В. Е. Назайкинский (ИПМех РАН)

О методе усреднения для дифференциальных операторов
с осциллирующими коэффициентами

Аннотация. Обобщенный адиабатический метод, развиваемый для линейных уравнений в статьях [4,5,7] и др., в наиболее абстрактном виде состоит в том, что для исходного уравнения с оператором H отыскиваются такие операторы $\chi$ и
L (обычно псевдодифференциальные), что
$H\chi = \chi L$; тогда подстановка $u = \chi v$ сводит исходное уравнение для u к редуцированному уравнению с оператором L для v, и нужно добиться, чтобы это уравнение было проще исходного. В статьях [4,7] этот метод развивается
для дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами; в духе классических
работ [1–3,6] по методу усреднения для дифференциальных операторов в частных производных предполагается, что оператор в исходном уравнении имеет вид $H = h\nabla, C^2(x,\Theta(x)/\mu)\nabla i$, где гладкая функция $C^2(x,y)$ $2\pi$-периодична по каждой из переменных $y = (y_1,\dots,y_m)$, $\mu \to +0$— малый параметр, а $\Theta(x) = (\Theta_1(x),\dots,\Theta_m(x))$, $m < n$ — набор гладких функций, градиенты которых линейно независимы в
каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$. Стандартным приемом исходное уравнение сводится к уравнению в расширенном пространстве функций от n+m переменных (x,y) с оператором $H = h\nabla_{\Theta y} - i\mu\nabla_x, C^2(x,y)(\nabla_{\Theta y} - i\mu\nabla_x)i, \nabla_{\Theta y} = {}^t\nabla_y \Theta_x$, к которому затем и применяется обобщенный адиабатический метод.
Требование представимости быстроосциллирующего коэффициента в столь специальном виде весьма ограничительно, и к тому же на практике такое представление обычно не известно —а значит, и непонятно, как выполнять реальные вычисления. В докладе мы избавимся от этого требования, предложив новый подход к усреднению. При этом стадия перехода к уравнению в расширенном пространстве с дополнительными переменными y исключается вовсе, за счет чего вычисления оказываются проще, чем
при использовании классического подхода к усреднению. В качестве примера мы используем оператор $h\nabla, f(x,\mu)\nabla i$, где $f(x,\mu)$ — положительная усреднимая осциллирующая функция (в смысле определений,
данных в докладе), и сравниваем наши формулы при $f(x,\mu) = C^2(x,\Theta(x)/\mu)$ с полученными в [7].
Обсуждается также вопрос о том, насколько класс быстроосциллирующих коэффициентов, для которых можно пользоваться нашим методом, шире класса коэффициентов, представимых в указанном
выше виде через периодические функции.
Доклад основан на готовящейся к печати статье С.Ю. Доброхотова, Б. Тироцци и докладчика.

Список литературы

[1] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. Усреднение дифференциальных операторов. Наука, М.,
1993.
[2] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. Осреднение процессов в периодических средах. Наука, М.,
1984.
[3] В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. Усредненные модели микронеоднородных сред. Наукова думка, Киев,
2005.

[4] Й. Брюнинг, В. В. Грушин, С. Ю. Доброхотов. Осреднение линейных операторов, адиабатическое
приближение и псевдодифференциальные операторы. Матем. заметки, 92, вып. 2, 2012, 163–180.
[5] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, T. Ya. Tudorovskiy. Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics. J. Engrg. Math., 55:1-4, 2006, 183–237.
[6] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou. Asymptotic Analysis of Periodic Structures. North-Holland,
Amsterdam, 1978.
[7] J. Brüning, V. V. Grushin, S. Yu. Dobrokhotov. Approximate formulas for eigenvalues of the Laplace operator on a torus arising in linear problems with oscillating coefficients. Russ. J. Math. Phys., 19:3