



Южный федеральный университет
(ЮФУ, г. Ростов-на-Дону)
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской академии наук
(ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва)

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сборник трудов

XVII Всероссийской конференции-школы
молодых исследователей
(пос. Абрау-Дюрсо, 11–16 сентября 2017 г.)

Ответственные редакторы:
Г. В. Муратова, И. Н. Шабас

Ростов-на-Дону – Таганрог
2017

УДК 519.6(063)
ББК 22.19я43
С568

С568 **Современные проблемы математического моделирования :**
сборник трудов XVII Всероссийской конференции-школы
молодых исследователей (пос. Абрау-Дюрсо, 11–16 сентября 2017 г.)
/ Южный федеральный университет ; Институт прикладной
математики им. М. В. Келдыша РАН ; отв. ред.: Г. В. Муратова, И.
Н. Шабас. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного
федерального университета, 2017. – 192 с.
ISBN 978-5-9275-2634-5

В сборнике представлены доклады участников XVII Всероссийской конференции-школы молодых исследователей «Современные проблемы математического моделирования», организованной Институтом прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН и Институтом математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, проходившей с 11 по 16 сентября 2017 года в поселке Абрау-Дюрсо, Новороссийск, Россия. В работе школы приняли участие представители научных центров Новосибирска, Москвы, Уфы, Сарова, Ростова-на-Дону и других городов.

Публикуется в авторской редакции.

УДК 519.6(063)
ББК 22.19я43

ISBN 978-5-9275-2634-5

© Южный федеральный университет, 2017

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРЕССОВАНИЯ И СПЕКАНИЯ ПОРОШКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ¹

Бураго Н.Г.* , Никитин И.С.**,**

* *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

** *Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

*** *МАИ – Национальный Исследовательский Университет, Москва*

Введение

В настоящей работе предложена модель прессования и спекания порошковых композитов как вариант теории упругопластического течения пористой среды. Представлен пример конечно-элементного расчета неоднородных процессов прессования и спекания.

Интенсивные теоретические исследования процессов спекания развернулись, начиная с 20-го века, в связи с широким внедрением новых порошковых композитов в технике. Подробный обзор истории исследований можно найти, например, в книге [1].

Для предсказания результатов спекания реальных изделий в условиях сложной геометрии и неоднородных состояний требуется численное моделирование на основе описания процессов в рамках механики сплошной среды. Для формулировки начально-краевых задач континуальной механики прежде всего необходимы определяющие соотношения, описывающие термомеханическое состояние материала прессовки при прессовании и спекании.

Процесс спекания наблюдается в двухкомпонентных порошковых композитных материалах пористых заготовок будущего изделия (прессовок), полученных уплотнением порошка давлением в пресс-формах. Исходно материал прессовок представляет собой смесь легкоплавких частиц, образующих матрицу композита, и тугоплавких, более прочных частиц твердой фазы. Объем пор между частицами заполнен воздухом. Если температура достаточна для плавления материала матрицы и имеет место смачивание частиц твердой фазы материалом матрицы, то поровые капиллярные силы поверхностного натяжения суммарно действуют как всестороннее сжимающее напряжение большой интенсивности, сравнимое по порядку величины с модулями упругости материалов композита. Эта, не обусловленная деформацией, нагрузка называется напряжением спекания и обеспечивает закрытие пор в процессе спекания.

¹Работа выполнена по Программе Президиума РАН

Прессование, то есть приложение давления, обусловленного контактом со стенками пресс-формы, также приводит к уплотнению материала, но такое уплотнение выражено гораздо слабее, поскольку внешнее контактное давление значительно уступает по интенсивности напряжению спекания.

Таким образом, композит подвергается последовательно прессованию и спеканию. Спекание реализуется при условии интенсивного нагрева, достаточного для плавления легкоплавкого материала матрицы, заполняющего пространство между частицами тугоплавкой фазы. Процесс жидкостного спекания прекращается или при исчезновении пор, или из-за отверждения материала матрицы.

В настоящей работе к расчету прессования и спекания применена модификация теории упругопластического течения [2]. В систему уравнений обычной теории добавлено кинетическое уравнение для расчета эволюции пористости при нетермомеханическом воздействии всесторонним сжимающим напряжением спекания, а свойства упругости зависят от величины пористости. Отличие от моделей вязкого течения состоит в том, что напряжения в прессовке обусловлены именно упругой частью деформации, ограничены условием пластичности и никак не связаны со скоростью деформации.

Модификация обычной теории упругопластического течения без больших усилий может быть внедрена в программах расчета упругопластических сред для адаптации к процессам спекания [3].

На модельных примерах численно продемонстрирована способность модифицированной теории упругопластического течения воспроизводить основные эффекты процессов прессования и спекания, включая определение остаточных пористости, напряжений и деформаций в прессовке, а также ее остаточной формы.

I Вывод определяющих соотношений для расчета процессов спекания

Набор термодинамических параметров состояния упругопластической пористой разрушающейся среды обычно содержит температуру T , деформацию ε , скорость деформации \mathbf{e} , пластическую деформацию ε_p , поврежденность θ и пористость ω . В этом случае свободную энергию φ и скорость диссипации энергии D в единице массы можно записать следующим образом

$$\varphi = \frac{K}{2\rho_p} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_p} + \beta(T - T_0) \right)^2 + h_1 \frac{\mu}{\rho} (\varepsilon' - \varepsilon'_p)^2 : \mathbf{I} + H(T - T_\omega) \varphi_\omega(T - T_\omega, \omega)$$

$$D = H(\Phi_p) k_y f_p + \frac{k_T}{T} \nabla T \cdot \nabla T + H(\Phi_\theta) k_\theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + H(\Phi_\omega) k_\omega \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2$$

здесь K и μ модули упругости всестороннего растяжения-сжатия и сдвига, соответственно; ρ и ρ_p – плотности текущего и разгруженного состояний, соответственно; β – коэффициент температурного растяжения-сжатия, \mathbf{I} – тензорная единица, двоеточие обозначает двойное скалярное произведение, $h_1 = (1 - 2/3(\varepsilon : \mathbf{I}))^{-1}$; T_ω – температура плавления легкоплавкой составляющей, $H()$ обозначает функцию Хевисайда, равную единице для неотрицательных значений аргумента и нулю в противном случае. Функции параметров состояния выражают: $\Phi_p = 0$ – условие пластичности, Φ_θ – условие разрушения, Φ_ω – условие жидкостного спекания. Функциями параметров состояния также являются: функция k_y – радиус поверхности текучести, f_p – функция девиатора скорости пластической деформации, определяющая кинетику пластических деформаций изменения формы (упруго-пластичность, упруго-вязко-пластичность), k_T – коэффициент теплопроводности, функции k_θ и k_ω – определяют кинетику поврежденности и пористости, соответственно. В формулах (1)-(2) использованы пространственные тензоры напряженно-деформированного состояния, ∇ – оператор пространственного дифференцирования.

Выражения для свободной энергии и скорости диссипации максимально упрощены. Первое и второе слагаемые в выражении свободной энергии выражают упругую энергию объемных и сдвиговых упругих деформаций, причем только объемные деформации считаются большими, а девиатор упругих деформаций считается малым. Выражение энергии объемных деформаций является обычным, оно учитывает температурные деформации всестороннего расширения-сжатия (с коэффициентом β). Множитель h_1 во втором слагаемом приводит к упрощенной связи девиаторов напряжений и упругих деформаций, характерной для малых деформаций. Третье слагаемое выражает свободную энергию активных пор, которая зависит от пористости и температуры, причем включается только при достижении температуры плавления материала матрицы. Этот член отвечает за выражение для напряжения спекания.

Из выражений (1)-(2) и законов термодинамики выводятся следующие определяющие соотношения [2]:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \sigma', \quad \sigma' = 2\mu(\varepsilon' - \varepsilon_p'), \quad p = K \frac{\rho}{\rho_p} \left(\ln \frac{\rho}{\rho_p} + \beta(T - T_0) \right)$$

$$d\varepsilon_p'/dt = H(\sigma' : \sigma' - k_p^2) \lambda_p \sigma', \quad d\rho_p/dt = -\frac{\rho_p}{1 - \omega} \frac{d\omega}{dt}$$

$$d\theta/dt = -H(\Phi_\theta) k_\theta^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad d\omega/dt = -H(\omega) k_\omega^{-1} (p + \sigma_\omega)$$

$$\sigma_\omega = \rho \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} (1 - \omega), \quad \mathbf{q} = k_T \nabla T$$

Дополняя эти соотношения законами сохранения массы, импульса и энергии

$$d\rho/dt = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\rho d\mathbf{v}/dt = \nabla \cdot \sigma$$

$$\rho c_V dT/dt = \sigma : \nabla \otimes \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{q} + r$$

а также кинематическими соотношениями

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$$

$$\varepsilon = (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla - (\nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} \otimes \nabla))/2$$

$$\varepsilon' = \varepsilon - (\varepsilon : \mathbf{I})\mathbf{I}/3$$

получаем полную систему 15 уравнений относительно 15 искомых функций:

$$\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \varepsilon, \varepsilon', \omega, \rho, \rho_p, T, \mathbf{q}, \sigma, \sigma', p, \theta$$

среди которых можно выделить основные, для которых уравнения являются эволюционными

$$Y = (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \varepsilon', \omega, \rho, \rho_p, \theta, T)$$

Начальные условия имеют вид:

$$t = 0, \mathbf{x} \in V : Y = Y^0(\mathbf{x})$$

где V пространственная область решения с границей области S .

Граничные условия имеют вид:

$$t \geq 0, \mathbf{x} \in S_v \subseteq S : \mathbf{v} = \mathbf{v}_*(\mathbf{x}, t)$$

$$t \geq 0, \mathbf{x} \in S \setminus S_v : \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_*(\mathbf{x}, t)$$

$$t \geq 0, \mathbf{x} \in S_T \subseteq S : T = T_*(\mathbf{x}, t)$$

$$t \geq 0, \mathbf{x} \in S \setminus S_T : \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = Q_*(\mathbf{x}, t)$$

где \mathbf{n} - единичная внешняя нормаль к границе, а правые части граничных условий являются заданными функциями.

II Пример расчета прессования и спекания в неоднородном состоянии

Рассмотрим пример расчета двумерных процессов прессования и спекания для случая неоднородного термомеханического состояния безматричным вариантом метода конечных элементов [3]. Расчетная схема и начальная сетка показаны на Рис. 1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в печь помещен цилиндрическая заготовка квадратного сечения, полученная прессованием композитного порошка и имеющая равномерно распределенную

начальную пористость $\omega = 0.5$. Пусть левая граница является осью симметрии, правая и нижняя границы неподвижны, а на части верхней границы в течение времени $[0, t_1]$ действует внешнее давление $p(t)$, которая реализует процесс холодного прессования. Затем в течение времени $[t_1, t_2]$ нагрузка не действует и образец разгружается. В классической теории пластичности, при снятии нагрузки материал мгновенно разгружается и сохраняет свое напряженно-деформированное состояние неизменным.

В применяемой модифицированной теории закон сжимаемости описывает вязкое поведение композита, поэтому релаксация напряжений происходит постепенно. Материал пористый и обладает свойством необратимой объемной сжимаемости, кинетическое уравнение для пористости связано непосредственно с уравнением для объемной пластической деформации и описывает объемную ползучесть. Причем необратимые изменения пористости и одновременно необратимый рост объемной пластической деформации обусловлен двумя основными причинами: давлением (холодное прессование) и действием капиллярных сил на поверхности пор при расплавлении материала матрицы.

В период времени $[t_2, t_3]$ образец находится в печи и спекается. Приняты следующие значения времени для расчета $t_1 = 50$, $t_2 = 60$, $t_3 = 180$. За единицу безразмерного времени принято время пробега упругой продольной волны единицы расстояния. Длина стороны квадратного образца была равна 10. Теплопередача в данном расчете не рассматривалась и спекание обеспечивалось предопределенным однородным нагревом. Следующее соотношение использовано для напряжения спекания:

$$s_0 = s^* \omega (\omega_{max} - \omega)$$

где $\omega_{max} = 0.5$. История внешнего давления и коэффициента s^* показана на Рис. 1. свойства материала принимались такими

$$K = 975/(1 - \omega), \quad \mu = 369/(1 - \omega), \quad k_y = 1, c = 1$$

$$k_\omega = 0.1, \quad k_\theta = 0$$

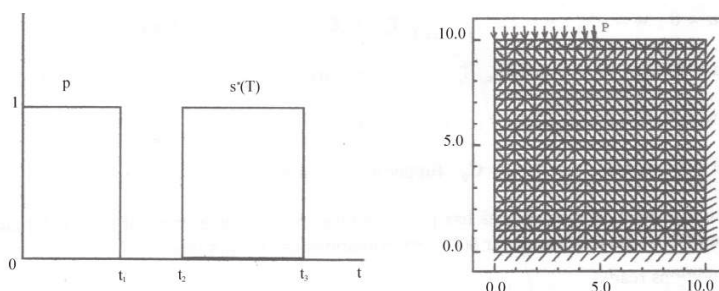


Рис. 1. Неоднородный процесс прессования и спекания. История внешних воздействий и расчетная сетка

На Рис. 2 показана рассчитанная история пористости, граничной скорости и давления для лагранжева приграничного узла $x = 0, y = 10$. Ясно виден различный характер уплотнения материала при холодном прессовании и спекании. Спекание справляется с уплотнением значительно эффективнее. Интересно проследить за направлением движения прессуемого и спекаемого материала (Рис. 3). Показаны поля скорости для четырех последовательных моментов времени : $t = 2, 50, 60, 61$.

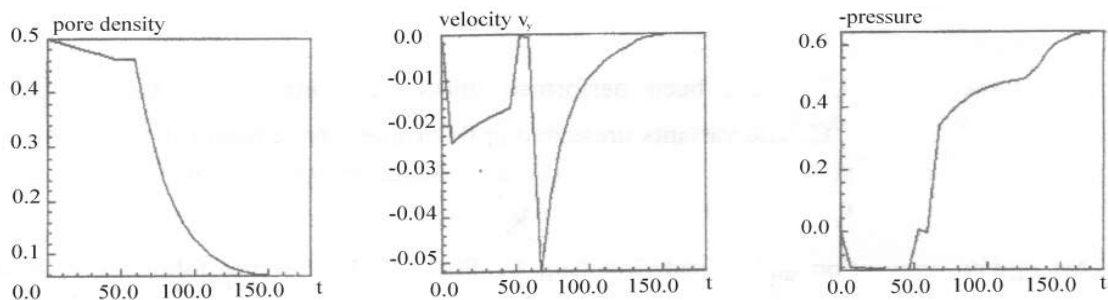


Рис. 2. История пористости, граничной скорости и давления

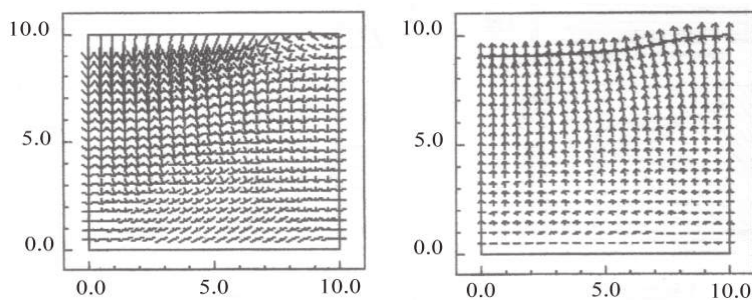


Рис. 3. поле скоростей для $t = 2$ и $t = 50$

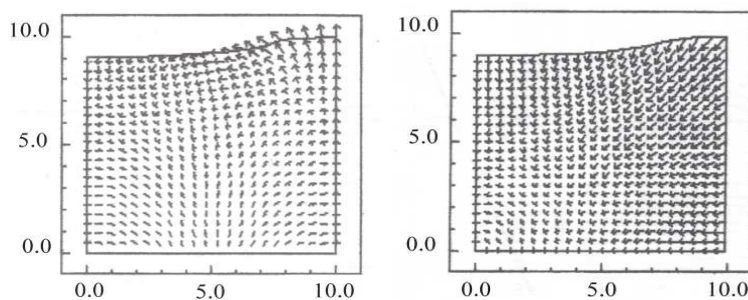


Рис. 4. поле скоростей для $t = 60$ и $t = 61$

Эволюция пористости в процессе спекания и изменение формы спекаемого композита можно видеть на Рис. 5 и 6, где показаны изолинии давления, пористости и пластической работы для двух состояний материала после прессования и после спекания.

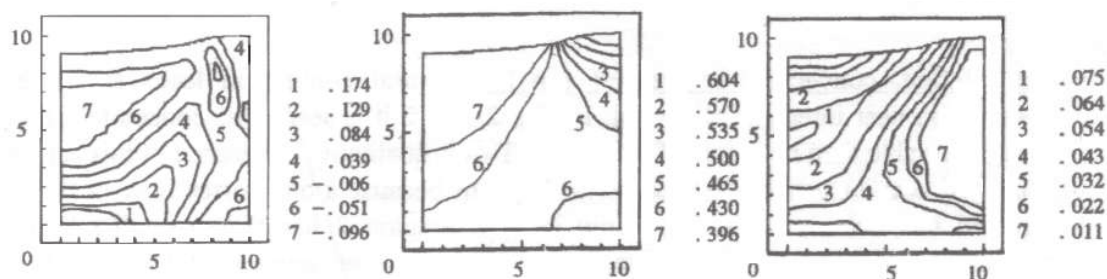


Рис. 5. Изолинии давления, пористости и пластической работы после прессования

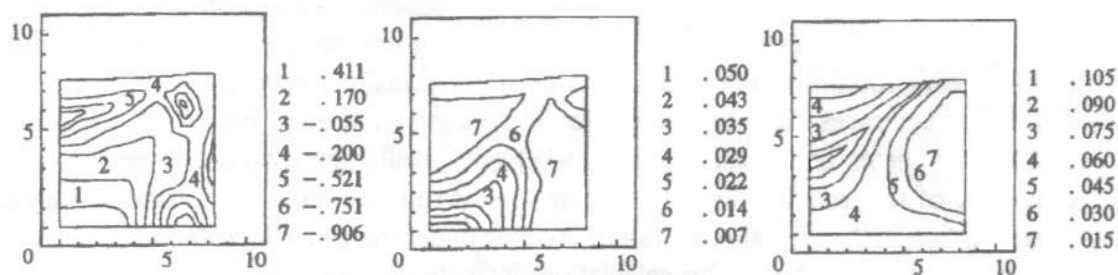


Рис. 6. Изолинии давления, пористости и пластической работы после спекания

Выводы. Предложена модель прессования и спекания порошковых композитов как вариант теории упругопластического течения пористой среды. Представлен пример конечно-элементного расчета неоднородных процессов прессования и спекания.

Литература

1. *German R.M.* Sintering Theory and Practice. Wiley. 1996. 568 p.
2. *Бураго Н.Г., Глушко А.И., Ковшов А.Н.* Термодинамический метод получения определяющих уравнений для моделей сплошных сред // Изв. РАН, МТТ, 2000, N 6, С. 4–15.
3. *Бураго Н.Г., Никитин И.С., Якушев В.Л.* Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток // ЖВММФ. 2016. Т. 56. N 6. С. 1082–1092.