Материалы XIX международной конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017) - М.: МАИ, 2017. С. 621-624. (ISBN 978-5-4316-0401-0)

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ С ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИМИ ПРОСЛОЙКАМИ

Н.Г. Бураго[1], И.С. Никитин[2]

[1]Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского
[2]Институт автоматизации проектирования РАН

В декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим безграничную слоистую среду. Ось x_3 перпендикулярна плоскопараллельным границам раздела слоев. Границы раздела имеют координаты $x_3 = x^{(s)} = s\varepsilon$, s=0, $\pm 1, \pm 2 \ldots$, где постоянная толщина слоя ε <<1 является малым параметром. Предполагается, что физически между упругими слоями имеются тонкие вязкие или вязкопластические прослойки толщины $\delta << \varepsilon$, однако мы пренебрегаем толщиной этих прослоек и заменяем их условиями скольжения на поджатых границах слоев:

$\sigma_{33} < 0 \quad [u_3] = [\sigma_{\gamma 3}] = [\sigma_{33}] = 0,$

либо $[u_{\gamma,t}]/\varepsilon = \kappa\sigma_{\gamma 3}$ - линейное условие вязкого скольжения,

либо $[u_{\gamma,t}]/\varepsilon = \kappa\sigma_{\gamma 3} < F\left(\sigma_{\beta 3}\sigma_{\beta 3}/\sigma_s{}^2 - 1\right) >$ - нелинейное условие вязкопластического скольжения, $\kappa = \delta/(\varepsilon\eta)$, η - коэффициент вязкости.

Здесь квадратные скобки $[f] = f\big|_{x^{(s)}+0} - f\big|_{x^{(s)}-0}$ обозначают скачок величины f на межслойной границе, $< F(y) >= F(y)H(y)$ - нелинейная функция, отличная от нуля за пределом текучести $\sigma_{\beta 3}\sigma_{\beta 3} = \sigma_s{}^2$, $H(y)$ - функция Хэвисайда, $H(y)$ =0 при $y < 0$, $H(y)$ =1 при $y \ge 0$. Нелинейное условие вязкопластического скольжения переходит в линейное условие вязкого скольжения, если заменить $< F(y) >$ на единицу. Греческие индексы β, γ принимают значения 1 и 2, латинские индексы – значения 1,2,3, u_k - компоненты вектора смещений, $u_{k,t}$ - компоненты вектора скорости, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений. Для компактности формул дифференцирование обозначено следующим образом: $\partial(\ldots)/\partial x_j = (\ldots)_{,j}$, $\partial(\ldots)/\partial t = (\ldots)_{,t}$, $\partial(\ldots)/\partial \xi = (\ldots)_{,\xi}$. Сами слои считаются изотропными линейно-упругими (при $x_3 \ne x^{(s)}$):

$\sigma_{ij,j} - \rho u_{i,tt} = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}$

где ρ - плотность, тензор модулей упругости имеет вид: $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$.

Будем считать, что искомые функции $u_k = u_k(x_l, \xi, t)$ являются гладкими по «медленным» переменным x_l и гладкими по «быстрой» переменной $\xi = x_3/\varepsilon$, за исключением точек $\xi^{(s)} = x^{(s)}/\varepsilon$, где они могут терпеть разрывы первого рода. Кроме того, эти функции являются 1-периодическими [1]: $[[u_i]] = u_i\big|_{\xi^{(s)}+1/2} - u_i\big|_{\xi^{(s)}-1/2} = 0$.

Смещения среды представим в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра ε: $u_i = w_i(x_k,t) + \varepsilon u_i^{(1)}(x_k,\xi,t) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(x_k,\xi,t) + \varepsilon^3 u_i^{(3)}(x_k,\xi,t) + \ldots$. Для функции «быстрой» переменной ξ введем операцию «осреднения» $\langle f \rangle$: $\langle f \rangle = \int\limits_{-1/2}^{1/2} f d\xi$. Приближения смещений должны удовлетворять дополнительному условию $\left\langle u_k^{(n)} \right\rangle = 0$. Подставляя эти представления в уравнения теории упругости, получим асимптотическую систему уравнений:

$$C_{ijkl} w_{k,jl} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(1)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(1)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(2)})_{,\xi} + \varepsilon \left[C_{ijkl} u_{k,jl}^{(1)} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(2)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(2)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(3)})_{,\xi} \right] +$$

$$+ \varepsilon^2 \left[C_{ijkl} u_{k,jl}^{(2)} + C_{ijk3} u_{k,j\xi}^{(3)} + (C_{i3kl} u_{k,l}^{(3)} + C_{i3k3} u_{k,\xi}^{(4)})_{,\xi} \right] + \ldots = \rho w_{i,tt} + \varepsilon \rho u_{i,tt}^{(1)} + \varepsilon^2 \rho u_{i,tt}^{(2)} + \ldots$$

Разложению компонент смещений соответствует разложение компонент тензора напряжений: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \varepsilon \sigma_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \ldots$, где $\sigma_{ij}^{(n)} = C_{ijkl} u_{k,l}^{(n)} + C_{ijk3} u_{k,\xi}^{(n+1)}$. Все приближения напряжений являются 1-периодическими функциями ξ. В частности, выполняются условия $[\sigma_{i3}^{(n)}] = 0$, $[[\sigma_{i3}^{(n)}]] = 0$. Легко видеть, что $\left\langle \sigma_{i3}^{(n)}{}_{,\xi} \right\rangle = 0$.

Уточненная теория второго порядка получается, если в асимптотической системе уравнений удержать члены порядка ε^2 и применить операцию осреднения по ячейке периодичности $\langle\ \rangle$:

$$C_{ijkl} w_{k,jl} + C_{ijk3} \left\langle u_{k,\xi}^{(1)} \right\rangle_{,j} + \varepsilon C_{ijk3} \left\langle u_{k,\xi}^{(2)} \right\rangle_{,j} + \varepsilon^2 C_{ijk3} \left\langle u_{k,\xi}^{(3)} \right\rangle_{,j} = \rho w_{i,tt}$$

Каждая из функций $u_i^{(n)}(x_k,\xi,t)$ *(n=1,2,3)*, находится из соответствующей «задачи на ячейке периодичности» при $-1/2 \le \xi \le 1/2$. Эти задачи сформулированы и в общем виде решены в [1] с точностью до некоторых функций, которые определяются из условий проскальзывания.

Первое приближение смещений будет выглядеть следующим образом: $u_k^{(1)} = \varphi_k(\xi - sign\xi/2)$, $\varphi_3 = 0$.

Второе приближение смещений выглядит так:

$u_k^{(2)} = \psi_k(\xi^2 - \xi sign\xi + 1/6)/2$, $\psi_\gamma = -\varphi_{\gamma,3}$, $\psi_3 = -\lambda\varphi_{\beta,\beta}/(\lambda + 2\mu)$.

Решение для третьего приближения смещений имеет вид:

$$u_k^{(3)} = \chi_k \left(\xi^3 / 6 - \xi^2 sign\xi / 4 + \xi / 12 \right) + \Omega_k (\xi - sign\xi / 2),$$

$$\chi_\gamma = \varphi_{\gamma,33} - \varphi_{\gamma,\beta\beta} - 2(\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta\gamma} / (\lambda + 2\mu) + \rho\varphi_{\gamma,tt} / \mu, \ \chi_3 = 2(\lambda+\mu)\varphi_{\beta,\beta 3} / (\lambda+2\mu), \ \Omega_3 = 0.$$

Функции φ_γ, Ω_γ определяются из условий скольжения на скачки касательных скоростей.

С использованием этих результатов уточненную систему уравнений можно получить в следующем виде:

$$\rho v_{\gamma,t} = s_{\gamma j,j} + \varepsilon^2 \mu \Omega_{\gamma,3}, \quad \rho v_{3,t} = s_{3j,j} + \varepsilon^2 \mu \Omega_{\beta,\beta}, \quad \tau_{ij,t} = \lambda \delta_{ij} v_{k,k} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}),$$

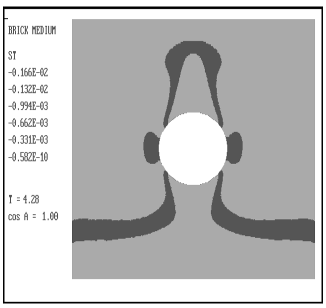
$$\varphi_{\gamma,t} = -\kappa s_{\gamma 3} < F(\Delta) >, \quad \Omega_{\gamma,t} = -\kappa\mu \left((g_\gamma + \Omega_\gamma) < F(\Delta) > + 2 s_{\gamma 3} s_{\beta 3} (g_\beta + \Omega_\beta) < F^/(\Delta) > / \sigma_s^2 \right)$$

$$s_{ij} = \tau_{ij} + \mu(\varphi_i \delta_{j3} + \varphi_j \delta_{i3}), \ \Delta = s_{\beta 3} s_{\beta 3} / \sigma_s^2 - 1, \ g_\gamma = \left(\rho \varphi_{\gamma,tt} / \mu - \varphi_{\gamma,\beta\beta} - (3\lambda + 2\mu) \varphi_{\beta,\beta\gamma} / (\lambda + 2\mu) \right) / 12$$

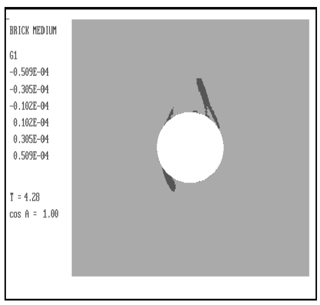
В этой нестационарной системе введены обозначения $s_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)}$, $v_k = w_{k,t}$. Для дополнительных функций φ_γ и Ω_γ, имеющих смысл распределенных скольжений первого и третьего порядков по ε, получены нелинейные дифференциальные уравнения.

Полученные модели могут быть использованы для исследования волновых процессов в геологических массивах с флюидосодержащей слоистой структурой и динамического деформирования некоторых классов композитов.

Численное решение полученной системы уравнений можно строить методом конечных объемов. Необходимо использовать явно-неявную схему по времени с учетом малых параметров вязкости при временных производных функций φ_γ и Ω_γ. Пример численного решения задачи прохождения продольной волны через полость в слоистой среде с проскальзыванием приведен на Рис. 1.



а)



б)

Рис.1. Распределение напряжений после похождения волны через полость –а), распределение скольжений в окрестности полости – б)

Список литературы

1. Бураго Н.Г., Никитин И.С. Уточненная модель слоистой среды с проскальзыванием на контактных границах// Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. № 2. С. 230-241.