1979

ий в окрестности ребра
некоторые приложения к
. . . . 103
равновесии неоднород-
. . . . 111
. Численное моделиро-
чи для упругого слоя
. . . . 119
индтля о одавливании
. . . . 127
адачи теории пластин-
. . . . 139
оболочки отрицатель-
мента волновой пере-
. . . . 144
оптимизации эффек-
их и предварительно
. . . . 150
низация собственных
тержней 162
енщины гидроразрыва
. . . . 169

Нейбенлона (К сто-
. . . . 179
. . . . 186
. . . . 187
двигателей 189
к движений механи-
. . . . 192

: 434-35-38

МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1979

УДК 531.38

МЕТОД БАЛАНСИРОВКИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ НА СТРУННОМ ПРИВОДЕ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, С. В. МАЛАШЕНКО, В. А. СТОРОЖЕНКО, М. Е. ТЕМЧЕНКО, П. Г. ШИШКИН

(Москва, Киев)

Изучается движение подвешенного на струне твердого тела произвольной конфигурации в предположении, что точка крепления его к струне не лежит ни на одной из главных центральных осей инерции.

Получены уравнения стационарных движений тела и проведено их исследование. Приводится описание экспериментальной установки, иллюстрирующей принципиальную возможность динамической балансировки быстровращающихся тел (в частности роторов турбин) на струнном приводе. Производится сопоставление теоретических и экспериментальных данных.

Известно, что при конструировании и изготовлении различного рода машин, составными частями которых являются быстровращающиеся тела (например маховые колеса, роторы турбин), нельзя обойтись без как можно более точного их центрирования, т. е. совмещения центра масс тел с осями их вращения. Один из существующих до сих пор методов центрирования, по-видимому, впервые предложил в 1884 г. шведский инженер Лаваль, использовав замечательное свойство самоцентрирования тел при их быстром вращении. Он насадил рабочее колесо турбины на тонкий и гибкий вал. Оказалось, что центр масс колеса, который из-за технологических несовершенств изготовления не совпадал с его геометрическим центром, при вращении с большой угловой скоростью приближался к оси вращения. Теоретическое обоснование использованного Лавалем явления, нашедшего впоследствии применение в технике, было осуществлено Фепплем в 1895 г. [1].

Одним из авторов предлагаемой статьи (С. В. Малашенко) был поставлен следующий эксперимент. Твердое тело подвешивалось на струне и затем ему сообщалось быстрое вращение. Оказалось, что при большой угловой скорости существовало стационарное движение, при котором одна из его главных центральных осей инерции занимала положение, практически совпадающее с вертикалью, проходящей через неподвижную точку O_1 (фиг. 1, *а*). Наблюдение за этим стационарным движением дало возможность С. В. Малашенко высказать идею (близкую к упомянутой ранее идее самоцентрирования) динамической балансировки на струнном приводе, описанной в [2], быстровращающихся твердых тел, в том числе и изделий, уникальных по весу и габаритам, балансировка которых на существующих балансировочных стендах затруднена.

Для подтверждения и обоснования этой идеи возникла необходимость теоретического и экспериментального исследования движения на струнном приводе твердого тела произвольной конфигурации, у которого точка подвеса к струне не лежит ни на одной из главных осей инерции тела [1]. Описанное ниже является лишь одним из этапов проверки возможности применения струнного привода для нужд балансировочной техники. Вопросы современной измерительной техники и традиционные методы уравновешивания, применяемые на существующих балансировочных стендах, здесь не анализируются. В экспериментах применены простейшие средства измерений.

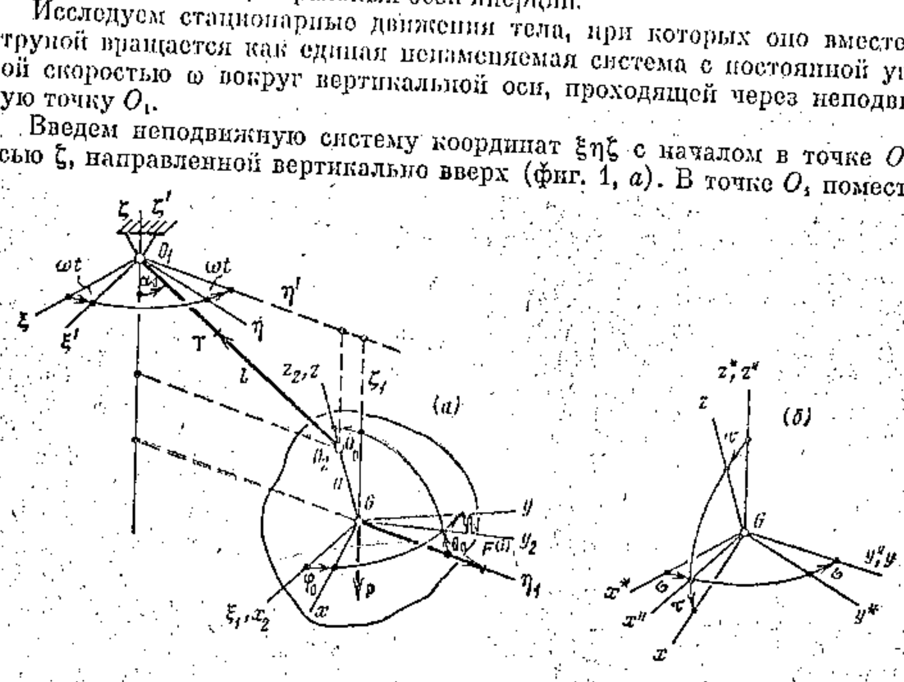
1. Теоретическое рассмотрение вопроса произведем в следующей постановке.

[1] Проведенные исследования частично докладывались на III Всесоюзной Четаевской конференции по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением (Иркутск, июнь 1977 г.).

Пусть произвольное тяжелое твердое тело массы m подвешено на струне длины l, верхний конец которой укреплен в неподвижной точке O_1 (фиг. 1, a). Предполагается, что струна лишена массы, абсолютно гибкая и нерастяжимая. Точка O_2 — подвеса тела к струне — не лежит ни на одной из его главных центральных осей инерции.

Исследуем стационарные движения тела, при которых оно вместе со струной вращается как единая неизменяемая система с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через неподвижную точку O_1.

Введем неподвижную систему координат $\xi\eta\zeta$ с началом в точке O_1 и осью ζ, направленной вертикально вверх (фиг. 1, a). В точке O_1 поместим



Фиг. 1

также начало системы координат $\xi'\eta'\zeta'$, ось ζ' которой совпадает с неподвижной осью ζ. Будем считать, что система $\xi'\eta'\zeta'$ вращается относительно системы $\xi\eta\zeta$ с упомянутой выше угловой скоростью ω.

В центре масс тела (точке G) разместим начала трех следующих систем координат: системы $\xi_1\eta_1\zeta_1$, оси которой параллельны соответствующим осям вращающейся системы $\xi'\eta'\zeta'$; жестко с телом связанной системы $x^*y^*z^*$ с осями, являющимися его главными осями инерции, и, наконец, начало системы xyz. Последняя также неизменно связана с телом; ее ось z проходит через точку O_2, а ось y расположена в плоскости x^*y^* (фиг. 1, $б$).

Найдем условия, при выполнении которых тело будет находиться в положении относительного равновесия по отношению к вращающейся с угловой скоростью ω системе координат $\xi'\eta'\zeta'$.

Пренебрегая влиянием среды, можно принять, что на тело действуют струна с силой T, направленной вдоль ее длины, и сила тяжести $\mathbf{P}=m\mathbf{g}$.

Без уменьшения общности будем считать, что центр масс тела G находится в плоскости $\eta'\zeta'$. Обозначим его координаты в системе $\xi'\eta'\zeta'$ соответственно через $\xi_G'=0$, η_G', ζ_G'.

При вращении тела с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси главный вектор его элементарных даламберовых сил инерции перпендикулярен оси вращения и выражается формулой [3]:

$$\mathbf{F}^{(i)}=-m\mathbf{w}_G'=-m[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_G)]=-m[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}_G)-\mathbf{r}_G\omega^2] \qquad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{w}_G$, $\mathbf{r}_G$ — соответственно ускорение центра масс тела G и радиус-вектор этой точки.

Из равенства (1.1) следует, что вектор $\mathbf{F}^{(i)}$ находится в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}_G$, т. е. в вертикальной плоскости $\eta'\zeta'$ (фиг. 1, *а*); очевидно, что в этой же плоскости находится и вектор силы тяжести $\mathbf{P}$. В соответствии с принципом Даламбера сумма векторов $\mathbf{F}^{(i)}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{T}$ равна нулю. Следовательно, вектор силы $\mathbf{T}$ — воздействия на тело струны — также расположен в плоскости $\eta'\zeta'$. Таким образом, при стационарном движении тела неподвижная точка O_1, точка крепления тела к струне O_2 и центр масс тела G должны постоянно находиться в одной и той же плоскости $\eta'\zeta'$. Принимая это во внимание, можно проекции на оси системы $\xi'\eta'\zeta'$ главного вектора $\mathbf{F}$ и главного момента действующих на тело внешних сил $\mathbf{M}$ представить в виде

$$F_{\xi'}=0,\quad F_{\eta'}=-T\sin\alpha_0,\quad F_{\zeta'}=T\cos\alpha_0-mg$$
$$M_{\xi'}^{O_1}=-mg\eta_G',\quad M_{\eta'}^{O_1}=mg\xi_G',\quad M_{\zeta'}^{O_1}=0 \tag{1.2}$$

где α_0 — угол, определяющий отклонение струны от вертикали (фиг. 1, *а*).

Радиус-вектор центра масс тела $\mathbf{r}_G$, как уже упоминалось, лежит в плоскости $\eta'\zeta'$, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ постоянен и направлен вдоль вертикальной оси $\zeta'(\zeta)$. Учитывая это, а также равенство (1.1), определим проекции главного вектора даламберовых сил инерции $\mathbf{F}^{(i)}$ на оси системы координат $\xi'\eta'\zeta'$. Имеем

$$F_{\xi'}^{(i)}=0,\quad F_{\eta'}^{(i)}=m\omega^2\eta_G',\quad F_{\zeta'}^{(i)}=0 \tag{1.3}$$

Выберем в качестве полюса неподвижную точку O_1. Для проекций главного момента элементарных даламберовых сил инерции тела получим в этом случае, согласно известным формулам динамики [3], выражения

$$M_{\xi'}^{(i)}=-I_{\eta'\zeta'}\omega^2,\quad M_{\eta'}^{(i)}=I_{\xi'\zeta'}\omega^2,\quad M_{\zeta'}^{(i)}=0 \tag{1.4}$$

Здесь $I_{\eta'\zeta'}$, $I_{\xi'\zeta'}$ — центробежные моменты инерции тела в системе координат $\xi'\eta'\zeta'$.

Имеем далее [3]:

$$I_{\eta'\zeta'}=I_{\eta_1\zeta_1}+m\eta_G'\zeta_G',\quad I_{\xi'\zeta'}=I_{\xi_1\zeta_1}+m\xi_G'\zeta_G' \tag{1.5}$$

где $I_{\eta_1\zeta_1}$, $I_{\xi_1\zeta_1}$ — центробежные моменты инерции тела уже в системе $\xi_1\eta_1\zeta_1$.

Обозначим через A, B, C главные центральные моменты инерции тела, т. е. моменты инерции относительно осей x^*, y^*, z^*. Выразим через них центробежные моменты $I_{\eta_1\zeta_1}$, $I_{\xi_1\zeta_1}$. Имеем [3]:

$$I_{\eta_1\zeta_1}=A\cos(x^*,\eta_1)\cos(x^*,\zeta_1)+B\cos(y^*,\eta_1)\cos(y^*,\zeta_1)+$$
$$+C\cos(z^*,\eta_1)\cos(z^*,\zeta_1)$$
$$I_{\xi_1\zeta_1}=A\cos(x^*,\xi_1)\cos(x^*,\zeta_1)+B\cos(y^*,\xi_1)\cos(y^*,\zeta_1)+ \tag{1.6}$$
$$+C\cos(z^*,\xi_1)\cos(z^*,\zeta_1)$$

Выражения (1.6) преобразуем к более удобному виду, воспользовавшись известными соотношениями аналитической геометрии, согласно которым

$$\cos(\eta_1\zeta_1)=\cos(x^*,\eta_1)\cos(x^*,\zeta_1)+\cos(y^*,\eta_1)\cos(y^*,\zeta_1)+$$
$$+\cos(z^*,\eta_1)\cos(z^*,\zeta_1)=0$$
$$\cos(\xi_1\zeta_1)=\cos(x^*,\xi_1)\cos(x^*,\zeta_1)+\cos(y^*,\xi_1)\cos(y^*,\zeta_1)+ \tag{1.7}$$

$$+\cos(z^*, \xi_1)\cos(z^*, \zeta_1)=0$$

В результате получим

$$I_{\eta_1\zeta_1}=(A-B)\cos(x^*, \eta_1)\cos(x^*, \zeta_1)+(C-B)\cos(z^*, \eta_1)\cos(z^*, \zeta_1)$$
$$I_{\xi_1\zeta_1}=(A-B)\cos(x^*, \xi_1)\cos(x^*, \zeta_1)+(C-B)\cos(z^*, \xi_1)\cos(z^*, \zeta_1) \tag{1.8}$$

Учитывая формулы (1.2) – (1.5) и (1.8), в силу принципа Даламбера имеем

$$-T\sin\alpha_0+m\omega^2\eta_G'=0,\quad T\cos\alpha_0-mg=0$$
$$-[(A-B)\cos(x^*, \eta_1)\cos(x^*, \zeta_1)+(C-B)\cos(z^*, \eta_1)\cos(z^*, \zeta_1)]\omega^2+$$
$$+m\omega^2\eta_G'\zeta_G'-mg\eta_G'=0 \tag{1.9}$$
$$[(A-B)\cos(x^*, \xi_1)\cos(x^*, \zeta_1)+(C-B)\cos(z^*, \xi_1)\cos(z^*, \zeta_1)]\omega^2+$$
$$+m\omega^2\xi_G'\zeta_G'+mg\xi_G'=0$$

2. Как следует из изложенного выше, ось z, жестко связанная с телом, лежит в плоскости $\eta'\zeta'$. Поэтому положение тела по отношению к системе $\xi'\eta'\zeta'$ (или, что то же, к системе $\xi_1\eta_1\zeta_1$) определяется двумя углами: θ_0 – между осью z и вертикалью $\zeta_1(\zeta)$ и φ_0 – между осью $\xi_1(x_2)$ и осью x. Из фиг. 1, *а* имеем

$$\xi_G'=0,\quad \eta_G'=l\sin\alpha_0+a\sin\theta_0,\quad \zeta_G'=-l\cos\alpha_0-a\cos\theta_0 \tag{2.1}$$

где a – расстояние от центра масс G до точки O_2 – крепления тела к струне.

Исключим из первых двух равенств (1.9) силу T. После использования выражений (2.1) получим соотношения

$$(\sin\alpha_0+\varkappa\sin\theta_0)\cos\alpha_0-\nu\sin\alpha_0=0$$
$$(A-B)\cos(x^*, \eta_1)\cos(x^*, \zeta_1)+(C-B)\cos(z^*, \eta_1)\cos(z^*, \zeta_1)-$$
$$-ml^2(\sin\alpha_0+\varkappa\sin\theta_0)(\cos\alpha_0+\varkappa\cos\theta_0)+ml^2\nu(\sin\alpha_0+\varkappa\sin\theta_0)=0 \tag{2.2}$$
$$(A-B)\cos(x^*, \xi_1)\cos(x^*, \zeta_1)+(C-B)\cos(z^*, \xi_1)\cos(z^*, \zeta_1)=0$$

в которых безразмерные параметры ν и $\varkappa$ выражаются формулами

$$\nu=g/\omega^2l,\quad \varkappa=a/l \tag{2.3}$$

Введем два угла σ и τ (фиг. 1, *б*), характеризующих взаимное расположение связанных неизменно с телом систем координат $x^*y^*z^*$ и xyz. Будем предполагать, что эти углы находятся в пределах $(0, \pi/2)$. Заметим, что этого можно всегда достичь при соответствующем выборе наименования осей x^*, y^*, z^*.

Определим через σ и τ, а также θ_0 и φ_0 косинусы углов между осями систем координат $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $x^*y^*z^*$. В результате, используя фиг. 1, получим следующую таблицу косинусов:

(2.4)

	ξ_1	η_1	ζ_1
x^*	$\cos\varphi_0\cos\sigma\cos\tau+$ $+\sin\varphi_0\sin\sigma$	$\cos\sigma(\sin\varphi_0\cos\theta_0\cos\tau-$ $-\sin\theta_0\sin\tau)-$ $-\cos\varphi_0\cos\theta_0\sin\sigma$	$\cos\sigma(\sin\varphi_0\sin\theta_0\cos\tau+$ $+\cos\theta_0\sin\tau)-$ $-\cos\varphi_0\sin\theta_0\sin\sigma$
y^*	$\cos\varphi_0\sin\sigma\cos\tau-$ $-\sin\varphi_0\cos\sigma$	$\sin\sigma(\sin\varphi_0\cos\theta_0\cos\tau-$ $-\sin\theta_0\sin\tau)+$ $+\cos\varphi_0\cos\theta_0\cos\sigma$	$\sin\sigma(\sin\varphi_0\sin\theta_0\cos\tau+$ $+\cos\theta_0\sin\tau)+$ $+\cos\varphi_0\sin\theta_0\cos\sigma$
z^*	$-\cos\varphi_0\sin\tau$	$-\sin\varphi_0\cos\theta_0\sin\tau-$ $-\sin\theta_0\cos\tau$	$-\sin\varphi_0\sin\theta_0\sin\tau+$ $+\cos\theta_0\cos\tau$

Подставим значения соответствующих косинусов углов из таблицы (2.4) в соотношения (2.2). Имеем

$$
\begin{gathered}
(\sin\alpha_0+\varkappa\sin\theta_0)\cos\alpha_0-\nu\sin\alpha_0=0\\
(A-B)\,[\cos\sigma(\sin\varphi_0\cos\theta_0\cos\tau-\sin\theta_0\sin\tau)-\cos\varphi_0\cos\theta_0\sin\sigma]\times\\
\times[\cos\sigma(\sin\varphi_0\sin\theta_0\cos\tau+\cos\theta_0\sin\tau)-\cos\varphi_0\sin\theta_0\sin\sigma]+\\
+(C-B)\,[\sin\varphi_0\cos\theta_0\sin\tau+\sin\theta_0\cos\tau]\,[\sin\varphi_0\sin\theta_0\sin\tau-\cos\theta_0\cos\tau]-\\
-ml^2(\sin\alpha_0+\varkappa\sin\theta_0)(\cos\alpha_0+\varkappa\cos\theta_0)+ml^2\nu(\sin\alpha_0+\varkappa\sin\theta_0)=0\\
(A-B)\,(\cos\varphi_0\cos\sigma\cos\tau+\sin\varphi_0\sin\sigma)\,[\cos\sigma(\sin\varphi_0\sin\theta_0\cos\tau+\\
+\cos\theta_0\sin\tau)-\cos\varphi_0\sin\theta_0\sin\sigma]+\\
+(C-B)\cos\varphi_0\sin\tau[\sin\varphi_0\sin\theta_0\sin\tau-\cos\theta_0\cos\tau]=0
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

Полученные уравнения позволяют по заданным значениям величин A, B, C, ν, $\varkappa$, m, l, σ и τ определять искомые углы α_0, θ_0, φ_0, характеризующие положение тела в его стационарном движении.

Условия (2.5) значительно упрощаются, если предположить, что исследуемое тело обладает осевой симметрией, т. е. считать $A=B$. В этом случае уравнения (2.5) приводятся к виду

$$
\begin{gathered}
\cos\alpha_0(\sin\alpha_0+\varkappa\sin\theta_0)-\nu\sin\alpha_0=0\\
(A-C)\,(-\sin\varphi_0\cos\theta_0\sin\tau-\sin\theta_0\cos\tau)\,(\sin\varphi_0\sin\theta_0\sin\tau-\cos\theta_0\cos\tau)+\\
+ml^2\nu(\sin\alpha_0+\varkappa\sin\theta_0)-mg(l\cos\alpha_0+a\cos\theta_0)=0\\
(A-C)\cos\varphi_0\cos\tau(\sin\varphi_0\sin\theta_0\sin\tau-\cos\theta_0\cos\tau)=0
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

3. При неограниченном возрастании угловой скорости ω стационарного движения тела или, что то же, при $\nu\to 0$ уравнения (2.2) преобразуются к следующим:

$$
\begin{gathered}
\sin\alpha_0=-\varkappa\sin\theta_0\\
(A-B)\cos(x^*,\eta_1)\cos(x^*,\zeta_1)+(C-B)\cos(z^*,\eta_1)\cos(z^*,\zeta_1)=0\\
(A-B)\cos(x^*,\xi_1)\cos(x^*,\zeta_1)+(C-B)\cos(z^*,\xi_1)\cos(z^*,\zeta_1)=0
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Рассмотрим последние два. Исключая из этих уравнений разности $A-B$ и $C-B$ (в предположении, что они отличны от нуля), получим соотношение

$$
\begin{gathered}
\cos(x^*,\zeta_1)\cos(z^*,\zeta_1)\,[\cos(x^*,\eta_1)\cos(z^*,\xi_1)-\\
-\cos(x^*,\xi_1)\cos(z^*,\eta_1)\,]=0
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках последнего соотношения. С этой целью воспользуемся известными зависимостями между косинусами углов двух систем координат, в частности $\xi_1\eta_1\zeta_1$ и $x^*y^*z^*$:

$$
\begin{gathered}
\cos(y^*,\xi_1)\cos(y^*,\xi_1)+\cos(y^*,\eta_1)\cos(y^*,\eta_1)+\\
+\cos(y^*,\zeta_1)\cos(y^*,\zeta_1)=1\\
\cos(y^*,\xi_1)\cos(x^*,\xi_1)+\cos(y^*,\eta_1)\cos(x^*,\eta_1)+\\
+\cos(y^*,\zeta_1)\cos(x^*,\zeta_1)=0\\
\cos(y^*,\xi_1)\cos(z^*,\xi_1)+\cos(y^*,\eta_1)\cos(z^*,\eta_1)+
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

$$+\cos(y^*, \zeta_1)\cos(z^*, \zeta_1)=0$$

Определяя из этих равенств величину $\cos(y^*, \zeta_1)$, убеждаемся, что она равна упомянутому ранее выражению в квадратных скобках соотношения (3.2), именно

$$\cos(x^*, \eta_1)\cos(z^*, \xi_1)-\cos(x^*, \xi_1)\cos(z^*, \eta_1)=\cos(y^*, \zeta_1) \qquad (3.4)$$

Если учесть равенство (3.4), то получим следующее важное условие:

$$\cos(x^*, \zeta_1)\cos(y^*, \zeta_1)\cos(z^*, \zeta_1)=0 \qquad (3.5)$$

из которого следует, что при стационарном движении тела в предельном случае при $\omega\to\infty$ по крайней мере одна из его главных центральных осей инерции стремится занять положение, перпендикулярное вертикали.

Пусть $\cos(x^*, \zeta_1)=0$. Тогда, согласно уравнениям (3.1), либо $\cos(z^*, \eta_1)=0$, $\cos(z^*, \xi_1)=0$ и ось z^* совпадает с ζ_1, либо $\cos(z^*, \zeta_1)=0$ и тогда с осью ζ_1 совпадает ось y^*.

Рассмотрение других случаев, именно $\cos(y^*, \zeta_1)=0$ и $\cos(z^*, \zeta_1)=0$, также вытекающих из условия (3.5), показывает, что и здесь одна из главных центральных осей инерции тела x^*, y^*, z^* совпадает с вертикалью ζ_1.

Согласно второй формуле (2.3) и второму равенству (2.1), из первого уравнения (3.1) следует, что координата η_G' центра масс тела равна нулю. Тогда, принимая во внимание и первое равенство (2.1), убеждаемся, что в рассматриваемом случае центр масс тела (точка G) находится на неподвижной вертикали $\zeta(\zeta')$.

Таким образом, при неограниченно больших значениях угловой скорости вращения подвешенного на струне твердого тела предельному его стационарному движению соответствует вращение тела вокруг главных центральных осей инерции. В случае же, когда угловая скорость ω конечна, но столь велика, что члены, содержащие величину $\nu=g/\omega^2 l$ в уравнениях (2.2), оказывают малое влияние на характер движения тела, стационарные его движения будут близки к указанным выше предельным движениям.

4. Определим углы θ_0^*, φ_0^*, α_0^*, характеризующие положение тела в его предельном стационарном движении, в случае, когда при $\omega\to\infty$ $(\nu\to 0)$ ось z^* совпадает с вертикалью ζ_1. Тогда, используя таблицу (2.4), будем иметь

$$\cos(z^*, \zeta_1)=-\cos\varphi_0\sin\tau=0,\quad \cos(z^*, \eta_1)=$$
$$=-\sin\varphi_0\cos\theta_0\sin\tau-\sin\theta_0\cos\tau=0 \qquad (4.1)$$

Если угол α изменяется в интервале $(0, \pi/2)$, то одновременное выполнение условий (4.1) и первого из уравнений (3.1) возможно при $\tau\neq 0$ лишь при значениях углов θ_0, φ_0 и α_0, определяемых равенствами

$$\theta_0^*=-\tau,\quad \varphi_0^*=\pi/2,\quad \sin\alpha_0^*=\varkappa\sin\tau \qquad (4.2)$$

Пусть угловая скорость ω имеет большие, но конечные значения. Тогда углы α_0, θ_0, φ_0, характеризующие положение твердого тела в его стационарном движении, будут мало отличаться от их предельных значений α_0^*, θ_0^*, φ_0^*:

$$\alpha_0=\alpha_0^*+\Delta\alpha,\quad \theta_0=\theta_0^*+\Delta\theta,\quad \varphi_0=\varphi_0^*+\Delta\varphi \qquad (4.3)$$

Подставим выражения (4.3) в уравнения (2.5). Учитывая равенства (4.2) и ограничиваясь малыми первого порядка относительно приращений $\Delta\alpha$, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$, получим следующие уравнения для их определения:

$$(1-\varkappa^2\sin^2\tau)\Delta\alpha+\varkappa\cos\tau\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\tau}\,\Delta\theta=\nu\varkappa\sin\tau \qquad (4.4)$$

$$-ml^2\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\tau}\,(\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\tau}+\varkappa\cos\tau)\,\Delta\alpha+[\,(A-B)\cos^2\sigma-$$
$$-(C-B)-ml^2\varkappa\cos\tau\,(\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\tau}+\varkappa\cos\tau)\,]\,\Delta\theta-$$
$$-(A-B)\sin\sigma\cos\sigma\sin\tau\Delta\varphi=0$$
$$(A-B)\sin\sigma\cos\sigma\Delta\theta+[\,(C-B)\sin\tau-(A-B)\sin^2\sigma\sin\tau\,]\,\Delta\varphi=0$$

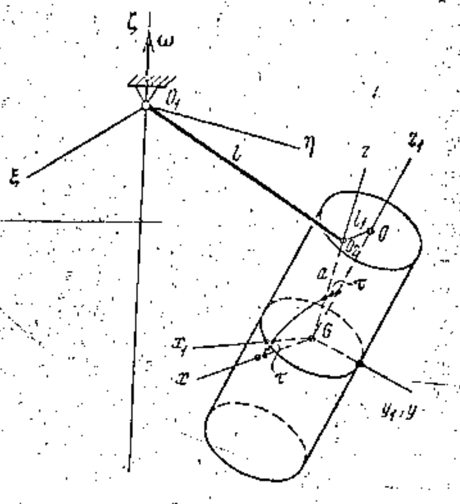
Решая совокупность уравнений (4.4) относительно переменных $\Delta\alpha$, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$, находим

$$\Delta\alpha=\left[\frac{\nu}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\tau}}+\cos\tau R(\sigma,\tau)\right]\frac{\varkappa\sin\tau}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\tau}}$$
$$\Delta\theta=-R(\sigma,\ \tau)\sin\tau \tag{4.5}$$
$$\Delta\varphi=-\frac{ml^2\varkappa\nu(A-B)}{(A-C)\,(C-B)}\left[1+\frac{\varkappa\cos\tau}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\tau}}\right]\cos\sigma\sin\sigma$$

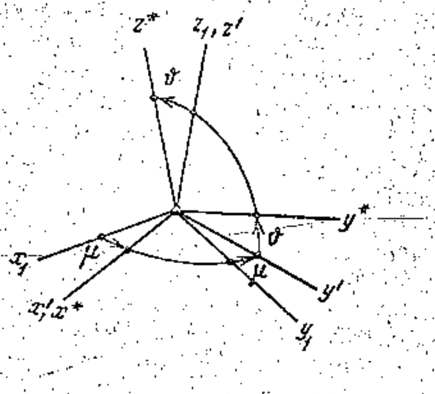
$$R(\sigma,\tau)=ml^2\nu\varkappa\left[1+\frac{\varkappa\cos\tau}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\tau}}\right]\left(\frac{\sin^2\sigma}{C-B}-\frac{\cos^2\sigma}{A-C}\right) \tag{4.6}$$

Выражения (4.5) и (4.6) позволяют по известным значениям $\nu=g/\omega^2l$, $\varkappa=a/l$, A, B, C, σ, τ определить в первом приближении, насколько стационарное движение тела близко к предельному, при котором его главная центральная ось инерции совпадает с вертикалью ζ, проходящей через неподвижную точку O_1.

5. Рассмотрим конкретные примеры, которые могут представлять интерес для практических приложений, в частности при разработке излагаемого ниже метода балансировки быстровращающихся тел.



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть тело обладает осевой симметрией и точка O_2 — крепления его к струне — не лежит на оси динамической симметрии z_1 (фиг. 2). Определим, насколько отклоняется эта ось от вертикали ζ, если при стационарном движении тела угловая скорость ω имеет конечное значение. Согласно изложенному выше, это отклонение определяется вторым соотношением (4.5). После незначительных преобразований, использования фиг. 2, равенств (2.3) и (4.6) оно приводится к виду

$$\Delta\theta=\frac{mgl_1}{\omega^2(A-C)}[1+(a^2-l_1^2)^{1/2}(l^2-l_1^2)^{-1/2}] \tag{5.1}$$

Таблица 1

№№	n, об/мин	ω, с$^{-1}$	$\Delta\theta$, дуг.с	$\Delta\theta^*$, дуг.с	№№	n, об/мин	ω, с$^{-1}$	$\Delta\theta$, дуг.с	$\Delta\theta^*$, дуг.с
1	1245	130.42	80.19	82.71	6	2921	305.94	14.57	14.64
2	1432	149.95	60.66	62.08	7	3444	360.66	10.49	10.52
3	1745	182.78	40.82	41.46	8	4270	447.14	6.82	6.39
4	1960	205.25	32.38	33.04	9	6830	715.2	2.67	2.26
5	2453	256.83	20.67	20.83	10	14584	1527.22	0.58	0.20

Здесь, кроме обозначений, уже упоминавшихся ранее, l_1 — расстояние от точки O_2 до точки пересечения оси динамической симметрии тела z_1 с плоскостью, перпендикулярной этой оси и содержащей точку O_2 (фиг. 2).

Из формулы (5.1) непосредственно следует, что приращение $\Delta\theta$ обратно пропорционально квадрату угловой скорости ω; при увеличении длины струны l оно монотонно убывает, стремясь в пределе при $l\to\infty$ к величине $mgl_1/\omega^2(A-C)$.

Для осесимметричного тела, имеющего параметры $A/m=76.969$ см^2, $C/m=14.675$ см^2, $P=mg=19.75$ *кГ*, $l=60$ см, $l_1=0.3$ см, $(a^2-l_1^2)^{1/2}=23$ см, $\omega=(\pi n/30)$ с$^{-1}$, по формуле (5.1) было подсчитано приращение $\Delta\theta$ для различных значений n — чисел оборотов его вращения. Результаты вычислений и значения $\Delta\theta^*$, подсчитанные для тела с приведенными выше параметрами посредством решения системы уравнений (2.6), приведены в табл. 1. Оказывается, что при скорости вращения, соответствующей 1960 об/мин, отклонение $\Delta\theta$ близко к половине дуговой минуты. Это означает, что уже при этих числах оборотов ось динамической симметрии тела практически совпадает с неподвижной вертикалью ζ, несмотря на то, что точка крепления тела к струне не лежит на этой оси.

Анализируя данные, приведенные в табл. 1, можно сделать вывод о том, что приращения $\Delta\theta$, подсчитанные по приближенной формуле (5.1), мало отличаются от соответствующих значений $\Delta\theta^*$, полученных посредством точного решения совокупности уравнений (2.6).

6. Исследуем теперь поведение вращающегося осесимметричного твердого тела при наличии дополнительных малых масс, нарушающих его балансировку. С этой целью рассмотрим модель, состоящую из соосных прямых круговых цилиндров. На поверхностях цилиндров имеются отверстия (пазы), в которые можно устанавливать дополнительные грузики и тем самым по мере необходимости изменять моменты инерции тела и расположение его главных центральных осей инерции.

В центре масс тела (точке G) поместим начало системы координат $x_1y_1z_1$, ось z_1 которой направим по оси симметрии тела, ось y_1 расположим таким образом, чтобы плоскость y_1z_1 содержала точку M_1 с координатами 0, b_1, c. Для упрощения последующих расчетов примем, что точка O_2 (точка крепления тела к струне) лежит на оси z_1.

Определим введенные выше приращения $\Delta\alpha$, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$ при достаточно быстром вращении тела, если в пазах цилиндров размещать дополнительные грузики. Будем предполагать при этом, что грузики обладают одинаковой массой, которую обозначим через m_1. Рассмотрим четыре варианта расположения грузиков, именно:

I. Два грузика расположены в точках $M_1(0,\ b_1,\ c)$ и $M_3(0,\ -b_1,\ -c)$, симметричных относительно центра масс тела G.

II. Единственный грузик с центром масс в точке M_1.

III. Два грузика, находящихся в точках M_1 и $M_2(0,\ b_1,\ -c)$, симметричных относительно срединной плоскости тела.

Таблица 2

$\Delta\alpha$, дуг.с	$\Delta\theta$, дуг.с	$\Delta\varphi$, дуг.с	μ, рад	ϑ, рад	x_G, см	y_G, см	z_G, см
−0,2468	0,6367	$0{,}2965\cdot10^{-7}$	0	$-0{,}2458\cdot10^{-3}$	0	0	0
−0,1234	0,4415	$0{,}1483\cdot10^{-7}$	0	$-0{,}1228\cdot10^{-3}$	0	0,001094	0,001418
−0,0548	0,2383	$0{,}2064\cdot10^{-7}$	0	0	0	0,002187	0
0,1745	0,4776	$0{,}1379\cdot10^{-5}$	0,7854	$-0{,}1738\cdot10^{-3}$	0,001093	0,001093	0

IV. Два грузика, расположенных в точках M_3 и $M_4(b_1,\ 0,\ c)$, равноудаленных от срединной плоскости тела и находящихся в различных координатных плоскостях.

Для всех вариантов только что приведенных механических систем «твердое тело+грузики» были найдены главные центральные моменты инерции A, B, C, а также углы μ, ϑ, σ, τ, характеризующие расположение главных центральных осей инерции тела $x^*y^*z^*$ соответственно относительно систем координат $x_1y_1z_1$ (фиг. 3) и xyz (фиг. 1, *б*).

Для параметров осесимметричного тела, приведенных в п. 5, при весе грузиков, равном 4Γ, и значениях координат $b_1=5.4$ см, $c=7$ см по формулам (4.5) и (4.6) были вычислены искомые приращения углов $\Delta\alpha$, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$. При этом число оборотов тела с грузиками при расчетах принималось равным 1960 об/мин [1]. Результаты вычислений приведены в табл. 2, где содержатся необходимые для дальнейших расчетов величины углов μ, ϑ, а также значения координат центров масс x_G, y_G, z_G.

7. Перейдем к изложению экспериментальных исследований по разработке метода динамической балансировки быстровращающихся тел (в частности роторов турбин) при использовании струнного привода.

Известно, что из-за технологических несовершенств изготовления оси цапф ротора турбины обычно не совпадают с его главной центральной осью инерции. Необходима тщательная балансировка ротора, так как в противном случае турбина выходит из строя. При этом под динамической балансировкой в данном случае понимается процесс совмещения с заданной точностью осей опорных цапф ротора с его главной центральной осью инерции за счет перераспределения масс на специально для этого выделенных местах тела ротора [4].

Принципиальная схема установки изображена на фиг. 4. Модель ротора турбины *1* шарнирно подвешена к струне *2*, которая также шарнирно закреплена на валу электродвигателя *12*, от которого модель через струну приводится во вращение.

На нижнем конце модели закреплен тонкий стержень, соединяющий ее с успокоителем поперечных колебаний *3*, условно изображенным в виде ванны с жидкостью. Успокоитель практически не оказывает сопротивления вращению и не мешает малым по амплитуде колебаниям, возникающим при вращении несбалансированной модели. Он необходим лишь на переходном режиме разгона или торможения модели, а при стационарном ее движении может отключаться.

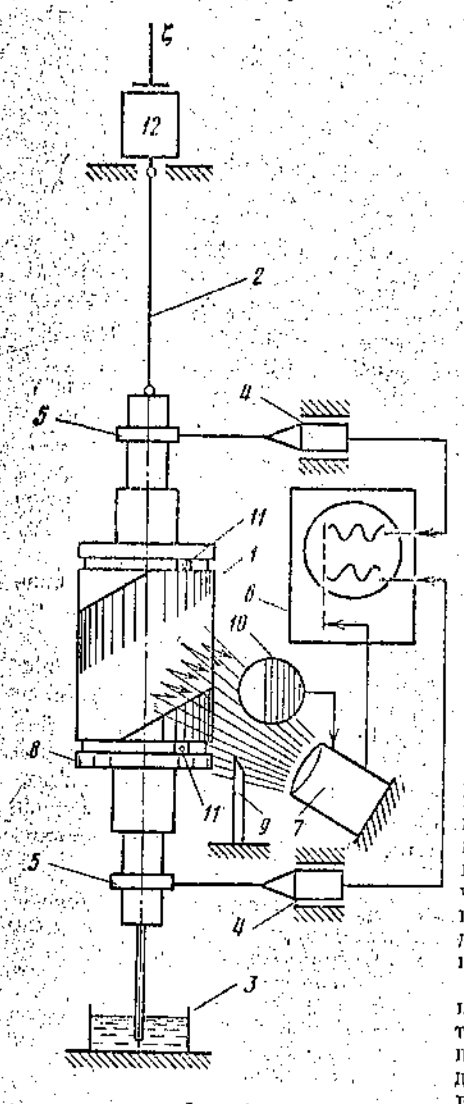
На испытательном стенде установлены магнитоэлектрические датчики *4*. Их статоры посредством эластичных прокладок прикреплены к основанию стенда. Катушки датчиков соединены легкими траверсами с кольцами *5*, свободно сидящими на обеих цапфах модели.

На поверхность нижнего цилиндра модели (фиг. 4) нанесена шкала *8*. Рядом с ней на основании стенда расположен неподвижный стержень (ориентир *9*) так, что его ось, неподвижная вертикаль ζ и оси датчиков *4* лежат в одной плоскости.

На основании стенда установлен стробоскоп *7*, который освещает шкалу *8* и ориентир *9*. Частота вспышек стробоскопа регулируется так, чтобы изображение шкалы *8*, а следовательно и модели, в свете стробоскопа было неподвижным. В моменты вспышек на вход синхронизации развертки осциллоскопа *6* подаются электрические импульсы, запускающие развертку. Нестабильность работы стробоскопа устраняется синхронизацией его вспышек с угловым положением модели. Для этого на поверхность модели нанесен оптический клин (фиг. 4), попадающий в зону стро-

[1] Именно при таком числе оборотов проводились описанные ниже эксперименты.

боскопического освещения. Свет, отраженный клином, воспринимается фотоэлементом *10*, включенным в схему запуска стробоскопа. Рабочая граница оптического клина представляет собой винтовую линию, нанесённую на цилиндрическую поверхность модели. Ниже этой линии поверхность зачерчена, выше – окрашена белой краской. Если в момент вспышки модель не занимает заданного положения, то за счет изменения положения рабочей границы клина относительно фотоэлемента освещенность последнего изменяется, что ведет, в конечном счете, к изменению частоты вспышек до тех пор, пока момент вспышек станет совпадать с заданным положением модели.



Фиг. 4

Посредством вертикального перемещения фотоэлемента начальное деление шкалы *8* (0°) совмещалось с плоскостью, содержащей ось модели и ориентир *9*. Осциллограммы, появляющиеся на экране осциллоскопа *6*, фотографировались именно в этом положении модели.

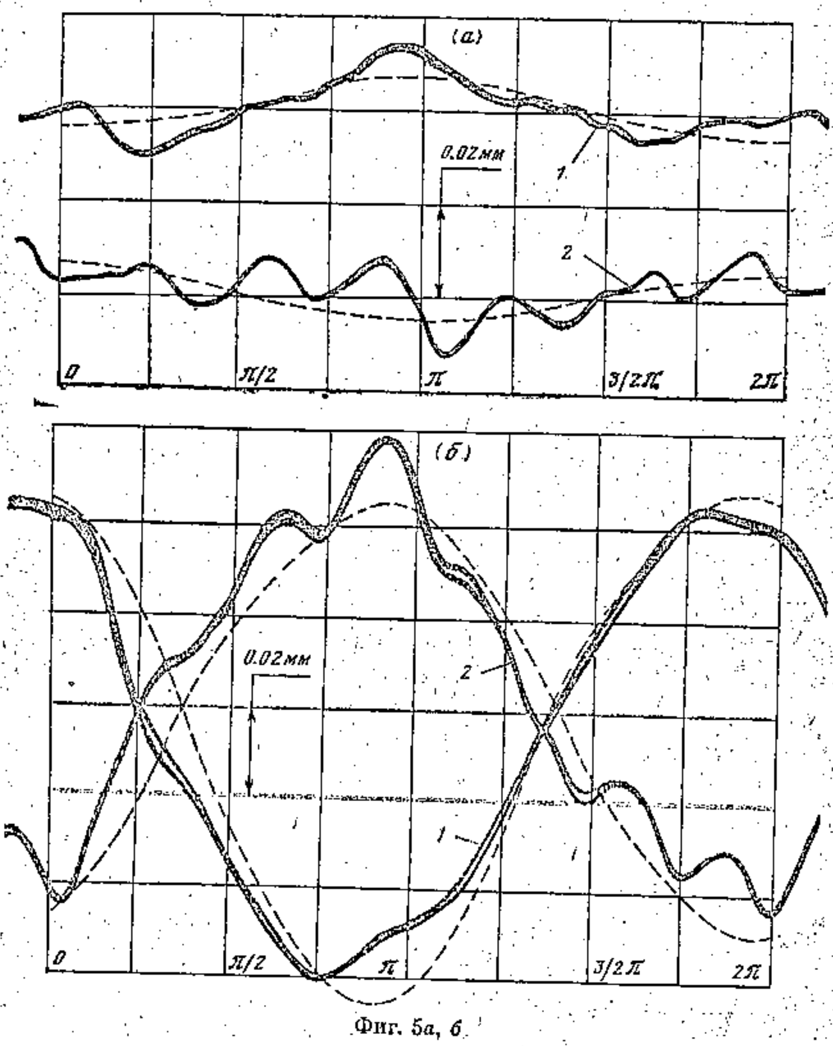
При проведении эксперимента модель весом 20 *кГ* разгонялась на струнном приводе при включенном успокоителе *3* (фиг. 4) до рабочего числа оборотов 1960 об/мин. Заметим, что при таком числе оборотов частота вращения модели была выше первой и ниже второй собственных частот поперечных колебаний струны, нагруженной весом модели. Кроме того, в данном случае частота вращения модели не совпадала с частотой сети и не была ей кратна. В результате наводки от сети не создавали неподвижных изображений на экране осциллоскопа *6*, тогда как осциллограммы сигнала, возникающего из-за наличия у модели дебаланса, были неподвижны.

Специальных мер по стабилизации скорости вращения модели не применялось.

Если модель отбалансирована, то при стационарном движении она будет устойчиво вращаться вокруг оси симметрии, совпадающей с вертикалью ζ. Если же присоединить к модели дополнительный грузик, то точки пересечения поверхностей верхней и нижней цапф модели с осями чувствительности датчиков будут перемещаться вдоль этих осей, и это перемещение будет регистрироваться датчиками. Такие перемещения обычно носят название биений [4].

Магнитоэлектрические датчики *4* (фиг. 4), применявшиеся в описываемом эксперименте, вырабатывают электрический сигнал, пропорциональный скорости перемещения. Эти датчики обладают важным для балансировки на струнном приводе преимуществом по сравнению с датчиками перемещений, хотя и те и другие широко используются в балансировочной технике и виброизмерениях [4]. В отличие от датчиков перемещений магнитоэлектрические датчики вырабатывают электрический сигнал (электродвижущую силу – ЭДС), пропорциональный скорости перемещений их катушек в магнитном поле статоров. В этих датчиках можно осуществлять сравнительно большой диапазон смещений подвижного элемента с сохранением высокой чувствительности, причем статор может быть закреплен на неподвижном основании. Сравнительно медленные перемещения балансируемой модели, возникающие в результате деформаций несущих конструкций стенда или малых колебаний модели на струнном приводе как маятника, практически мало влияют на показания датчика. В то же время биения цапф модели (при наличии дебаланса) с частотой, равной частоте вращения исследуемой модели, создают в катушке датчика электрический сигнал, вполне достаточный для его регистрации осциллоскопом с серийными входными усилителями.

При наличии дебаланса оси цапф модели отклоняются от вертикали. В результате и оси установленных на них колец *5* (фиг. 4) также отклоняются от вертика-



Фиг. 5а, б

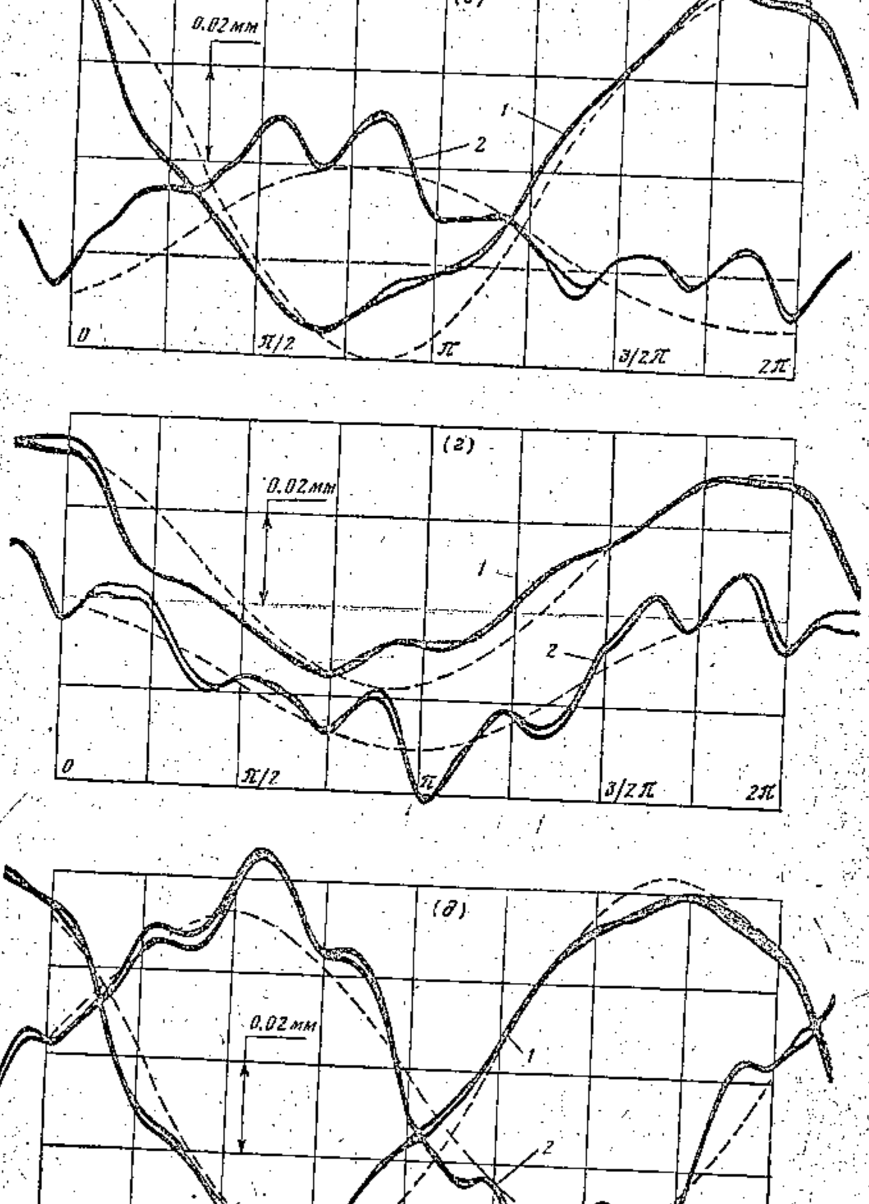
ли, и срединные плоскости этих колец не будут совпадать с плоскостями измерений. Однако, как показали расчеты, это отклонение оказалось незначительным и в дальнейшем оно во внимание не принималось.

Изложим последовательность эксперимента. На два канала осциллоскопа *6* подключаются верхний и нижний датчики. Если модель отбалансирована, то на экране осциллоскопа должны появиться два горизонтальных следа от лучей. Искажение прямолинейности этих следов (фиг. 5, *а*) вызвано наличием помех, в частности, обусловленных эллипсностью поверхностей цапф, шумами, передаваемыми на датчики *4* от электромотора, вибрацией траверсы и деталей датчиков и др. Эти высокочастотные составляющие сигналов биений цапф модели по возможности устранялись.

Если модель не отбалансирована, то на экране осциллоскопа вместо горизонтальных прямых будут изображены кривые, близкие по форме к синусоиде, с периодом, равным времени одного оборота модели (в конкретном примере этот период соответствует восьми клеткам координатной сетки, нанесенной на экран осциллоскопа). Ординаты этих кривых пропорциональны сигналам датчиков *4* или, что то же, скорости перемещения в горизонтальных направлениях точек пересечения верхней и нижней цапф модели с осями чувствительности датчиков.

Сигналы помех неотбалансированной модели можно считать примерно такими же, как и в случае отбалансированной модели, что позволяет их исключить.

Для вычисления биений (перемещений) верхней и нижней цапф модели достаточно проинтегрировать по времени полученные кривые скорости биений (осциллограммы после отсеивания помех). Масштаб по оси ординат проинтегрированной кривой определялся экспериментально путем тарировки. Перед балансировкой та-



Фиг. 5*в*, *г*, *д*

рируемый датчик соединялся своей траверсой с платформой вибростенда, совер-
шающего колебания с заданной амплитудой перемещений в горизонтальном направ-
лении, а его статор устанавливался на неподвижном основании. Частота колебаний
задавалась равной частоте вращения модели при балансировке. Катушка датчика
подключалась к осциллоскопу *6* и посредством изменения усиления входных уси-
лителей устанавливался необходимый масштаб по оси ординат осциллограмм. В даль-
нейших опытах усиление входных усилителей осциллоскопа *6* не изменялось. После
тарировки датчики *4* переносились на балансировочный стенд и устанавливались в
рабочее положение. Масштаб перемещений указан на каждой из приводимых на
фиг. 5 осциллограмм.

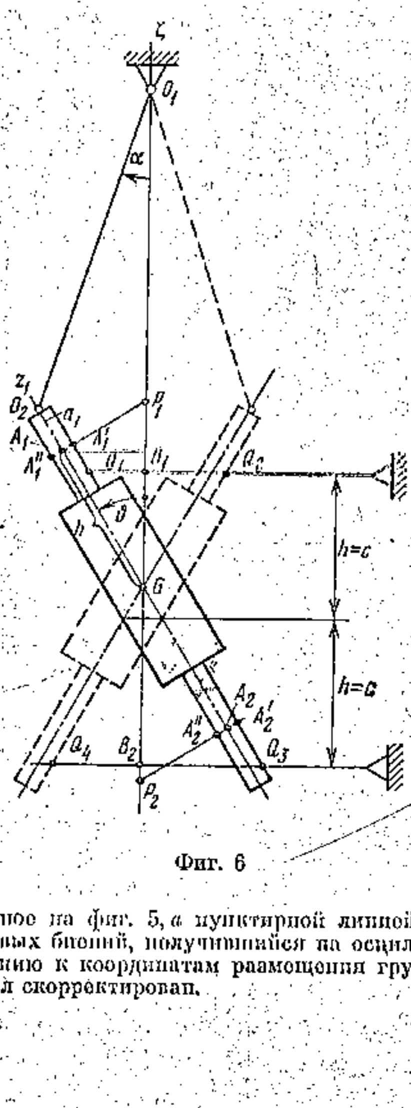
Балансировка модели производилась следующим образом. Из полученных графиков перемещений для верхней и нижней цапф выбирался тот, у которого имела место наибольшая ордината максимума. Абсциссе максимума соответствовал угол Ф на шкале *8* (фиг. 4). Предполагалось, что в точках, лежащих на образующей модели, соответствующей этому углу, расположена масса, вызвавшая дебаланс модели. Эту массу в процессе балансировки необходимо изъять либо добавить контрмассу на диаметрально противоположную образующую.

Величина дебалансирующей массы приближенно оценивалась по величине максимума перемещений. В дальнейших запусках модели последовательными операциями осуществлялась окончательная балансировка модели до тех пор, пока амплитуда биений поверхностей цапф не уменьшалась до заданного уровня 0.02 мм. Осциллограмма, полученная после завершения балансировки, приведена на фиг. 5, *а*. Здесь амплитуда биений (пунктирные линии) не превышает 0.01 мм. Уровень высокочастотной помехи, выраженный в том же масштабе, что и перемещения поверхностей верхней и нижней цапф, равен соответственно 0.02 мм и 0.03 мм. Надо учитывать, что перемещение цапфы, вызываемое помехами, находится в меньшем отношении к ординатам осциллограмм, чем перемещение от собственно биений, так как частота помехи обычно выше частоты вращения модели.

Чувствительность метода балансировки на струнном приводе проверялась посредством установки заданных по величине грузиков. Вес каждого из них выбирался равным 4 *Г*, что соответствовало 0.02% от веса модели. Было рассмотрено четыре варианта расположения грузиков (см. п. 6).

После установки двух грузиков соответственно в точках M_1 и M_3 были получены осциллограммы, представленные на фиг. 5, *б*. Пунктирными линиями на этой и последующих фигурах изображены кривые, полученные для верхней и нижней цапф, как разность сигналов датчиков *4* для рассматриваемого случая и сигналов помехи[1], представленных на фиг. 5, *а*. На последующих фиг. 5, *в*–*д* приведены аналогичные осциллограммы для описанных в п. 6 II–IV вариантов расположения дебалансирующих грузиков. Результаты обработки этих осциллограмм для всех четырех вариантов расположения грузиков приведены в табл. 3. При этом в колонках 1 и 2 содержатся результаты, относящиеся соответственно к верхней и нижней цапфам модели. Через Φ_0, Ф обозначены в этой таблице углы, определяющие соответственно положение грузика по шкале *8* (фиг. 4) и образующую, где осциллограмма имеет максимум. Далее через *f* обозначена ордината, соответствующая максимуму перемещения поверхностей цапф с учетом масштаба осциллограмм.

8. Вычислим теперь теоретически для верхней и нижней цапф модели величины f^*, Φ^* — соответственно максимум биений и угол, определяющий по шкале *8* (фиг. 4) положение этого максимума на модели, для каждого из рассмотренных выше четырех вариантов расположения дебалансирующих грузиков.



Фиг. 6

Ранее было показано, что при стационарных движениях твердого тела, вращающегося с большой, но конечной угловой скоростью одна из его главных центральных осей инерции (например ось z^*) практически мало отклоняется от неподвижной вертикали ζ. Осно-

---

[1] Не устраненное биение цапф, изображенное на фиг. 5, *а* пунктирной линией, вычиталось как помеха. Сдвиг максимумов кривых биений, получившийся на осциллограммах 5, *б*–*г* вдоль оси абсцисс по отношению к координатам размещения грузиков, при составлении таблицы результатов был скорректирован.

Таблица 3

Варианты	I		II		III		IV	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Φ_0	0°	180°	0°	нет	0°	0°	0°	270°
Φ	5°	185°	7°	187°	0°	0°	25°	252°
Φ^*	0°	180°	0°	180°	0°	0°	19°55	250°5
f	0.11	0.08	0.08	0.02	0.05	0.04	0.09	0.08
f^*	0.093	0.093	0.068	0.025	0.044	0.044	0.072	0.072

вываясь на этом выводе, в дальнейшем будем считать эти оси совпадающими.

В первом варианте (см. п. 6) грузики расположены в точках M_1 и M_3. Центр тяжести получающейся механической системы «оссесимметричное тело+грузики» совпадает с центром масс модели без грузиков.

Определим величину f_1^* для верхней цапфы модели. При наличии грузиков модель при стационарном ее движении займет положение, схематически представленное на фиг. 6. Главная центральная ось инерции z^* данной механической системы отклонена от оси симметрии z_1 модели на угол ϑ (фиг. 6), а прямые, совпадающие с осями датчиков, пересекут поверхности верхней и нижней цапф модели в некоторых точках Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Расстояния Q_1Q_2 и Q_3Q_4 и будут соответствовать искомым максимумам биений верхней и нижней цапф модели.

Определим прежде всего расстояние Q_1Q_2. При использовании фиг. 6 находим

$$f_1^*=|Q_1Q_2|=2|GB_1|\operatorname{tg}\vartheta \tag{8.1}$$

где $|GB_1|$ — расстояние от центра масс системы «твердое тело+грузики» до оси верхнего датчика.

И, далее

$$|GB_1|=h\cos\vartheta-(l+a_1-l\cos\alpha-a_1\cos\vartheta) \tag{8.2}$$

В последнем равенстве l — длина струны; h — расстояние от точки G до прямой $A_1'A_1''$; a_1 — расстояние от этой прямой до точки O_2 (крепления тела к струне), равное $a_1=|O_1B_1|-l$; α — угол между струной и вертикалью ξ (фиг. 6).

Подставим равенство (8.2) в правую часть соотношения (8.1) и воспользуемся очевидным соотношением

$$(h+a_1)\sin\vartheta=l\sin\alpha \tag{8.3}$$

Имеем

$$f_1^*=f_1\cos\vartheta-2\operatorname{tg}\vartheta\left\{l\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{h+a_1}{l}\right)^2\sin^2\vartheta}\right]+a_1(1-\cos\vartheta)\right\} \tag{8.4}$$

где $f_1=2h\operatorname{tg}\vartheta$ — удвоенное расстояние между точками A_1 и P_1 — пересечения упомянутой прямой $A_1'A_1''$ соответственно осями z_1 и z^* (фиг. 6).

Используя равенство (8.4), определим разность $\Delta f_1=f_1^*-f_1$. Принимая во внимание, что угол ϑ, который входит в равенство (8.4), мал (см. табл. 2), с точностью до величин третьего порядка малости относительно этого угла имеем

$$\Delta f_1=-(h+a_1)[1+(h+a_1)l^{-1}]\vartheta^3+\ldots \tag{8.5}$$

Соответственно для нижней цапфы модели получаем формулу

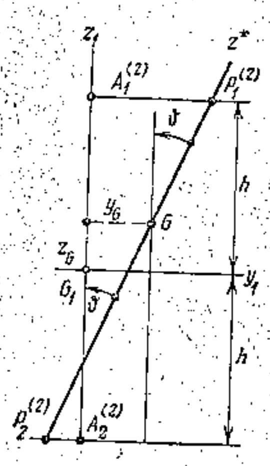
$$\Delta f_2=f_2^*-f_1=-[h-a_1-(h+a_1)^2l^{-1}]\vartheta^3+\ldots \tag{8.6}$$

$$f_2^*=2|GB_2|\,\mathrm{tg}\,\vartheta=2\,\mathrm{tg}\,\vartheta\,[h\cos\vartheta+l(1-\cos\alpha)+a_1(1-\cos\vartheta)] \quad (8.7)$$

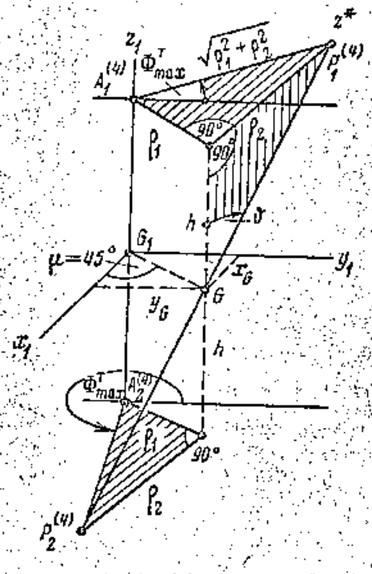
Таким образом, с точностью до величин второго порядка малости включительно относительно угла ϑ максимумы биений верхней и нижней цапф модели могут определяться по формулам

$$f_1^*=f_2^*=f_1=2h\,\mathrm{tg}\,\vartheta \quad (8.8)$$

Аналогичные формулы были получены и для остальных трех вариан-



Фиг. 7



Фиг. 8

тов расположения грузиков (см. п. 6). При их выводе, в частности для второго и четвертого вариантов, были использованы соответственно фиг. 7 и 8. На этих фигурах указаны координаты центра тяжести G, угол ϑ, точки пересечения прямыми, совпадающими с осями датчиков 4 (фиг. 4) соответственно осей z_1 и z^*. Расстояния $2|A_1^{(2)}P_1^{(2)}|$, $2|A_2^{(2)}P_2^{(2)}|$, $2|A_1^{(4)}P_1^{(4)}|$, $2|A_2^{(4)}P_2^{(4)}|$, определяют на этих фигурах искомые максимумы биений. В табл. 4 приведены формулы для нахождения этих максимумов.

Таблица 4

Варианты	II		III		IV	
	1	2	1	2	1	2
f^*	$2[y_G+(h-z_G)\times \mathrm{tg}\,\vartheta]$	$2[(h+z_G)\times\mathrm{tg}\,\vartheta-y_G]$	$2y_G$	$2y_G$	$2\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}$, $\rho_1^2=x_G^2+y_G^2$, $\rho_2=h\,\mathrm{tg}\,\vartheta$	
Φ^*	0	π	0		$\mathrm{arctg}\frac{\rho_2}{\rho_1}-\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}-\mathrm{arctg}\frac{\rho_2}{\rho_1}$

а также введенного ранее угла Φ^*. По данным, указанным в табл. 2, подсчитаны численные значения упомянутых максимумов, которые содержатся в табл. 3 [1]. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных, имеющихся в этой таблице, показывают удовлетворительное их совпадение.

9. Проведенные теоретические и экспериментальные исследования показали применимость струнного привода для балансировки быстровращающихся твердых тел. Существенно, что погрешность балансировки практически не зависит от положения точки крепления струны относительно геометрической оси симметрии тела.

Балансировка на струнном приводе позволяет обнаружить места расположения малых дестабилизирующих масс. Вследствие этого решение задачи уравновешивания не встречает принципиальных трудностей. Тем самым с помощью сравнительно простой аппаратуры можно получить точность уравновешивания, достаточную для многих технических изделий.

Поступила 4 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николаи Е. Л.* Лекции по теоретической механике, ч. 3. Динамика. М.–Л., Гостехиздат, 1932.
2. *Малашенко С. В.* Некоторые экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тел. ПМТФ, 1960, № 3.
3. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механики, т. 2. М., «Наука», 1977.
4. Основы балансировочной техники (под ред. *Щепетильникова В. А.*), т. 1, 2. М., «Машиностроение», 1975.

[1] При расчетах параметр h для всех четырех вариантов механических систем принимался равным 19 см.