 Проблемы прочности и пластичности, Н.Новгород, 2001. Вып. 63, С. 40-48.

УДК 384.374

Н.Г.Бураго, В.Н.Кукуджанов

О континуальном разрушении и локализации деформаций

В подавляющем большинстве используемых численных моделей континуального разрушения (см. например [1-14]) расчетные зоны разрушения неправдоподобно обширны, а локализация деформаций выражена настолько слабо, что интерпретация результатов расчета процессов разрушения часто зависит от воображения расчетчика. При попытках достижения более сильной локализации деформаций появляется аномальная зависимость зон разрушения от размера и формы ячеек сетки, означающая потерю сходимости решения.

Причины такого поведения численных моделей континуального разрушения до конца не ясны и вопрос о том, какими свойствами должны обладать такие модели для эффективного описания локализации деформаций и эволюции зон разрушения, остается до сих пор открытым и актуальным.

Предлагаемые теоретическая модель и метод численного решения направлены на устранение отмеченных выше недостатков с тем, чтобы проследить развитие магистральных трещин в виде узких полос разрушения, представляющих скачки скорости и перемещения, а также всплески деформаций.

1. Постановка задачи. Система уравнений, описывающая поведение термо-упругопластической повреждающейся среды разрабатывалась многими авторами (см. обзоры в [1-14]) и используется здесь в варианте, описанном в работе [15]. Система уравнений содержит законы сохранения массы, импульса и энергии, а также кинематические соотношения

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\mathbf{e}:\mathbf{I}=0\,,\quad \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma},\ \rho\frac{dU}{dt}=\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{e}+\rho r+\nabla\cdot\mathbf{q},\ \mathbf{F}^{-T}=\nabla\otimes\overset{o}{\mathbf{x}}\,,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{I}-\mathbf{F}^{-T}\cdot\mathbf{F}^{-1}\right),\quad \mathbf{e}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{L}+\mathbf{L}^{T}\right),\quad \mathbf{e}=\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt}+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{L}+\mathbf{L}^{T}\cdot\boldsymbol{\varepsilon},\quad \mathbf{L}=\nabla\otimes\mathbf{u}\,,\quad \mathbf{u}=\frac{d\mathbf{x}}{dt} \qquad (1)$$

и определяющие соотношения, которые заслуживают более подробного рассмотрения, приводимого ниже. Здесь использованы традиционные обозначения: ρ - плотность, $\mathbf{u}$ - скорость материальной сплошной среды, t - время, $\mathbf{x}$ - эйлеров радиус-вектор (актуальная конфигурация), $\overset{o}{\mathbf{x}}$ - лагранжев радиус-вектор (начальная конфигурация), $\mathbf{F}$ - градиент деформации, $\mathbf{L}$ - градиент скорости, $\boldsymbol{\varepsilon}$ - тензор деформации Альманси, $\mathbf{e}$ - эйлеров тензор скорости деформации, $\boldsymbol{\sigma}$ - тензор напряжений Коши, U - внутренняя энергия единицы массы, $\mathbf{q}$ - вектор теплового потока, T - температура, r - массовый источник тепла, d/dt - материальная временная производная, ∇ - оператор пространственного дифференцирования в актуальной конфигурации, $\mathbf{I}$ - тензорная единица.

Определяющие соотношения представляют связи между характеристиками состояния бесконечно малого объема сплошной среды, накладываемые законами термодинамики. Образуем минимальный набор взаимно независимых параметров состояния бесконечно малого объема сплошной среды: $\pi=(T,\overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}},\overset{0}{\boldsymbol{\chi}},\frac{dT}{dt},\overset{0}{\mathbf{e}},\frac{d\overset{0}{\boldsymbol{\chi}}}{dt},\nabla T)$, где $\overset{o}{\boldsymbol{\chi}}=(\overset{o}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p,\theta)$ - структурные параметры: тензор пластической деформации $\overset{o}{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ и повреждаемость θ, определяемые далее и ответственные за изменение внутренней структуры сплошной среды, то есть за развитие дислокаций и микротрещин, соответственно. Нулики отмечают материальные тензоры, связанные с пространственными тензорами соотношениями

$$\overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbf{F}^{T}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\mathbf{F},\quad \overset{0}{\mathbf{e}}=\mathbf{F}^{T}\cdot\mathbf{e}\cdot\mathbf{F},\quad \overset{0}{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{F}^{-T},\quad \frac{d\overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}}{dt}=\overset{0}{\mathbf{e}},\quad \overset{0}{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\overset{0}{\mathbf{e}}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}$$

Из первого закона термодинамики, утверждающего закон сохранения энергии, и второго закона термодинамики, закона возрастания энтропии η

$$\rho T\frac{d\eta}{dt} - T\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) - \rho r \geq 0$$

следует неравенство скорости диссипации D

$$D = -\rho\left(\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)\frac{dT}{dt} + \left(\overset{0}{\boldsymbol{\sigma}} - \rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial\overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}}\right) : \dot{\mathbf{e}} - \rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial\overset{0}{\boldsymbol{\chi}}} : \frac{d\overset{0}{\boldsymbol{\chi}}}{dt} + \frac{1}{T}\mathbf{q}\cdot\nabla T \geq 0$$

Здесь $\varphi = U - T\eta$ - свободная энергия единицы массы.

Свободная энергия и скорость диссипации принимаются такими:

$$\varphi = \frac{K}{2\rho_0}\left(\ln\frac{\rho}{\rho_0} + \beta(T - T_0)\right)^2 + \frac{\mu}{2\rho}(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}'_p)^2 : \mathbf{I}$$

$$D = H(\Phi_p)k_p\sqrt{\mathbf{e}_p' : \mathbf{e}_p'} + H(\Phi_\theta)k_\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{k_q}{T}\nabla T\cdot\nabla T$$

В данной записи полагается, что упругие составляющие девиатора деформации $\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}'_p$ малы по сравнению с единицей. Эффект температурного расширения учитывается членом с коэффициентом β. Составляющая скорости диссипации, отвечающая за пластическое течение, полагается однородной функцией первого порядка от скорости пластической деформации, что соответствует случаю упругопластической среды. Скорость пластической деформации растет при выполнении условия активного нагружения $\Phi_p(T, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \theta, \mathbf{e}) \geq 0$. Полагается также, что материал пластически несжимаем (скорость диссипации зависит только от девиатора скорости пластической деформации, что обычно хорошо выполняется для металлов). Сопротивляемость среды, представленная модулями упругости и пределом текучести, помимо температуры, деформации и пластической деформации, зависит также от дополнительного структурного параметра состояния θ, называемого поврежденностью: $\mu = \mu_0(T)g_\mu(\theta)$, $K = K_0(T)g_K(\theta)$, $k_p = k_{p0}(T)g_p(\theta)$, где $\hat{E}_0 = \hat{E}_0(T)$, $\mu_0 = \mu_0(T)$ - модули упругости, $k_{\sigma 0} = k_{\sigma 0}(T, \varepsilon, \varepsilon_p)$ - предел текучести, для неповрежденной сплошной среды. Убывающие от 1 до 0 функции g_μ, g_K, g_σ обеспечивают спад сопротивления среды с ростом поврежденности, который происходит при выполнении условия разрушения $\Phi_\theta(T, e, e_p, \theta) \geq 0$. Кинетика процесса разрушения определяется зависимостью скорости диссипации от скорости роста поврежденности.

В результате определяющие соотношения принимают следующий вид:

$$\eta = -\frac{\partial\varphi}{\partial T},\ U = \varphi - T\frac{\partial\varphi}{\partial T},\ \mathbf{q} = k_q \nabla T,\ \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}',\ \sigma' = 2\mu(\varepsilon' - \varepsilon'_p),$$

$$p = K\frac{\rho}{\rho_0}\left(\ln\frac{\rho}{\rho_0} + \beta(\grave{o} - \grave{o}_0)\right),\ e'_p = H(\Phi_p)\sqrt{e'_p : e'_p}\,\sigma'/k_p,\ \frac{d\theta}{dt} = H(\Phi_\theta)k_\theta^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \quad (2)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\mathbf{x} \in S_{un},\quad t \geq 0 : \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = u_n^*$$

$$\mathbf{x} \in S \setminus S_{un},\quad t \geq 0 : (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} = P_n^*$$

$$\mathbf{x} \in S_{u\alpha},\quad t \geq 0 : \mathbf{u}\cdot\tau_\alpha = u_{\tau\alpha}^*$$

$$\mathbf{x} \in S \setminus S_{u\alpha},\ t \geq 0 : (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})\cdot\tau_\alpha = P_\alpha^*$$

$$\mathbf{x} \in S_T,\quad t \geq 0 : T = T^*$$

$$\mathbf{x} \in S \setminus S_T,\ t \geq 0 : \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = q_n^* \quad (3)$$

где $\alpha = 1, 2$. Начальные условия имеют вид:

$$t = 0 :\ \mathbf{x} = \overset{o}{\mathbf{x}},\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_o^*,\ T = T_0,\ \varepsilon_p = 0,\ \square = 0 \quad (4)$$

Таким образом, требуется решить начально-краевую задачу для системы уравнений (1)-(2) с граничными (3) и начальными (4) условиями.

2. **Численный метод.** Алгоритм решения основан на модификации неявной конечно-элементной схемы, построенной в работе [16] и реализован в рамках интегрированного пакета прикладных программ "АСТРА" .

3. **Результаты.** Рассмотрим типичное решение о растяжении стандартного образца, расчетная область показана на Рис. 1. Левая и нижняя границы представляют оси симметрии, правая граница движется вправо с постоянной

скоростью V_o, верхние границы свободны. Входные данные приведены ниже:

$K_0 = 975$, $\mu_0 = 369$, $k_{p0} = 1$, $c_o = \dfrac{K_o + 4/3\mu_o}{\rho_o} = 1$,

$k_\theta = 10^3$, $\Phi_\sigma = \sigma©:\sigma© - k_p^2$, $\Phi_\theta = \varepsilon_{\max} - 10^{-2}$,

$c_V = 1$, $k_q = 1$, $\beta = 0.0001$,

где $\varepsilon_{\max}$ - максимальная главная деформация, c_o - скорость звука, $V_o = 10^{-3} c_o$ - скорость движения правой границы. В начальный момент времени $\Phi_\theta \geq 0$ образец находится в недеформированном состоянии с нулевыми значениями скоростей, перемещений, пластических деформаций и поврежденности при безразмерной температуре $T_0 = 100$. Безразмерная интенсивность массового источника/стока тепла при его включении была $r = \pm 0.1$, зона его действия представляла прямоугольник (1.9, 0, 2.1, 1). Тепловые потоки на границах занулялись. Использовались лагранжевы подвижные конечно-элементные сетки, состоящие из первоначально одинаковых (квадратных или (лево/право)- ориентированных треугольных) ячеек с шагом 1/15, 1/30 и 1/60 в разных вариантах. Развитие узких зон локализации деформаций можно видеть на рис. 1. для трех случаев процесса: разрушение упругого материала (а), упругопластического материала (б), упругопластического материала при совместном действии растяжения и нагрева узкой вертикальной зоны под концентратором (в). Видно, что пластичность навязывает свое предпочтительное направление распространения зоны локализации деформаций.

При достаточно интенсивном нагреве разрушение упругопластического материала происходит как в упругом материале, а в режиме умеренного нагрева развиваются две "трещины": сначала косая, которая затем останавливается, а завершает разрушение вертикальная "трещина", развивающаяся в зоне интенсивного нагрева. Графики горизонтального смещения, среднего напряжения и максимальной главной деформации вдоль горизонтальной линии, пересекающей узкие зоны разрушения, показаны на рис. 2. Поведение этих характеристик типично для внутренних контактных границ и имитирует магистральную трещину в рамках континуального подхода.

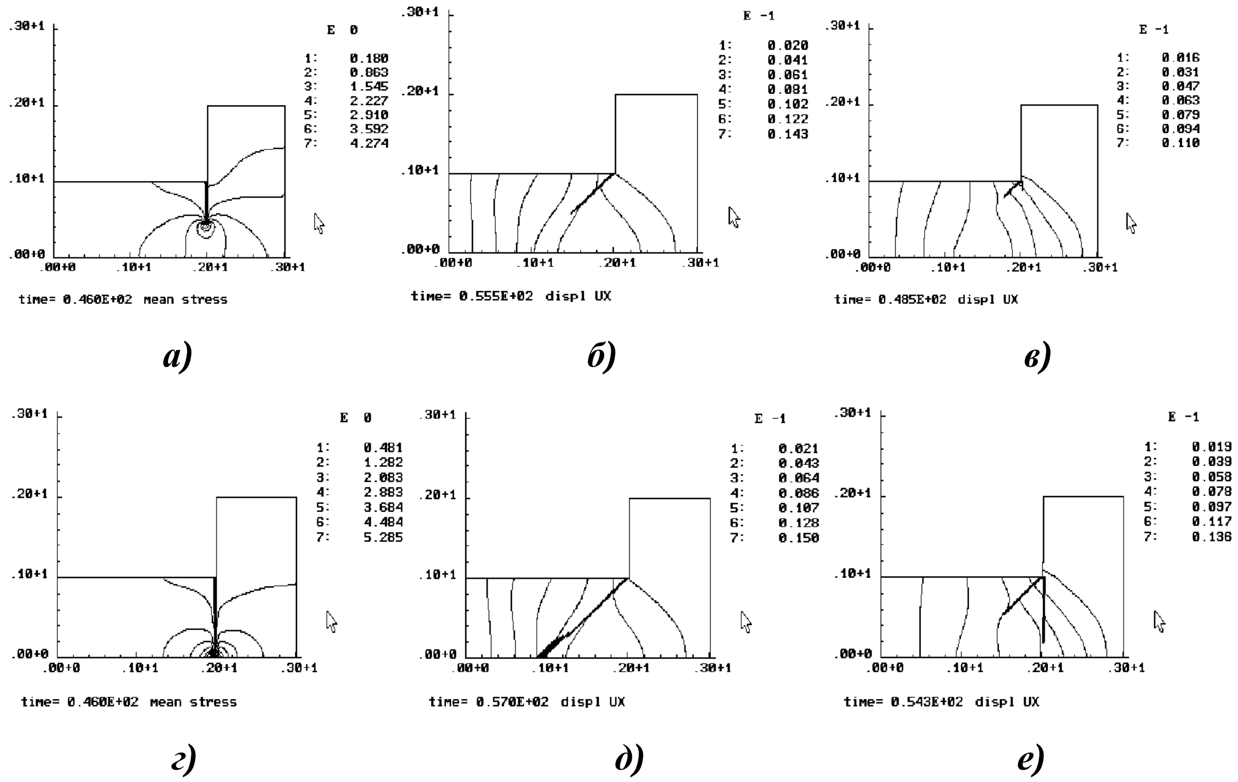
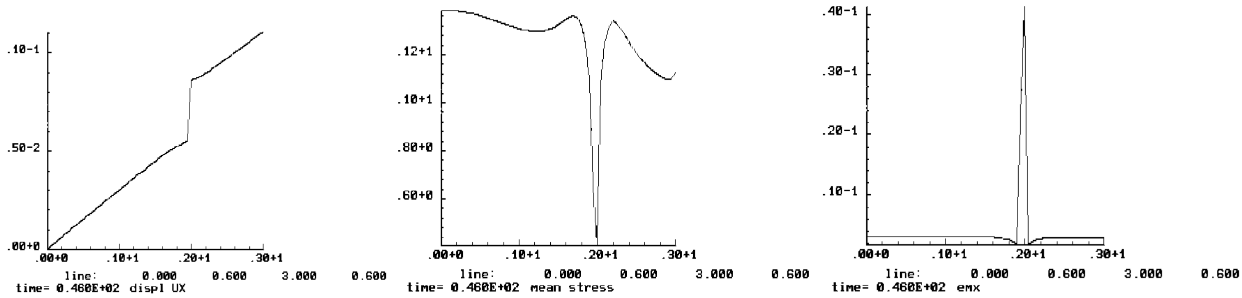


Рис. 1. Моды процесса разрушения для случаев упругого материала (а,г), упругопластического материала (б,д), упругопластического материала при совместном действии растяжения и нагрева узкой вертикальной зоны под концентратором.

Поврежденность и деформация в зоне разрушения имеют очень большой всплеск типа дельта-функции, напряжения падают до нуля, а смещения претерпевают резкий скачок.

Расчеты показали, что интенсивный нагрев ускоряет процесс разрушения, в то время как локальное охлаждение зоны предполагаемого разрушения замедляет ее развитие.



а) ***б)*** ***в)***

Рис. 2. Графики горизонтального смещения (а), среднего напряжения (б) и максимальной деформации (в) вдоль горизонтальной линии (0,0.6,3,0.6) для случая разрушения упругого материала, показанного на Рис. 1а. В остальных случаях качественное поведение такое же.

Временной шаг при появлении зоны разрушения резко уменьшается из-за ограничения приращения деформации на шаге по времени в связи с требованиями точности расчета. Процесс развития зон разрушения становится динамическим. Моды разрушения сохраняются при измельчении шага сетки и смене формы ячеек.

Работа поддерживалась Российским Фондом Фундаментальных Исследований по грантам 01-01-00659 и 01-00-00173.

Литература

1. Майнчен Дж. и Сак С. Метод расчета "Тензор", Вычислительные методы в гидродинамике, под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга, М., Мир, 1967, с. 185-211.
2. Работнов Ю.Н. Механика твердого деформируемого тела, М., Наука, 1979.
3. Krajcinovic O., Lamaitre J. (1987, Editors) Continuum Damage Mechanics. Theory and Application. (CISM, Lectures, Udina) Springer-Verlag, Vienna
4. Lamaitre J., Chaboche J.L. Mechanics of Solid Materials, Cambridge Univ. Press, UK, 1990.
5. Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред, Успехи механики, 1985, т.8, N. 4, с. 21-65.
6. Кукуджанов В.Н. Микроскопическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций, Изв. РАН, МТТ, N. 5, 1999.
7. Кондауров В.И. Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. N4. С. 133-139.
8. Аптуков В.Н. Модель термоупругопластической поврежденной среды. Приложение к откольному разрушению. ФГВ, 1986, т.22, N.6, с.120-130.
9. Глушко А.И. Об одном подходе к разрушению горных пород // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. N3. С. 130-135.
10. Lemaitre J. A course on Damage Mechanics. Springer-Verlag, 1992.
11. Sluis L.J., De Borst R., Muhlhaus. H.B., Int. J. Solids and Struct.,30, 1993, 1153-71.
12. Kukudzhanov V.N., Bourago N.G., Kovshov A.N., Ivanov V.L., Shneiderman D.N. On the problem of Damage and Localization of Strains. Preprint 1995:10. Goteborg: Chalmers Univ.Technol., 1995. 35 p.

13. Ковшов А.Н. О локализации деформаций в неупругом слое, вызванной движением массивного штампа // Изв. РАН. МТТ. 1996. N4. С. 47-53.
14. Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел, Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999, 600 с.
15. Бураго Н.Г., Глушко А.И., Ковшов А.Н., Термодинамический метод получения определяющих уравнений для моделей сплошных сред, Известия РАН, МТТ, N.6, 2000, с. 4-15.
16. Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Решение упругопластических задач методом конечных элементов. Пакет прикладных программ "АСТРА": Препринт 326. М.: ИПМ АН СССР, 1988. 68 с.