

# ВЛИЯНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ВИБРАЦИЙ НА ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ В РАСПЛАВЕ ПРИ ВЫРАЩИВАНИИ МОНОКРИСТАЛЛОВ

**А.И. Федюшкин**

ФГБУН Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
119526, Москва, проспект Вернадского 101-1.  
e-mail: [fai@ipmnet.ru](mailto:fai@ipmnet.ru)

Аннотация. В работе приводятся результаты численного моделирования конвективного теплопереноса при выращивании монокристаллов методами Бриджмена, Чохральского и плавающей зоны. Показано, что вибрации могут интенсифицировать тепло-массообмен в расплаве, выдвигать фронт кристаллизации, а также уменьшать толщины пограничных слоев (динамического, температурного и концентрационного), что может приводить к увеличению температурного градиента на фронте кристаллизации и увеличению скорости роста кристаллов.

Ключевые слова: вибрация, теплообмен, кристаллизация монокристаллов, пограничные слои, численное моделирование.

## **Введение**

Вибрации могут быть, как негативным, так и позитивным фактором, влияющим на протекание многих физических, химических, технических и технологических процессов, а также могут являться эффективным средством управления в различных процессах. Изучение воздействия вибраций на жидкие среды проводится уже около 200 лет, начиная с работ [1, 2]. Обзоры работ по вибрационному конвективному течению можно найти в монографиях [3, 4]. В частности, в технологических процессах, например, при выращивании монокристаллов, вибрации могут оказывать существенное влияние на гидродинамику расплава, на распределения температуры и примеси, на скорость кристаллизации и, как следствие, на свойства и совершенство кристаллов. В данной работе негативные проявления вибрационного воздействия на рост и качество кристаллов не рассматриваются. Следует отметить, что вибрационное управление теплообменом в расплаве может быть энергетически экономичным и более простым, чем управление гравитационным или магнитным полями. Поэтому исследование воздействий вибраций на гидродинамику расплава является актуальной задачей.

Вибрационные воздействия на жидкий объем могут создаваться двумя способами: в первом способе вибрациям подвергается весь объем жидкости благодаря, например, изменению гравитационного поля (так называемый,  $g$ -jitter), во втором способе вибрации приложены только к части границы объема жидкости, например, к погруженному в расплав вибратору. Исследованию вибраций первого типа посвящено много теоретических [3-7] и экспериментальных [8-13] работ, в которых установлено, что вибрационное воздействие создает в жидкости слабое осредненное по времени вибрационное конвективное течение.

Влияние вращательных вибраций (вибрации второго типа) на гидродинамику и однородность распределения примеси в расплаве и кристалле было рассмотрено в работах [15, 17, 20, 21]. В работах [14, 17] приведены результаты по моделированию конвективного теплопереноса с учетом прикристаллизационной зоны (mushy zone), подробный обзор сделан в работе [14].

В настоящей работе представлено продолжение и обобщение работ [14-22] по изучению влияния гармонических поступательных вибраций второго типа, вызванных погруженным вибратором или колебаниями некоторой части границы жидкого объема. Рассмотрено выращивание монокристаллов методами Бриджмена, Чохральского и плавающей зоны. Для квазиустановившихся режимов приведены мгновенные и осредненные по времени характеристики вибрационных течений.

### Постановка задачи

Расчеты вибрационных течений расплава основаны на прямом численном решении уравнений Навье-Стокса несжимаемой вязкой жидкости:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} + \alpha \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\alpha \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \alpha \nu \frac{u}{r^2} \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\alpha \nu \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + g \beta (T - T_m) \\ \frac{d\rho c_p T}{dt} &= \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\alpha \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Здесь:  $r$  и  $z$  радиальная и осевая координаты,  $t$  - время,  $u$  и  $w$  - радиальная и осевая компоненты вектора скорости,  $T$  - температура,  $p$  - давление,  $\rho$  - плотность,  $\mathbf{g}$  - ускорение свободного падения,  $\beta_T$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $c_p$  - коэффициенты линейного температурного расширения, кинематической вязкости, теплопроводности и теплоёмкости,  $\alpha$  - геометрический фактор, который равен 0 для плоской и 1 для осесимметричной геометрии,  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  - субстанциональная временная производная.

Задание граничных условий рассмотрено при описании примеров расчета.

Начальные условия имеют вид:

$$t=0: u=0, w=0, T=T_m$$

Вибрации задавались в виде гармонической функции времени для перемещения или скорости на заданной границе или на погруженном вибраторе (2.11). В данной работе были рассмотрены две модели: первая - без учета перемещения вибратора (для малых амплитуд задавались гармонические изменения скорости) и вторая - с учетом перемещения вибратора или части границы расчетной области (для больших амплитуд) с перестройкой расчетной сетки.

При заданном фронте кристаллизации, скорость роста кристаллов была постоянной и в базовых вариантах расчёта равной  $W_s=0.3$  см/час. Амплитуды вибраций были постоянными со значениями в диапазоне от 0 до 400 мкм, а частоты были в диапазоне от 0 до 100 Гц. и 3000 Гц.

Задача характеризуется следующими числами подобия: число Рейнольдса, связанное со скоростью роста кристалла  $Re_s = W_s R / \nu$ ; вибрационное число Рейнольдса  $Re_{vibr} = A \omega R / \nu$ , где  $A$  - амплитуда,  $\omega = 2\pi f$  - круговая частота поступательных движений вибратора, число Грасгофа  $Gr = g \beta \Delta T R^3 / \nu^2$  (или числа Рэлея  $Ra = Gr Pr$ ), где  $\Delta T$  - масштаб температуры, и число Прандтля  $Pr = \nu \rho c_p / \lambda$ .

В данной работе при моделировании использовались пакеты программ [23-27]

### Метод Бриджмена

Проведено математическое моделирование теплообмена при выращивании кристаллов методом Бриджмена с различными формами и расположениями погруженного вибратора, схемы которых представлены на рис. 1. Расчетная область представлена на рис.1г, где нижняя граница является фронтом кристаллизации.

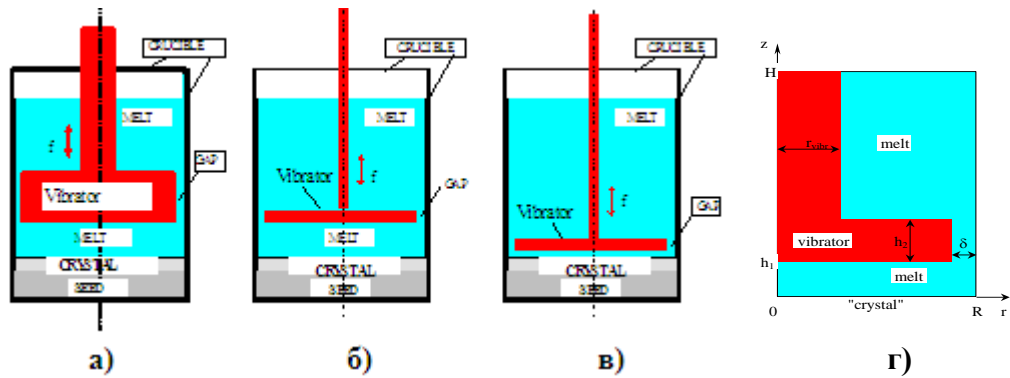


Рис. 1. Вертикальный метод Бриджмена с погруженным нагревателем-вибратором (а-в), схема расчетной области (г). Параметры геометрии: R - радиус тигля, H - высота расчетной области, 0z - ось симметрии,  $\delta$  - величина зазора между вибратором и стенками тигля,  $r_{\text{vibr}}$  - радиус штока вибратора, "crystal" - поверхность кристалла ( $z=0$ ).

Для схемы расположения вибратора, изображенной на рис.1а, с помощью конечноэлементного пакета программ АСТРА [26] были выполнены расчеты с целью определения времени формирования установившегося осредненного течения [17-19].

Граничные условия задавались в виде:

на оси симметрии  $r=0$ :  $u=0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial r}=0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial r}=0$

на фронте кристаллизации

$z=0$ :  $u=0$ ,  $w=W_s + A \omega \sin(\omega t)$ ,  $T=T_m$

на боковой стенке тигля

$r=R$ :  $u=0$ ,  $w=0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial r}=0$  ( $0 < z < h$ ),  $T=T_h$  ( $h < z < H$ )

где  $T_m$  - температура кристаллизации, определяемая из диаграммы состояния.

На погруженном нагревателе задавались условия прилипания и температура.

Влияние вибраций на течение расплава показано на Рис. 2-4.

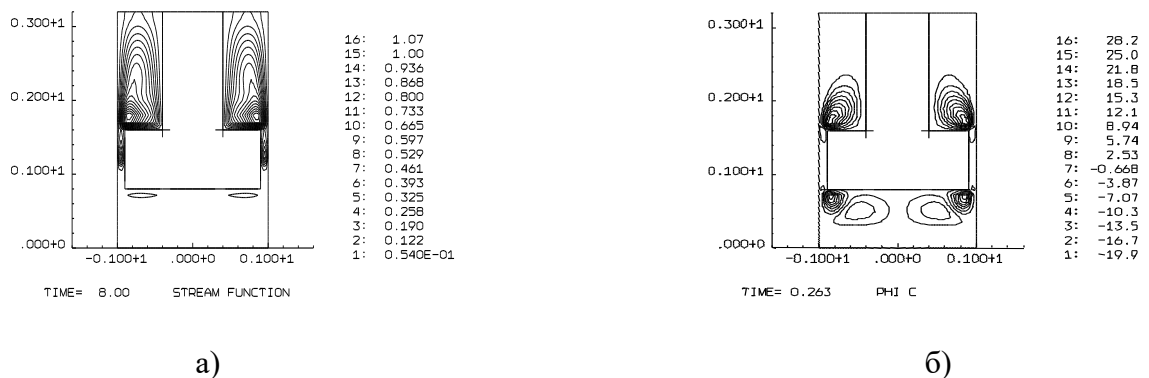


Рис. 2. Влияние вибраций ( $Gr=2.1 \cdot 10^6$ ,  $Pr=5.43$ ,  $H/R=3.2$ ). а) функция тока без вибраций; б) функция тока осредненного по времени вибрационного течения ( $A=100$  мкм,  $f=50$  Гц).

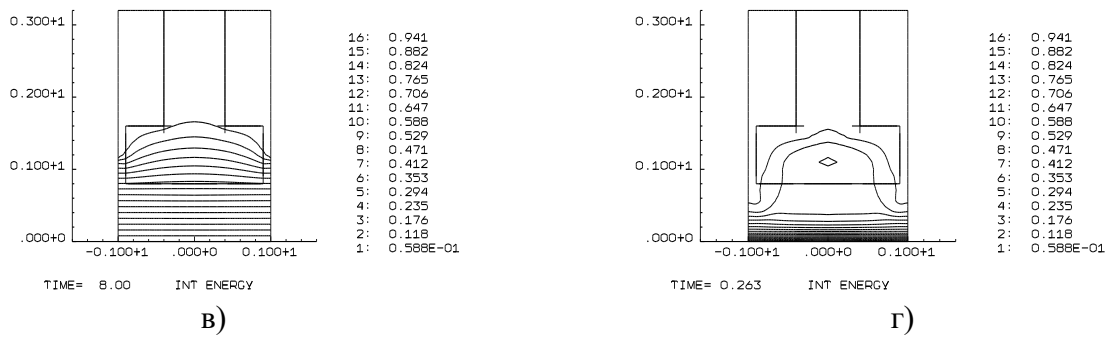


Рис. 3. Влияние вибраций ( $Gr=2.1 \cdot 10^6$ ,  $Pr=5.43$ ,  $H/R=3.2$ ). а) температура без вибраций; б) температура осредненного по времени вибрационного течения ( $A=100$  мкм,  $f=50$  Гц).

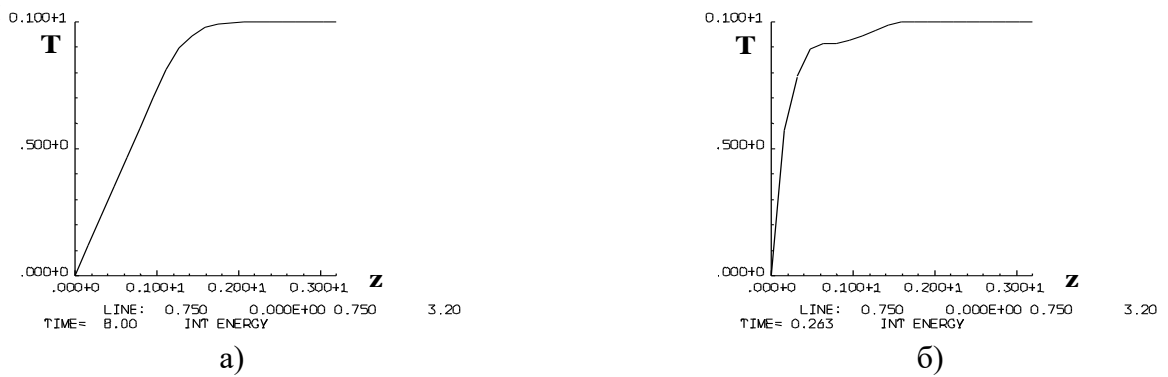


Рис. 4. Влияние вибраций ( $Gr=2.1 \cdot 10^6$ ,  $Pr=5.43$ ,  $H/R=3.2$ ). вертикальные профили температуры при  $\tau=0.75$ : а) без вибраций; б) вибрационное течение ( $A=100$  мкм,  $f=50$  Гц).

Для метода Бриджмена, при указанных выше параметрах, также были проведены численные расчеты с учетом конвекции, которые показали, что вклад вибраций при вибрационном числе Рейнольдса  $Re_{vibr}=A\omega R/\nu > 10$ , (где  $\omega=2\pi f$ , а  $\nu$  - кинематическая вязкость) в гидродинамику и распределение температуры является преобладающим по сравнению с конвекцией ( $Ra=2 \cdot 10^5$ ,  $Pr=5.43$ ).

На Рис. 5 показаны изотермы (в правой части рисунка – без вибраций, в левой - с вибрациями  $Re_{vibr}=200$ ). На Рис. 6 для этих случаев представлены вертикальные профили (при  $\tau=0.75$ ) температуры в расплаве  $NaNO_3$  ( $Pr=5.43$ )..

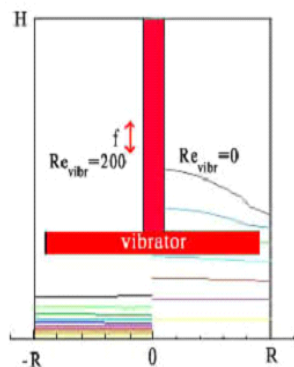


Рис 5. Изотермы в расплаве  $NaNO_3$  ( $Pr=5.43$ ) (справа – без вибраций, слева - с вибрациями  $Re_{vibr}=200$ )

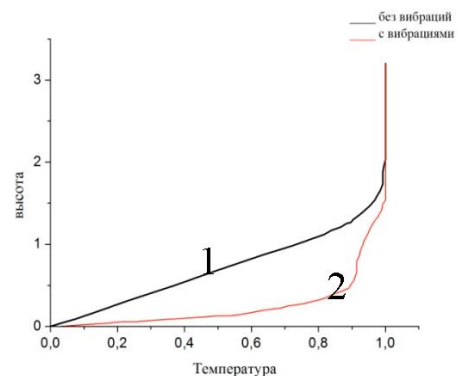


Рис. 6. Вертикальные профили температуры ( $\tau=0.75$ ) в расплаве  $NaNO_3$  ( $Pr=5.43$ ) (линия 1 – без вибраций, 2 - с вибрациями  $Re_{vibr}=200$ )

Данные расчеты показывают, что с помощью вибрационного воздействия можно уменьшить температурный пограничный слой и увеличить градиент температуры около фронта кристаллизации, а это открывает возможности управлять кинетикой роста кристаллов, в частности, скоростью роста, как это впервые было установлено в экспериментах [8].

### Метод Чохральского

В методе Чохральского, в отличие от метода Бриджмена, тепловая конфигурация соответствует неустойчивому распределению температуры: холодный фронт кристаллизации расположен над расплавом. В реальных условиях метода Чохральского на расплав влияют многие факторы, такие, как вращение, интенсивное естественно-конвективное и термокапиллярное перемешивание расплава за счет бокового и донного подогрева расплава. Исследованию этих типов течений в методе Чохральского посвящено много работ, однако вибрационным воздействиям начали уделять активное внимание только в последние пятнадцать лет [3-23].

В настоящей работе исследовано влияние вибраций на гидродинамические и температурные пограничные слои в расплаве. Предполагается, что кристалл (либо погруженный вибратор) совершают колебательные движения с малой амплитудой  $A$  и с частотой  $f$  по закону  $z = A \sin(2\pi ft)$ . На рис. 7 показана схема двумерной осесимметричной математической модели метода Чохральского. Была использована система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска в осесимметричном приближении ( $\alpha=1$ ). На кристалле и тигле применялись граничные условия прилипания и задавалась температура (см. рис. 7), на свободной поверхности расплава при  $z=H$  для скоростей и температуры ставились условия продолжения решения (нормальные производные этих переменных равнялись нулю).

Результаты расчетов показали преобладание вибрационной конвекции (для расплавов с  $Pr > 1$ ) при частоте  $f > 10$  Гц над термокапиллярной и естественной конвекциями, а также хороший эффект гомогенизации температурного поля во всей внутренней области расплава и образование пограничных слоев за счет вибраций. На рис.7 представлены изотермы в модели метода Чохральского для  $Pr=5.43$ ,  $H/R=1$ ,  $R_c/R=0.3$  (где  $H$ ,  $R$  и  $R_c$  - высота, радиус тигля и радиус кристалла). Для других жидкостей и параметров результаты представлены в работе [17]. На рис.7 слева показано распределение температуры на квазистационарном режиме для случая перемешивания расплава только вертикальными гармоническими вибрациями, приложенными к кристаллу с частотой  $f=10$  Гц и амплитудой  $A=100$  мкм ( $Re_{vibr}=40$ ), а справа на рис. 7 изображены изотермы для течения без вибраций ( $Re_{vibr}=0$ ).

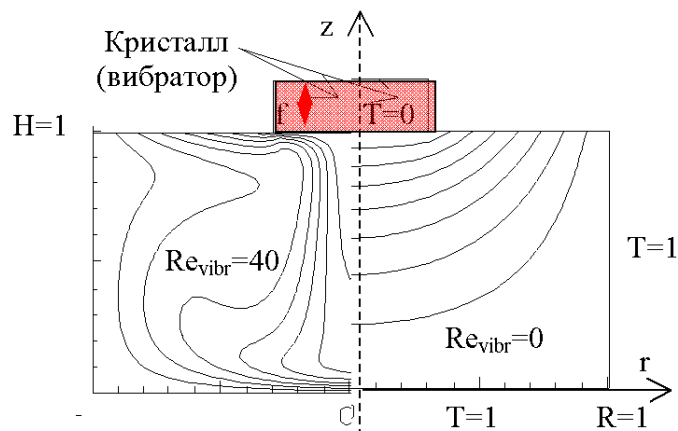


Рис. 7. Изотермы в расплаве  $\text{NaNO}_3$  ( $Pr=5.43$ ,  $H/R=1$ ,  $R_c/R=0.3$ ).

Справа - без вибраций ( $Re_{vibr}=0$ ), слева при вибрациях кристалла с частотой  $f=10$  Гц и амплитудой  $A=100$  мкм ( $Re_{vibr}=40$ ).

## Метод Чохральского с погруженным в расплав вибратором

Выращивать монокристалл и совершать им же вибрационные воздействия технологически затруднительно, поэтому несколько лет назад академик В.В. Осико предложил в методе Чохральского кроме влияния вибраций кристалла исследовать вибрационное воздействие от погруженного в расплав вибратора.

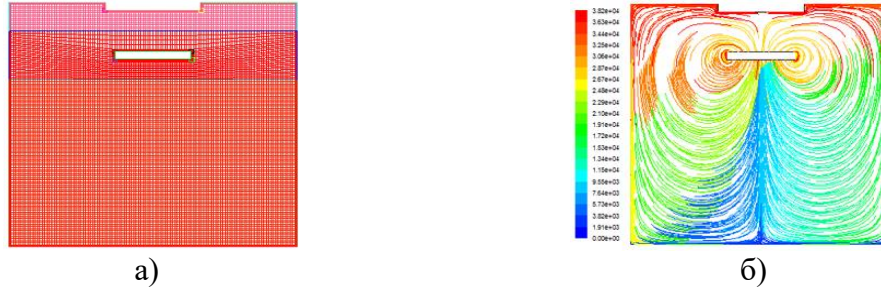


Рис. 8. а) Расчетная область и сетка,

б) треки течения жидкости на квазистационарном режиме ( $A=0.4\text{мм}$ ,  $f=20\text{Гц}$ ).

Такие параметрические расчеты были выполнены здесь в упрощенной двумерной постановке. Была использована система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска в плоском приближении ( $\alpha=0$ ). На рис. 8 показана исследуемая область. Расчетная область представляла собой квадрат со стороной 3 см. Кристалл имеет диаметр  $d=1$  см и заглублен в расплав на глубину 1 мм. Вибратор имеет диаметр 0.8 см и толщину 1 мм. В данной работе рассматриваются удаления вибратора от поверхности кристалла на  $h=5$  мм, 8 мм и 13.5 мм. (другие случаи были рассмотрены ранее в работе [17].

В расчетах использовалась неравномерная сетка со сгущением вблизи твердых стенок. Для задания вибраций использовалась динамическая сетка. При перестроении сетки использовался метод послойного наращивания (либо удаления) слоев сетки.

Для температуры ставились такие условия: тигель имеет постоянную температуру  $400^\circ\text{К}$ , кристалл (расположенный сверху) холодный и имеет температуру в  $300^\circ\text{К}$ . На свободной поверхности, соединяющей кристалл с тиглем были условия теплоизоляции  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ , где  $n$  — внешняя нормаль. В качестве начальных условий задавалась неподвижная жидкость с температурой в  $300^\circ\text{К}$ . Вибратор совершал вертикальные колебания с амплитудой  $A = 0.4$  мм и частотой  $f = 20$  Гц в соответствии с законом:  $z = A \sin(2\pi ft)$ .

Расчитанные центральные вертикальные профили температуры (в случае вибраций показана осредненная по времени температура) представлены на рис. 9. Вибрации имели параметры ( $A=0.4\text{мм}$ ,  $f=20\text{Гц}$ ). На рисунках 9:  $z=0.014$  м — соответствует поверхности кристалла;  $z=0.009$  м — соответствует ближайшей к кристаллу поверхности вибратора.

Результаты показаны для следующих значений параметров процесса:

- $Pr=0.1$ ,  $Re_{vibr}=1500$ ,  $Gr=0$ ,  $h/d=0.5$ . Линия 1 - без вибрации, а линия 2 - с вибрацией,
- $Pr=7$ ,  $Re_{vibr}=1500$ ,  $Gr=0$ ,  $h/d=0.5$ . Линия 1 - без вибраций, линия 2 - с вибрациями,
- ( $Pr=100$ ,  $Re_{vibr}=1500$ ,  $Gr=0$ ,  $h/d=0.5$ ). Линия 1 - без вибрации, а линия 2 - с вибрацией,
- ( $Pr=100$ ). Линия 1 соответствует  $Gr=0$ ,  $Re_{vibr}=0$ . Линия 2 соответствует,  $Gr=1000$ ,  $Re_{vibr}=0$ . Линия 3 соответствует  $Gr=1000$ ,  $Re_{vibr}=1500$ ,
- ( $Pr=100$ ). Линия 1 - без естественной конвекции  $Gr=0$ . Линия 2 - с естественной конвекцией  $Gr=1000$ . В обоих случаях присутствует вибрация  $Re_{vibr}=1500$ ,
- ( $Pr=7$ ). Линия 1 - без вибрации, линия 2 - с вибрацией при  $h/d=0.8$ , а линия 3 - с вибрацией при  $h/d=0.5$
- ( $Pr=100$ ). Линия 1 - без вибрации, линия 2 - с вибрацией при  $h/d=0.5$ , а линия 3 - с вибрацией при  $h/d=1.35$

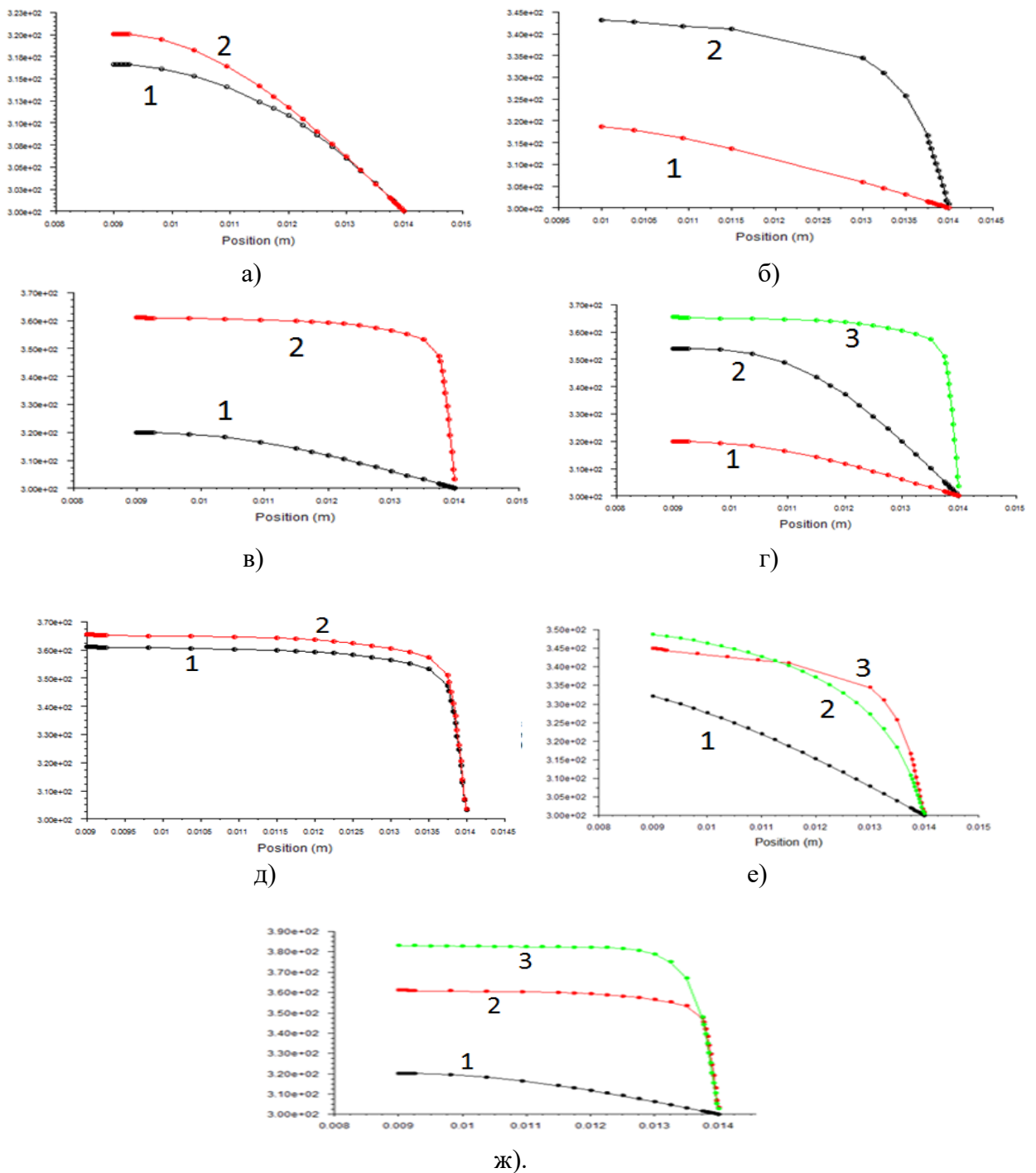


Рис. 9. Зависимости осредненной температуры в центральном вертикальном сечении расчётной области от значения координаты  $z$ .

Из представленных на рис.9 результатов, хорошо видна общая закономерность уменьшения температурного слоя при вибрациях.

### Метод плавающей зоны

Метод зонной плавки заключается в том, что расплавляется узкая часть слитка (часто поликристаллического) и затем перемещением слитка (или температурного поля) происходит его перекристаллизация и получение монокристалла. Расплавленная часть слитка - плавающая зона граничит с твердым не расплавившимся слитком и атмосферой, и

удерживается за счет сил вязкости и поверхностного натяжения. В поле силы тяжести форма расплавленной зоны отличается от формы твердого слитка. В данной работе мы рассмотрели вертикальный метод плавающей зоны, то есть, когда вектор силы тяжести направлен параллельно оси слитка (и плавающей зоны). В этом случае форма расплавленной зоны имеет осевую симметрию. Для сокращения времени расчета, сначала рассчитывалась форма плавающей зоны и при дальнейших расчетах гидродинамики и теплопереноса влиянием гидродинамики на форму плавающей зоны пренебрегалось. Численное моделирование конвективного теплопереноса для модели плавающей зоны (рис. 8) было проведено на основе решения двумерных уравнений Навье-Стокса с учетом осевой симметрии и для моделирования подвижной (вибрирующей) границы использовались динамически изменяемые сетки. В данных расчетах геометрия плавающей зоны была определена предварительно, на основе расчетов уравнения равновесия при наличии силы тяжести и с учетом величины угла смачивания, для кремния ( $Pr=0.01$ ). Фронт кристаллизации в данной модели задавался изотермой, равной температуре кристаллизации.

На рис. 10а показана расчетная область диаметром 6 мм и высотой 5 мм, граничные условия и параметры расчетов. В расчетах рассматривались вибрации кристалла, поликристалла и свободной поверхности с частотой  $f=3\text{КГц}$  и амплитудой  $A=10\text{мкм}$ , скорость вращения  $\pm 30\text{rpm}$ , на боковой свободной поверхности задавалось условие излучения, температура для условия излучения задавалась температура  $T_{\infty} = 2200\text{К}$ , остальные теплофизические параметры брались для расплава кремния Si.

На рис. 10б представлен вертикальный профиль температуры при учете влияния теплопроводности и излучения, но без учета вращения, конвекции и вибраций (кривая 1). Там же показан вертикальный профиль осредненной по времени температуры при дополнительном действии вибраций (кривая 2). Хорошо видно уменьшения температурного слоя при вибрациях.

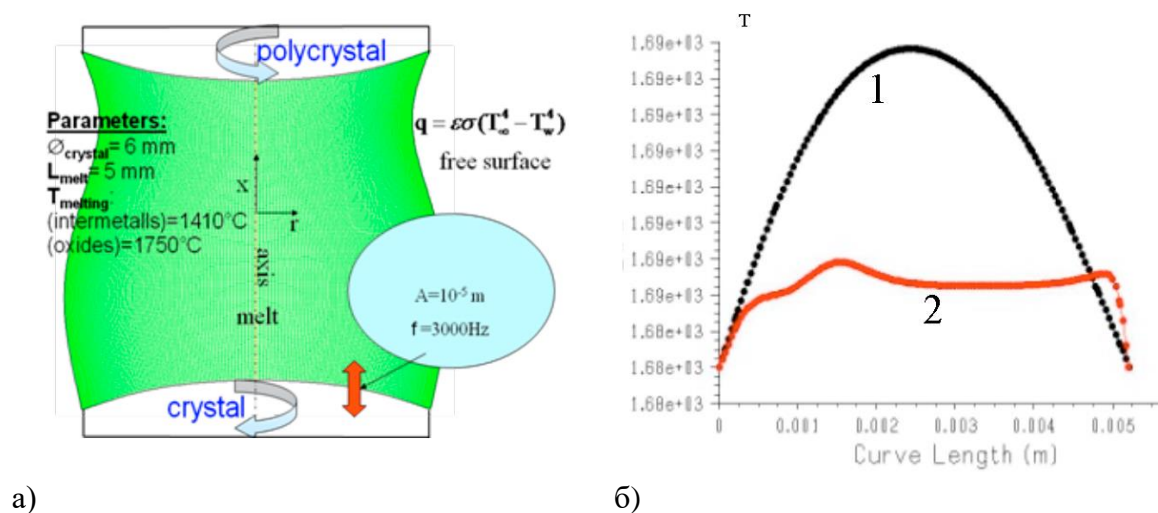


Рис. 10. . Метод зонной плавки кремния ( $A=0.01\text{мм}$ ,  $f= 3000\text{Hz}$ )  
 а) – схема модели. б) – вертикальные профили температуры ( $r=0.5 R$ ) (1 - без вибраций, 2 - с вибрациями)

Результаты расчетов показали, что для зонной плавки для малых чисел Прандтля так же, как и для методов Бриджмена и Чохральского, вибрации существенно уменьшают толщину температурного пограничного слоя, т.е. увеличивают градиент температуры около кристалла. Для больших значений чисел Прандтля данный эффект уже был обнаружен ранее. Данные расчеты подтвердили предположения автора, высказанные в [15-19] о том, что эффект уменьшения толщины пограничных слоев имеет место и для малых чисел Прандтля,



например, для  $Pr=0.01$ , но при более больших вибрационных числах Рейнольдса (частотах или амплитудах).

### **Выводы**

Представленные расчеты показывают существенное влияние вибрационного числа Рейнольдса на распределение температуры в расплаве. Численно показано, что вибрации могут уменьшать ширину температурного пограничного слоя и, как следствие, увеличивать температурный градиент на фронте кристаллизации. Это может интенсифицировать тепломассообмен около фронта кристаллизации, а также скорость роста кристаллов. Эти выводы справедливы применительно к выращиванию монокристаллов методами Бриджмена, Чохральского и плавающей зоны и могут быть использованы на практике. Численные расчеты помогут точнее определить оптимальные режимы роста кристаллов.

### **Благодарность**

Автор благодарен К.А. Иванову за помощь в проведении расчетов.

### **Список литературы**

1. Faraday M. On a Peculiar Class of Acoustical Figures. Phil. Trans. Roy. Soc. 1831, 121, 299-340.
2. Rayleigh. On the Circulation of Air observed in Kundt's Tubes, and on some Allied Acoustical Problems, Transactions of the Royal Society of London, 1883. 175 (1), 1-21.
3. Gershuni Z. and Lubimov D.V.. Thermal vibrational convection. John Willey&Sons Ltd., G 1998, 357p.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.. Устойчивость конвективных течений. Москва, «Наука», 1989, 320с.
5. Иванова А.А. Устойчивость свободно-конвективного течения в горизонтальном цилиндрическом слое в вибрационном поле. Конвективные течения. Пермь, 1989, с.37-44.
6. Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибраций высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. №5. С. 51-55.
7. Lan C.W. Effects of axial vibration on vertical zone-melting processing // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2000. V. 43. P. 1987-1997.
8. Витовский Б.В. Повышение скорости роста кристалла подачей на него колебаний звуковой частоты. // Труды ИКАН СССР. 1955. выпуск 11. С. 1.
9. Козлов В.Г. О вибрационной тепловой конвекции в полости совершающей высокочастотные вращательные качания // Изв. АН СССР. № 3. С. 138-144.
10. Zharikov E.V., Prihod'ko L.V., Storozhev N.R. Vibrational convection during the growth of crystals // Growth of Crystals. 1993. V. 19. P. 71-81.
11. Аветисов И.Х., Жариков Е.В., Зиновьев А.Ю., Садовский А.П. Новый метод управления тепломассопереносом в расплаве при выращивании кристаллов по Чохральскому // Доклады Академии Наук. 2009. Т. 428. № 2. С. 177-179.
12. Avetissov I., Sadovskiy A., Belov S., Khomyakov A., Rekunov K., Kostikov V., Sukhanova E. Thermodynamic features of axial vibrational control technique for crystal growth from the melt // CrystEngComm 2013. V. 15. P. 2213-2219.
13. Zyuzgin A.V., Putin G.F., and Kharisov A.F. Ground Modeling of Thermovibrational Convection in Real Weightlessness // Fluid Dynamics, 2007, Vol. 42, No. 3, pp. 354-361
14. Федюшкин А.И. Моделирование гидродинамики и тепломассообмена при выращивании кристаллов с учетом прикристаллизационной (mushy) зоны без и с вибрационным воздействием на расплав. Обзор. - Препринт ИПМех РАН, № 1074, Москва, 2014, 35с.

15. Fedyushkin A. The gravitation, rotation and vibration - controlling factors of the convection and heat – mass transfer. Proc. of 4th ICCHMT, Paris, FRANCE, 2005
16. Fedyushkin A., Bourago N., Polezhaev V. and Zharikov E. The influence of vibration on hydrodynamics and heat-mass transfer during crystal growth // J. Crystal Growth. 2005. Vol. 275. P. e1557-e1563.
17. Федюшкин А.И., Иванов К.А. Гидродинамика и теплообмен при вибрационных воздействиях на расплав в процессах выращивания монокристаллов. - Препринт ИПМех РАН. № 1085. Москва. 2014. 107 с.
18. Федюшкин А.И. Конвекция, вращение и вибрация - управляющие факторы при выращивании монокристаллов. VIII съезд по теоретической и прикладной механике. Екатеринбург. УрО РАН. 2001. стр. 576.
19. Федюшкин А.И. Гидродинамика и тепломассоперенос при вибрационных воздействиях на расплав. Сборник трудов XIX Международной конференции « Математические методы в технике и технологиях», Т.3, Воронеж, 2006, стр. 29-34.
20. Bourago N.G., Fedyushkin A.I., Polezhaev V.I. Dopant distribution in crystals growth by the submerged heater method under steady and oscillatory rotation. Adv. Space Res. 1999. Vol.24. No 10. pp. 1245-1250.
21. Bourago N.G., Fedyushkin A.I. Impurity distribution in submerged heater method with and without rotation Proceedings of the Int.Conf. on Computational Heat and Mass Transfer. April 26-29. 1999, N.Сyprus, Turkey, pp. 207-215.
22. Федюшкин А.И., Бураго Н.Г., Полежаев В.И., Жариков Е.В. "Влияние вибраций на гидродинамику и тепло-массообмен в расплаве при выращивании кристаллов методом Бриджмена". Сборник трудов VII Российского симпозиума "Механика невесомости. Итоги и перспективы фундаментальных исследований гравитационно-чувствительных систем", Москва, ИПМ РАН, 2001, стр.365-392.
23. Полежаев В.И., Белло М.С., Везеуб Н.А., Дубовик К.Г., Лебедев А.П., Никитин С.А., Павловский Д.С., Федюшкин А.И. Конвективные процессы в невесомости. - М.: Наука, 1991, 240 с.
24. Пшеничников А.Ф., Пинягин А.Ю., Полежаев В.И., Федюшкин А.И., Шайдулов Г.Ф. Термоконцентрационная конвекция в прямоугольной области при боковых потоках тепла и массы. Препринт, УНЦ АН СССР. Свердловск. 1985. 54 с.
25. Федюшкин А.И. Исследование матричного метода решения уравнений конвекции. Комплекс программ «МАРЕНА». Препринт ИПМ АН СССР. № 471. Москва. 1990. 32 с.
26. Bourago N.G. Numerical methods for non-linear processes in elastic plastic media. In: "Lectures of FEM-94 Seminar", Chalmers Univ. Techn., Struct.Mech.Dept., Publ:1994.1, Gothenborg, pp. 1-15.
27. Manual of Ansys-FLUENT 17. User's Guides, ANSYS-Fluent.Inc., 2016.