

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Актуальные проблемы
прикладной математики,
информатики и механики**

*Сборник трудов
Международной научной конференции*

Воронеж,
17–19 декабря 2018 г.

Воронеж
Издательство
«Научно-исследовательские публикации»
2018

УДК 531(063)+51-7(063)
ББК 22.2я5+22.1я5
А43

Председатель организационного комитета

Шашкин А. И. – д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

Члены организационного комитета:

Г. В. Абрамов д-р техн. наук, проф.; Т. В. Азарнова д-р техн. наук, проф.; А. А. Арзамасцев д-р техн. наук, проф. (Тамбов); М. А. Артемов д-р физ.-мат. наук, проф.; Э. К. Алгазинов д-р физ.-мат. наук, проф.; Е. М. Аристов канд. физ.-мат. наук, доц.; Н. Д. Вerveйко д-р физ.-мат. наук, проф.; В. Г. Задорожний д-р физ.-мат. наук, проф.; Н. А. Каплиева канд. физ.-мат. наук, доц.; И. Л. Каширина д-р техн. наук, проф.; А. В. Ковалев д-р физ.-мат. наук, проф.; О. Г. Корольков канд. физ.-мат. наук, доц.; А. В. Кузнецов канд. физ.-мат. наук, доц.; Т. М. Леденева д-р техн. наук, проф.; Л. Н. Ляхов д-р физ.-мат. наук, проф.; М. Г. Матвеев д-р техн. наук, проф.; С. Д. Махортов д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Н. Медведев канд. физ.-мат. наук, доц.; О. А. Медведева канд. физ.-мат. наук, доц.; Ю. К. Тимошенко д-р физ.-мат. наук, проф.; Э. Л. Шишкина канд. физ.-мат. наук, доц.

Председатель программного комитета

Шашкин А. И. – д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

Члены программного комитета:

Jorg Becker prof. Dr. Dr.h.c., (Германия); Semyon Levitsky д-р физ.-мат. наук, проф. (Израиль); Andrew Schumann Dr., assoc. prof. (Польша); Lopez Trujillo Marcelo Ph.D., prof. (Колумбия); А. А. Буренин д-р физ.-мат. наук, проф., член-кор. РАН (Комсомольск-на Амуре); В. В. Воеводин д-р физ.-мат. наук, проф., член-кор. РАН (Москва); В. П. Гергель д-р техн. наук, проф. (Нижний Новгород); А. П. Жабко д-р физ.-мат. наук, проф. (Санкт Петербург); В. М. Иевлев д-р физ.-мат. наук, проф., академик РАН (Воронеж); Илолов Мамадшо д.ф.-м.н., профессор, академик АН РТ (Таджикистан); В. А. Ковалев д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва); В. В. Кравченко канд. физ.-мат. наук, проф. (Мексика); Н. М. Матченко д-р физ.-мат. наук, проф. (Тула); Г. И. Маргаров канд. техн. наук, проф. (Армения); А. А. Маркин д-р физ.-мат. наук, проф. (Тула); Н. М. Матченко д-р физ.-мат. наук, проф. (Тула); В. М. Мирсалимов д-р физ.-мат. наук, проф. (Азербайджан); Е. И. Моисеев д-р физ.-мат. наук, проф., академик РАН (Москва); Л. А. Петросян д-р физ.-мат. наук, проф. (Санкт-Петербург); С. Л. Подвальный д-р техн. наук, проф. засл. раб. высш. школы РФ (Воронеж); Ю. Н. Радаев д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва); В. П. Радченко д-р физ.-мат. наук, проф. (Самара); А. Ф. Ревуженко д-р физ.-мат. наук проф., засл. деятель науки РФ (Новосибирск); А. А. Сирота д-р техн. наук, проф. (Воронеж); С. М. Ситник д-р физ.-мат. наук, доц. (Белгород); А. Н. Спорыхин д-р физ.-мат. наук, проф., засл. деятель науки РФ (Воронеж); А. В. Чигарев д-р физ.-мат. наук, проф. (Минск, Белоруссия); А. В. Язенин д-р физ.-мат. наук, проф., засл. раб. высш. школы РФ (Тверь)

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта 18-01-20107 Г

Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики :
А43 сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 17–19 декабря 2018 г. –
Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2019. – 1672 с.
ISBN 978-5-6042216-1-7

В сборнике предлагаются научные работы, доклады и лекции, представленные на Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проводимой Воронежским государственным университетом.

Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

УДК 531(063)+51-7(063)
ББК 22.2я5+22.1я5

ISBN 978-5-6042216-1-7

© ФГБОУ ВО ВГУ, 2019
© ООО «Вэлборн», 2019

МЕТОД РАСЧЕТА РАСТУЩЕЙ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЫ В РЕЖИМЕ СВМУ

А. Д. Никитин¹, Н. Г. Бураго², И. С. Никитин¹, Б. А. Стратула^{1,3}

¹Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

³Московский авиационный институт НИУ

1. Введение

В последние десятилетия значительный интерес вызывают экспериментальные исследования усталостных характеристик конструкционных материалов в области больших долговечностей (10^8 – 10^{10} циклов). В литературе указанную область принято называть gigacycle fatigue [1] или very high cycle fatigue [2]. В отечественной литературе устоявшимся является термин сверхмногоцикловая усталость (СВМУ) [3]. Особенностью исследования материалов в области СВМУ является использование неклассических частот нагружения образцов — порядка 20 кГц [4]. Также возможны исследования при частотах, превышающих указанное значение — 23 кГц [5] или 30 кГц [6]. Более высокие частоты, 30 кГц, оправданы в тех случаях, когда база испытаний образцов превышает 10^{10} циклов. Несмотря на различия в частоте нагружения, все методы высокочастотных испытаний имеют одинаковый принцип — это использование упругих стоячих волн, формируемых в металлических образцах при надлежащем выборе геометрии. Подробнее о расчете резонансных длин при высокочастотном нагружении можно прочесть в работе [1].

С начала 2000-х годов значительный интерес исследователей стали привлекать экспериментальные методы оценки трещиностойкости образцов при высокочастотном режиме нагружения [7, 8]. Для проведения подобных исследований на рост трещин используют либо плоские образцы постоянного поперечного сечения, либо образцы с переменным сечением, в которых формируется упругая стоячая волна. Геометрия образца подбирается таким образом, чтобы узел смещений стоячей волны находился в центре рабочей части образца. В данном сечении образца наносится краевой надрез конечной длины a_0 . При высокочастотном нагружении данный надрез, как и в случае стандартных испытаний на рост усталостных трещин, является концентратором напряжений. Однако, стоит отметить, что характер полей напряжений в случае стандартных испытаний и испытаний при высоких частотах отличается. Дело в том, что при классических испытаниях поля напряжений у вершины надреза можно определить по приложенным на удалении нагрузкам или по раскрытию берегов трещин [9]. В случае высокочастотного нагружения, поля напряжений не постоянны вдоль оси образца и имеют нулевые значения на свободных концах образцов [1]. При частотах нагружения порядка 20 кГц и выше оценить величину раскрытия берегов трещины становится невозможно. Возникает необходимость использования нового метода оценки величины коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) у вершины надреза при высокочастотном нагружении. В настоящее время общепринятым является метод численного моделирования и оценки КИН в предположении, что при сжимающей фазе цикла нагружения трещина закрыта, и размах КИН ΔK определяется максимальным значением его величины в полупериоде растяжения $\Delta K = K_{\max}$ [7, 8, 10].

Исследование роста трещин при высокочастотном нагружении проводится с использованием пьезоэлектрических нагружающих установок [1, 11] с коэффициентами асиммет-

рии цикла $R = -1$ или $R > 0$. Проведение высокочастотных испытаний с иным отрицательным коэффициентом асимметрии цикла на данный момент не реализовано ввиду технических особенностей нагружающих устройств. Кроме того, практический интерес вызывает высокочастотное нагружение при положительных коэффициентах асимметрии цикла. Например, в работах [12, 13] показано, что непрогнозируемое разрушение в эксплуатации элементов газотурбинных двигателей (ГТД), таких как лопатки или ободные части дисков, происходит в результате высокочастотных нагрузок. При этом на указанные элементы одновременно действуют значительные растягивающие напряжения, связанные с центробежными силами. Кроме того, лопатки могут испытывать крутильные колебания высокой частоты вследствие газодинамических нагрузок. Данный режим нагружения обладает симметрией ($R = -1$) и также может приводить к разрушению материалов в области СВМУ [14]. Поэтому исследования процессов зарождения и раннего роста усталостных трещин при СВМУ нагружении с нулевыми и положительными коэффициентами нагружения, а также при $R = -1$ являются наиболее востребованными и практически важными.

В силу своей новизны и особенностей режимов нагружения, математическое описание области СВМУ и критериев, описывающих процессы накопления повреждаемости и разрушения материалов, в настоящее время является фрагментарным. В частности, математических моделей, позволяющих описать принципиальную смену механизма зарождения усталостной трещины [15] при переходе из области многоциклового усталости (МНЦУ), 10^5 – 10^7 циклов, в область СВМУ на данный момент не существует. Из многоосных критериев, применимых для случая СВМУ, на сегодняшний день можно отметить лишь метод, использованный в работе [16] для оценки долговечности дисков и лопаток ГТД. Моделей или подходов, позволяющих прогнозировать эволюцию роста усталостной трещины при высокочастотном нагружении, на данный момент нет. В настоящей работе представлен полуэмпирический метод моделирования роста краевой усталостной трещины.

2. Материал

В качестве материала для исследований был выбран авиационный титановый сплав ВТЗ-1, полученный методом штамповки. Данный титановый сплав использовался для производства элементов ГТД, таких как лопатки и диски компрессорной части двигателя. Химический состав и механические свойства сплава ВТЗ-1 представлены в табл. 1. [17, 18]

Таблица 1

<i>Химический состав и механические свойства титанового сплава ВТЗ-1</i>							
Химический состав ВТЗ-1							
Fe	Si	Cr	Mo	Al	Zr	Ti	прочее
0.2–0.7	0.15–0.4	0.8–2	2–3	5.5–7	< 0.5	баланс	< 0.3
Механические свойства ВТЗ-1							
Плотность, кг/м ³		Модуль Юнга, ГПа		Предел текучести, МПа		Предел прочности, МПа	
4500		115		980		1100	

Динамический модуль упругости, определенный при частоте 20 кГц, использовался для оптимизации геометрии образца, согласно принципам высокочастотного исследования [1]. На рис. 1 представлена оптимизированная геометрия образца на рост трещин и его конечно-элементная модель.

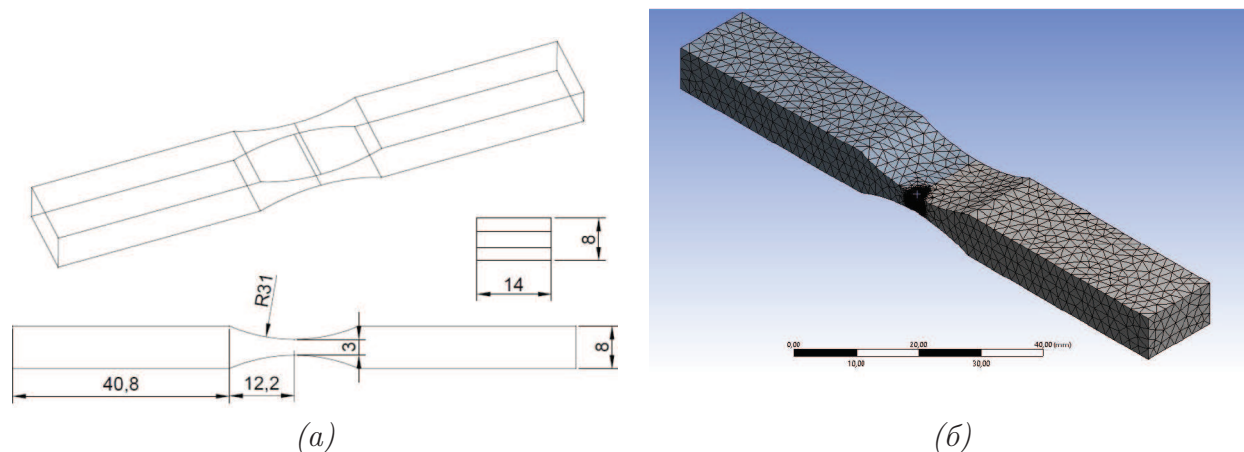


Рис. 1. Геометрия образца (а) и его конечно-элементная модель (б)

Найденные в результате модального анализа частоты хорошо «разведены», что исключает возможность возникновения паразитных мод (изгибных) в процессе проведения исследования на рост трещин.

3. Методы испытаний

Выбранный метод проведения исследований на рост трещин во многом повторяет мировые стандарты, разработанные для краевых трещин [19]. Построение кинематической кривой проводится на базе испытаний 10^7 циклов. Использован метод последовательного снижения КИН с заданным шагом, при этом оптическая система фиксирует приращение длины трещины при заданном уровне КИН. Критериями остановки эксперимента являются: (1) достижение значения циклов нагружения величины базы испытаний; (2) увеличение значения КИН за счет продвижения трещина на величину 7 %. Оба критерия соответствуют стандартам [19]. Постепенное, ступенчатое снижение внешней нагрузки проводится таким образом, чтобы величина КИН на каждом последующем шаге нагружения была на 10 % меньше той, что была использована на текущем уровне. Понижение уровня нагрузки производится до тех пор, пока приращение длины трещины на заданной базе испытаний не прекращается, т. е. $\Delta a = 0$. Затем, уровень нагрузки последовательно повышается с тем же шагом в 10 % от значения КИН, до тех пор, пока рассмотрение задачи возможно в линейной постановке.

Связь между значениями КИН и амплитудой внешних смещений (нагрузки) ищется в виде [1]:

$$\Delta K = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \cdot \frac{\Delta U}{\sqrt{a}} \cdot Y \left(\frac{a}{w} \right) \quad (1)$$

и определяется численным методом из решения задачи о краевой трещине. В силу симметрии, численное моделирование проводится для половины образца, с заданием условий симметрии в неразрушенной части образца и условия свободной поверхности на трещине, рис. 2.

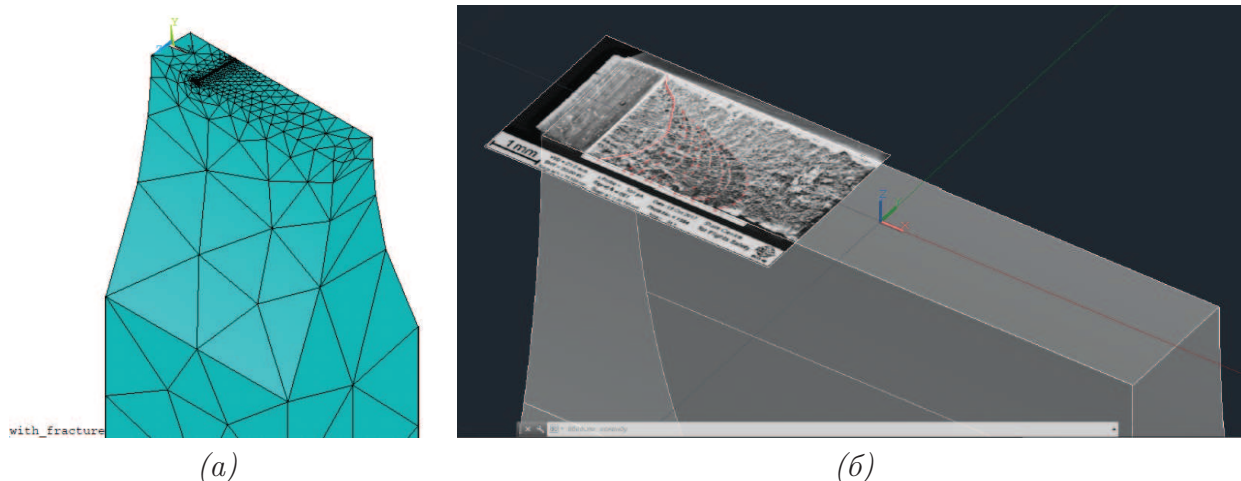


Рис. 2. Численная модель половины образца (а) с краевой трещиной (б)

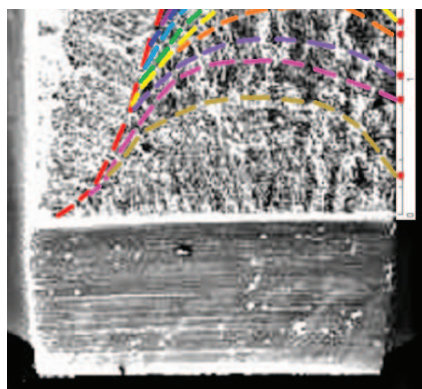
Первым шагом при численном моделировании является проведение модального анализа для образца с надрезом, а затем гармонического анализа с целью определения КИН. Расчеты проводятся для прямой линии фронта. Величина КИН ищется в виде полинома от безразмерного параметра a/w , где a — длина трещины, w — ширина образца. В случае титанового сплава ВТЗ-1 связь между КИН и величиной внешней нагрузки (смещений) получена в виде:

$$\Delta K = \frac{E}{(1 - 2\nu)} \cdot \frac{\Delta U}{\sqrt{a}} \cdot \left(0.7 \frac{a}{w} + 0.2 \left(\frac{a}{w} \right)^2 - 3.3 \left(\frac{a}{w} \right)^3 + 4.4 \left(\frac{a}{w} \right)^4 \right). \quad (2)$$

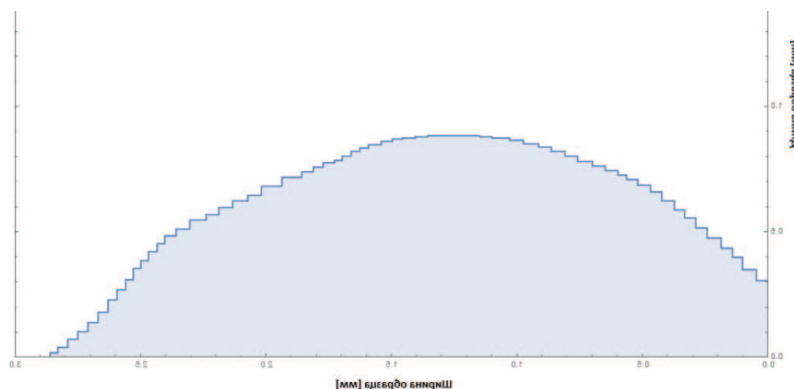
Результаты испытаний образцов на рост усталостных трещин представлены в разделе 5. В этом же разделе показано, что линия фронта трещины не всегда остается прямой и может быть криволинейной. С целью определения роста усталостной трещины с криволинейной линией фронта была разработана численная схема расчета приращения длины трещины.

4. Численное моделирование

Численное моделирование роста краевой усталостной трещины проводилось с использованием предположения, что скорость приращения фронта трещины зависит от локального значения КИН, а влияние кривизны незначительно. На основании фрактального анализа поверхности излома образца, испытанного на рост трещины при частоте нагружения 20 кГц, была определена геометрия начального фронта (криволинейного), рис. 3. Геометрия исходного фронта была использована для задания границ свободной поверхности при моделировании трещины.



(a)



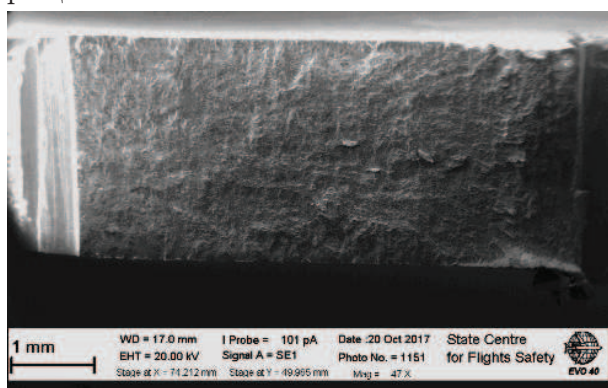
(б)

Рис. 3. Криволинейный фронт трещины (a) и его математическая модель (б)

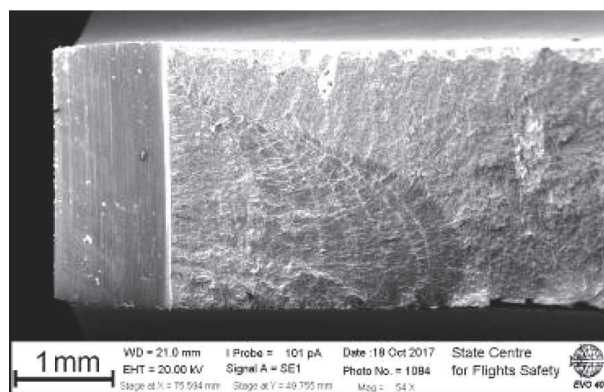
Весь криволинейный фронт разбивался на заданное количество $N = 100$ элементарных отрезков. Затем, в пределах каждого локального отрезка в результате численного моделирования, определялось значение КИН ΔK_i , где i — порядковый номер элемента. Опираясь на кинематическую диаграмму роста усталостных трещин в титановом сплаве ВТЗ-1 при частоте нагружения 20 кГц (раздел 5) каждому значению ΔK_i ставилось в соответствие значение скорости роста трещины $(\Delta a/\Delta N)_i$. После этого каждый локальный отрезок получал соответствующее приращение длины трещины за заданное количество циклов в направлении нормали к отрезку. Элементарные отрезки, примыкающие к боковым поверхностям образца, получали приращение вдоль боковой поверхности. Также, из физических соображений, было наложено условия невозможности выхода фронта трещины за боковые поверхности образца. Таким образом, численно определялось положение нового фронта трещины через заданное количество циклов. В рамках данного рассмотрения количество циклов на каждом шаге было заданно по результатам эксперимента. Результаты численного моделирования положения фронта трещины сравнивались с результатами эксперимента.

5. Результаты

На рис. 4 представлены два характерных типа поверхности излома образцов на рост трещин.



(a)



(б)

Рис. 4. Поверхности излома образцов с (a) прямолинейным и (б) криволинейным фронтом

На рис. 4-а фронт трещины прямолинейный, на рис. 4-б фронт криволинейный. Как правило, «зачетными» при построении кинематической кривой являются лишь образцы с прямолинейным фронтом трещины.

Соответствующие результаты зависимости скорости усталостной трещины при 20 кГц в титановом сплаве ВТ3-1 от размаха КИН представлены на рис. 5. Отчетливо видно наличие двух характерных областей: (1) область припорогового роста трещины; (2) области регулярного роста трещины, подчиняющейся закону Париса [20]. Для описания второй области кинематической диаграммы используется выражение

$$\Delta K = C \cdot \left(\frac{\Delta a}{\Delta N} \right)^m, \quad (3)$$

где C и m — константы материала. В случае титанового сплава ВТ3-1 эти значения равны соответственно $C = 6 \cdot 10^{-10}$ и $m = 3$.

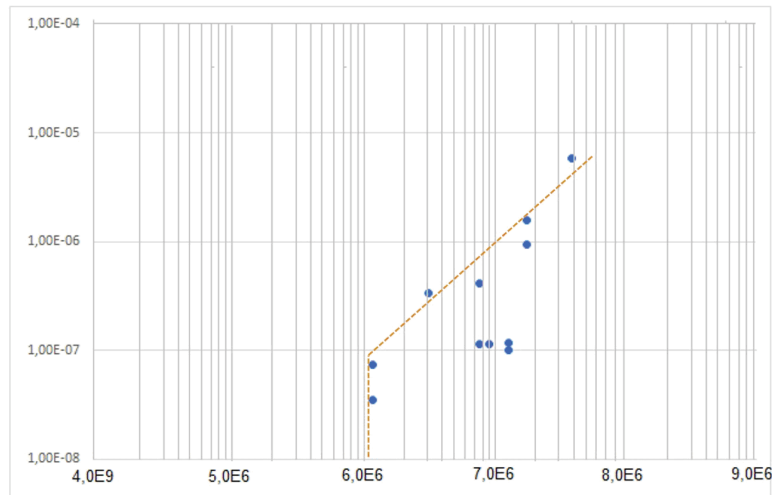
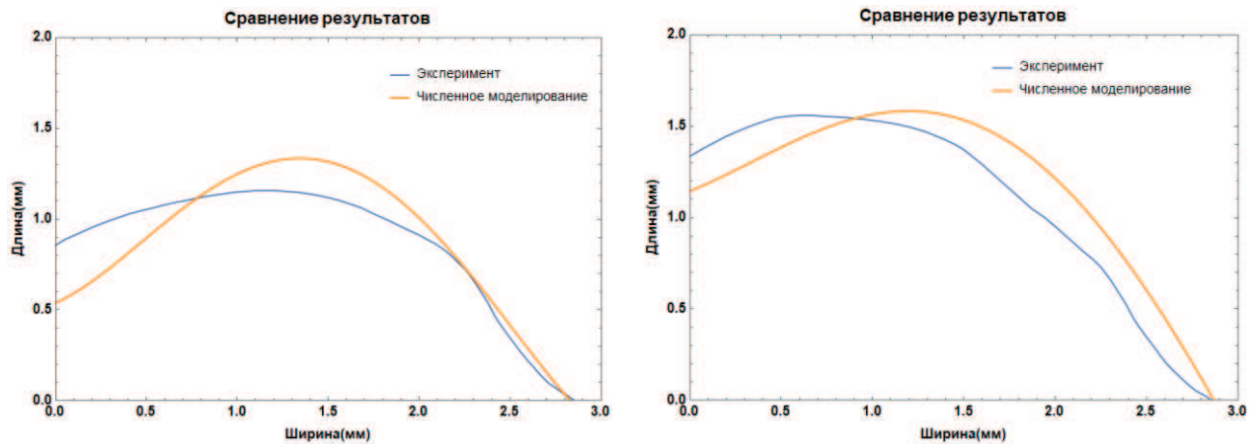


Рис. 5. Кинематическая диаграмма роста трещины для сплава ВТ3-1 при частоте 20 кГц

Выражение (2) используется при моделировании локального приращения криволинейного фронта трещины. На рис. 6 представлены результаты математического моделирования положений фронта трещины на различных стадиях развития в сравнении с экспериментально-наблюдаемыми остановками фронта.



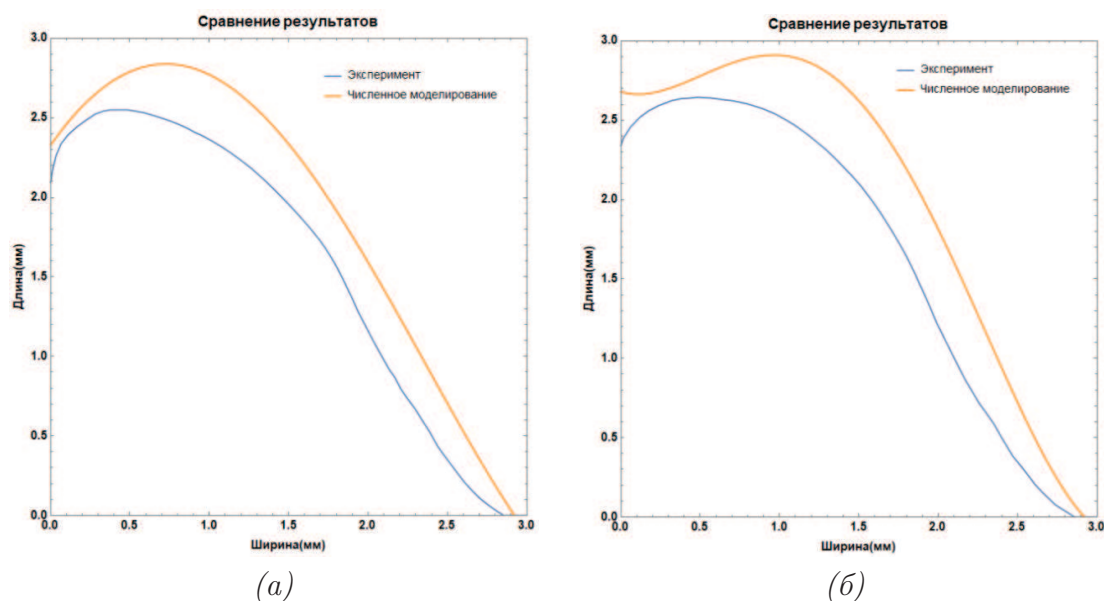


Рис. 6. Сравнение результатов эксперимента с численным моделированием положения фронта трещины на различных стадиях роста

На рис. 6-а представлено численное (красной линией) и экспериментальное (синей линией) положение фронта трещины после первого испытания, фронт № 2. Очевидно, что численное решение «отстает» от экспериментального в объеме, но опережает по поверхности. По мере развития трещины, рис. 6-б положение № 4 фронта, рис. 6-в положение № 8 фронта и рис. 6-г положение № 9 фронта, ситуация изменяется. Численное решение несколько опережает экспериментальный результат, а положение фронта по боковой поверхности образца начинает отставать. Видно, что использованная полуэмпирическая модель дает неплохое совпадение с экспериментальными данными. Наибольшие расхождения наблюдаются вблизи боковых поверхностей образца. Это связано как с наложенными дополнительными условиями на продвижение фронта усталостной трещины, так и с ненулевым вкладом в общее напряженно-деформированное состояние трещин типа II и III (продольно-поперечный и антисимметричный сдвиг).

6. Выводы

Анализ результатов математического моделирования эволюции криволинейного фронта краевой усталостной трещины и результатов экспериментальных исследований показывает количественное и качественное их совпадение. Предложенный полуэмпирический метод с достаточной точностью может быть применен для прогнозирования эволюции фронта трещины при СВМУ нагружении.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования высокоточных измерительных технологий в области фотоники, созданного на базе ФГУП «ВНИИОФИ» (skp.vniiofi.ru).

Литература

1. Bathias C., Paris P. C. Gigacycle fatigue in mechanical practice. – New York : Dekker, 2004. – 328 p.
2. Stanzl-Tschegg S., Mayer H. Lifetime measurements for random loading in the very high cycle fatigue range // Int. J. Fatigue. – 1986. – V. 8. – P. 195–200.

3. Шанявский А. А., Потапенко Ю. А., Артамонов М. А. Сверхмногоцикловая усталость – новое понимание предельного состояния элементов конструкций с возрастающим сроком эксплуатации // Научный вестник МГТУ ГА. – 2007. – № 123. – С. 21–26.
4. Ultrasonic fatigue tests at high temperature on an austenitic steel / Wagner D. [et al.] // Propulsion and Power Research. – 2012. – V. 1. – P. 29–35.
5. Stanzl-Tschegg S. E., Mayer H. R., Tschegg E. K. High frequency method for torsion fatigue testing // Ultrasonics. – 1993. – V. 4. – P. 275–280.
6. Ultrasonic fatigue tests on bearing steel AISI-SAE 52100 at frequency of 20 and 30 kHz / Marines I. [et al.] // Int. J. Fatigue. – 2003. – V. 25. – P. 1037–1046.
7. Very high cycle fatigue of a high strength steel under sea water corrosion: A strong corrosion and mechanical damage coupling / Perez-Mora R. [et al.] // International Journal of Fatigue. – 2015. – V. 74. – P. 156–165.
8. Stanzl-Tschegg S., Schönbauer B. Near-threshold fatigue crack propagation and internal cracks in steel // Procedia Engineering. – 2010. – V. 2. – P. 1547–1555.
9. Tada H., Paris P. C., Irwin G. R. The stress analysis of cracks handbook. – NY : Del Research Corporation, 2000. – 698 p.
10. Computation of and testing crack growth at 20 kHz load frequency / Sadek M. [et al.] // Procedia structural Integrity. – 2016. – V. 2. – P. 1164–1172.
11. Bathias C. Piezoelectric fatigue testing machines and devises // International Journal of Fatigue. – 2006. – V. 26. – P. 1438–1445.
12. Nicholas T. Critical issues in high cycle fatigue // Int. J. Fatigue. – 1999. – V. 21. – P. 221–231.
13. Shanyavskiy A. A. Very-High-Cycle-Fatigue of in-service air-engine blades, compressor and turbine // Science China Physics, Mechanics and Astronomy. – 2014. – V. 57. – P. 19–29.
14. Nikitin A., Bathias C., Palin-Luc T. A new piezoelectric fatigue testing machine in pure torsion for ultrasonic gigacycle fatigue tests: application to forged and extruded titanium alloys // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 2015. – V. 38. – P. 1294–1304.
15. Sakai T. Review and Prospects for Current Studies on Very High Cycle Fatigue of Metallic Materials for Machine Structural Use // Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering. – 2009. – V. 3. – P. 425–439.
16. Burago N. G., Zhuravlev A. B., Nikitin I. S. Very high cycle fatigue fracture of titanium compressor disks // PNIPU Mechanics Bulletin. – 2013. – T. 1. – P. 52–67.
17. Nikitin A., Palin-Luc T., Shanyavskiy A. Crack initiation in VHCF regime on forged titanium alloy under tensile and torsion loading modes // Int. J. of Fatigue. – 2016. – V. 93. – P. 318–325.
18. Comparison of crack paths in a forged and extruded aeronautical titanium alloy loaded in torsion in the gigacycle fatigue regime / Nikitin A. [et al.] // Engineering Fracture Mechanics. – 2016. – V. 167. – P. 259–272.
19. ASTM Standard E647-00, 2003, Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates, ASTM International, West Conshohocken, PA.
20. Paris P. C., Tada H., Donald J. K. Service load fatigue damage-a historical perspective // Int. J. Fatigue. – 1999. – V. 21. – P. 35–46.