# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ[1]

Н.Г. Бураго[1], А.Д. Никитин[2]
[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
[2]Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

Теория мелкой воды широко применяется для моделирования течений, глубина которых много меньше их линейных размеров. Ниже описан очень простой алгоритм, основанный на явной двухслойной схеме Лакса, в которую включены корректирующие процедуры, обеспечивающие свойства монотонности и консервативности.

**Постановка задачи.** Система уравнений теории мелкой воды в декартовых координатах $x, y$ имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\eta}{dt} + h\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = f_h \\
&\frac{du_x}{dt} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) + f_x \\
&\frac{du_y}{dt} + g\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + f_y \quad ,. \\
&\frac{dC}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_C \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_C \frac{\partial C}{\partial y}\right) + f_C
\end{aligned}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + u_x \partial/\partial x + u_y \partial/\partial y$ - материальная временная производная, $\nu$ и $\nu_C$ - коэффициенты диффузии, $z = \eta(x, y, t)$ уровень поверхности воды, $u_x(x, y, t)$ и $u_y(x, y, t)$ - горизонтальные скорости, осредненные по глубине $h = \eta - z_0$, $z = z_0(x, y, t)$ - уровень дна. Внешние нагрузки $f_x$ и $f_y$ зависят от координат, времени и решения и используются для задания ветровых нагрузок, донного трения и сил Кориолиса, уравнение для примеси $C(x, y, t)$ применяется в задачах экологии, уравнения для уровня $\eta$ и примеси могут содержать источники/стоки воды $f_h$ и примеси $f_C$. Система уравнений дополняется начальными условиями

$$t = 0,\ \ (x, y) \in S:\ \eta = \eta_0,\ \mathrm{u}_x = u_{x0},\ \mathrm{u}_y = u_{y0},\ \mathrm{C} = C_0$$

и граничными условиями

$$t \ge 0,\ \ (x, y) \in \partial S_G:\ \mathrm{G} = G_*\ ; \qquad t \ge 0,\ \ (x, y) \in S \setminus \partial S_G:\ \mathrm{n} \cdot \nabla \mathrm{G} = F_*$$

---

[1] Материалы XXI международной конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2019) - М.: Изд-во МАИ, 2019. С. 409-411. ISBN 978-5-4316-0589-5.

Здесь G обозначает основные искомые функции $\eta$, $u_x$, $u_y$, C.

**Метод решения.** Численные решения получаются с помощью вариационного аналога схемы Лакса на равномерной регулярной сетке. Шаг по времени определяется условием устойчивости $\Delta t \le \gamma min(h_x, h_y) / \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + gh}$, где $0 < \gamma < 1$ - коэффициент запаса. Монотонность решения контролировалась по знаку второй производной от искомых функций на ребре. При смене знака в узлах ребра решение немедленно поправлялось по формуле $G_i := (G_i + (G_{i-1} + G_{i+1}) / 2) / 2$. Для устранения нарушений законов сохранения из-за принятого способа монотонизации и из-за использования недивергентной формы балансных соотношений проводилась дополнительная коррекция решения на каждом шаге по времени. Поясним это на примере сохранения массы. Пусть $M^{(n)}$ масса воды в области решения на старом временном слое. Ожидаемую массу $M^{(n+1)}$ на новом временном слое легко определить, учитывая отток/приток массы через границы и объемные источники/стоки. Пусть $\tilde{M}^{(n+1)}$ масса на новом временном слое, определенная по применяемой неконсервативной схеме. Для устранения ошибки по массе достаточно подправить глубину по формуле $\{h_i := h_i M^{(n+1)} / \tilde{M}^{(n+1)}\}_{i=1}^{N}$ во всех N узлах сетки. Формула для случая, когда на границе глубина задана, тоже легко выводится. Коррекция для примеси и импульса аналогична. При сквозном счете в пустых ячейках использовалось малое фиктивное значение глубины $10^{-5}$.

**Примеры расчета.** Рассмотрим задачу прорыва дамбы. Пусть квадратный водоем размера $10 \times 10$ заполнен покоящейся тяжелой ($g = 1$) водой при постоянной глубине $h = 2$. Левая граница соединяет эту часть водоема с много большим водоемом, поэтому уровень поверхности на этой открытой границе постоянен. Правая граница данной подобласти является дамбой. В момент времени $t = 0$ часть дамбы $(x = 10,\ 3 \le y \le 7)$ внезапно убирается и вода начинает стекать в правую подобласть размера $10 \times 10$, которая в начале имеет нулевую глубину. Правая граница при $x = 20$ является открытой. На горизонтальных границах ($y = 0$ и $y = 10$) выполнены условия непротекания и свободного скольжения. Физическая вязкость воды в расчете не учитывалась ($\nu = 0$). Внешние воздействия отсутствовали ($f_h = f_x = f_y = f_C = 0$). Примесь отсутствовала ($C = 0$). На Рис. 1-3 для установившегося течения показаны уровень свободной поверхности $\eta$, треки лагранжевых маркеров, изолинии уровня свободной поверхности и скоростей. Наличие зон возвратно-поступательного движения в правой подобласти (Рис. 2а) обусловлено аппроксимационной вязкостью.

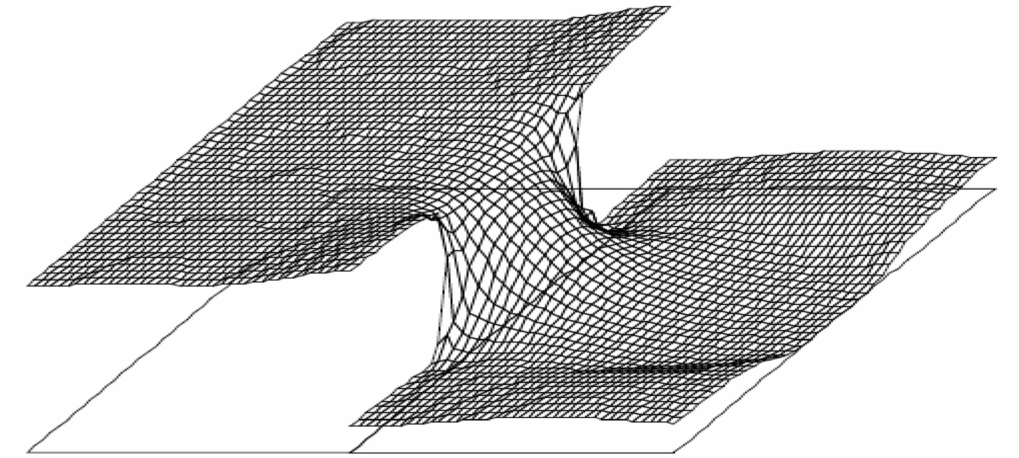

Рис. 1. Уровень свободной поверхности (установившееся течение).

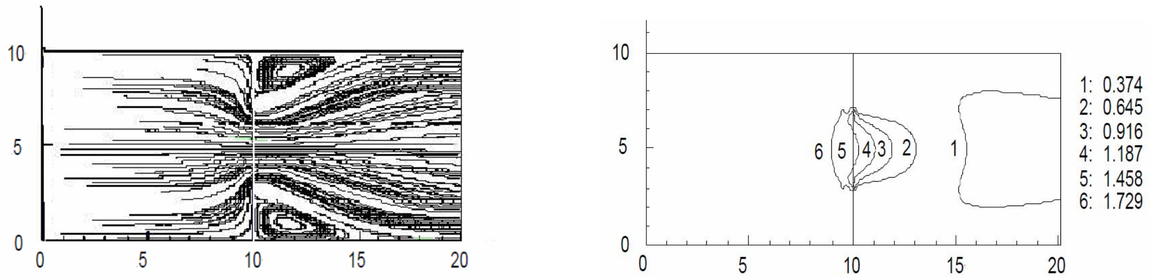


Рис. 2. а) Треки лагранжевых маркеров;    б) изолинии уровня свободной поверхности.

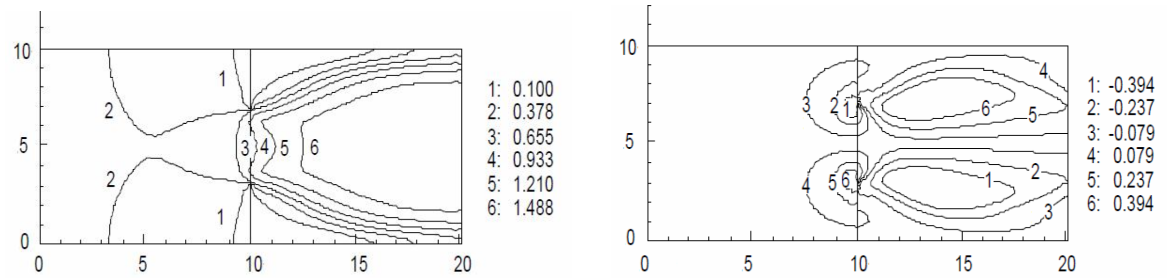


Рис. 3. а) скорость по x; б) скорость по y

**Заключение.** Данный упрощенный метод значительно облегчает проведение расчетов течений мелкой воды. Сравнение решений по различным методам, задачи о заполнении водоема и о движении погруженных тел представлены в [2].

**Литература**

1..Коннор Дж., Бреббиа К., Метод конечных элементов в механике жидкости. Л.: Судостроение, 1979. – 204 с.

2. Бураго Н.Г., Герман В.А., Никитин И. С. Расчет нестационарных течений мелкой воды в условиях переменой геометрии. Тезисы докладов IX Всероссийской

конференции “Актуальные проблемы прикладной математики и механики” (Абрау-Дюрсо, 5-10 сентября 2018 г.). Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 2018. С. 15-16.