

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**Актуальные проблемы  
прикладной математики,  
информатики и механики**

*Сборник трудов  
Международной научной конференции*

Воронеж,  
17–19 декабря 2018 г.

Воронеж  
Издательство  
«Научно-исследовательские публикации»  
2018

УДК 531(063)+51-7(063)  
ББК 22.2я5+22.1я5  
А43

**Председатель организационного комитета**

Шашкин А. И. – д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

**Члены организационного комитета:**

Г. В. Абрамов д-р техн. наук, проф.; Т. В. Азарнова д-р техн. наук, проф.; А. А. Арзамасцев д-р техн. наук, проф. (Тамбов); М. А. Артемов д-р физ.-мат. наук, проф.; Э. К. Алгазинов д-р физ.-мат. наук, проф.; Е. М. Аристов канд. физ.-мат. наук, доц.; Н. Д. Вerveйко д-р физ.-мат. наук, проф.; В. Г. Задорожний д-р физ.-мат. наук, проф.; Н. А. Каплиева канд. физ.-мат. наук, доц.; И. Л. Каширина д-р техн. наук, проф.; А. В. Ковалев д-р физ.-мат. наук, проф.; О. Г. Корольков канд. физ.-мат. наук, доц.; А. В. Кузнецов канд. физ.-мат. наук, доц.; Т. М. Леденева д-р техн. наук, проф.; Л. Н. Ляхов д-р физ.-мат. наук, проф.; М. Г. Матвеев д-р техн. наук, проф.; С. Д. Махортов д-р физ.-мат. наук, проф.; С. Н. Медведев канд. физ.-мат. наук, доц.; О. А. Медведева канд. физ.-мат. наук, доц.; Ю. К. Тимошенко д-р физ.-мат. наук, проф.; Э. Л. Шишкина канд. физ.-мат. наук, доц.

**Председатель программного комитета**

Шашкин А. И. – д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

**Члены программного комитета:**

Jorg Becker prof. Dr. Dr.h.c., (Германия); Semyon Levitsky д-р физ.-мат. наук, проф. (Израиль); Andrew Schumann Dr., assoc. prof. (Польша); Lopez Trujillo Marcelo Ph.D., prof. (Колумбия); А. А. Буренин д-р физ.-мат. наук, проф., член-кор. РАН (Комсомольск-на Амуре); В. В. Воеводин д-р физ.-мат. наук, проф., член-кор. РАН (Москва); В. П. Гергель д-р техн. наук, проф. (Нижний Новгород); А. П. Жабко д-р физ.-мат. наук, проф. (Санкт Петербург); В. М. Иевлев д-р физ.-мат. наук, проф., академик РАН (Воронеж); Илолов Мамадшо д.ф.-м.н., профессор, академик АН РТ (Таджикистан); В. А. Ковалев д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва); В. В. Кравченко канд. физ.-мат. наук, проф. (Мексика); Н. М. Матченко д-р физ.-мат. наук, проф. (Тула); Г. И. Маргаров канд. техн. наук, проф. (Армения); А. А. Маркин д-р физ.-мат. наук, проф. (Тула); Н. М. Матченко д-р физ.-мат. наук, проф. (Тула); В. М. Мирсалимов д-р физ.-мат. наук, проф. (Азербайджан); Е. И. Моисеев д-р физ.-мат. наук, проф., академик РАН (Москва); Л. А. Петросян д-р физ.-мат. наук, проф. (Санкт-Петербург); С. Л. Подвальный д-р техн. наук, проф. засл. раб. высш. школы РФ (Воронеж); Ю. Н. Радаев д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва); В. П. Радченко д-р физ.-мат. наук, проф. (Самара); А. Ф. Ревуженко д-р физ.-мат. наук проф., засл. деятель науки РФ (Новосибирск); А. А. Сирота д-р техн. наук, проф. (Воронеж); С. М. Ситник д-р физ.-мат. наук, доц. (Белгород); А. Н. Спорыхин д-р физ.-мат. наук, проф., засл. деятель науки РФ (Воронеж); А. В. Чигарев д-р физ.-мат. наук, проф. (Минск, Белоруссия); А. В. Язенин д-р физ.-мат. наук, проф., засл. раб. высш. школы РФ (Тверь)

*Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта 18-01-20107 Г*

**Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики :**  
А43 сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 17–19 декабря 2018 г. –  
Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2019. – 1672 с.  
ISBN 978-5-6042216-1-7

В сборнике предлагаются научные работы, доклады и лекции, представленные на Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проводимой Воронежским государственным университетом.

Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

УДК 531(063)+51-7(063)  
ББК 22.2я5+22.1я5

ISBN 978-5-6042216-1-7

© ФГБОУ ВО ВГУ, 2019  
© ООО «Вэлборн», 2019

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПЫЛЕНИЯ МИКРОЧАСТИЦ ПРИ ПОВЫШЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ И МАЛЫХ СКОРОСТЯХ СОУДАРЕНИЯ

И. С. Никитин<sup>1</sup>, Н. Г. Бураго<sup>2</sup>, А. Д. Никитин<sup>1</sup>, Б. А. Стратула<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>*Институт автоматизации проектирования РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

<sup>3</sup>*Московский авиационный институт НИУ*

### 1. Введение

Технология «горячего» напыления используются для поверхностного упрочнения ответственных элементов конструкций или при послойном наращивании изделий для устранения эксплуатационных дефектов. Микрочастицы распределены в горячем газовом потоке, падающем на подвижную подложку. Влияние повышенной температуры, близкой к температуре плавления, проявляется в малом значении предела текучести материала частиц. При напылении потока частиц образуется слоистая микроструктура наращиваемой части изделия, толщина слоев и ее механические свойства определяются конечной толщиной сплющивания горячих частиц в динамическом процессе деформирования.

Постановка и схема решения задачи о конечной толщине деформированной частицы с некоторыми уточнениями соответствует классической одномерной модели Тейлора для задачи соударения жесткопластического цилиндрического стержня с недеформируемой преградой [1]. Однако для цилиндрической частицы, характерные размеры которой имеют одинаковый порядок по длине и радиусу, остается неясной сама возможность применения стержневой модели соударения.

Численно, конечно-разностным методом решена система обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваемой приближенной модели. Проведено сравнение полученных результатов в одномерном приближении с многомерным моделированием нестационарного процесса соударения по конечно-элементным схемам. Показана работоспособность «одномерных» решений для оценки толщин наращиваемых слоев в зависимости от скорости частиц и температуры потока.

### 2. Одномерная модель соударения

Рассмотрим схему динамического деформирования, которая в целом соответствует классической модели Тейлора и приведена в работах [1–3]. Цилиндр длины  $h_0$ , радиусом  $r_0$  из несжимаемого жесткопластического материала движется поступательно, скорость  $v_0$  совпадает с его продольной осью. В момент времени  $t = 0$  он ударяется в жесткую преграду, нормальную к скорости движения стержня (рис. 1). Будем рассматривать движение стержня в квазиодномерном приближении, распределение скоростей и напряжений по сечению стержня считаем однородным.

Система уравнений включает соотношение для деформации за фронтом пластической волны, закон сохранения импульса на фронте пластической волны, кинематическое соотношение для высоты жесткой части цилиндра, закон Ньютона для жесткой (недеформируемой) части цилиндра и уравнение пластического деформирования:

$$\varepsilon = v/(v + w), \quad \rho(v + w)v = \sigma - \sigma_s, \quad dh/dt = -(v + w)$$

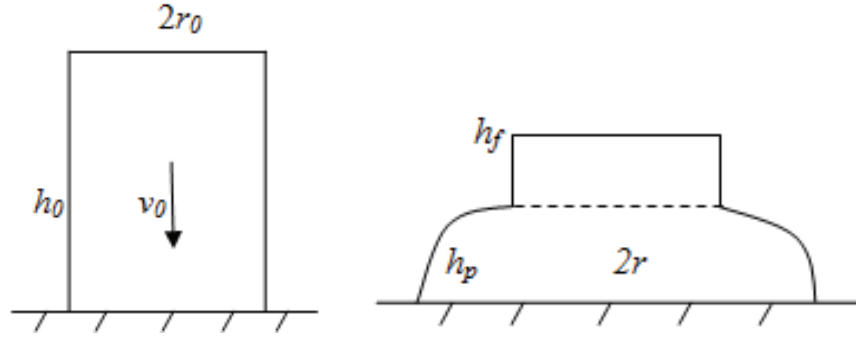


Рис. 1.

$$\rho h dv/dt = -\sigma_s, \quad \sigma = \sigma_s + E_p \varepsilon^m.$$

Здесь  $v(t)$  — скорость жесткой части цилиндра,  $w(t)$  — скорость пластической волны,  $\sigma(t)$  — напряжение за пластическим фронтом,  $\sigma_s$  — предел текучести,  $\rho$  — плотность,  $E_p$  — модуль упрочнения,  $m$  — степенной показатель упрочнения.

Зная скорость пластической волны  $w(t)$ , можно определить высоту пластической зоны  $h_p$ :

$$h_p = \int_0^{t_f} w(t) dt.$$

Начальные условия имеют вид:

$$t = 0 : \quad v = v_0, \quad h = h_0.$$

Момент остановки цилиндра  $t = t_f$ , и высота жесткой части  $h_f$  определяются условиями

$$v = 0, \quad w = 0.$$

Систему уравнений принятой модели можно привести к следующему виду:

$$dh/dt = -(v + w) \quad dv/dt = -\sigma_s/(\rho h) \quad w = (E_p/\rho)^{1/(m+1)} v^{(m-1)/(m+1)} - v.$$

В принятой модели для выполнения условия  $w = 0$  при  $t = t_f$  необходимо, чтобы  $m > 1$ .

Было построено численное решение системы уравнений конечно-разностным методом. Заметим, что в данном приближении явно не описывается форма пластической (сплюсченной) части стержня, поэтому радиус пластической части определяется из условия несжимаемости:  $r = r_0 \sqrt{(h_0 - h_f)/h_p}$ .

Приведем результаты расчетов соударения титановой частицы с жесткой плоской преградой при следующих характеристиках: высота  $h_0 = 30$  мкм,  $r_0 = h_0/2$ , плотность  $\rho = 4500$  кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 116 * 10^9$  Па, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.32$ , предел текучести при комнатной температуре  $\sigma_{s0} = 3 * 10^8$  Па, скорость частицы  $v_0 = 20$  м/с. Температура рассматриваемой частицы лежит в диапазоне  $T = 1600 - 1660^\circ$  С. Температура плавления  $T_m = 1665^\circ$  С. Для значений предела текучести в окрестности температуры плавления существует большая неопределенность [4], поэтому примем линейную зависимость предела текучести от температуры:  $\sigma_s = \max(\sigma_{s0}(T_m - T)/T_m, 0)$ .

На рис. 2–3 показаны формы деформированной частицы при различных температурах потока, относительно близких к температуре плавления, и соответствующих им пониженных значениях предела текучести. Представлены конечные графики функций  $h(r)$ .

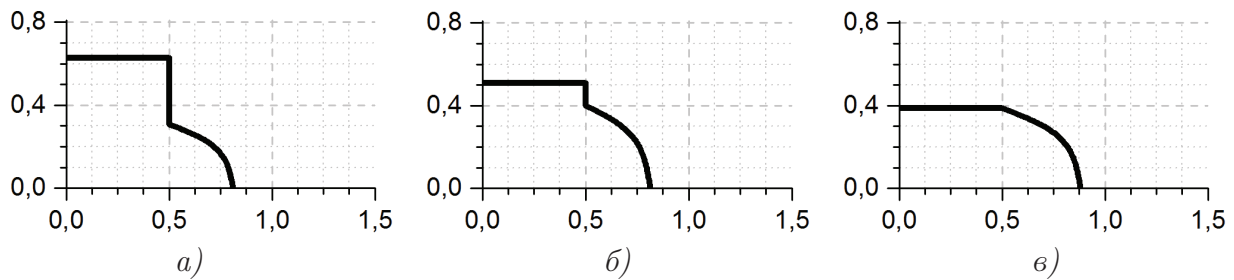


Рис. 2. Форма частицы при  $v_0 = 20$  м/с,  $E_p = 2.5 \cdot 10^7$  Па,  $m = 1.2$ ;  
 а)  $T = 1600$ , б)  $T = 1620$ , в)  $T = 1633$

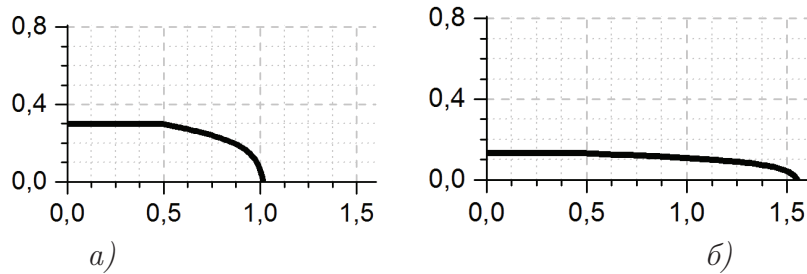


Рис. 3. Форма частицы при  $v_0 = 20$  м/с,  $E_p = 2.5 \cdot 10^7$  Па,  $m = 1.2$ ;  
 а)  $T = 1640$ , б)  $T = 1650$

## 2. Многомерное моделирование

Были проведены численные расчеты осесимметричной нестационарной задачи соударения упругопластической цилиндрической частицы, разогретой горячим газовым потоком, с недеформируемой преградой. Подробности использованного численного метода приведены в [5]. Результаты многомерного расчета, соответствующие параметрам, приведенным на рис. 2, показаны на рис. 4–5.

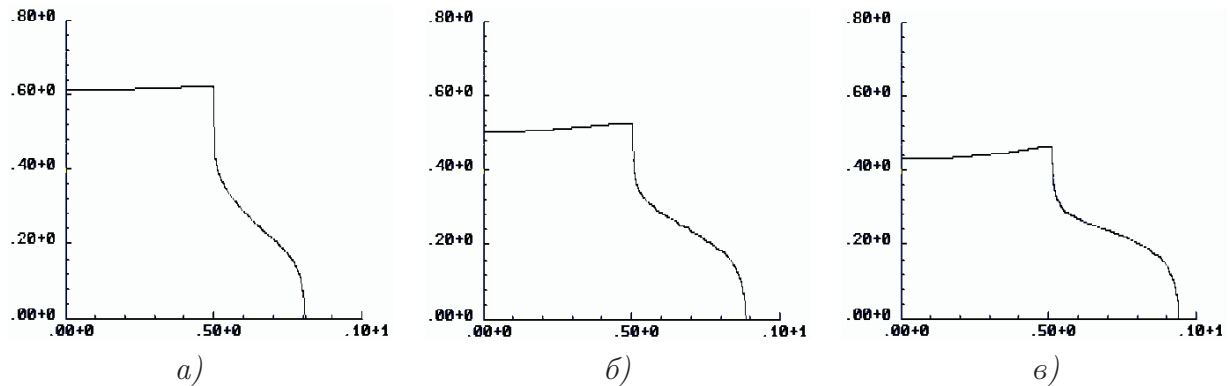


Рис. 4. Форма частицы при  $v_0 = 20$  м/с; а)  $T = 1600$ , б)  $T = 1620$ , в)  $T = 1633$

Сравнение рис. 2 и рис. 4 показывает, что приближенная одномерная (стержневая) схема расчета неплохо улавливает конечную толщину деформированной частицы в рассматриваемом диапазоне параметров, хотя продольный и поперечный размер частицы в данном случае совпадают, и возможность применения подобной схемы не является очевидной.

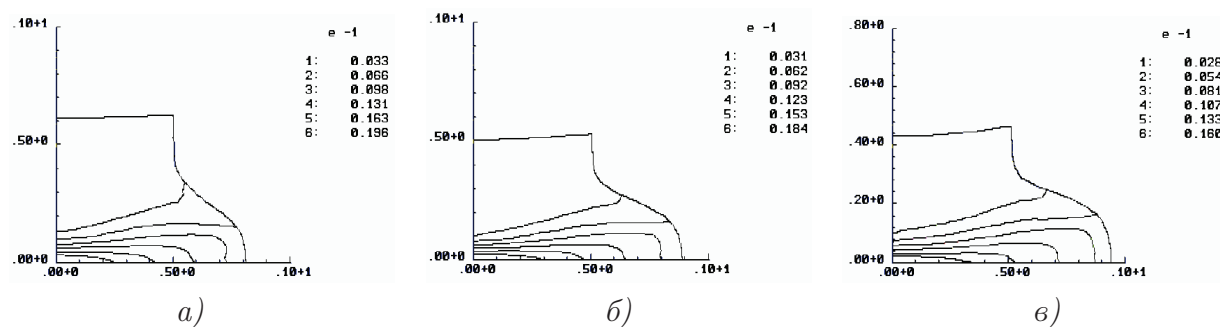


Рис. 5. Изолинии пластической работы при  $v_0 = 20$  м/с;  
 а)  $T = 1600$ , б)  $T = 1620$ , в)  $T = 1633$

## Выводы

Численно решена система обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваемой приближенной модели. Проведено сравнение результатов в одномерном приближении с результатами многомерного моделирования нестационарного процесса соударения по конечно-элементным схемам. Показана работоспособность полученных решений для оценки толщин наращиваемых слоев в зависимости от скорости частиц и температуры потока в рассматриваемом диапазоне параметров.

## Литература

1. Динамика удара / Зукас Дж. А. [и др.] – Москва : Мир, 1985. – 296 с.
2. Гольдсмит В. Удар. – Москва : Издательство литературы по строительству, 1965. – 448 с.
3. Барвинок В. А., Богданович В. И. Физическое и математическое моделирование процесса формирования мезоструктурно-упорядоченных плазменных покрытий // Журнал технической физики. – 2012. – Т. 82, Вып. 2. – С. 105–112.
4. Микляев П. Г. Механические свойства легких сплавов при температурах и скоростях обработки давлением. – Москва : Металлургия, 1994. – 279 с.
5. Бураго Н. Г., Никитин И. С., Якушев В. Л. Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56. – С. 1082–1092.