

## Волчок

В этом томе есть статьи простые и сложные. Статья «Волчок», пожалуй, самая сложная. Мы даже сомневались, помещать ли ее. Но что поделаешь — в науке вообще много сложного. Ведь в будущем многим из вас придется читать очень трудные книги. Пусть же тем, кто мечтает стать ученым, инженером, конструктором, эта статья напомнит, что путь в науку нелегок, он требует упорства, терпения, самоотверженности.

Вращающийся волчок — увлекательная детская игрушка. Кто из ребят не задумывался над удивительными свойствами волчка? Но, по-видимому, не все знают, что волчок — важнейший элемент целого ряда сложных приборов. Сейчас трудно найти область техники, где в той или иной мере не использовался бы волчок. Так, при помощи волчков осуществляется пилотирование самолетов, бурение скважин, прокладка штолен метрополитена, вождение кораблей (в том числе и подводных), управление космическими объектами и многое, многое другое. Об удивительных свойствах волчка, о том, как он используется в технике, и будет рассказано в этой статье.

## Прецессия и нутация волчка

Понаблюдаем вначале за поведением волчка, опирающегося острием своей оси симметрии на коническое углубление неподвижной опоры (рис. 1). Если попытаться поставить его в вертикальное положение, то он немедленно опрокинется, как только мы перестанем его поддерживать. Это естественно, ибо известно из опыта, что невозможно сохранить равновесие, имея единственную точку опоры. Нельзя, например, поставить в комнате стул на одну ножку так, чтобы он стоял на ней продолжительное время. Однако если волчку сообщить большую скорость вращения, или, как говорят специалисты, большую *угловую скорость*  $\Omega$ , то все резко изменится. Волчок, как бы нарушая законы природы, будет стоять вертикально и не упадет. Мало того, он не упадет и в том случае, если поставить его на острие с наклоном. Однако при этом ось волчка, предоставленного самому себе, начинает описывать вокруг вертикали коническую поверхность (рис. 2). Такое движение волчка называется *прецессией*, а время одного обращения волчка вокруг вертика-

Рис. 1. Быстро вращающийся волчок не падает. Вследствии угловой скорости собственного вращения уменьшается. Когда

скорости вращения становится недостаточно большой, ось волчка спиралеобразно удаляется от вертикали, и волчок падает.

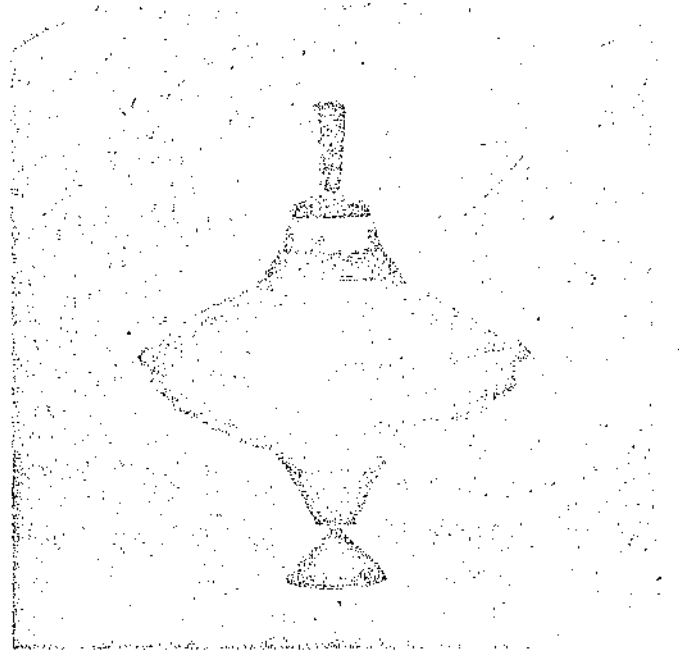


Рис. 2. Медленная регулярная прецессия волчка происходит в ту же сторону, в которую вращается волчок (если смотреть сверху). Время

обращения оси волчка вокруг вертикали (период прецессии) не зависит от угла  $\theta$ .

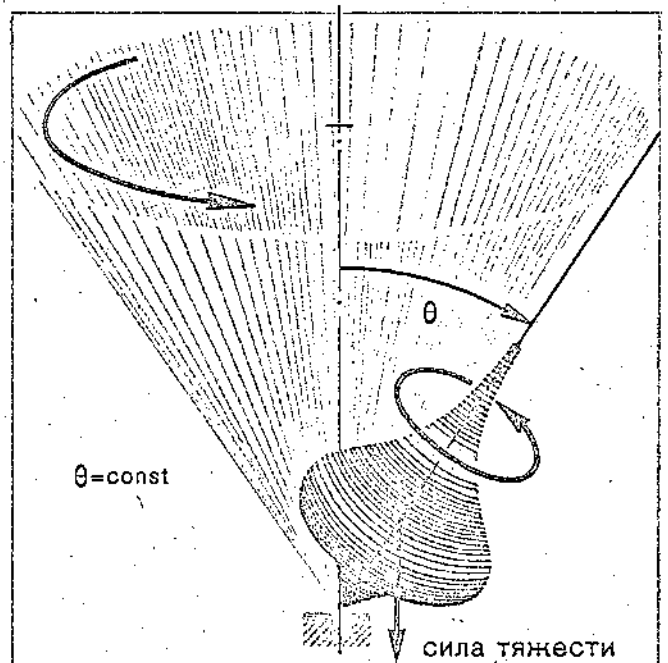


Рис. 3. Наклонно поставленный на острие волчок, предоставленный самому себе, без сообщения ему толчка. Вначале волчок

падает так, как если бы он не имел вращения, но затем движение его апекса (точки пересечения оси волчка со сферой, центр которой совпадает

с точкой опоры волчка) искривляется, и волчок вновь поднимается на исходную высоту. Затем опять падает и т. д.

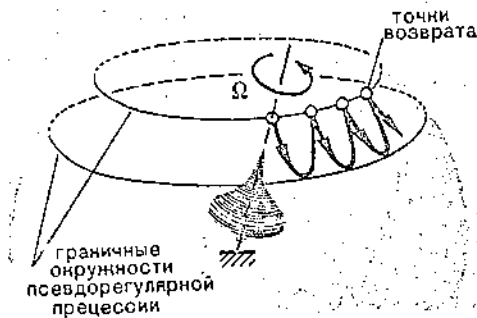


Рис. 4. Траектория апекса волчка, которому в начальное мгновение сообщен толчок  $V_0$  в горизонтальном направлении в сторону, обратную общему ходу прецессии.

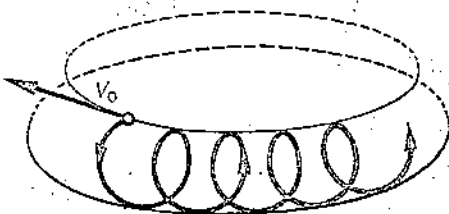


Рис. 6. Из-за трения в опоре и воздействия на волчок окружающего воздуха нутации затухают, псевдорегулярная прецессия переходит в регулярную.

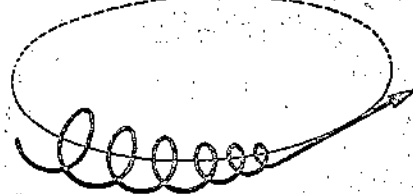
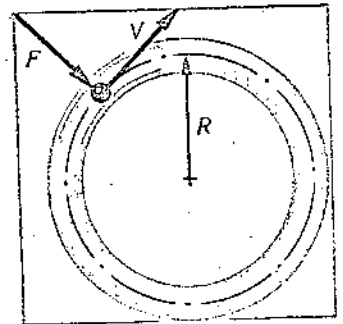


Рис. 5. Волчку был дан толчок  $V_0$  в сторону общего хода прецессии. Апекс описывает волнистую траекторию. Если толчок будет сильнее, апекс станет описывать на сфере горизонтальную окружность.

Рис. 7. Движение невесомой материальной точки в круговом абсолютно гладком неподвижном канале. Центробежная сила  $F$  — это воздействие канала на точку. Если эту силу создать другим путем, то точка продолжала бы двигаться с постоянной скоростью  $V$  по окружности радиуса  $R$  и при отсутствии канала.



ли — периодом прецессии. Период прецессии тем больше, чем быстрее запущен волчок. Вместе с тем период прецессии при одной и той же скорости вращения волчка не зависит от угла отклонения его оси от вертикали. При очень большой угловой скорости вращения волчка конус, который описывает его ось, на первый взгляд кажется круговым. Однако при внимательном рассмотрении прецессии волчка обнаруживается, что движение его оси симметрии совсем не такое простое. На сфере с центром в точке опоры волчка *апекс*, т. е. точка пересечения оси со сферой, описывает сложную кривую, вид которой существенно зависит от того, какое движение было у оси волчка в начальное мгновение времени. Если внезапно отпустить ось, бывшую до того в неподвижности, то апекс вначале идет с возрастающей скоростью по сфере вниз (рис. 3). Далее, после того как апекс мигнет свое самое низкое положение, он вновь поднимается вверх, достигает начальной высоты, на мгновение останавливается и вновь начинает падать, повторив все сначала. Такие повторю-

ющиеся движения называются *нутацией* волчка, а их продолжительность — *периодом нутации*. Продолжительность периода нутации, в отличие от периода прецессии, с увеличением скорости вращения уменьшается. Если же перед тем, как предоставить волчок самому себе, сообщить его наклонной оси симметрии некоторое движение, то траектория апекса будет в общем случае иной. Возможны траектории с петлеобразным движением (рис. 4) и волнистые траектории (рис. 5). Каждая из них последовательно касается двух расположенных на сфере горизонтальных окружностей.

Начальную скорость апекса можно подобрать такой, чтобы движение его по сфере происходило по горизонтальной окружности. Это особенное движение называется *регулярной прецессией*. Прецессия, сопровождаемая нутацией, называется *псевдорегулярной*. Обычно нутации бывают мало заметны. Из-за воздействия окружающей среды и трения с течением времени они исчезают, и псевдорегулярная прецессия переходит в регулярную (рис. 6).

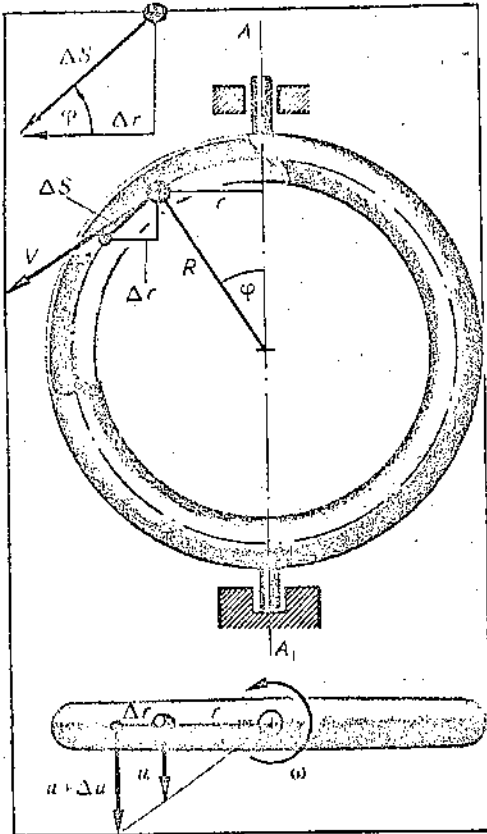


Рис. 8а. Материальная невесомая точка движется в абсолютно гладком канале, который сам вращается вокруг оси, лежащей в плоскости его круговой оси. Буквами  $V$  и  $u$  обозначены составляющие скорости

точки. Поперечная составляющая  $u$  пропорциональна расстоянию  $r$  до оси вращения. Она изменяется при перемещении точки в канале за счет изменения величины  $r$ .

### Движение точки внутри кругового канала

Почему же не падает наклонно поставленный быстро вращающийся волчок, а совершает описанное выше сложное движение? Чтобы подготовиться к ответу на этот вопрос, рассмотрим вначале несколько вспомогательных примеров движения материальной точки. Пусть точка движется без трения внутри абсолютно гладкого замкнутого канала круговой формы (рис. 7). Предположим, что сила тяжести на нее не действует. Тогда единственной силой, действующей на точку, оказывается воздействие стенки канала. Вследствие абсолютной гладкости канала эта сила будет направлена перпендикулярно касательной к его круговой оси. Эту касательную следует, разумеется, проводить в том месте круговой оси, где материальная точка в данное

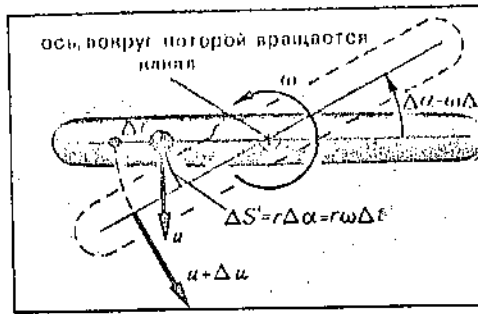


Рис. 8б. Вид на вращающийся канал со стороны оси его вращения;  $u$  — составляющая скорости материальной точки в направлении, перпендикулярном к плоскости канала.

мгновение находится. Сила воздействия стенки канала на материальную точку называется *реакцией связи*, так как канал связывает свободу движения точки. Если канал неподвижен, то реакция связи будет представлять собой центростремительную силу, имеющую направление к центру круговой оси канала. Она равна, как известно из курса физики, величине  $F = m \frac{V^2}{R}$ . В этой формуле  $V$  — скорость точки,  $m$  — ее масса и  $R$  — радиус круговой оси канала.

Центростремительная сила направлена все время перпендикулярно скорости точки, вследствие чего не может повлиять на размер последней. Эта сила изменяет лишь направление скорости материальной точки. В самом деле, направлению скорости точки непрерывно совпадает с упомянутой выше касательной  $u$ , следовательно, все время поворачивается.

Начнем теперь равномерно вращать канал вокруг неподвижной оси  $AA_1$ , расположенной в его плоскости и проходящей через центр круговой оси канала (рис. 8а). В этом случае скорость находящейся в нем точки помимо составляющей  $V$ , идущей по касательной к круговой оси канала, будет иметь составляющую  $u$ , перпендикулярную к плоскости, содержащей эту ось. Определим силу, действующую на точку в таком сложном ее движении. Рассмотрим два последовательных положения канала: в начале и в конце малого интервала времени  $\Delta t$ . Канал повернется за это время на малый угол  $\Delta \alpha$  (рис. 8б).

Отношение  $\frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$  называется *угловой скоростью канала*. Обозначим ее через  $\omega$ . Таким образом,  $\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ . За время  $\Delta t$  точка пройдет вдоль оси канала путь  $\Delta S$ , причем, конечно,  $\Delta S = V \Delta t$ .

Пусть в некоторое мгновение материальная точка находится на расстоянии  $r$  от оси вращения канала. Очевидно (рис. 8а), что  $r = R \sin \phi$ , где  $\phi$  — угол между осью вращения канала и радиусом  $R$ , соединяющим материальную точку с его геометрическим центром.

Канал вращается вокруг оси  $AA_1$  с угловой скоростью  $\omega$ . Поэтому величина  $u$  составляющей скорости материальной точки в направлении, перпендикулярном к плоскости круговой оси канала, выра-

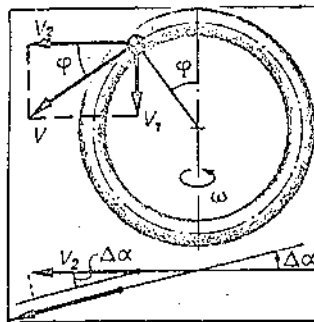


Рис. 9. Величину геометрического изменения составляющей скорости  $V_2$  в направлении, перпендикулярном к плоскости круговой оси канала, с достаточной точностью можно приравнять к произведению  $V_2 \Delta \alpha$ .

жается формулой  $u = \omega r$ . Заметим, однако, что за время  $\Delta t$  материальная точка успевает удалиться от оси вращения канала на расстояние  $\Delta r$ . Ее боковая скорость при этом изменяется на некоторую малую величину  $\Delta u$  (рис. 8а). Согласно формуле  $u = \omega r$  имеем теперь  $u + \Delta u = \omega(r + \Delta r)$ . Учитывая здесь равенство  $u = \omega r$ , получаем после очевидного сокращения, что  $\Delta u = \omega \Delta r$ .

При рассмотрении рисунка 8а нетрудно заметить, что имеет место приближенное равенство  $\Delta r = \Delta S \cos \varphi$ , в котором  $\Delta S$  по-прежнему перемещение материальной точки вдоль оси канала за время  $\Delta t$ . Только что полученное равенство выполняется тем точнее, чем меньше  $\Delta S$ , а следовательно, и  $\Delta t$ . Поэтому, используя его в соотношении  $\Delta u = \omega \Delta r$ , получаем  $\Delta u = \omega \Delta S \cos \varphi$ .

Разделим теперь обе части последнего равенства на  $\Delta t$  и будем считать этот интервал времени исчезающе малым. В результате, учитывая, что  $\frac{\Delta S}{\Delta t} = V$ , придем к формуле  $\omega_1 = \omega V \cos \varphi$ , в которой введено обозначение  $\omega_1 = \frac{\Delta u}{\Delta t}$ . Величина  $\omega_1$  представляет собой часть вектора полного ускорения материальной точки, обусловленную изменением составляющей  $u$  ее скорости в направлении, перпендикулярном к плоскости канала. Можно указать еще две части ускорения, одна из которых в точности равна  $\omega_1$  и так же направлена. Происхождение этой второй части, которую обозначим через  $\omega_2$ , совершенно иное. Чтобы выяснить это обстоятельство, разложим, в свою очередь, составляющую скорости, направленную по касательной к каналу (т. е. вектор  $V$ ), на две составляющие  $V_1$  и  $V_2$ , направленные соответственно параллельно оси вращения канала и перпендикулярно этой оси (рис. 9). Составляющая  $V_2$  определяется очевидной формулой  $V_2 = V \cos \varphi$ . Спустя время  $\Delta t$  эта составляющая скорости материальной точки повернется вместе с каналом на угол  $\Delta \alpha$ . Ее изменение в направлении, перпендикулярном к плоскости канала, мало отличается от произведения  $V_2 \Delta \alpha$ . С учетом двух последних формул, а также полученного ранее соотношения  $\Delta \alpha = \omega \Delta t$  имеем  $V_2 \Delta \alpha = V_2 \omega \Delta t = V \cos \varphi \omega \Delta t$ . Разделим это «бокковое» приращение составляющей скорости  $V_2$  на интервал времени  $\Delta t$ . В результате придем к формуле  $\omega_2 = \omega V_2 = \omega V \cos \varphi$ , в которой

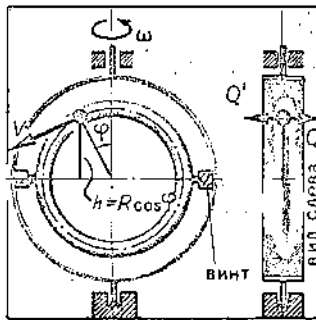


Рис. 10. Канал, подвешенный во вращающейся рамке. Посредством винта можно осуществлять или устранять вращение канала вокруг горизонтальной оси относительно рамки.  $Q$  — сила воздействия канала на материальную точку,  $Q'$  — противодействующая ей сила давления точки на стенку канала.

величина  $\omega_2$  представляет собой упомянутую выше вторую часть ускорения материальной точки. Направлена она перпендикулярно плоскости канала. Обе части ускорения, т. е.  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , в самом деле равны и имеют одно и то же направление. Таким образом, составляющая ускорения в перпендикулярном к плоскости канала направлении выражается формулой  $\omega_p = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega V \cos \varphi$ . Третья, и последняя, составляющая ускорения, как и полное ускорение в случае неподвижного канала, направлена к центру круговой оси канала. Она равна выражению  $\omega_3 = \frac{V^2}{R}$ . Заметим, что при неподвижном канале  $\omega_3$  становится центростремительным ускорением точки, движущейся со скоростью  $V$  по окружности радиуса  $R$ , а составляющие  $\omega_1$  и  $\omega_2$  обращаются в нуль.

Если материальная точка имеет ускорение, то, согласно второму закону Ньютона, на нее непременно должна действовать сила, равная этому ускорению, умноженному на массу, и точно так же направленная, как ускорение. Поэтому в рассматриваемом случае на точку должна действовать сила со следующими двумя составляющими. Одна из них представляет собой силу, аналогичную упомянутой ранее центростремительной силе  $F$  и равную величине  $m\omega_3 = m \frac{V^2}{R}$ . Другая, представляющая для нас главный интерес, выражается с учетом полученной ранее формулы для  $\omega_p$  соотношением  $Q = m\omega_p = 2m\omega V \cos \varphi$ . Сила  $Q$ , согласно только что изложенному, направлена перпендикулярно к плоскости канала. Она называется *кориолисовой силой*.

Назовем ось, вокруг которой с постоянной скоростью вращается канал, *основной осью*. Введем еще дополнительную ось, также расположенную в плоскости канала, но перпендикулярную основной оси, и назовем ее *поперечной осью*. Подвесим теперь канал на этой поперечной оси в подшипниках некоторой рамки, которая может вращаться вокруг основной оси (рис. 10). Если теперь воспрепятствовать повороту канала относительно рамки (т. е. вокруг поперечной оси), то он будет вынужден вместе с последней вращаться вокруг основной оси с угловой скоростью  $\omega$ . Наличие силы воздействия гладкой стенки канала на материальную точку вызывает, в соответствии с третьим законом Ньютона, равную и

Рис. 11. Момент давления вращающегося тонкого кольца на стенку канала. Кольцо замкнется  $4N$  равностоящими друг от

друга материальными точками. Момент силы  $Q$  относительно поперечной оси равен величине  $M = Q'h = Qh$ , где  $h = R \cos \varphi$  — плечо силы  $Q'$  (рис. 10). Момент силы  $F'$  относительно той же оси равен нулю, так как и сила и ось лежат в одной плоскости.

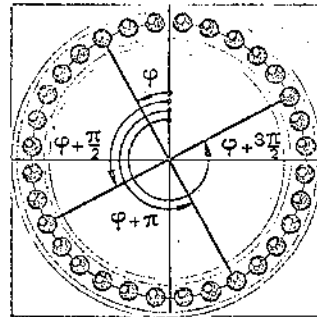
Подставим теперь в выражение для момента  $M = Qh$  величину  $h = R \cos \varphi$ , а также воспользуемся приведенным выше равенством для определения силы  $Q$ . В результате придем к формуле для момента  $M$ , а именно:  $M = 2m\omega V \cos^2 \varphi \cdot R$ . Этот момент можно рассматривать как усилие, стремящееся повернуть канал вокруг поперечной оси в результате воздействия на его стенку движущейся в нем материальной точки.

## Движение кольца в замкнутом круговом канале

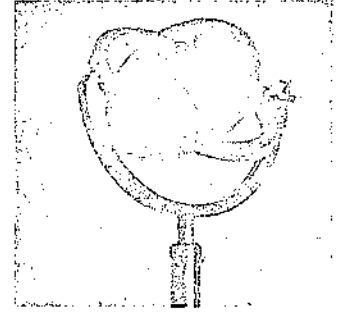
Пусть теперь внутри канала движется не одна материальная точка, а целое кольцо. Замежим это кольцо совокупностью  $4N$  отдельных связанных друг с другом материальных точек. Тогда придем к выводу, что при вращении канала вокруг основной оси, лежащей в плоскости его круговой оси, кольцо будет стремиться повернуть канал вокруг поперечной оси. Момент этого воздействия представляет собой сумму моментов воздействия материальных точек, составляющих кольцо. Эту сумму нетрудно подсчитать, если каждый раз брать, например, по четыре точки, симметрично расположенные на круговой оси канала (рис. 11). Углы, которые определяют положение таких четырех точек на этой окружности, соответственно равны величинам  $\varphi$ ;  $\varphi + \frac{\pi}{2}$ ;  $\varphi + \pi$ ;  $\varphi + \frac{3\pi}{2}$ . Используя простейшие формулы тригонометрии и равенство для определения момента  $M$ , получим для суммарного момента воздействия упомянутых четырех точек выражение

$$M_4 = 2m\omega VR \left[ \cos^2 \varphi + \cos^2 \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) + \cos^2 (\varphi + \pi) + \cos^2 \left( \varphi + \frac{3\pi}{2} \right) \right] = 4m\omega VR.$$

друга материальными точками.



Волчок в кардановом подвесе — основной элемент множества точечных приборов.



Таких четверок материальных точек будет в составе кольца ровно  $N$ , т. е. в четыре раза меньше общего числа  $4N$  точек, составляющих кольцо. Чтобы подсчитать полный момент  $M_0$  сил воздействия кольца на канал (по-прежнему относительно поперечной оси), следует выражение для момента  $M_4$  умножить на  $N$ . Получим формулу  $M_0 = m_0 \omega VR$ , в которой  $m_0 = 4Nm$  — полная масса всего кольца.

Обозначим через  $\Omega$  угловую скорость кольца по отношению к стенкам канала. Тогда составляющая  $V$  скорости материальной точки относительно стенки канала определится формулой  $V = \Omega R$ . Используя ее, равенство для  $M_0$  можно представить теперь в виде

$$M_0 = I \Omega \omega. \quad (1)$$

Здесь величина  $I = m_0 R^2$  является так называемым *полярным моментом инерции кольца* относительно его центра, или, что одно и то же, относительно оси, перпендикулярной к плоскости кольца и проходящей через центр его круговой оси.

## Волчок в кардановом подвесе

Возьмем теперь вместо канала и вращающегося в нем кольца диск или какое-либо другое тело, также обладающее осевой симметрией. Заставим такое тело вращаться вокруг своей оси симметрии в некоторой рамке с угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 12). Саму рамку, которую назовем *внутренней*, в свою очередь, поместим в другую рамку на другой оси, перпендикулярной первой и лежащей в обеих срединных плоскостях каждой из рамок. И наконец, упомянутую другую рамку, которую будем называть *внешней*, насадим на неподвижную ось, также лежащую в ее срединной плоскости. То, что получилось, называется *гироскопом в кардановом под-*

Рис. 12. Посредством винта можно устранить вращение гироскопа вокруг горизонтальной оси. При вращении внешнего кольца

веса. Вращающееся симметричное тело называется *ротором гироскопа*, а иногда собственно гироскопом или просто *волчком*. Примем, кроме того, что трение в подшипниках осей обеих рамок и самого ротора отсутствует.

Ось ротора, ось внутренней рамки и ось внешней рамки пересекаются в одной точке, которая называется *геометрическим центром карданова подвеса*. Заметим, что в данном случае сила тяжести не будет оказывать никакого влияния на поведение гироскопа, если центр тяжести внешней рамки, а также центр тяжести ротора и внутренней рамки будут точно совпадать с геометрическим центром карданова подвеса. Наличие карданова подвеса (т. е. обеих рамок) позволяет оси ротора принимать любое направление, а ему самому — свободно вращаться вокруг своей оси.

## Гироскопический момент

Заждем теперь специальным винтом ось внутренней рамки, не позволяя тем самым ей поворачиваться относительно внешней рамки (рис. 12). При этом внешнюю рамку можно заставить вращаться с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг ее неподвижной оси.

Нетрудно прийти к выводу, что ротор гироскопа при таком движении будет стремиться повернуть внутреннюю рамку относительно внешней. В самом деле, ротор можно представить как бы состоящим из большого числа тонких совместно вращающихся колец.

Согласно изложенному выше, каждое из таких колец будет стремиться повернуть внутреннюю рамку вокруг его закрепленной оси. Суммарный момент усилий, развиваемых всеми кольцами относительно закрепленной оси, будет выражаться формулой (1), однако под полярным моментом инерции  $I$  следует в ней теперь понимать сумму моментов инерции всех воображаемых колец, составляющих ротор.

Итак, при вращении закрепленных вместе внешнего и внутреннего колец вокруг неподвижной оси внешнего кольца ротор гироскопа стремится повернуть внутреннее кольцо относительно внешнего, развивая при этом момент

$$\Gamma = \omega I \Omega. \quad (2)$$

Этот момент называется *гироскопическим*.

В силу закона равенства и противоположной направленности действия и противодействия при вра-

зникнет момент, стремящийся повернуть внутреннее кольцо относительно внешнего.

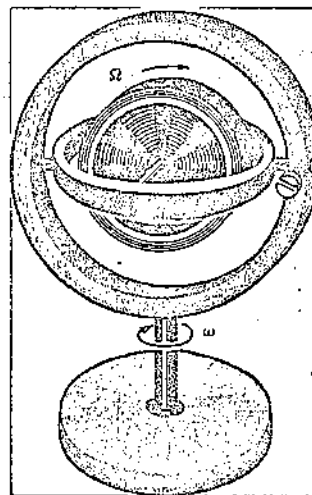
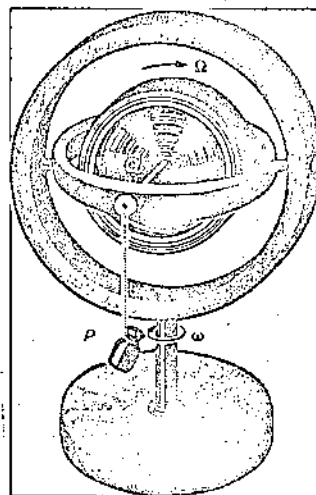


Рис. 13. Грузик  $P$  вызывает вращение гироскопа вокруг вертикальной оси.



жении внешней рамки последняя действует на ротор гироскопа с моментом  $M$  той же величины, что и  $\Gamma$ , но в противоположном направлении. Момент  $M$  стремится повернуть ротор вместе с внутренней рамкой вокруг оси внутреннего кольца. Почти очевидно, что если устранить зажим, мешающий повороту внутренней рамки относительно внешней, и приложить к первой силу с тем же моментом  $M$  относительно ее оси, то ничего не изменится. Внешняя рамка вместе с внутренней и ротором гироскопа будет продолжать вращаться вокруг оси внешней рамки с угловой скоростью  $\omega$ , а угол между обеими рамками будет оставаться неизменным.

## Гироскоп под действием приложенной к нему силы

Расположим ось внешней рамки по-прежнему вертикально, а к внутренней подвесим груз  $P$  на расстоянии  $a$  от оси внутренней рамки (рис. 13). Момент силы  $P$  относительно этой оси при горизонтальном расположении внутренней рамки равен  $M = Pa$ .

Заставим вращаться внешнюю рамку вместе с внутренней и ротором с такой угловой скоростью, чтобы соблюдалось равенство

$$M = \omega I \Omega, \quad (3)$$

и во время этого движения спустим зажим на ось внутренней рамки. Как только что было указано, движение будет продолжаться так, будто бы ничего не случилось. Момент  $M$  силы  $P$  будет все время

уравновешиваться гироскопическим моментом  $G$ , значение которого определяется формулой (2). А как будет обстоять дело, если отпустить зажим при отсутствии вращения внешней рамки или при несоблюдении равенства (3)? Тогда в это мгновение не будет равенства между моментом силы тяжести  $M$  и гироскопическим моментом  $G$ , и, следовательно, картина последующего движения будет иной. Так, если внешняя рамка стоит на месте, то внутренняя вместе с ротором гироскопа под действием момента  $M$  силы  $P$  вначале начнет вращаться вокруг горизонтальной оси. При таком вращении появится возрастающая угловая скорость  $\omega'$  вокруг этой оси, а следовательно, появятся и новый гироскопический момент  $G' = \omega' I \Omega$ .

Гироскопический момент  $G'$  имеет вертикальное направление и, следовательно, будет стремиться повернуть весь гироскоп (т. е. его обе рамки и ротор) вокруг оси внешней рамки. Они придут в ускоренное вращение. Тем самым появится увеличивающаяся со временем их угловая скорость  $\omega$  вокруг вертикальной оси и соответственно возрастающий со временем гироскопический момент  $G$ . Последний определяется по-прежнему формулой (2) и направлен против момента  $M$  силы  $P$ . Настанет мгновение, когда оба момента, т. е.  $M$  и  $G$ , окажутся равными. Однако после этого вращение внешней рамки вовсе не станет равномерным из-за продолжающегося движения внутренней рамки и ротора вокруг горизонтальной оси.

Гироскопический момент будет продолжать разгонять весь гироскоп вокруг вертикальной оси, и, как следствие, будет расти гироскопический момент  $G$ . Теперь он уже станет в течение некоторого времени превышать момент  $M$  силы  $P$ . Вращение внутренней рамки гироскопа вокруг горизонтальной оси при этом замедляется, на мгновение останавливается, и рамка начинает вращаться в обратном направлении. Гироскопический момент  $G'$  при этом меняет знак на обратный и начинает тормозить вращение обеих рамок и ротора вокруг вертикальной оси.

Соответственно уменьшается гироскопический момент  $G$  и наступает новое мгновение равенства его моменту  $M$  силы  $P$ . Именно мгновение, так как из-за наличия горизонтальной составляющей угловой скорости  $\omega'$  внутренней рамки и ротора гироскопический момент  $G'$  будет продолжать замедлять вращение обеих рамок и ротора вокруг вертикальной оси. В свою очередь, момент  $M$  силы  $P$ , который теперь уже оказывается больше гироскопического момента  $G$ , начнет замедлять вращение внутренней рамки и ротора вокруг горизонтальной оси. В резуль-

тате вновь на мгновение все движение гироскопа, кроме вращения ротора вокруг собственной оси, остановится. Далее описанное движение начнет повторяться снова и снова. Перед нами картина движения, лишь в деталях отличающаяся от псевдорегулярной прецессии детского волчка, описанной в начале статьи. Можно вновь ввести апекс как точку пересечения собственной оси ротора со сферой, построенной вокруг геометрического центра волчка. Этот апекс, как следует из вышеизложенного, совершает движение между двумя горизонтальными окружностями на сфере (рис. 3). Его траектория касается нижней окружности, а на верхней окружности имеет так называемые точки возврата, т. е. подходит к ним и уходит под одним и тем же углом (прямым). Именно в этих точках апекс на мгновение останавливается.

Произведение  $I\Omega$ , встретившееся в последних формулах, называется *собственным кинетическим моментом* ротора. Обозначается он буквой  $H$ . Таким образом,  $H = I\Omega$ , и гироскопический момент  $G$  можно определить по формуле:

$$G = \omega H. \quad (4)$$

## Почему волчок не падает?

Изложенное выше позволяет теперь объяснить движение наклонно поставленного волчка и ответить на вопрос, почему он не падает.

Собственный кинетический момент волчка  $H$  выражается формулой  $H = I\Omega$ . На волчок действует сила тяжести  $P$  (рис. 14), которая в данном случае создает момент

$$M = Pa \sin \theta \quad (5)$$

относительно горизонтальной прямой, проходящей через точку опоры волчка перпендикулярно к его оси (заметим, что в последней формуле  $\theta$  — угол между вертикалью и осью волчка).

Рассмотрим движение волчка в течение малого времени  $\Delta t$ . На это время оденем на волчок воображаемую внутреннюю рамку, чтобы ее ось была горизонтальной и, следовательно, совпадающей с только что упомянутой прямой (рис. 15). На внутреннюю рамку оденем воображаемую внешнюю, ось которой направим по перпендикуляру к горизонтальной оси внутренней рамки и собственной оси волчка. Тогда мы вернемся к только что рассмотренному случаю движения гироскопа в кардановом подвесе с той только разницей, что массу каждого кольца следует



Рис. 14. Конец вектора собственного кинетического момента  $H$  описывает горизонтальную окружность длиной  $S$ . Элемент дуги этой

окружности совпадает с элементарным перемещением конца того же вектора при его повороте на угол  $\omega \Delta t$  вокруг оси воображаемой

внешней рамки. Эта ось перпендикулярна вектору  $H$ , т. е. собственной оси гироскопа, и лежит с ней в одной вертикальной плоскости.

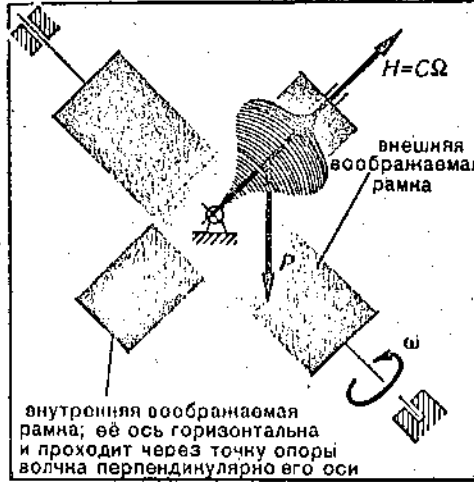
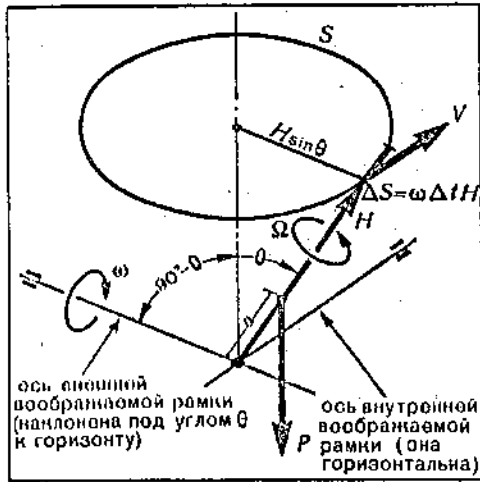


Рис. 15. Воображаемые рамки, объясняющие движение волчка. Угловая скорость внешней рамки  $\omega$  вызывается моментом силы тяжести  $P$  относительно прямой, проходящей через точку опоры перпендикулярно плоскости рисунка. Эта прямая односторонне полнотел ось внутренней рамки, поворачивающейся вместе с внешней.

считать ничтожно малой и не учитывать при исследовании движения волчка. Гироскопические моменты  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ , описанные выше, будут теперь восприниматься только массой самого волчка.

Остановимся на случае регулярной прецессии. В течение времени  $\Delta t$  воображаемая внешняя рамка вместе с волчком повернется вокруг своей наклонной оси на малый угол  $\Delta \alpha$ . При этом все точки оси волчка переместятся в горизонтальном направлении. Отложим на оси волчка от точки опоры отрезок, равный по длине величине собственного кинетического момента  $H$  (рис. 14), и назовем его *вектором собственного кинетического момента*. Конец этого вектора переместится за время  $\Delta t$  в горизонтальном направлении на расстояние  $\Delta S = H \Delta \alpha$ , и, следовательно, его линейная скорость будет численно равна величине  $V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} H = \omega H$ . Здесь  $\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ , как и ранее, угловая скорость внешней рамки. Согласно полученным ранее уравнениям (3), (5) и соотношению  $H = I \Omega$  имеем для угловой скорости  $\omega$  следующее выражение:

$$\omega = \frac{M}{H} = \frac{Pa \sin \theta}{H} \quad (6)$$

Подставим теперь это выражение в формулу  $V = \omega H$  для линейной скорости  $V$  конца вектора собственного кинетического момента  $H$ . Получим:

$$V = M = Pa \sin \theta \quad (7)$$

Таким образом, скорость  $V$  конца вектора собственного кинетического момента оказывается численно равной моменту  $M$  силы, приложенной к волчку относительно упомянутой выше прямой, проходящей через точку опоры. Очевидно, что при регулярной прецессии конец вектора  $H$  будет продолжать пере-

мещаться в горизонтальном направлении и опишет окружность длиной  $S = 2\pi H \sin \theta$  (рис. 14) вокруг вертикальной прямой, проходящей через точку опоры волчка. Если теперь разделить эту длину на скорость  $V = Pa \sin \theta$ , с которой конец вектора  $H$  движется по окружности, то придем к формуле

$$T = \frac{S}{V} = \frac{2\pi H \sin \theta}{Pa \sin \theta} = 2\pi \frac{H}{Pa} \quad (8)$$

определяющей время  $T$  обращения оси волчка вокруг вертикальной прямой. Это и есть формула для периода регулярной прецессии. Обратим внимание на то, что период прецессии не зависит от угла  $\theta$  отклонения волчка от вертикали, о чем уже упоминалось выше.

Как происходит псевдoreгулярная прецессия волчка, уже было рассказано в начале этой статьи. Здесь укажем только, что период нутации, т. е. продолжительность повторяющихся изменений угла отклонения оси волчка от вертикали, выражается формулой

$$T = 2\pi \frac{A}{H} \quad (9)$$

где  $A$  — момент инерции волчка относительно прямой, перпендикулярной оси собственного вращения волчка и проходящей через точку опоры (т. е. сумма произведений масс элементарных частиц волчка на квадрат их расстояния до этой прямой).

Замечательно, что от веса волчка  $P$  и от угла  $\theta$  отклонения его оси от вертикали период нутации не зависит. Таким образом, один и тот же волчок на Земле и на Луне будет иметь одинаковые периоды нутации, однако в силу формулы (8) период прецессии на Луне будет больше, так как вес волчка на Луне в шесть раз меньше, чем на Земле.



Удивительные свойства волчка используются и в цирке.

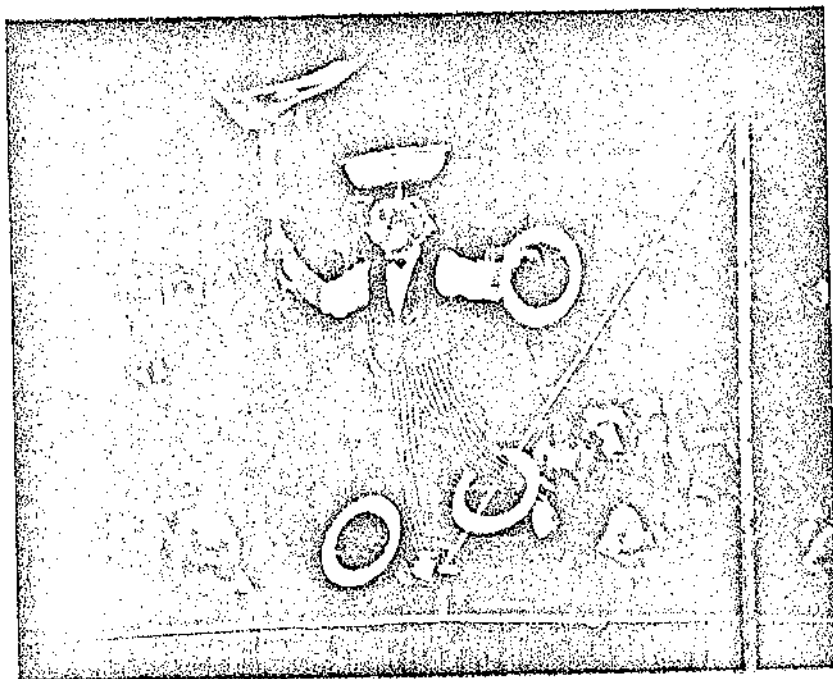
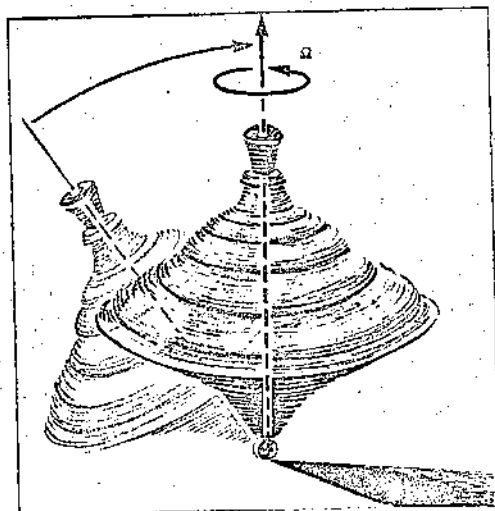


Рис. 16. «Спящий» волчок.



## «Спящий» волчок

Рассмотрим теперь волчок, ножка которого оканчивается не острием, как это было ранее (рис. 1), а сферической поверхностью, радиус которой невелик (рис. 16). Пусть такой волчок вращается вокруг своей оси симметрии с большой угловой скоростью  $\Omega$ . Отклоним ось волчка на некоторый угол от вертикали. Тогда заметим любопытное явление: волчок как бы «оживает» и без посторонней помощи ось его симметрии начинает постепенно приближаться к вертикали. Наступит момент, когда ось волчка практически совпадет с вертикалью и ее движение станет почти незаметным: волчок как бы «засыпает». Такой волчок называется «спящим». Теоретические расчеты дают возможность определить минимальную угловую скорость  $\Omega_{\min}$  собственного вращения «спящего» волчка, необходимую для устойчивого его движения. Эта скорость определяется равенством

$$\Omega_{\min} = \frac{2}{J} \sqrt{PaA}, \quad (10)$$

в котором все обозначения те же, что употреблялись и ранее.

Если угловая скорость  $\Omega$  больше минимальной угловой скорости  $\Omega_{\min}$ , то волчок будет спокойно и

устойчиво вращаться вокруг вертикали; если же  $\Omega < \Omega_{\min}$ , то он начнет раскачиваться и в конце концов упадет. Заметим, что, например, для карандаша правая часть последнего равенства соответствует примерно 30 000 об/мин. Вот почему в обычных условиях не удается вращающийся карандаш (и отличие, например, от детского волчка) заставить продолжительное время стоять на острие.

## Правило прецессии

Введем вектор момента  $M$  пары (т. е. двух равных антипараллельных сил). Этот вектор по длине равен произведению одной из сил  $P$  на ее плечо  $h$ . Он направлен перпендикулярно плоскости, содержащей обе силы (рис. 17). Положительное направление вектора  $M$  выбирается в ту сторону, откуда вращающееся усилие пары представляется происходящим против часовой стрелки.

Теоретические исследования и наблюдения заведением волчков и гироскопов в кардановом подвесе дают возможность установить правило для определения направления угловой скорости прецессии. Рассмотрим действие на гироскоп пары сил с моментом  $M$  (в частности, силы тяжести и силы реакции

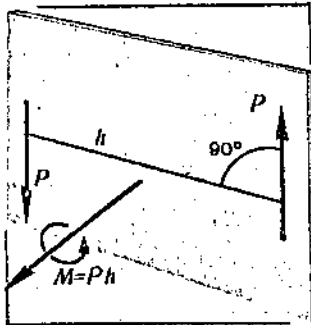
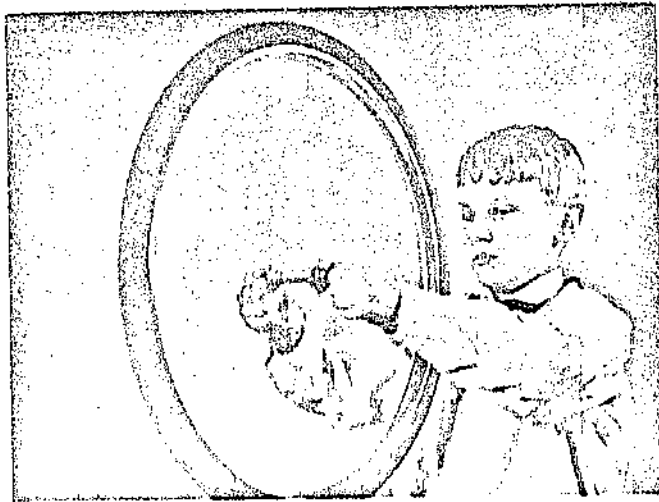


Рис. 17. Момент пары (двух равных антипараллельных сил) — вектор, перпендикулярный плоскости пары. На меня действия пары сил на абсолютно твердое тело, ее можно при сохранении численного значения и направления момента видоизменять и переносить куда угодно, даже в параллельную плоскость.



опоры волчка), перпендикулярным к оси собственно-го вращения ротора гироскопа (волчка). Гироскоп при этом прецессирует так, что его ось перемещается в плоскости, проходящей через вектор пары  $M$ , приближаясь к нему кратчайшим путем (рис. 18).

## Опыт с вращающимся колесом

Поясним только что приведенное правило прецессии на простом примере.

Возьмем колесо от детского велосипеда и вставим в его втулку ось. Возьмемся за нее двумя руками так, как показано на рисунке 19, и попробуем повернуть ее в вертикальной плоскости. Оказывается, что сделать это довольно легко, так как невращающееся колесо не оказывает этому повороту никакого сопротивления. Придадим теперь колесу быстрое вращение вокруг его собственной оси с угловой скоростью  $\Omega$  и вновь попытаемся повернуть его в вертикальной плоскости. С удивлением замечаем, что ось колеса, сопротивляясь этому повороту, поворачивается вместе с тем в горизонтальной плоскости. Объяснить такое необычное поведение колеса довольно легко. Действительно, стремись повернуть ось колеса в вертикальной плоскости, мы

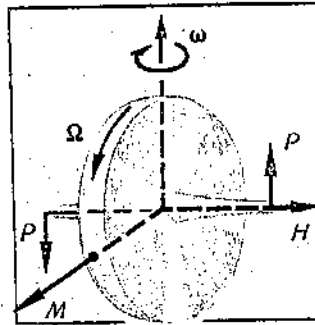


Рис. 18. Прецессия гироскопа, вызванная парой сил, происходит в направлении сближения вектора собственного кинетического момента  $H$  с вектором момента пары  $M$ . На рисунке:  $\omega$  — угловая скорость прецессии;  $\Omega$  — угловая скорость собственного вращения гироскопа.

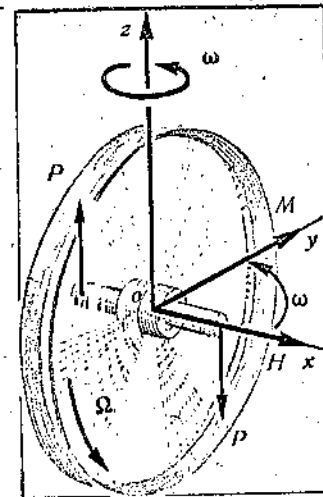


Рис. 19. Опыт с быстро вращающимся колесом. Чтобы повернуть ось колеса в горизонтальной плоскости, следует надавить на нее левой рукой вниз, а правой — вверх.

тем самым прикладываем к этой оси пару сил, момент  $M$  которой направлен вдоль оси  $oy$  (рис. 19). Согласно правилу прецессии, движение оси  $ox$  собственного вращения колеса должно происходить так, если бы вектор  $H$  стремился к совмещению с вектором  $M$  по кратчайшему пути. В результате и будет наблюдаться прецессия оси колеса в горизонтальной плоскости с угловой скоростью  $\omega$ , указанной на рисунке 19. Нетрудно убедиться в том, что если мы попытаемся повернуть ось вращающегося колеса в горизонтальной плоскости, то на самом деле эта ось будет поворачиваться в плоскости вертикальной.

## Двухколесный автомобиль

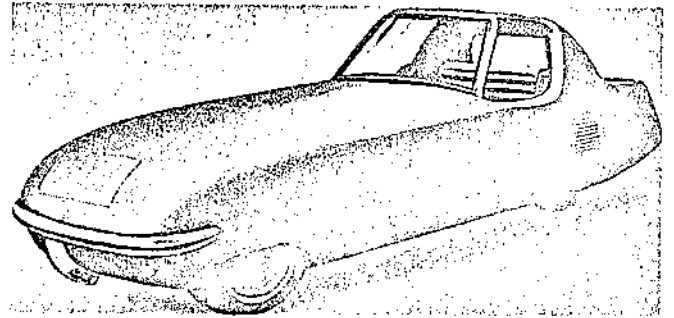
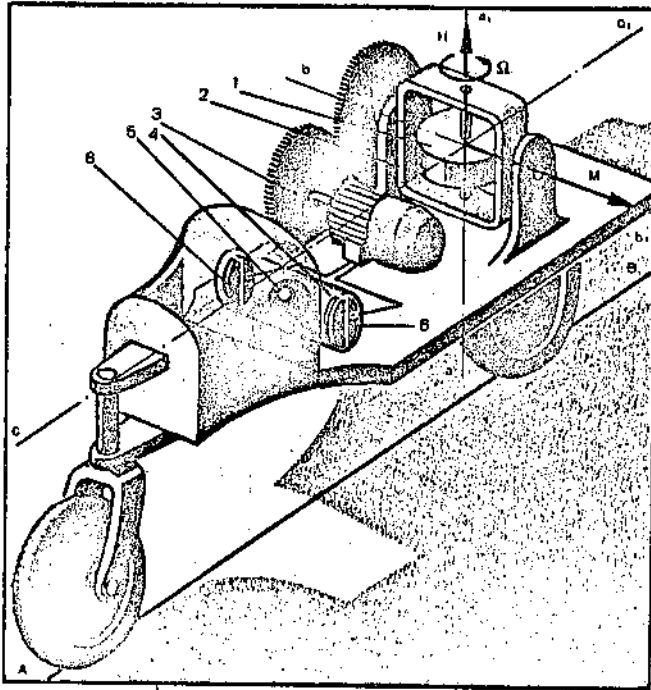
В 1914 г. на улицах Лондона появился автомобиль необычной конструкции — двухколесный. Конструктором его был наш талантливый соотечественник П. П. Шиловский. На первый взгляд казалось, что устойчивое движение автомобиля сохранилось только во время движения. Однако на остановках автомобиль спокойно останавливался, из него выходили и в него входили пассажиры. При этом автомобиль не опрокидывался — его устойчивое движение сохранилось при помощи гироскопа.

Рис. 20. Схема возникновения момента, действующего на гироскоп, в двухколесном автомобиле. Ротор (1) помещен во внутреннее кольцо карданова подвеса (2). Электрический двигатель (3) при помощи зубчатой передачи связан с внутренним кольцом карданова подвеса гироскопа. В кузове

переключатель (4) заключен в трубку, продольная ось которой смонтирована параллельно оси внутреннего кольца. При наклонах кузова автомобиля шар (5), находящийся внутри трубки, смещается в сторону наклона и замыкает одну из двух пар контактов (6), включает электродвигатель. Момент

якоря двигателя, усиленный зубчатой передачей, действует на гироскоп, создавая момент  $M$  вокруг оси внутреннего кольца. В результате гироскоп начнет прецессировать (поворачиваться) вокруг оси  $AB$  до тех пор, пока не займет вертикальное положение. При этом шар переключателя сместится в нейтральное положение.

Рис. 21. Гиرون — современный двухколесный автомобиль. (модель 1961 г.).



не автомобиля направо действующий на гироскоп момент  $M$  должен быть направлен в левую сторону (рис. 20). При наклоне же автомобиля налево момент  $M$ , естественно, должен быть направлен вправо.

Уже первая модель двухколесного автомобиля показала простоту его устройства и экономичность в изготовлении. Однако первая мировая война 1914 г. помешала П. П. Шиловскому продолжить работу над изобретением, идея создания двухколесного автомобиля была на долгие годы забыта.

В 1961 г. на одной из международных выставок демонстрировался современный двухколесный автомобиль, получивший название *гирон* (рис. 21). Устойчивое движение гирона осуществлялось, как и в автомобиле П. П. Шиловского, посредством гироскопа. В отличие от модели П. П. Шиловского, в гироне имеются два маленьких задних колеса, которые автоматически выдвигаются из кузова машины при снижении скорости ее движения ниже 5 км/ч; они же поддерживают гирон на стоянке, когда гироскоп не работает. Не исключено, что в будущем гирон займет почетное место на транспорте и будет курсировать по магистралям многих стран мира.

Схематическое изображение двухколесного автомобиля показано на рисунке 20. Массивный ротор (1), вращающийся с большой угловой скоростью  $\Omega$ , имеет вертикальную ось вращения и помещен во внутреннее кольцо карданова подвеса (2). Подшипники оси этого кольца расположены непосредственно на днище кузова автомобиля. Нетрудно заметить, что в данном случае кузов служит внешним кольцом карданова подвеса гироскопа. Таким образом, гироскоп имеет возможность вращаться вокруг трех осей: оси  $aa_1$  — собственного вращения ротора, оси  $bb_1$  — внутреннего кольца и вместе с корпусом автомобиля — вокруг оси  $AB$ .

Предположим, что во время движения автомобиль в силу каких-либо причин наклонился в правую сторону. Вместе с автомобилем, естественно, наклонится и гироскоп. Однако можно вызвать такую прецессию гироскопа вокруг оси  $AB$ , которая возвратит автомобиль в горизонтальное положение. Согласно правилу прецессии, для создания вращения гироскопа вокруг оси  $AB$  следует приложить момент  $M$  относительно оси  $bb_1$  внутреннего кольца. При накло-

## Правило Жуковского

Ранее уже отмечалось, что гироскопический момент  $G$  появляется в том случае, когда волчок быстро вращается вокруг своей оси собственного вращения, а эта последняя вместе с волчком совершает принуди-

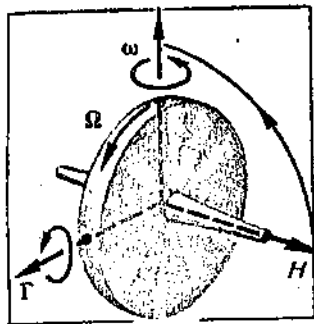


Рис. 22. Вектор гироскопического момента  $G$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $H$  и  $\omega$ . Он направлен в ту сторону, откуда совмещение вектора  $H$  по кратчайшему пути с вектором  $\omega$  будет происходить против часовой стрелки.

тельный поворот вокруг новой оси, не совпадающей с осью собственного вращения. Гироскопический момент образует дополнительные давления на подшипники вращающегося тела и в ряде случаев может служить причиной его разрушения или поломки оси тела.

Если проследить внимательно по теоретической части этой статьи, как направлена сила  $Q$  воздействия на стенку канала движущейся в нем материальной точки, то можно прийти к следующему правилу о направлении момента  $G$ : вектор гироскопического момента  $G$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектор собственного кинетического момента  $H$  и вектор угловой скорости принудительного вращения  $\omega$ , и направлен в ту сторону, откуда кратчайший поворот от вектора  $H$  к вектору  $\omega$  виден происходящим против часовой стрелки (рис. 22). Заметим, что это правило впервые было сформулировано русским ученым Н. Е. Жуковским. Оно дает возможность разобраться во многих явлениях, связанных с наличием вращающихся тел в технике и быту. Рассмотрим одно из таких явлений.

## Кабрирование и пикирование самолета на вираже

Гироскопический момент — одна из причин возникновения ошибок при управлении самолетом во время его полета. Источником этого момента на самолете является, в частности, воздушный винт (пропеллер), который быстро вращается вокруг оси  $ox$ , параллельной продольной оси самолета (рис. 23). В данном случае собственный кинетический момент воздушного винта направлен по этой оси и выражается формулой  $H = I\Omega$ , где  $I$  — осевой момент инерции винта, а  $\Omega$  — угловая скорость его вращения.

Предположим, что вектор  $H$  направлен параллельно продольной оси вперед (рис. 23), а самолет начинает вираж (поворот) вокруг оси  $oz$  влево с угловой скоростью  $\omega$ . Пользуясь правилом Н. Е. Жуковского, нетрудно сообразить, что возникающий при этом повороте гироскопический момент  $G$  будет направлен вдоль отрицательного направления оси

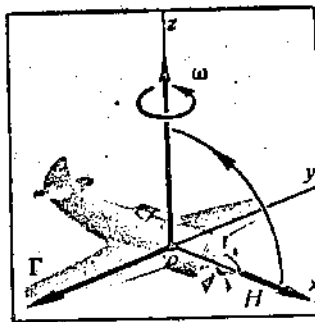


Рис. 23. Согласно правилу Жуковского, момент  $G$  как бы стремится совместить вектор  $H$ , т. е. ось винта (пропеллера), по кратчайшему пути с вектором  $\omega$ . При повороте влево (наличие момента  $G$ ) самолет кабрирует («нос» поднимается); при повороте самолета вправо он пикирует («нос» опускается).

$oy$ . Из-за наличия этого момента «нос» самолета будет подниматься (кабрировать). Если же осуществить при тех же условиях поворот самолета вправо, то, можно сделать вывод о том, что «нос» самолета опустится (самолет будет пикировать). Поэтому, чтобы выровнять самолет, летчику приходится уравнивать момент  $G$  путем соответствующего управления рулями.

## Правило Фуко

Возьмем гироскоп в кардановом подвесе и лишим внешнее его кольцо свободы вращения. Тогда он сможет вращаться вокруг оси ротора  $aa_1$  и вместе с внутренним кольцом вокруг оси последнего  $bb_1$  (рис. 24).

Мы получим так называемый гироскоп с двумя степенями свободы. Поставим его на площадку  $\Pi$ . Сообщим ротору быстрое вращение с угловой скоростью  $\Omega$  и начнем, в свою очередь, вращать площадку  $\Pi$  вокруг вертикальной оси. Тогда ось гироскопа  $aa_1$  придет в движение относительно внешнего кольца и площадки; после нескольких колебаний она займет вертикальное положение (рис. 25). Переменим направление вращения площадки. Тогда вновь ось гироскопа придет в движение, в результате которого тот конец оси ротора, который был направлен вверх, опустится вниз.

Опрокидывание будет повторяться всякий раз, как только будет меняться направление вращения площадки. Такое поведение гироскопа можно объяснить, если воспользоваться правилом Жуковского. Действительно, согласно этому правилу, в результате принудительного поворота гироскопа вокруг оси  $cc_1$  (оси вращения площадки  $\Pi$ ) появится гироскопический момент  $G$ , направленный вдоль оси вращения внутреннего кольца так, как показано на рисунке 24. Наличие этого момента и вынудит ось собственного вращения гироскопа прийти в движение и занять положение, указанное на рисунке 25.

Из изложенного следует, что ось гироскопа с двумя степенями свободы на вращающемся основании устанавливается параллельно оси вращения основа-

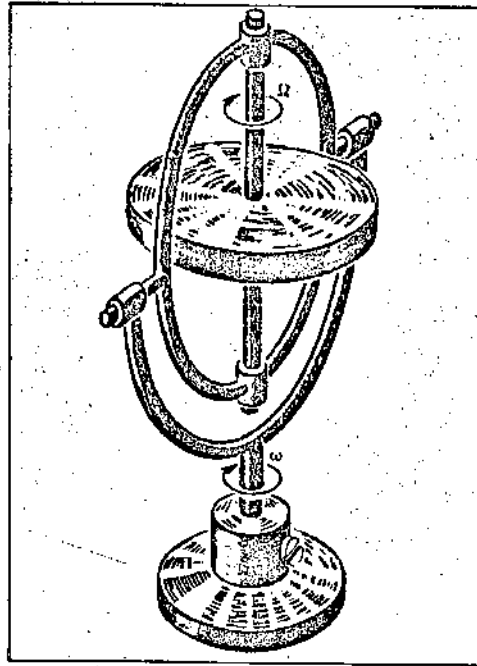
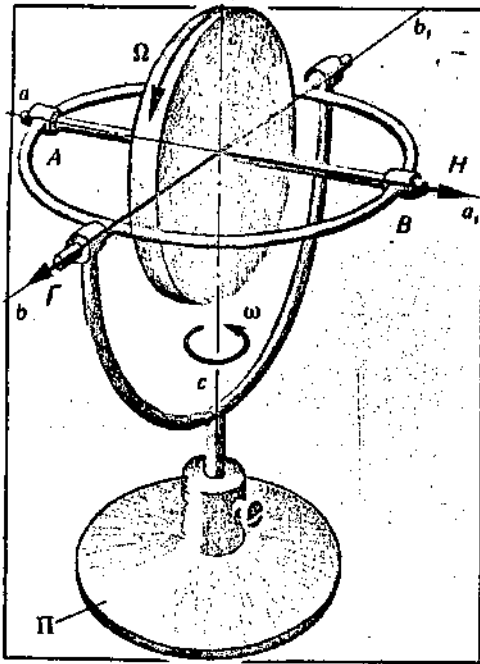


Рис. 24. Гироскоп с двумя степенями свободы. Он имеет свободу вращения лишь вокруг оси ротора  $aa_1$  и оси внутреннего кольца  $bb_1$ . Внешнее кольцо не может поворачиваться вокруг своей оси, оно закреплено винтом.

Рис. 25. Гироскоп с двумя степенями свободы (вокруг собственной оси и вокруг оси внутреннего кольца), расположенный на площадке с принудительным вращением. Ось гироскопа устанавливается параллельно оси вращения площадки. При этом направление вращения ротора и направление вращения площадки совпадают.

ния. При этом оси вращения соответственно ротора и основания оказываются направленными в одну и ту же сторону.

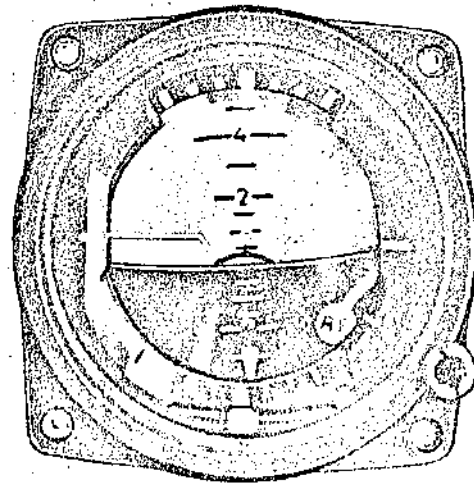
Этот факт был впервые установлен Фуко и называется *правилом Фуко*.

Один из гироскопических приборов самолета — гиригоризонт, основным элементом которого является гироскоп в кардановом подвесе.

## Использование гироскопов в технике

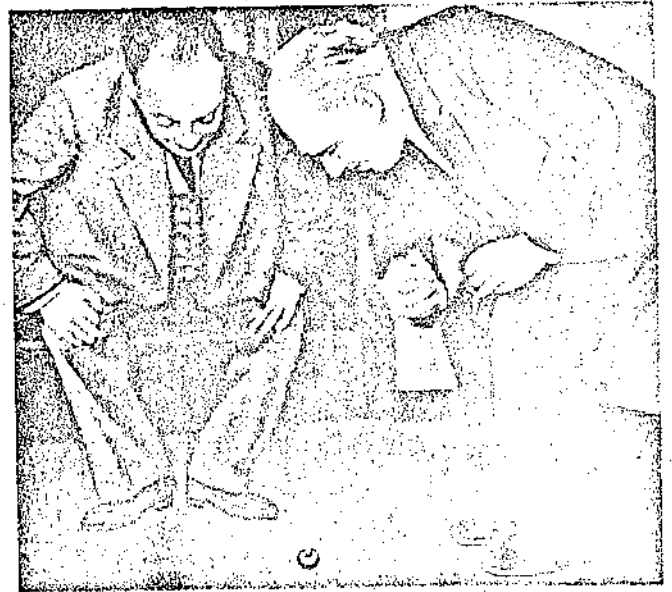
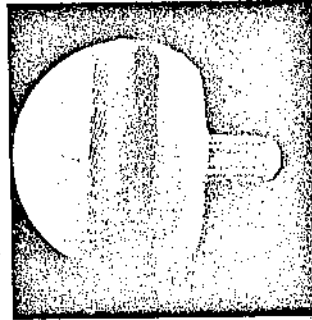
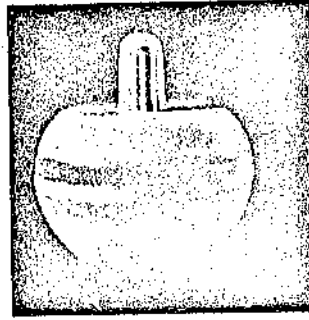
Удивительная устойчивость, сообщаемая волчку быстрым вращением, долгие годы привлекала внимание ученых и изобретателей.

В 1852 г. французский ученый Леон Фуко на заседании Парижской академии наук продемонстрировал свой первый гироскопический прибор, при помощи которого можно было непосредственно в лаборатории обнаружить факт вращения Земли. С тех пор прошло немногим более 100 лет — крайне значительный для истории срок. За это время потюмки маленького волчка — гироскопы различных назначений и конструкций массой от нескольких граммов до многих тонн нашли широкое применение в технике. Одним из первых гироскопических приборов, который в свое время широко использовался во флоте, был прибор, применявшийся для измерения географической широты месторасположения корабля во время шторма. Волчок служил в этом приборе для определения искусственного горизонта. Несколько позже началось широкое использование гироскопов в военной технике. Так, в 1898 г. австрийский инженер Обри изобрел прибор, известный под названием *прибора Обри* и предназначен-



ный для обеспечения заданного направления движущейся в воде торпеды. Оказалось, что забавная детская игрушка — волчок — способна сеять на Земле смерть, уничтожать человеческие жизни.

В настоящее время гироскопы играют большую роль в исследовании космического пространства, где используются при выводе на орбиту космических кораблей, стабилизации искусственных спутников Земли, при полетах космических аппаратов к Марсу, Венере, Луне. Гироскопы используются на кораблях для стабилизации различных сложных при-



### Загадки волчка

На фотографиях вы видите особенный волчок, за которым с одинаковым интересом наблюдают и те, для кого он предназначен, — дети, и два великих физика — Нильс Бор и Вольфганг Паули. Кажется, даже их озадачила эта детская игрушка, которая носит имя великого физика, — волчок Томсона.

Что же в нем интересного? А то, что, запущенный, он кувыркается, постепенно ложится на бок, переворачивается, встает на ножку и продолжает вертеться на ней. Для человека, не знакомого с теорией волчка, это так же необъяснимо, как если бы стол в его комнате вдруг сам собой перевернулся ножками вверх. Ведь, казалось бы, на шарообразной головке волчку стоять легче и удобнее, чем на тоненькой ножке.

Столь необычное поведение волчка было бы нетрудно объяснить на языке формул. Но мы не станем этого делать. Мы лишь напомним про описанный в нашей статье «спящий» волчок, ножка которого также заканчивается сферической поверхностью. Если запустить его наклонно, ось сама собой приблизится к вертикали, т. е. центр

тяжести «спящего» волчка стремится занять самое высокое положение.

У волчка Томсона верхушка шарика срезана, центр тяжести волчка поэтому расположен ниже геометрического центра шарика. При любом отклонении волчка от вертикали его центр тяжести поднимается, что хорошо видно на рисунке. А самое высокое положение центр тяжести волчка Томсона занимает, когда волчок переворачивается на ножку.

Применение теории волчка не ограничивается гироскопами и детскими игрушками. Наша Земля — это гигантский волчок, который, как и все волчки, обладает прецессией и нутацией. Планеты, Солнце и звезды тоже волчки. Похоже на волчок и вращение электрона вокруг своей оси (спин) и вокруг ядра атома, и вращение самого ядра атома. Без анализа этих движений, кстати говоря, также обладающих прецессией, невозможны современная теория магнетизма, теория металлов и полупроводников, да и вообще вся современная физика.