

МЕТОД РАСЧЕТА УПРУГИХ ТРУБ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ¹

И.С. Никитин¹, Н.Г. Бураго², А.Д. Никитин¹

¹Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Во многих технических конструкциях существуют элементы в виде толстостенных цилиндров с плавным изменением толщины поперечного сечения или с волнистым внутренним и внешним контуром. Расчет таких объектов на нагружение внутренним давлением при достаточно произвольной функции изменения толщины поперечного сечения по угловой координате возможен только современными численными методами МКЭ. Однако во многих случаях границы цилиндров содержат малые периодические по окружной координате отклонения от окружности. В этих случаях расчет напряжений можно быстро и экономно выполнять методами теории возмущений [1], уменьшая размерность задачи и сводя двумерную или даже трехмерную задачу теории упругости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по радиальной координате, которую можно быстро решать аналитически или численно [2]. Данный подход применен к расчету НДС упругой трубы с периодически возмущенной геометрией внутреннего контура. Предполагается, что рассматриваемая длинная труба имеет переменный внутренний радиус поперечного сечения, нагружена внутренним давлением и находится в условиях плоского деформированного состояния. Система уравнений теории упругости в цилиндрических координатах r, θ имеет вид [3]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\varepsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta},$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right).$$

где λ и μ - коэффициенты Ламе.

Внешний контур является окружностью радиуса b (Рис. 1). Внешний контур свободен от напряжений: $\sigma_{rr} = 0$, $\sigma_{r\theta} = 0$, $\sigma_{\theta\theta} = 0$. Величина $\varepsilon \ll 1$ является малым параметром. Граничные условия на внутреннем контуре имеют вид: $\sigma_{nn} = -P_a$, $\sigma_{nr} = 0$. Форма внутреннего контура близка к окружности радиуса a и описывается

¹ Материалы XXI международной конф. по вычислительной механике и современным прикладным

уравнением $r = a(1 + \varepsilon g(\theta))$. Функция $g(\theta)$ определена при $-\pi \leq \theta \leq \pi$ и является периодической функцией с периодом $-\pi/N \leq \theta \leq \pi/N$ (см. Рис. 1-а,б).

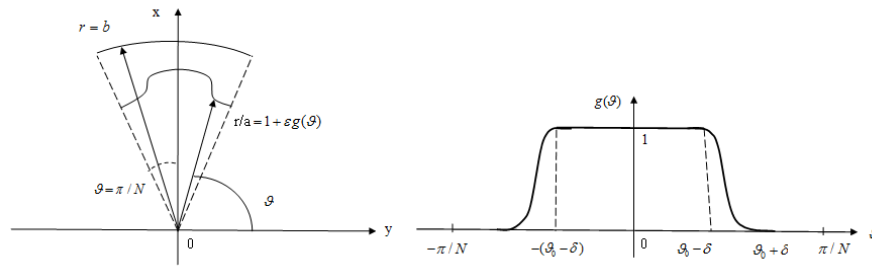


Рис. 1.

а - Сектор с ячейкой периодичности

б - Функция формы границы $g(\theta)$

Для краткости выражений в дальнейшем введем обозначения

$$\sigma = \sigma_{rr}, \quad s = \sigma_{\theta\theta}, \quad \tau = \sigma_{r\theta}, \quad \Sigma = \sigma_{zz}, \quad u = u_r, \quad v = u_\theta$$

Решение ищем в виде асимптотического разложения по малому параметру $\varepsilon \ll 1$:

$$\sigma(r, \theta) = \sigma_0(r) + \varepsilon \sigma_1(r, \theta), \quad s(r, \theta) = s_0(r) + \varepsilon s_1(r, \theta), \quad \tau(r, \theta) = \varepsilon \tau_1(r, \theta)$$

$$u(r, \theta) = u_0(r) + \varepsilon u_1(r, \theta), \quad v(r, \theta) = \varepsilon v_1(r, \theta)$$

Подставим эти асимптотические разложения в систему уравнений теории упругости и граничные условия, приравняем члены при нулевой и первой степени малого параметра ε . Уравнения задачи для нулевого приближения имеют вид

$$\frac{d\sigma_0}{dr} + \frac{\sigma_0 - s_0}{r} = 0, \quad \sigma_0 = (\lambda + 2\mu) \frac{du_0}{dr} + \lambda \frac{u_0}{r}, \quad s_0 = \lambda \frac{du_0}{dr} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_0}{r}$$

и дополняются граничными условиями: $\sigma_0|_{r=1} = -P_a$, $\sigma_0|_{r=b} = 0$.

Распределение компонент напряжений для осесимметричного нагружения невозмущенного внутреннего контура ($\varepsilon = 0$) давлением P_a (задача для нулевого приближения) хорошо известно [3].

Для первого приближения уравнения несимметричной задачи имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_1}{\partial \theta} + \frac{\sigma_1 - s_1}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_1}{\partial \theta} + \frac{2\tau_1}{r} = 0, \quad \sigma_1 = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \lambda \frac{u_1}{r}$$

$$s_1 = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_1}{r}, \quad \tau_1 = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r} \right)$$

и дополняются граничными условиями:

$$\sigma_1|_{r=1} = -\sigma'_0|_{r=1} g(\theta), \quad \tau_1|_{r=1} = -(s_0 - \sigma_0)|_{r=1} g'(\theta), \quad \sigma_1|_{r=b/a} = 0, \quad \tau_1|_{r=b/a} = 0$$

Решение несимметричной задачи для первого приближения было построено с

помощью разложения искомых функций в ряды Фурье, соответствующие разложению в эти ряды правых частей граничных условий, т.е. функций $g(\theta)$ и $g'(\theta)$:

Окончательное решение для радиальных и касательных напряжений примет вид: $1 + \varepsilon g(\theta) \leq r \leq b$, $-\pi / N \leq \theta \leq \pi / N$

$$\sigma(r, \theta) = \sigma_0^*(r) + \varepsilon P_a \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{(n+1)(n+2)}{r^n} \right) \cos(kN\theta)$$

$$s(r, \theta) = s_0^*(r) - \varepsilon P_a \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{(n+1)(n-2)}{r^n} \right) \cos(kN\theta)$$

$$\tau(r, \theta) = \varepsilon P_a \frac{b^2}{(b^2 - 1)} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\frac{n(n+3)}{r^{n+2}} - \frac{n(n+1)}{r^n} \right) \sin(kN\theta)$$

$$\sigma_0^*(r) = -\frac{P_a^*}{(b^2 - 1)} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right), \quad s_0^*(r) = \frac{P_a^*}{(b^2 - 1)} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right)$$

$$g_k = \frac{\sin(kN\theta_0)}{k} \frac{\pi / 2}{(\pi / 2 + kN\delta)} \frac{\sin(\pi / 2 - kN\delta)}{(\pi / 2 - kN\delta)}, \quad n = kN$$

Приведем результаты расчетов для следующих значений параметров задачи: $N=12$, $b=1.33$, $\theta_0 = 0.653\pi / N = 0.171$, $\pi / N = 0.262$, $P_a = 0.001$, $\delta = 0.163\theta_0 = 0.028$, $\theta_1 = \theta_0 - \delta = 0.143$, $\theta_2 = \theta_0 + \delta = 0.199$. При суммировании рядов Фурье практическая сходимость с большим запасом достигалась при $k_{\max} \sim 30$. На Рис. 2-а,б,в показаны линии уровня компонент напряжений σ , τ , s для сектора поперечного сечения цилиндра для $0 \leq |\theta| \leq \pi / N$. В окрестности линии излома внутреннего контура хорошо видна зона концентрации напряжений, особенно для τ , s .

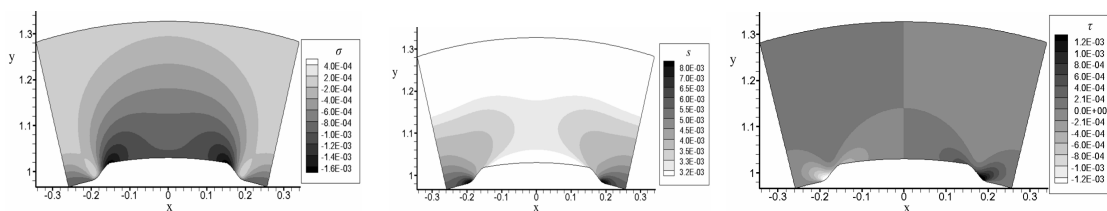


Рис. 2, а) - σ , б) - τ , в) - s

Предложенный метод значительно облегчает проведение параметрических расчетов по определению оптимальных условий эксплуатации и получению оценки квазистатической или циклической (усталостной) прочности элемента конструкции.

Литература

1. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. 535с.
2. Бураго Н.Г., Никитин И.С., Юшковский П.А. Долговечность дисков переменной толщины с учетом анизотропии усталостных свойств// Известия РАН. МТТ. 2015. N. 5. С. 84-98.
3. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. 872 с.