1 стрелками.

4°. Исследование позволяет сделать следующие качественные выводы. Вязко-пластическая область в начале движения расширяется, ее размер $\xi_0(\tau)$ возрастает до достижения некоторого максимума, меньшего единицы.

при $\tau = \tau_0(s)$ (рис. 2), после чего начинает убывать. Таким образом, во всех случаях определенная часть стержня, примыкающая к свободной границе, остается недеформированной. В некоторый момент $\tau = \tau_1(s)$ вязко-пластическая область исчезает; этот же момент соответствует обращению в нуль скорости $u_0(\tau)$ жесткой области стержня (рис. 3), так что движение стержня полностью прекращается.

В общем случае система (13) требует для своего решения численного интегрирования; результаты интегрирования для нескольких значений параметра Сен-Венана представлены на рис. 2 и 3. Для случая больших и малых значений параметра Сен-Венана решение может быть представлено в явном виде.

Полученное приближенное решение позволяет определить форму стержня после удара. Из условия несжимаемости материала стержня имеем

$$F = F_0\left(1 + \frac{\partial U}{\partial x}\right)^{-1}, \tag{16}$$

где $F$ — площадь сечения деформированного стержня, соответствующая некоторому значению $x$, $U$ — мгновенное продольное смещение, $F_0$ — площадь сечения недеформированного стержня. В момент окончания удара имеем для произвольного сечения $x$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -r\int\limits_{\tau_*(\xi)}^{\tau_{**}(\xi)} \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi}\,d\tau = -2r\int\limits_{\tau_*(\xi)}^{\tau_{**}(\xi)} \frac{u_0(\tau)\,[\xi_0(\tau) - \xi]}{\xi_0^2(\tau)}\,d\tau = -\frac{F - F_0}{F} = -2rf(\xi), \tag{17}$$

где $\tau_*(\xi)$ и $\tau_{**}(\xi)$ — корни уравнения $\xi = \xi_0(\tau)$, $\tau_{**}(\xi) \geqslant \tau_*(\xi)$, $r = \rho v_0 l/\mu$ — параметр Рейнольдса. На рис. 4 построены для различных значений параметра Сен-Венана $s$ графики функции $f(\xi)$, характеризующей изменение формы стержня после удара. Вполне аналогично можно определить форму стержня в произвольный момент соударения.

Авторы выражают благодарность С. С. Григоряну и Б. М. Малышеву за обсуждение работы и Р. Л. Салганику и Л. Я. Семеновой за помощь при вычислениях.

Институт механики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 III 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Соколовский, Прикл. матем. и мех., 22, в. 6 (1949). [2] И. Н. Зверев, Прикл. матем. и мех., 14, в. 3 (1950). [3] А. М. Кочетков, Прикл. матем. и мех., 14, в. 5 (1950). [4] А. Х. Мирзаджанзаде, Вопросы гидродинамики вязкопластических и вязких жидкостей в нефтедобыче, Баку, 1959. [5] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, 2, М.—Л., 1948.