



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.4.05

УДК 539.3

АНИЗОТРОПИЯ УСТАЛОСТНЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Н.Г. Бураго¹, И.С. Никитин^{1,2,3}, П.А. Юшковский³, В.Л. Якушев²

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия

²Институт автоматизации проектирования Российской академии наук, Москва, Россия

³Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 19 октября 2016 г.

Принята: 12 декабря 2016 г.

Опубликована: 30 декабря 2016 г.

Ключевые слова:

усталостная прочность, анизотропия усталостных свойств, напряженно-деформированное состояние, диск переменной толщины, циклическое нагружение, ряды Фурье.

АННОТАЦИЯ

В работе предложено обобщение критерия многоосного усталостного разрушения на случай сплава со структурной анизотропией усталостных свойств. В основе этого обобщения лежит замена второго инварианта девиатора напряжений, входящего в критерий, на функцию Хилла, предложенную им для описания анизотропной пластичности металлов. Эффект зависимости пределов усталости от оси нагружения при одноосных усталостных испытаниях образцов с текстурой отмечен в различных источниках. Соответствующая текстура, как правило, наводится в технологических процессах изготовления полуфабрикатов (в первую очередь – прокатки).

Разработан метод экспресс-расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) упругого кольцевого диска переменной толщины (диска компрессора газотурбинного двигателя). Циклический режим нагружения определяется полетными циклами и соответствует режиму малоциклового усталости. С помощью упрощающих гипотез о зависимости решения от координат по толщине диска и в окружном направлении выведена система обыкновенных дифференциальных уравнений для расчета радиального распределения напряжений и смещений в диске переменной толщины. Предложена и реализована численная процедура решения полученных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанная на методе ортогональной прогонки.

На основе предложенного критерия многоосного усталостного разрушения с параметрами титанового сплава и результатов расчета НДС получены распределения долговечности вращающегося диска компрессора газотурбинного двигателя под действием центробежных нагрузок в диске и лопатках. Определены опасные сечения, зоны и сроки зарождения усталостного разрушения в диске с учетом влияния анизотропии усталостных свойств. Путем численного моделирования обнаружено существенное падение долговечности в окрестности обода диска.

© ПНИПУ

© **Бураго Николай Георгиевич** – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: burago@ipmnet.ru
Никитин Илья Степанович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, e-mail: i_nikitin@list.ru
Юшковский Павел Анатольевич – аспирант, e-mail: abrahamas.23@gmail.com
Якушев Владимир Лаврентьевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, e-mail: yakushev@icad.org.ru

Nikolay G. Burago – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, e-mail: burago@ipmnet.ru

Ilya S. Nikitin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Principal Researcher, e-mail: i_nikitin@list.ru

Pavel A. Yushkovskiy – Postgraduate Student, e-mail: abrahamas.23@gmail.com

Vladimir L. Yakushev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Principal Researcher, e-mail: yakushev@icad.org.ru

ANISOTROPY OF MATERIAL FATIGUE PROPERTIES AND ITS EFFECT ON DURABILITY OF STRUCTURAL ELEMENTS

N.G. Burago¹, I.S. Nikitin^{1,2,3}, P.A. Yushkovsky³, V.L. Yakushev²

¹Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

²Institute for Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

³Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 19 October 2016
Accepted: 12 December 2016
Published: 30 December 2016

Keywords:

fatigue, anisotropy of fatigue properties, stress-strain state, disk of variable thickness, cyclic loading, Fourier series.

ABSTRACT

The generalization of the criterion of multiaxial fatigue failure is proposed for the case of the alloy with the anisotropy of fatigue properties. The second invariant of stress deviator is replaced by the Hill's function that is usually used to describe anisotropic plasticity of metals. In various studies the dependence of fatigue limit on the axis of loading is investigated for samples with texture at uniaxial fatigue tests. The texture is typically induced during manufacturing semi-finished products (primarily – in rolling).

In present study we develop a method for express calculation of stress-strain state (SSS) for the elastic annular disk of variable thickness (disk of the gas turbine engine compressor) for the mode of low-cycle fatigue (flight cycles). Simplified representations are used for dependence of solution on coordinates along the disk thickness (the power series) and in the circumferential direction (the Fourier series). For the radial distribution of stresses and displacements the systems of ordinary differential equations have been derived and solved by the orthogonal sweep method.

Proposed criteria of multiaxial fatigue and results are used to calculate the distributions of fatigue durability for typical disk of gas turbine taking into account the centrifugal forces. Location and time to appearance of fatigue failure zones determined accounting the influence of the anisotropy of fatigue properties. The calculations indicated that the significant decrease of the fatigue durability is in the vicinity of the disk rim.

© PNRPU

Введение

В настоящее время существует несколько основных типов критериев и моделей усталостного разрушения, позволяющих оценить число циклов нагружения образца материала или элемента конструкции до разрушения по напряженному состоянию [1–4]. Ранее в работах [5–7] исследовалось напряженно-деформированное состояние и усталостная долговечность титановых дисков компрессора газотурбинного двигателя в полетных циклах нагружения. Для этого был предложен метод определения параметров изотропных многоосных критериев усталостного разрушения [8] по результатам одноосных испытаний при различных коэффициентах асимметрии цикла. Там же на основе расчетов МКЭ были определены зоны зарождения усталостных микротрещин в окрестности ободной части диска. Эти зоны близки к наблюдаемым при эксплуатации данного элемента конструкции [9], но смещены к центральной части обода. Для уточнения расположения этих зон была выдвинута гипотеза о влиянии анизотропии усталостных свойств титанового сплава, возникающей из-за текстуры, наведенной в технологических процессах изготовления полуфабрикатов (в первую очередь – прокатки). Такую анизотропию усталостных свойств называют структурной. В данной работе рассматриваются эффекты влияния только структурной анизотропии, влияние конструкционной анизотропии, связанной с накоплением усталостных повреждений [10–12], не учитывается. Следует заметить, что наведенная текстура может приводить и к анизотропии упругих свойств материала, однако влияние этого фактора требует отдельного экспериментального исследования и в данной работе

также не рассматривается. Учет структурной усталостной анизотропии позволяет определить те контактные зоны диска и лопаток (из множества имеющихся по числу лопаток), где критерий усталостного разрушения выполняется при минимальной долговечности.

Эффект зависимости пределов усталости от оси нагружения при одноосных усталостных испытаниях образцов с текстурой отмечен в различных источниках [13, 14]. На рис. 1 приведены полученные в работе [15] результаты, показывающие зависимость числа циклов до разрушения (N) от величины максимального напряжения в цикле (σ [кгс/мм²]) для титанового сплава при различной ориентации осей текстуры и нагружения.

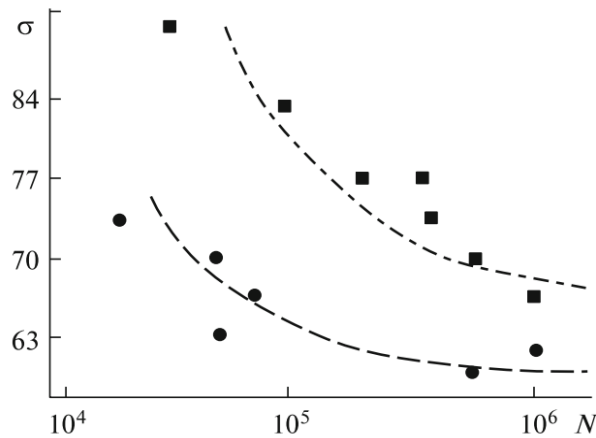


Рис. 1. Усталостная долговечность текстурированного сплава Ti-6Al-4V [8]. Оси ориентации текстуры и нагружения в опытах были параллельны (черные кружки) и перпендикулярны (черные квадраты)

Fig. 1. Fatigue durability of the textured alloy Ti-6Al-4V [8]. Axes of the texture orientation in the tests were parallel (black circles) and perpendicular (black squares)

В работах [16,17] было предложено обобщение многоосного усталостного критерия на основе уравнения для повреждаемости типа Лемэтра-Шабоша на случай сплава с анизотропией усталостных свойств. В основе этого обобщения лежит замена второго инварианта девиатора напряжений на функцию Хилла, предложенную им [18] для описания анизотропной пластичности металлов:

$$\Sigma_{\text{Hill}} = \sqrt{H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 2N\sigma_{12}^2 + 2L\sigma_{13}^2 + 2M\sigma_{23}^2}.$$

В [17] также приведены параметры функции Хилла F , G , H , L , M , N для титанового сплава Ti-6Al-4V, которые определены по результатам одноосных усталостных испытаний вдоль и поперек направления прокатки.

1. Критерии многоосного усталостного разрушения материалов с учетом анизотропии усталостных свойств

В данной работе идея замены второго инварианта девиатора напряжений на функцию Хилла положена в основу обобщения классического критерия многоосного усталостного разрушения Сайнса [19] на анизотропный случай. Процедура определения параметров для этого критерия, а также классических критериев [20, 21] предложена в [8]. Кратко опишем результаты ее применения для рассматриваемого анизотропного случая. Для

придания единообразной формы изотропным и анизотропным критериям вместо функции Хилла введем связанное с ней эквивалентное напряжение Хилла по формуле

$$\tau_{\text{Hill}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \tilde{G}(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + \tilde{F}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 2\tilde{N}\Delta\sigma_{12}^2 + 2\tilde{L}\sigma_{13}^2 + 2\tilde{M}\sigma_{23}^2},$$

$$\tilde{G} = G/H, \quad \tilde{F} = F/H, \quad \tilde{N} = N/H, \quad \tilde{M} = M/H, \quad \tilde{L} = L/H.$$

Модель Сайнса

а) *Изотропный критерий Сайнса.* Обобщение одноосной усталостной кривой на случай многоосного напряженного состояния согласно [19] имеет вид

$$\Delta\tau/2 + \alpha_s \sigma_{\text{mean}} = S_0 + AN^\beta, \quad \sigma_{\text{mean}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)_{\text{mean}},$$

$$\Delta\tau = \frac{1}{3} \sqrt{(\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{22})^2 + (\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{33})^2 + (\Delta\sigma_{22} - \Delta\sigma_{33})^2 + 6\Delta\sigma_{12}^2 + 6\Delta\sigma_{13}^2 + 6\Delta\sigma_{23}^2},$$

где σ_{mean} – сумма главных напряжений, осредненная за цикл нагружения; $\Delta\tau$ – изменение октаэдрического касательного напряжения за цикл; $\Delta\tau/2$ – его амплитуда; α_s, S_0, A, β – параметры, определяемые по данным эксперимента.

В [8] подробно описана процедура определения параметров многоосного критерия по результатам одноосных экспериментов с разными коэффициентами асимметрии цикла. В изотропном случае параметры критерия Сайнса имеют вид

$$S_0 = \sqrt{2}\sigma_u/3, \quad A = 10^{-3\beta} \sqrt{2}(\sigma_B - \sigma_u)/3, \quad \alpha_s = \sqrt{2}(2k_{-1} - 1)/3, \quad k_{-1} = \sigma_u/(2\sigma_{u0}),$$

где σ_u и σ_{u0} – пределы усталости по амплитудным усталостным кривым при коэффициентах асимметрии цикла $R = -1$ и $R = 0$ соответственно; σ_B – предел прочности.

б) *Анизотропный критерий Сайнса.* Обобщение критерия Сайнса на анизотропный случай с учетом вышеописанной замены примем в виде

$$\Delta\tau_{\text{Hill}}/2 + \alpha_s \sigma_{\text{mean}} = S_0 + AN^\beta,$$

$$\Delta\tau_{\text{Hill}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{22})^2 + \tilde{G}(\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{33})^2 + \tilde{F}(\Delta\sigma_{22} - \Delta\sigma_{33})^2 + 2\tilde{N}\Delta\sigma_{12}^2 + 2\tilde{L}\Delta\sigma_{13}^2 + 2\tilde{M}\Delta\sigma_{23}^2},$$

$$\tilde{G} = G/H, \quad \tilde{F} = F/H, \quad \tilde{N} = N/H, \quad \tilde{M} = M/H, \quad \tilde{L} = L/H.$$

Вычисление параметров обобщенного критерия по схеме, изложенной в [8], дает следующий результат:

$$S_0 = \frac{\sqrt{1+\tilde{G}}}{3} \sigma_u, \quad A = 10^{-3\beta} \frac{\sqrt{1+\tilde{G}}}{3} (\sigma_B - \sigma_u), \quad \alpha_s = \frac{\sqrt{1+\tilde{G}}}{3} (2k_{-1} - 1).$$

Имея в виду конкретный расчетный пример, рассмотренный далее, приведем приближенные значения параметров для титанового сплава Ti-6Al-4V [8, 16, 17]: предел прочности $\sigma_B = 1100$ МПа; пределы усталости по амплитудным усталостным кривым при коэффициентах асимметрии $R = -1$ и $R = 0$ соответственно: $\sigma_u = 400$ МПа и $\sigma_{u0} = 300$ МПа; показатель степенной зависимости от числа циклов $\beta = -0,45$; модуль Юнга $E = 116$ ГПа;

модуль сдвига $G = 44$ ГПА; коэффициент Пуассона $\nu = 0,32$. Значения параметров Хилла для титанового сплава с анизотропными усталостными свойствами равны [17]: $F = 0,54, G = 0,34, H = 0,65, N = M = L = 2,34$.

2. Расчет напряженно-деформированного состояния вращающегося диска компрессора в полетных циклах нагружения

В данном разделе решается задача определения напряженно-деформированного состояния и оценки усталостной долговечности диска компрессора газотурбинного двигателя, изготовленного из титанового сплава с анизотропными усталостными свойствами. Основным силовым фактором в полетных циклах нагружения диска компрессора газотурбинного двигателя являются центробежные силы. Расчету дисков на подобные воздействия посвящена обширная литература [22–25]. Здесь предлагается метод экспресс-расчета напряженно-деформированного состояния упругого кольцевого диска переменной толщины, основанный на редукции трехмерной системы теории упругости к последовательности систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.1. Упрощенная система обыкновенных дифференциальных уравнений

В цилиндрической системе координат r, ϑ, z кольцевой диск $a \leq r \leq b$ имеет переменное сечение $-h(r) \leq z \leq h(r)$. Полная трехмерная система уравнений теории упругости в цилиндрической системе координат имеет вид [26]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{r} + \rho \omega^2 r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\vartheta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Напряжения связаны с деформациями законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \varepsilon_{rr} + \lambda \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \lambda \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \lambda \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{zz} = \lambda \varepsilon_{rr} + \lambda \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{r\vartheta} &= 2\mu \varepsilon_{r\vartheta}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu \varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\vartheta z} = 2\mu \varepsilon_{\vartheta z}. \end{aligned}$$

Соотношения между деформациями и перемещениями имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\vartheta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{\vartheta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Здесь λ, μ – модули Ламе; ρ – плотность материала диска. В дальнейшем используются безразмерные напряжения, отнесенные к $\lambda + 2\mu$, и безразмерные пространственные переменные, отнесенные к внутреннему радиусу диска a .

Граничные условия при $z = h(r)$ имеют вид

$$\sigma_{rz} - h'\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\vartheta z} - h'\sigma_{r\vartheta} = 0, \quad \sigma_{zz} - h'\sigma_{rz} = 0.$$

Внутренний контур ($r = a$) считается свободным от напряжений, на внешнем контуре ($r = b$) приложены периодические по окружной координате ϑ нагрузки $\sigma_{r\vartheta}$, обусловленные контактом с лопатками, нагруженными центробежными силами.

С учетом предполагаемой периодической зависимости радиальных нагрузок на внешнем контуре диска от угла и малой толщины диска представим смещения в следующем виде:

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + u_{2n}z^2 + u_{4n}z^4) \cos n\vartheta,$$

$$u_{\vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n + v_{2n}z^2 + v_{4n}z^4) \sin n\vartheta,$$

$$u_z = \sum_{n=0}^{\infty} (w_{1n}z + w_{3n}z^3) \cos n\vartheta.$$

Соответствующее представление напряжений имеет вид

$$\sigma_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_n + \sigma_{2n}z^2) \cos n\vartheta, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (s_n + s_{2n}z^2) \cos n\vartheta,$$

$$\sigma_{zz} = \sum_{n=0}^{\infty} (\Sigma_n + \Sigma_{2n}z^2 + \Sigma_{4n}z^4) \cos n\vartheta, \quad \sigma_{r\vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n + \tau_{2n}z^2) \sin n\vartheta,$$

$$\sigma_{rz} = \sum_{n=0}^{\infty} (p_{1n}z + p_{3n}z^3) \cos n\vartheta, \quad \sigma_{\vartheta z} = \sum_{n=1}^{\infty} (T_{1n}z + T_{3n}z^3) \sin n\vartheta.$$

Коэффициенты рядов Фурье $\sigma_n, \tau_n, u_n, v_n, w_{1n}, p_{1n}, \sigma_{2n}, \tau_{2n}, u_{2n}, v_{2n}$ и т.д. являются новыми (вспомогательными) искомыми функциями радиальной переменной r .

Подставим выражения для смещений и напряжений в исходную систему уравнений равновесия, закона Гука и приравняем члены при одинаковых степенях z , вплоть до z^3 . В итоге получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для вспомогательных переменных при различных $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\sigma'_n = -\sigma_n / r + s_n / r - n\tau_n / r - p_{1n}, \quad \tau'_n = -2\tau_n / r + ns_n / r - T_{1n},$$

$$u'_n = \sigma_n - \lambda U_n / r - \lambda w_{1n}, \quad v'_n = \tau_n / \mu + V_n / r,$$

$$p'_{1n} = -p_{1n} / r - nT_{1n} / r - 2\Sigma_{2n}, \quad w'_{1n} = p_{1n} / \mu - 2u_{2n},$$

$$s_n = \lambda u'_n + U_n / r + \lambda w_{1n}, \quad \Sigma_n = \lambda u'_n + \lambda U_n / r + w_{1n}, \quad T_{1n} = \mu(2v_{2n} - nw_{1n} / r),$$

$$\sigma'_{2n} = -\sigma_{2n} / r + s_{2n} / r - n\tau_{2n} / r - 3p_{3n}, \quad \tau'_{2n} = -2\tau_{2n} / r + ns_{2n} / r - 3T_{3n},$$

$$u'_{2n} = \sigma_{2n} - \lambda U_{2n} / r - 3\lambda w_{3n}, \quad v'_{2n} = \tau_{2n} / \mu + V_{2n} / r,$$

$$s_{2n} = \lambda u'_{2n} + U_{2n} / r + 3\lambda w_{3n}, \quad \Sigma_{2n} = (h^2\sigma_n + h^2\sigma_{2n} - \Sigma_n - \Sigma_{4n}h^4) / h^2,$$

$$p_{3n} = (h'\sigma_n + h'h^2\sigma_{2n} - p_{1n}h) / h^3, \quad T_{3n} = (h'\tau_n + h'h^2\tau_{2n} - T_{1n}h) / h^3,$$

$$w_{3n} = (\sum_{2n} -\lambda u'_{2n} - \lambda U_{2n} / r) / 3, \quad \sum_{4n} = -(p'_{3n} + p_{3n} / r + nT_{3n} / r) / 4,$$

$$u_{4n} = (p_{3n} / \mu - w'_{3n}) / 4, \quad v_{4n} = (T_{3n} / \mu + nw_{3n} / r) / 4,$$

где $U_n = nv_n + u_n$, $V_n = nu_n + v_n$, $U_{2n} = nv_{2n} + u_{2n}$, $2V_n = nu_{2n} + v_{2n}$.

Ранее эта система уравнений была получена в [7], однако там решалась усеченная дифференциальная система для четырех главных коэффициентов разложения σ_n , τ_n , u_n , v_n . В данном случае решается полная связанная система уравнений для всех выписанных коэффициентов рядов Фурье по угловой координате.

При $n = 0$ эта система совпадает с известными уравнениями осесимметричного деформирования диска переменной толщины [23, 27].

Граничные условия принимают вид

$$\text{при } r = a: \sigma_n = 0, \sigma_{2n} = 0, \tau_n = 0, \tau_{2n} = 0, p_{1n} = 0, p_{3n} = 0, \quad (1)$$

$$\text{при } r = b: \sigma_n = \sigma_{bn}, \sigma_{2n} = 0, \tau_n = \tau_{bn}, \tau_{2n} = 0, p_{1n} = 0, p_{3n} = 0.$$

Для определения значений σ_{bn} будем считать каждую лопатку пластиной прямоугольного сечения шириной d . Число лопаток равно N_0 , поэтому $n = 0, N_0, 2N_0, 3N_0 \dots$. Радиальные напряжения σ_{r_b} , которые моделируют центробежное воздействие от лопаток и согласованы с ним по амплитуде [27]:

$$\sigma_{r_b} = S_0, |\vartheta| \leq \delta, \quad S_0 = \rho\omega^2 (b_1^2 - b^2) / 2, \quad \delta = d / (2b) \ll 1,$$

где b и b_1 – внутренний и внешний радиус лопаток кольцевого диска.

Периодическая функция распределения радиального напряжения σ_{r_b} на внешнем контуре (при $r = b$) раскладывается в ряд Фурье (один период $-\pi / N_0 < \vartheta < \pi / N_0$):

$$\sigma_{r_b} = \sum \sigma_{bn} \cos(n\vartheta), \quad \sigma_{b0} = S_0 N_0 \delta / (2\pi), \quad \sigma_{bn} = 2S_0 \sin(kN_0\delta / 2) / (k\pi). \quad (2)$$

2.2. Численный метод и результаты расчетов

Таким образом, для различных n необходимо решать двухточечные краевые задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями (1) с учетом выражений (2) для коэффициентов разложения нагрузок в ряд Фурье по угловой координате. Исследование поведения собственных чисел матрицы коэффициентов системы показало, что они быстро растут с увеличением номера n , поэтому полученная система уравнений является «жесткой». Стандартные конечно-разностные методы решения [28] полной системы уравнений, в том числе и неявные, которые применялись ранее в [7] для решения усеченной системы, не позволяют получить численное решение. Поэтому для решения двухточечной краевой задачи была использована процедура ортогональной прогонки [29–30]. После этого компоненты напряжений определялись суммированием рядов Фурье. Количество членов рядов Фурье при суммировании для практической сходимости не превышало 20.

Для расчетов были выбрана форма диска, верхняя половина сечения которого показана на рис. 2, a : $a = 0,05$ м, $b = 0,4$ м, $h = 0,035$ м, значения параметров $\omega = 600$ 1/с, $\lambda = 78$ МПа, $\mu = 44$ МПа, $\rho = 4370$ кг/м³ (титановый сплав).

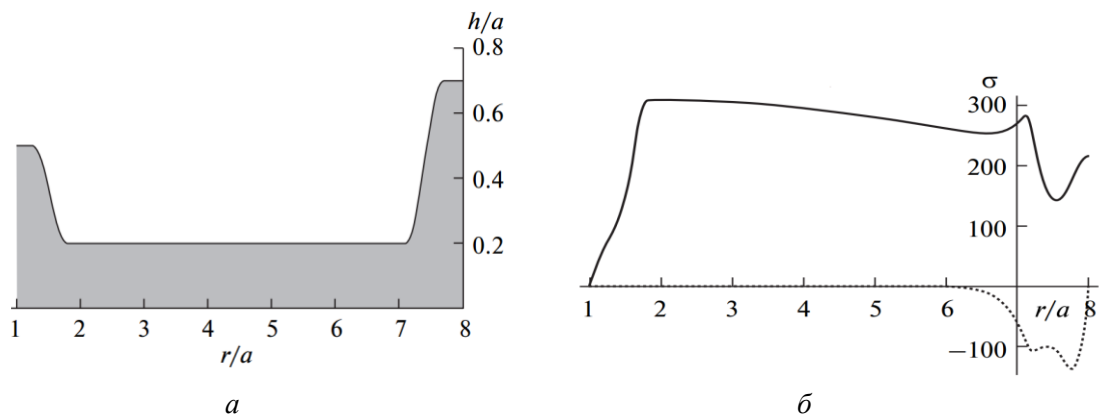


Рис. 2. Форма диска (*a*) и распределение напряжений (*б*)

Fig. 2. Disk shape (*a*) and stress distribution (*b*)

На рис. 2, *б* показано распределение компонент напряжений по радиальной координате при $\vartheta = \vartheta_0 = 1,074^\circ$ (правый край корня лопатки) и при $z = 0$. Сплошной линией показана компонента σ_{rr} , пунктирной линией – компонента $\sigma_{r\vartheta}$. Таким образом, с помощью полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений удалось приближенно решить трехмерную по своей сути задачу теории упругости и определить многоосное напряженное состояние диска.

3. Влияние анизотропии усталостных свойств на зоны зарождения разрушения и долговечность конструкции

На основе критериев многоосного усталостного разрушения [8] были получены распределения логарифма долговечности $\log N(r)$ (количества циклов нагружения до разрушения) по радиальной координате для титанового сплава с изотропными усталостными свойствами и с пределом усталости ~ 350 МПа. Использован модифицированный критерий Сайнса, который в анизотропном случае имеет следующий вид:

$$\Delta\tau_{\text{Hill}} / 2 + \alpha_s \sigma_{\text{mean}} = S_0 + AN^\beta.$$

В этом случае лопатки, ориентированные под разными углами φ к выделенному направлению x , будут находиться в разных условиях с точки зрения определения компонент напряжений, входящих в комбинацию Хилла:

$$\Delta\tau_{\text{Hill}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{22})^2 + \tilde{G}(\Delta\sigma_{11} - \Delta\sigma_{33})^2 + \tilde{F}(\Delta\sigma_{22} - \Delta\sigma_{33})^2 + 2\tilde{N}\Delta\sigma_{12}^2 + 2\tilde{L}\Delta\sigma_{13}^2 + 2\tilde{M}\Delta\sigma_{23}^2}.$$

Соответствующие компоненты напряжений вычисляются по формулам

$$\sigma_{11} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta}) / 2 + (\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}) \cos 2\varphi / 2 + \sigma_{r\vartheta} \sin 2\varphi,$$

$$\sigma_{22} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\vartheta\vartheta}) / 2 + (\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr}) \cos 2\varphi / 2 - \sigma_{r\vartheta} \sin 2\varphi,$$

$$\sigma_{12} = (\sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{rr}) \sin 2\varphi / 2 + \sigma_{r\vartheta} \cos 2\varphi.$$

3.1. Распределения долговечности по радиальной координате для изотропной и анизотропной усталости

Распределения логарифма долговечности (далее – просто долговечности) по радиальной координате под лопаткой в центре корневого сечения $\vartheta=0$ и со смещением на $\vartheta=0,548^\circ$ при $z=0$ и $z=z_{\max}=h$ для титанового сплава с изотропными усталостными свойствами показаны на рис. 3–6.

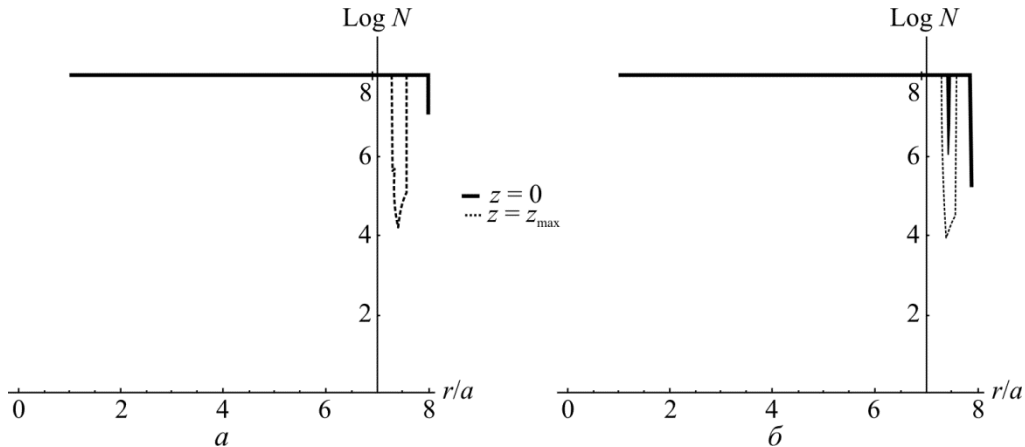


Рис. 3. Радиальное распределение долговечности (а) $\vartheta=0$, изотропная усталость (б) $\vartheta=0,548^\circ$
 Fig. 3. The radial distribution of durability (a) $\vartheta=0$, isotropic fatigue (b) $\vartheta=0,548^\circ$

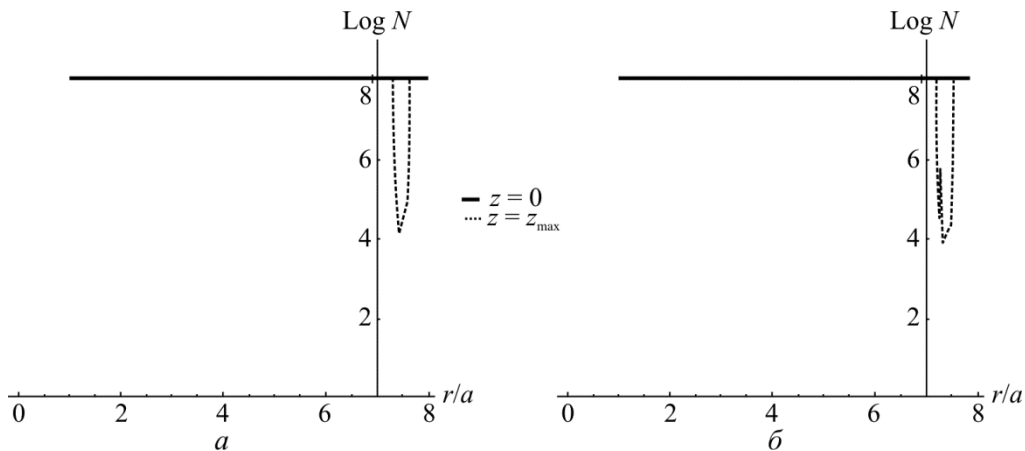


Рис. 4. Радиальное распределение долговечности (а) $\vartheta=0$, анизотропная усталость (б) $\vartheta=0,548^\circ$, $\varphi=0^\circ$

Fig. 4. The radial distribution of durability (a) $\vartheta=0$, anisotropic fatigue (b) $\vartheta=0,548^\circ$, $\varphi=0^\circ$

На этих рисунках значения логарифма долговечности, превышающие 8, обрезаются и приравниваются к 8. Видно, что и в изотропном, и в анизотропном случаях для данной формы диска опасным с точки зрения развития усталостного разрушения является сечение на внутренней части обода с максимальной производной толщиной диска по радиальной координате ($r=7,4$). В этом сечении долговечность приближается к опасному порогу 10^4 циклов (подразумеваются полетные циклы нагружения) при $z=z_{\max}=h$ (пунктирные линии на рис. 3–6). Минимальные значения долговечности получаются в смещенной от центра сечения точке $\vartheta=0,548^\circ$ в случае учета усталостной анизотропии

при значении $\varphi = 0^\circ$ (рис. 4, б). Соответствующая точка сечения внешнего обода диска (корневое сечение лопатки $r = 8$) имеет большие значения долговечности $\sim 10^{4,5}$ и менее опасна с точки зрения зарождения усталостной микротрещины.

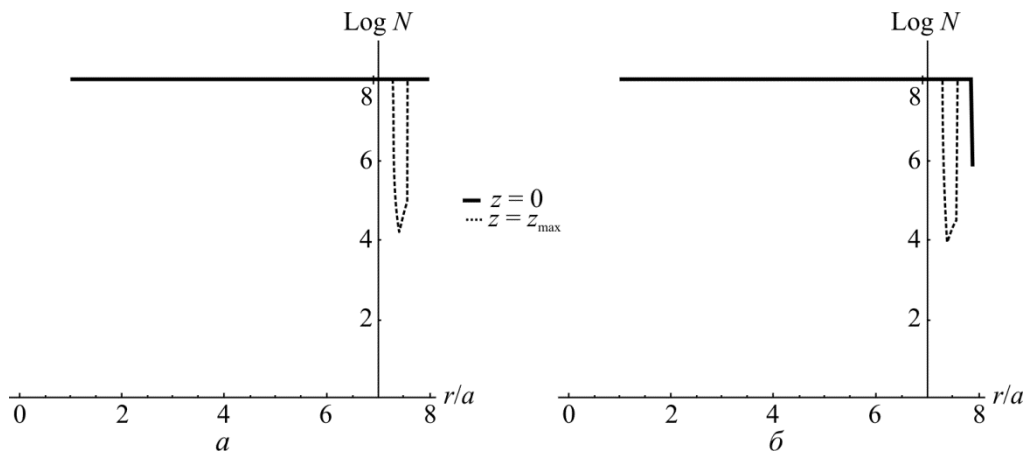


Рис. 5. Радиальное распределение долговечности (а) $\vartheta = 0$, анизотропная усталость (б) $\vartheta = 0,548^\circ$, $\varphi = 45^\circ$

Fig. 5. The radial distribution of durability (a) $\vartheta = 0$, anisotropic fatigue (b) $\vartheta = 0,548^\circ$, $\varphi = 45^\circ$

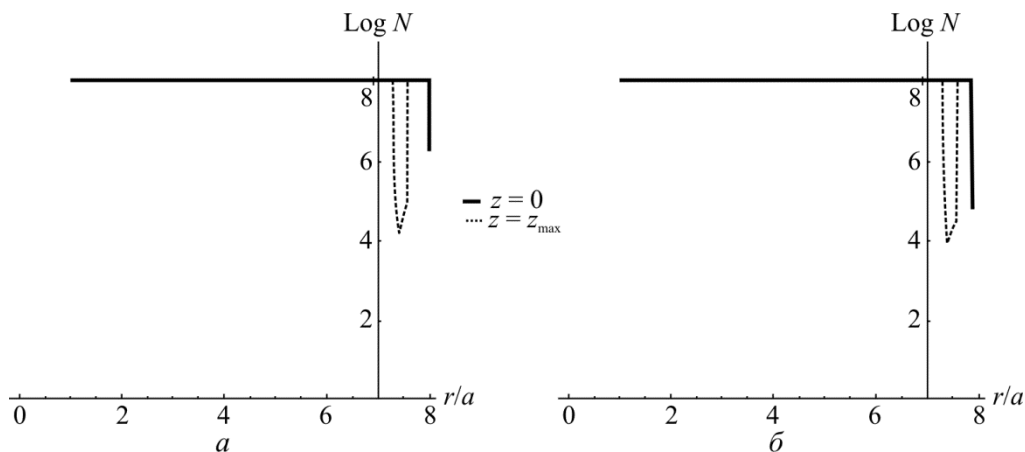


Рис. 6. Радиальное распределение долговечности (а) $\vartheta = 0$, анизотропная усталость (б) $\vartheta = 0,548^\circ$, $\varphi = 90^\circ$

Fig. 6. The radial distribution of durability (a) $\vartheta = 0$, anisotropic fatigue (b) $\vartheta = 0,548^\circ$, $\varphi = 90^\circ$

3.2. Изолинии долговечности на опасных сечениях для изотропной и анизотропной усталости

Изолинии долговечности в координатах z, ϑ в наиболее опасном сечении под лопаткой на внутренней части обода при $r = 7,4$ представлены на рис. 7. Полная прямоугольная зона под лопаткой занимает диапазон $-1,074^\circ < \vartheta < 1,074^\circ$ и $-0,7 < z < 0,7$, но ввиду симметрии на рис. 7 показаны долговечности для половины этой зоны от середины ($z = 0$) до края ($z = 0,7$).

Результаты расчетов показаны для сплава с изотропными и анизотропными усталостными свойствами при различных углах ориентации φ .

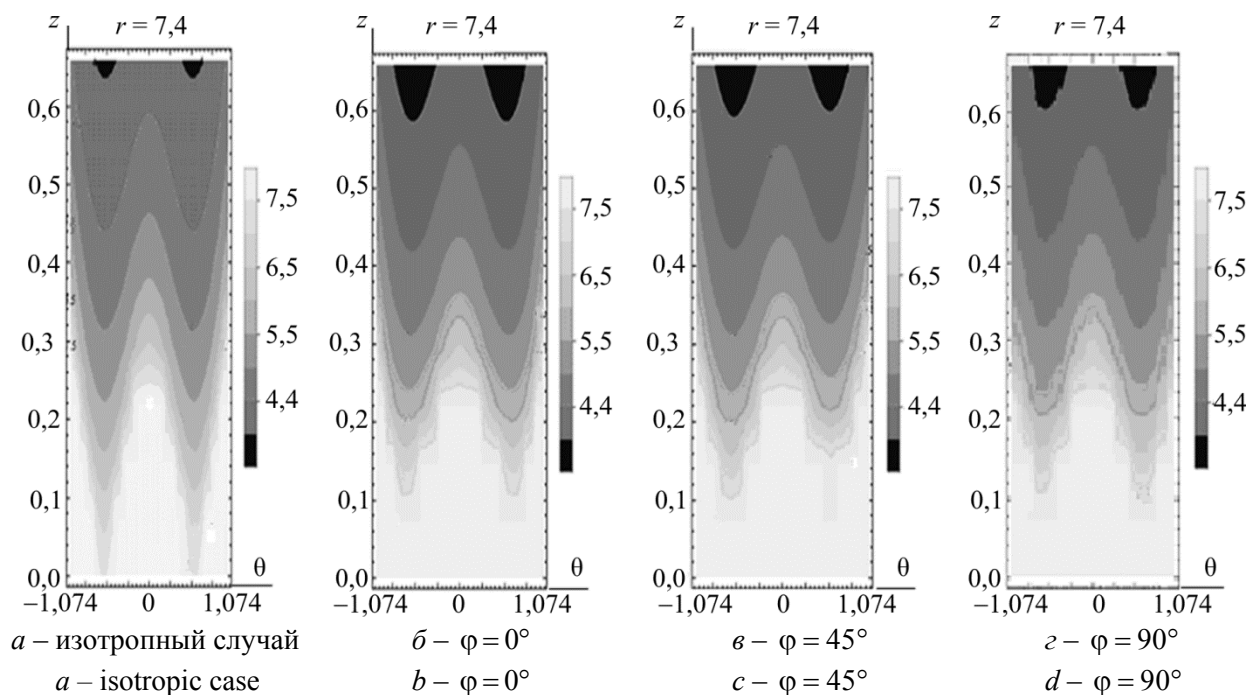


Рис. 7. Изополюсы долговечности в наиболее опасном сечении диска $r = 7,4$, $-1,074^\circ < \vartheta < 1,074^\circ$, $0 < z < 0,7$: изотропный (*a*) и анизотропные (*b–d*) случаи

Fig. 7. Contour plots of durability for the most dangerous disk section $r = 7,4$, $-1,074^\circ < \vartheta < 1,074^\circ$, $0 < z < 0,7$: isotropic (*a*) and anisotropic (*b–d*) cases

Из этих рисунков видно, что в анизотропном случае зоны минимальной долговечности с $N \sim 10^4$ здесь значительно больше, чем в изотропном (ср. рис. 7, *a* и рис. 7, *b–d*). Наименее долговечными выглядят сечения диска под лопатками, ориентированными под углом $\varphi = 0^\circ$ (см. рис. 7, *b*) к направлению оси анизотропной усталости (направлению прокатки, если говорить о технологическом процессе изготовления диска).

Во всех этих случаях результаты близки и для выбранных частот вращения принимают критические значения усталостной долговечности титанового диска $N \sim 10^4$ циклов, что является недопустимым для безопасной эксплуатации. Отметим, что наиболее опасной зоной для развития усталостного разрушения диска в полетных циклах разрушения в этих экспресс-расчетах, основанных на упрощенной модели, оказалась тыльная зона ободной части диска. Она локализована во внутренней части обода, в окрестности сечения с максимальными градиентами изменения толщины (при переходе от тонкой центральной части диска к утолщенной, ободной).

Заключение

Предложено обобщение критерия многоосного усталостного разрушения на случай титановых сплавов, обладающих анизотропными усталостными свойствами. Разработана процедура определения параметров критерия по результатам одноосных усталостных испытаний в направлении осей, по-разному ориентированных к выделенному направлению текстуры сплава.

Решена задача определения напряженно-деформированного состояния и оценки усталостной долговечности вращающегося диска переменного сечения под действием центробежных нагрузок в диске и лопатках. Получена приближенная система обыкновенных дифференциальных уравнений для напряжений и смещений кольцевого диска малой, но

значительно изменяющейся по радиальной координате толщины. На внешнем контуре диска задавались переменные и периодические по углу радиальные напряжения, которые моделировали центробежное воздействие от лопаток и были согласованы с ним по амплитуде. Учитывались распределенные центробежные нагрузки в самом диске. Циклические воздействия данного типа соответствуют полетным циклам нагружения «взлет-полет-посадка» (малоцикловая усталость).

На основе предложенных критериев многоосного усталостного разрушения в изотропном и анизотропном случаях были получены распределения долговечности по сечениям диска. Определены опасные сечения, зоны и сроки зарождения усталостного разрушения в диске.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-08-02392).

Библиографический список

1. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ. Предсказание. Предотвращение. – М.: Мир. 1984. – 624 с.
2. Fatigue testing and analysis. (Theory and Practice) / Y.-L. Lee, J. Pan, R.B. Hathaway, M. Barkey. – Elsevier B-N. Oxford, 2005. – 402 p.
3. Meggiolaro M.A., Miranda A.C., de Castro J. Comparison among fatigue life prediction methods and stress-strain models under multiaxial loading // Proceedings of 19th Int. Congress of Mech. Eng. – Brasilia, DF, 2007.
4. Kallmeyer A.R., Krgo A., Kurath P. Evaluation of multiaxial fatigue life prediction methodologies for Ti-6Al-4V // ASME J. Eng. Mater. Technol. – 2002. – Vol. 124. – P. 229–237.
5. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Анализ напряженного состояния контактной системы «диск-лопатка» газотурбинного двигателя. //Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 5–16.
6. Аэроупругий анализ элементов конструкции компрессора / Н.Н. Беклемишев, Н.Г. Бураго, А.Б. Журавлев, И.С. Никитин // Вестн. Моск. авиац. ин-та (национального исследовательского университета). – 2011. – Т. 18, № 5. – С. 3–22.
7. Бураго Н.Г., Никитин И.С., Юшковский П.А. Долговечность дисков переменной толщины с учетом анизотропии усталостных свойств // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – № 5. – С. 78–93.
8. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – № 6. – С. 22–33.
9. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. – Уфа: Монография, 2007. – 498 с.
10. Топоров Д.В., Ильченко Б.В., Яруллин Р.Р. Характеристики статической и малоцикловой прочности критических зон диска турбины // Труды Академэнерго. – 2010. – № 2. – С. 79–88.
11. Shlyannikov V.N., Yarullin R.R., Gizzatullin R.Z. Structural integrity prediction of turbine disk on a critical zone concept basis // Proceedings of 11th International Conference on Engineering Structural Integrity Assessment. ESIA11. – Manchester UK, EMAS Publishing, 2011. – P. 1–10.
12. Residual life prediction of power steam turbine disk with fixed operating time / B.V. Ilchenko, R.R. Yarullin, A.P. Zakharov, R.Z. Gizzatullin // Proceedings of 19th European Conference on Fracture. ECF19. – Kazan, Russia, 26-31 Aug. – 2012. – P. 1–8.
13. Ильин А.А., Колачев Б.А., Полькин И.С. Титановые сплавы. Состав, структура, свойства. – М.: ВИЛС-МАТИ, 2009. – 520 с.
14. Горынин И.В., Чечулин Б.Б. Титан в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1990. – 400 с.
15. Развитие текстуры в $\alpha + \beta$ – титановых сплавах / Соммер А., Кригер М., Фудзисиро С., Айлон Д. // Титан. Металловедение и технология: тр. 3-й Междунар. конф. по титану. – М.: ВИЛС, 1978. – Т. 3. – С. 87–96.
16. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy // Int. J. of fatigue. – 2009. – Vol. 31. – P. 2031–2040.

17. Marmi A.K., Habracken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling of Ti6Al4V alloy // Proc. 9 Int. Conf. of Multiaxial Fatigue and Fracture (ICMFF9). – Italy, Parma, 2010. – P. 559–567.
18. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. Лит., 1956. – 407 с.
19. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses. – Metal fatigue. – McGraw-Hill, 1959. – P. 145–169.
20. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel // Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals. – London, 1956. – P. 138–149.
21. Findley W. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending // J. of Eng. for Indust. – 1959. – P. 301–306.
22. Биргер И.А. Стержни, пластины, оболочки. – М.: Физматлит, 1992. – 392 с.
23. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопrotивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
24. Костюк А.Г. Динамика и прочность турбомашин. – М.: Изд-во МЭИ, 2007. – 476 с.
25. Иноземцев А.А., Нихамкин М.А., Сандрацкий В.Л. Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок. – М.: Машиностроение, 2008. – 204 с.
26. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
27. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
28. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
29. Кукуджанов В.Н. Вычислительная механика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2006. – 320 с.
30. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

References

1. Collins J.A. Povrezhdenie materialov v konstruktsiiakh. Analiz. Predskazanie. Predotvrashchenie. [Failure of Materials in Mechanical Design]. Analysis. Prediction. Prevention]. Moscow: Mir, 1984, 624 p.
2. Lee Y.-L., Pan J., Hathaway R.B., Barkey M. Fatigue testing and analysis. (Theory and Practice). Oxford: Elsevier B-H, 2005, 402 p.
3. Meggiolaro M.A., Miranda A.C., de Castro J. Comparison among fatigue life prediction methods and stress-strain models under multiaxial loading. *Proceedings of 19th Int. Congress of Mech. Eng.*, DF, 2007.
4. Kallmeyer A.R., Krgo A., Kurath P. Evaluation of multiaxial fatigue life prediction methodologies for Ti-6Al-4V// *ASME J. Eng. Mater. Technol.*, 2002, vol. 124, pp. 229-237.
5. Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. Analiz naprjazhennogo sostojanija kontaktnoj sistemy «disk-lopalka» gazoturbinного dvigatelja [Stress state analysis of gas turbine engine contact system “disc-blades”]. *Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 5-16.
6. Beklemishev N.N., Burago N.G., Zhuravlev A.A., Nikitin I.S. Analiz napriazhennogo sostoianiia kontaktnoi sistemy «disk-lopalka» gazoturbinного dvigatelja [Aeroelastic analysis of the elements of compressor's structure]. *Vestnik Moskovskogo aviacionnogo insituta (nacional'nogo issledovatel'skogo universiteta)*, 2011, vol. 18, no. 5, pp. 3-22.
7. Burago N.G., Nikitin I.S., Yushkovskii P.A. Dolgovechnost' diskov peremennoj tolshhiny s uchetom anizotropii ustalostnyh svoystv [Lifetime of disks of variable thickness with anisotropy of fatigue properties taken into account]. *Mehanika tverdogo tela. Izvestija Rossijskoj akademii nauk*, 2015, no. 5, pp. 78-93.
8. Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. Modeli mnogoosnogo ustalostnogo razrusheniia i otsenka dolgovechnosti elementov konstruktsii [Models of multiaxial fatigue and life time estimation of structural elements]. *Mech. Solid.*, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 22-33.
9. Shanyavskiy A.A. Modelirovanie ustalostnyh razrushenij metallov [Modeling of metal fatigue fracture]. Ufa: «Monografija», 2007, 498 p.

10. Toporov D.V., Ilchenko B.V., Yarullin R.R. Kharakteristiki staticheskoi i malotsiklovoi prochnosti kriticheskikh zon diska turbiny [Characteristics of static and low-cyclic strength of critical zones of turbine disk]. *Trudy Akademenergo*, 2010, no. 2, pp. 79-88.
11. Shlyannikov V.N., Yarullin R.R., Gizzatullin R.Z. Structural integrity prediction of turbine disk on a critical zone concept basis. *Proceedings of 11th International Conference on Engineering Structural Integrity Assessment. ESIA11*, Manchester: EMAS Publishing, 2011, pp. 1-10.
12. Ilchenko B.V., Yarullin R.R., Zakharov A.P., Gizzatullin R.Z. Residual life prediction of power steam turbine disk with fixed operating time. *Proceedings of 19th European Conference on Fracture. ECF19*, 26-31 Aug. Kazan, 2012, pp. 1-8.
13. Ilyin A.A., Kolachev B.A., Polkin I.S. Titanovye splavy. Sostav, struktura, svoistva. [Titanium alloys. The composition, structure, properties]. Moscow: VILS-MATI, 2009, 520 p.
14. Gorynin I.V., Chechulin B.B. Titan v mashinostroenii [Titan in mechanical engineering]. Moscow: Mashinostroenie, 1990, 400 p.
15. Sommer A., Kriger M., Fujisiro S. Razvitie tekstury v $\alpha + \beta$ – titanovykh splavakh. [Development of texture in $\alpha + \beta$ – titanium alloys]. *Proc. 3rd International conference on titan «Titan. Metallurgy and Technology»*. Moscow: Vserossiiskii institut legkikh splavov, 1978, vol. 3, pp. 87-96.
16. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy. *Int. J. of fatigue*. 2009, vol. 31, pp. 2031-2040.
17. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling of Ti6Al4V alloy. *Proc. 9 Int. Conf. of Multiaxial Fatigue and Fracture (ICMFF9)*, Parma, Italy, 2010, pp. 559-567.
18. Hill R. Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematical theory of plasticity]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhnicheskoye teoreticheskoy literatury, 1956, 407 p.
19. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses. Metal fatigue. *McGraw-Hill*, 1959, pp. 145-169.
20. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel. *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*, London, 1956, pp. 138-149.
21. Findley W. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *J. of Eng. for Indust*, 1959, pp. 301-306.
22. Birger I.A. Sterzhni, plastiny, obolochki [Beams, plates, shells]. Moscow: Fizmatlit, 1992, 392 p.
23. Birger I.A., Mavlyutov R.R. Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. Moscow: Nauka, 1986, 560 p.
24. Kostyuk A.G. Dinamika i prochnost' turbomashin [Dynamics and strength of turbomachines]. Izdatel'skii dom Moskovskogo energeticheskogo instituta, 2007, 476 p.
25. Inozemtsev A.A., Nikhamkin M.A., Sandratskiy V.L. Dinamika i prochnost' aviatsionnykh dvigatelei i energeticheskikh ustanovok [Dynamics and strength of aircraft engines and energy plants]. Moscow: Mashinostroenie, 2008, 204 p.
26. Nowacki W. Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow: Mir, 1975, 872 p.
27. Demyanushko I.V., Birger I.A. Raschet na prochnost' vrashchayushchikhsia diskov [Calculation of the strength of the rotating discs]. Moscow: Mashinostroenie, 1978, 247 p.
28. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. Raznostnye shemy [Difference schemes]. Moscow: Nauka, 1973, 400 p.
29. Kukudzhyanov V.N. Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred [Computational continuum mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2006, 320 p.
30. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1987, 600 p.