УДК 539.3

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ НЕДИССИПАТИВНОЙ МИКРОМОРФНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ[1]

© 2007 С.А. Лычев[2]

В работе, в рамках теоремы Э. Нетер, из вариационных симметрий, соответствующих трансляциям и вращениям материального и физического многообразий, получены новые законы сохранения микроморфной динамической недиссипативной термоупругости типа Грина–Нахди. Особенностью полученных законов является то, что явно задается согласование преобразований пространств, определяющих макро- и микроструктуру среды.

1. Введение

В рамках классического описания движения сплошной среды ее деформация определяется изменением взаимного положения материальных точек [1]. В теориях микроморфных сред [2, 3], наиболее простой из которых является микрополярная теория [3], материальные точки наделяются дополнительными (скрытыми) степенями свободы, что позволяет учесть влияние микроструктуры на макроскопическое движение среды. Как показали многочисленные теоретические и экспериментальные исследования, это влияние оказывается значительным, если речь идет о распространении волн с длинами, соизмеримыми с характерным размером микроструктуры. Именно такая ситуация наблюдается при импульсном тепловом нагружении [4]. Вместе с тем хорошо известные параболические уравнения микроморфной термоупругости [2], построеные на основе классического закона теплопроводности Фурье, предполагают отличную от нуля термическую диссипацию и бесконечную скорость распространения теплового возмущения. Это не соответствует экспериментальным результатам при высокочастотных возмущениях термоупругой среды, т.е. именно таких воздействий, при которых существенно влияние микроструктуры. По этой причине представляет интерес построение теорий микроморфной термоупругости, предполага-

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

[2]Лычев Сергей Александрович (lychev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ющих конечную скорость распространения теплового возмущения. Известно несколько путей построения таких теорий [5], [6], основанных либо на непосредственной модификации уравнений движения, приводящей их к гиперболическому типу, либо на изменении исходных положений, в частности, определения интеграла действия, с последующим выводом новых законов сохранения и соответствующих уравнений движения. Последний подход представляется более строгим.

В настоящей работе рассматривается обобщение гиперболической теории Грина–Нахди [7] на микроморфные среды. Вводится наиболее общее для термоупругой микроморфной среды представление плотности лагранжиана, представления соответсвующих операторов Эйлера–Лагранжа, тензора энергии–импульса, тока Нетер. Используя формализм теоремы Э. Нетер [8], из условия инвариантности интеграла действия относительно групп преобразований координат и полей, соответствующих сдвигам, вращениям и преобразованиям масштаба, получены законы сохранения, а также соответствующие им инвариантные интегралы[3].

Следует отметить, что полученные законы сохранения явно учитывают характер согласованности преобразований пространственных и физических многообразий, определяя ее специальными "согласующими" тензорами. Кроме того, инвариантность рассматриваемого интеграла действия по отношению к сдвигам временнóй переменной позволяет вести речь о недиссипативных процессах, что отражено в названии статьи.

2. Интеграл действия

Основным объектом настоящего исследования является интеграл действия, который будем обозначать символом $\mathscr{J}$. Полагаем, что $\mathscr{J}$ представляет собой интеграл гладкой скалярной функции определенного набора независимых и зависимых переменных (полей). Весь последующий анализ зависит от выбора этих переменных и их геометрической структуры (скалярной, векторной или тензорной).

Для классической (неполярной) среды интеграл действия $\mathscr{J}$ может быть записан в виде:

$$\mathscr{J} = \int_{t_1}^{t_2} \int_G \mathscr{L}\, dV\, dt, \quad \mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathbf{X}, t, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}), \tag{2.1}$$

[3]Отметим, что Eshelby [9], Morse и Feshbach [10] (с. 100), первыми ввели тензор энергии–импульса в теории упругости. Рассматривая трансляционные, ортогональные и масштабные группы преобразований в рамках теоремы Нетер, Günter [11], Knowles, Sternberg [23] получили законы сохранения классической теории упругости и сответствующие им инвариантные интегралы.

Законы сохранения и приложение теоремы Нетер в микроморфной теории упругости исследовались в работах: E. Pucci, G. Saccomandi [17], G. Maugin [4], M. Lazar, C. Anastassiadis [21], V.K. Kalpakides, G.A. Maugin [7].

где интегрирование осуществляется по произвольному интервалу времени (t_1, t_2) и произвольной отсчетной области $\boldsymbol{G}$. В (2.1) использованы обозначения: $\mathscr{L}$ — плотность лагранжиана, отнесенная к единице объема отсчетной конфигурации, $\mathbf{X}$ — отсчетные места точек среды[4], t — время, $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ — поле актуальных мест материальных точек (в терминах школы рациональной механики — деформация [1]), $\boldsymbol{\nabla}$ — отсчетный оператор Гамильтона.

Градиент места $\boldsymbol{\nabla\chi}$ в силу теоремы Коши о полярном разложении может быть представлен как произведение ортогонального тензора $\boldsymbol{O}$ и симметричного тензора $\boldsymbol{V}$, т.е.

$$\boldsymbol{\nabla\chi} = \boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{V}, \quad \boldsymbol{O}^* = \boldsymbol{O}^{-1}, \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^* = (\boldsymbol{\nabla\chi}\cdot(\boldsymbol{\nabla\chi})^*)^{1/2}. \tag{2.2}$$

Из первого соотношения (2.2) вытекает, что тензорное поле $\boldsymbol{O}$ связано с полем мест $\boldsymbol{\chi}$:

$$\boldsymbol{O} = \boldsymbol{\nabla\chi}\cdot\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{\nabla\chi}\cdot(\boldsymbol{\nabla\chi}\cdot(\boldsymbol{\nabla\chi})^*)^{-1/2}. \tag{2.3}$$

В линейной теории зависимость (2.3) приобретает более простой вид. Вводятся перемещения $\mathbf{u} = \boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\chi}_0$, а градиент места вычисляется как сумма единичного тензора $\boldsymbol{E}$ и градиента перемещений $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}$:

$$\boldsymbol{\nabla\chi} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}.$$

В этом случае вторая степень тензора $\boldsymbol{V}$ с точностью до величин более высокого порядка малости, чем $\|\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\|$, вычисляется следующим образом:

$$\boldsymbol{V}^2 = (\boldsymbol{\nabla\chi}\cdot(\boldsymbol{\nabla\chi})^*) = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^* + \boldsymbol{o}(\|\nabla\mathbf{u}\|).$$

Соответственно,

$$\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{E} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^*) + \boldsymbol{o}(\|\nabla\mathbf{u}\|). \tag{2.4}$$

Из соотношений (2.3), (2.4) вытекают представления в линейном приближении для ортогонального тензора $\boldsymbol{O}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{O} = (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})\left(\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^*)\right) + \boldsymbol{o}(\|\nabla\mathbf{u}\|) &= \\ = \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} - (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^*) + \boldsymbol{o}(\|\nabla\mathbf{u}\|) &\quad .\end{aligned}$$

Если теперь ввести тензор $\boldsymbol{\Psi}$ ("определяющий" отклонение $\boldsymbol{O}$ от единицы) и сопутствующий ему вектор $\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{dual}[\boldsymbol{\Psi}]$, то получим хорошо узнаваемую формулу, связывающую повороты и перемещения в линейной симметричной теории упругости

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{O} - \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} - (\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})^*), \quad \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\chi}. \tag{2.5}$$

---

[4]Предполагается, что имеется взаимно-однозначные и дифференцируемые в обе стороны соответствия межу точками $\mathbf{X}$ (некоторого многообразия которое мы называем материальным), и материальными точками среды.

В микрополярной теории упругости, в отличие от симметричной, предполагается, что ориентация элементарного объема определяется независимо, векторное поле $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ рассматривается как дополнительная обобщенная координата и второе из соотношений (2.5), вообще говоря, не выполняется[5]. При этом плотность лагранжиана $\mathscr{L}$ является функцией материальных координат $\mathbf{X}$, времени t, полей $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$ и их первых градиентов, т.е.

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathbf{X}, t, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\varphi}, \dot{\boldsymbol{\varphi}}). \tag{2.6}$$

Можно дать следующую геометрическую интерпретацию кинематики микрополярного континуума. С каждой точкой среды связан недеформируемый ортонормальный триэдр (тройка директоров), который в отсчетном состоянии ориентирован вдоль базисных векторов, а при деформировании среды изменяет свою пространственную ориентацию. Может быть дана более общая интерпретация: с каждой точкой среды связано ассоциированное евклидово пространство размерности n, т.е. можно говорить о расслоении, рассматривая материальное многообразие как базу расслоения, а ассоциированные с точками этого многообразия евклидовы пространства — как слои [1, p. 311].

Кинематическое описание микрополярного континуума может быть обобщено следующим образом (Ericsen, Truesdell, [1]). Микродеформация элементарного объема среды представляется некомпланарными векторами (направляющими ориентированной среды) и предполагается, что они могут удлиняться и поворачиваться друг относительно друга так, что их ортогональность нарушается. Соответствующее линейное преобразование определяется тензором второго ранга $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}(\mathbf{X}, t)$, действующим в n-мерном пространстве директоров. Этот тензор далее будем называть тензором микродеформации.

С учетом сказанного выше, плотность лагранжиана может быть представлена в виде:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathbf{X}, t, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}, \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}). \tag{2.7}$$

Таким образом, кинематическое описание ориентированной среды построено на основе совершенно абстрактных соображений, согласно которым с каждой точкой среды связано линейное преобразование n-мерного пространства, недоступное

[5]Первая попытка введения микрополярной теории была предпринята Дюгемом и Фойхтом в 1887 г. Фойхт предположил, что кристаллические тела имеют полярную природу, обосновывая это величиной молекул и малым межмолекулярным расстоянием, и получил уравнения равновесия для таких кристаллов. Общая теория несимметричной упругости была впервые предложена в замкнутом виде братьями Коссера в 1909 г. [12]. Они связали с каждой материальной частицей жесткую ортонормированную тройку направляющих векторов, которая в процессе деформирования испытывает не только перемещение, но и вращение.

Интересно отметить, что в результате своих исследований Коссера надеялись получить теорию эфира и излучения и, таким образом, построить общую теорию поля, которая объединила бы классические теории упругости Коши и элетромагнетизма Максвелла.

непосредственному наблюдению. Однако кинематическая модель может быть построена на основе рассуждений, наделяющих директоры явным геометрическим смыслом (Mindlin, [13]). Для этой цели вводится понятие единичной ячейки, которую предлагается интерпретировать как молекулу полимера, кристаллит поликристалла или частицу зернистого материала. Ячейка идентифицируется материальной координатой $\mathbf{X}_1$, а частицы, расположенные внутри ячейки — материальными координатами $\mathbf{X}_2$. Тогда поле мест $\boldsymbol{\chi}$ частиц является функцией двух аргументов, которую можно представить в форме:

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_1(\mathbf{X}_1, t) + \boldsymbol{\chi}_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, t), \quad \boldsymbol{\chi}_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0}.$$

Допуская возможность разложения $\boldsymbol{\chi}_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, t)$ по степеням $\mathbf{X}_2$ приходим к выражению:

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_1(\mathbf{X}_1, t) + \boldsymbol{\mathcal{X}}_1(\mathbf{X}_1, t)\cdot\mathbf{X}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{X}}_2(\mathbf{X}_1, t) : \mathbf{X}_2 \otimes \mathbf{X}_2 \ldots .$$

Если удерживать только первые члены разложения, то

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_1(\mathbf{X}_1, t) + \boldsymbol{\mathcal{X}}_1(\mathbf{X}_1, t)\cdot\mathbf{X}_2 + \boldsymbol{o}(\|\mathbf{X}_2\|)$$

и, следовательно, плотность лагранжиана с точностью до малых порядка $\boldsymbol{o}(\|\mathbf{X}_2\|)$ имеет вид:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, t, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}_1, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}_1, \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_1). \tag{2.8}$$

Полагая, что лагранжева плотность не зависит от $\mathbf{X}_2$, т.е. ячейки однородны и изотропны, приходим к модели направляющих Эриксена и Труcделла (2.7). Если ячейка, сверх того, абсолютно жесткая, уравнения сводятся к уравнениям микрополярного континуума (2.6).

В классической теории микроморфной термоупругости [2] предполагается, что лагранжева плотность (вообще говоря, обобщенная лагранжева плотность, не предполагающая инвариантность соответствующего интеграла действия при сдвигах по времени, см. [1]) зависит от материальных координат $\mathbf{X}$, времени t, векторного поля мест $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$, тензорного поля микродеформаций $\boldsymbol{\mathcal{X}}(\mathbf{X}, t)$, скалярного поля температур $\theta(\mathbf{X}, t)$ и их градиентов, т.е.

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathbf{X}, t, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}, \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}, \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}, \theta, \boldsymbol{\nabla}\theta, \dot{\theta}). \tag{2.9}$$

Такое описание определяет диссипативную (параболическую) модель среды с бесконечной скоростью распространения теплового возмущения.

Как уже было отмечено, при высокочастотных воздействиях получаемые в рамках теории (2.9) результаты не согласуются с экспериментом. В качестве альтернативы может быть предложена модель термоупругой микрополярной среды, которая является обобщением гиперболической модели Грина–Нахди (Green, Naghdi, 1993) неполярных сред [7].

Согласно теории Грина–Нахди, температура определяет скрытую переменную состояния ϑ — так называемый термос (Van Dantzig, 1921) или температурное смещение:

$$\vartheta = \vartheta(\mathbf{X}, t) = \int_0^t \theta(\mathbf{X}, \tau)\, d\tau + \vartheta_0(\mathbf{X}).$$

Скрытая переменная состояния ϑ, ее градиент $\nabla\vartheta$ и скорость изменения $\dot{\vartheta}$ используется в качестве независимых аргументов выражения плотности лагранжиана:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\Big(\mathbf{X}, t, \boldsymbol{\chi}, \nabla\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}, \nabla\boldsymbol{\mathcal{X}}, \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}, \vartheta, \nabla\vartheta, \dot{\vartheta}\Big). \tag{2.10}$$

Обобщением моделей (2.9), (2.10) является теория, в которой абсолютная температура и ее градиент, а также соответствующее ей тепловое смещение и градиент теплового смещения рассматриваются как независимые аргументы лагранжевой плотности [5], т.е.

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\Big(\mathbf{X}, t, \boldsymbol{\chi}, \nabla\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}, \nabla\boldsymbol{\mathcal{X}}, \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}, \theta, \nabla\theta, \dot{\theta}, \vartheta, \nabla\vartheta, \dot{\vartheta}\Big). \tag{2.11}$$

В настоящей работе будем полагать, что скалярные поля θ, ϑ формально можно рассматривать как поля скрытых переменных состояния, число которых, вообще говоря, произвольно.

Таким образом, наиболее общее выражение интеграла действия $\mathscr{J}$ для рассматриваемых в работе моделей сред может быть записано в виде

$$\begin{aligned} &\mathscr{J} = \int_{t_1}^{t_2}\int_G \mathscr{L}\, dV\, dt, \\ &\mathscr{L} = \mathscr{L}\Big(\mathbf{X}, t, \boldsymbol{\chi}, \nabla\boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \boldsymbol{\mathcal{X}}, \nabla\boldsymbol{\mathcal{X}}, \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}, \vartheta_{(p)}, \nabla\vartheta_{(p)}, \dot{\vartheta}_{(p)}\Big), \quad p = 1, \ldots, s. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Здесь $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ — классические деформации, $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}(\mathbf{X}, t)$ — тензорное поле микродеформаций, $\vartheta_{(p)} = \vartheta_{(p)}(\mathbf{X}, t)$, $p = 1, \ldots, s$ — поля полярных скрытых переменных состояния.

3. Микроморфная кинематика

В выражении (2.12) плотность лагранжиана $\mathscr{L}$ рассматривается как функция четырех независимых переменных — материальных координат $\mathbf{X}$, времени t, и полей, зависящих от тех же переменных. В этой связи наиболее компактными оказываются преобразования, осуществляемые в четырехмерном пространстве Минковского.

Итак, материальные пространственно-временные координаты среды $t, \mathbf{X}$ отождествляются с точками пространства Минковского т.е. четырехмерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{M} = \mathbb{E}_3^1$. Элементы ковариантного базиса пространства $\mathbb{M}$ далее обозначаются готическими символами $\mathfrak{e}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$); для элементов базиса материального пространства и компонент разложения по нему используются греческие индексы:

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}^\alpha \mathfrak{e}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Четвертый элемент базиса, соответствующий переменной времени, обозначается $\mathfrak{e}_4 \equiv \mathfrak{e}_t$. Таким образом, пространственная переменная–место $\mathbf{X}$ и момент времени t определяют материальную координату–событие

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \mathbf{X} + \mathfrak{e}_t t.$$

Псевдоевклидова метрика пространства $\mathbb{M}$ задается метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = \mathfrak{e}_\alpha \cdot \mathfrak{e}_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix},$$

где c — характерная константа, имеющая размерность скорости, которая без потери общности здесь может быть принята равной единице (т.е. единице, имеющей размерность скорости).

Для элеменов контравариантного базиса пространства $\mathbb{M}$ используются обозначаются $\mathfrak{e}^\alpha$ ($\mathfrak{e}^\alpha \cdot \mathfrak{e}_\beta = \delta^\alpha_\beta$), а единичный оператор, действующий в пространстве $\mathbb{M}$, обозначается готическим символом $\mathfrak{I}$: $\mathfrak{I} = \mathfrak{e}^\alpha \otimes \mathfrak{e}_\alpha$. Наряду с оператором $\mathfrak{I}$ вводится проектирующий оператор $\breve{\mathfrak{I}}$: $\breve{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I} - \mathfrak{e}^t \otimes \mathfrak{e}_t$, позволяющий выделять пространственную часть события:

$$\mathbf{X} = \breve{\mathfrak{I}} \cdot \mathfrak{X}, \quad t = \mathfrak{e}^t \cdot \mathfrak{X}.$$

Интеграл действия $\mathscr{J}$ и соответствующая плотность лагранжиана $\mathscr{L}$ в переменных $\mathfrak{X}$ могут быть записаны следующим образом:

$$\mathscr{J} = \int_G \mathscr{L}\, d^4X,$$
$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left(\mathfrak{X}, \boldsymbol{\chi}, \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\mathcal{X}}, \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}, \vartheta_{(p)}, \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}\right), \quad p = 1, \ldots, s. \tag{3.1}$$

Здесь d^4X — "неинвариантный" элемент 4-объема

$$d^4X = d\mathfrak{X}_1\, d\mathfrak{X}_2\, d\mathfrak{X}_3\, d\mathfrak{X}_4,$$

т.е. фактически произведение дифференциалов координат, $\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}$ — 4–оператор Гамильтона

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} = \mathfrak{e}^\alpha \partial_\alpha = \boldsymbol{\nabla} + \mathfrak{e}^t \partial_t, \qquad \boldsymbol{\nabla} = \mathfrak{e}^1 \partial_1 + \mathfrak{e}^2 \partial_2 + \mathfrak{e}^3 \partial_3. \tag{3.2}$$

Будем полагать, что с каждой точкой $\mathfrak{X} \in \mathbb{M}$ связано ассоциированное n-мерное евклидово пространство $\hat{\mathbb{M}}$, элементы которого представляют материальные микрокоординаты. Ортонормированный базис $\hat{\mathbb{M}}$ образуют n векторов $\hat{\mathfrak{e}}_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = 1, \ldots, n$.

Положение материальных точек определяется местом $\boldsymbol{\chi}$ в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E} = \mathbb{E}_3$. Ортонормированный базис в $\mathbb{E}$ далее обозначается $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}^k$ ($\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_n = \delta_{kn}$), причем для индексов элементов базиса и компонент векторов в $\mathbb{E}$ используются латинские буквы:

$$\boldsymbol{\chi} = x^k \boldsymbol{e}_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{3.3}$$

С каждой точкой пространства мест связано ассоциированное n-мерное евклидово пространство $\hat{\mathbb{E}}$. В пространстве $\hat{\mathbb{E}}$ вводится ортонормированный базис $\hat{\boldsymbol{e}}_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} = 1, \ldots n$.

Для идентификации микроструктуры среды в $\hat{\mathbb{M}}$ вводятся n линейно–независимых векторов (материальных директоров) $\mathfrak{b}_k$, $k = 1, \ldots, n$ образы которых $\boldsymbol{b}_k \in \hat{\mathbb{E}}$ определяют микродеформацию элементарного объема. Таким образом, микродеформация определяется линейным преобразованием $\boldsymbol{\mathcal{X}}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} \ : \ \hat{\mathbb{M}} \to \hat{\mathbb{E}}. \tag{3.4}$$

В частном случае при $n = 3$ и $\boldsymbol{\mathcal{X}}^* = \boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}$ приходим к микрополярной теории: точки среды обладают ориентацией, задаваемой ортогональной тройкой единичных векторов в ассоциировнном пространстве, причем их ориентация определяется линейным ортогональным оператором, отображающим ортонормированную тройку векторов ассоциированного материального пространства $\hat{\mathbb{M}}$ в ассоциированное пространство мест $\hat{\mathbb{E}}$, т.е.

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} : \ \hat{\mathbb{M}} \to \hat{\mathbb{E}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{X}}^* = \boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}, \quad \det \boldsymbol{\mathcal{X}} = +1. \tag{3.5}$$

Предполагается, что одномерные пространства скрытых переменных $\vartheta_{(p)}$ имеют структуру $\mathbb{R}$.

Итак, *движение среды определяется следующими гладкими отображениями*

1) векторным полем классических деформаций

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}) : \ \mathbb{M} \to \mathbb{E}, \tag{3.6}$$

2) тензорным полем микродеформаций

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}) : \mathbb{M} \to \mathrm{Lin}(\hat{\mathbb{M}}, \hat{\mathbb{E}}), \tag{3.7}$$

3) скалярными полями скрытых переменных состояния

$$\vartheta_{(p)} = \vartheta_{(p)}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}) : \mathbb{M} \to \mathbb{R}, \quad p = 1, \ldots, s. \tag{3.8}$$

Будем полагать, что отображение (3.6) обратимо, причем обратное отображение

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\boldsymbol{x}) : \ \mathbb{E} \to \mathbb{M},$$

также является гладким, иным словами отображение (3.6) является диффеоморфизмом.

4. Группы преобразований

Рассматриваются точечные преобразования многообразий $\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$, $\mathbb{E}$, $\hat{\mathbb{E}}$, $\mathbb{P}$, реализуемые как действия на них непрерывных групп Ли [15].

Будем полагать, что на материальном многообразии $\mathbb{M}$ действует однопараметрическая (локальная) группа Ли $\mathfrak{G}$. Элементы группы $\mathfrak{g}(\varepsilon) \in \mathfrak{G}$ отображают $\mathbb{M}$ в себя, т.е. каждой точке $\boldsymbol{\mathfrak{X}} \in \mathbb{M}$ и каждому значению параметра $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие некоторая точка $\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}} \in \mathbb{M}$, причем отображение

$$\mathfrak{g}(\varepsilon) \circ \boldsymbol{\mathfrak{X}} = \widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}} = \widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon) \ : \ \mathbb{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{M}$$

является гладким [15]. Групповая операция определяется суммой параметров:

$$\mathfrak{g}(\varepsilon)\circ\mathfrak{g}(\delta)\circ\mathfrak{X}=\widetilde{\mathfrak{X}}(\widetilde{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X},\varepsilon),\delta)=\widetilde{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X},\varepsilon+\delta),$$

а единица группы соответствует нулевому значению параметра ε

$$\mathfrak{g}(0)\circ\mathfrak{X}=\widetilde{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X},0)=\mathfrak{X},$$

следовательно, обратным элементам отвечают параметры противоположных знаков.

Действие элемента $\mathfrak{g}(\varepsilon)$ на фиксированную точку $\mathfrak{X}$ при изменении параметра ε определяет на $\mathbb{M}$ кривую (поток) $\widetilde{\mathfrak{X}}(\varepsilon)$, задающую однопараметрическое семейство материальных координат. Касательный к этой кривой вектор $\boldsymbol{v}|_{\mathfrak{X}}$ (задаваемый в касательном пространстве $T\mathbb{M}|_{\mathfrak{X}}$) определяет инфинитезимальную образующую

$$T\mathbb{M}|_{\mathfrak{X}}\ni\boldsymbol{v}|_{\mathfrak{X}}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\widetilde{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X},\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{4.1}$$

Пусть на пространстве $\hat{\mathbb{M}}$, ассоциированном с материальным пространством $\mathbb{M}$, действует однопараметрическая группа $\hat{\mathfrak{G}}$. Поток, определяемый элементом группы $\hat{\mathfrak{g}}(\varepsilon)\in\hat{\mathfrak{G}}$ и фиксированной точкой $\hat{\mathfrak{b}}\in\hat{\mathbb{M}}$ задает однопараметрическое семейство материальных директоров $\widetilde{\mathfrak{b}}$:

$$\hat{\mathfrak{g}}(\varepsilon)\circ\mathfrak{b}=\widetilde{\mathfrak{b}}(\varepsilon)=\widetilde{\mathfrak{b}}(\mathfrak{b},\varepsilon),\quad \hat{\mathfrak{g}}(0)\circ\mathfrak{b}=\widetilde{\mathfrak{b}}(\mathfrak{b},0)=\mathfrak{b}.$$

Инфинитезимальная образующая $\boldsymbol{v}|_{\mathfrak{b}}$ представляет собой n-мерный вектор в касательном пространстве $T\hat{\mathbb{M}}\big|_{\mathfrak{b}}$:

$$T\hat{\mathbb{M}}\Big|_{\mathfrak{b}}\ni\boldsymbol{v}|_{\mathfrak{b}}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\widetilde{\mathfrak{b}}(\mathfrak{b},\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{4.2}$$

На пространстве мест (пространственных координат) $\mathbb{E}$ действует однопараметрическая группа G. Ее элементы $g(\varepsilon)\in G$ определяют потоки на $\mathbb{E}$, т.е. однопараметрические семейства мест $\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\varepsilon)$:

$$g(\varepsilon)\circ\boldsymbol{\chi}=\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\varepsilon)=\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\chi},\varepsilon),\quad g(0)\circ\boldsymbol{\chi}=\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\chi},0)=\boldsymbol{\chi}.$$

Инфинитезимальная образующая $\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{\chi}}$ группы G имеет вид

$$T\mathbb{E}|_{\boldsymbol{\chi}}\ni\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{\chi}}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\chi},\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{4.3}$$

На пространстве $\hat{\mathbb{E}}$, ассоциированном с пространством мест $\mathbb{E}$, действует однопараметрическая группа $\hat{G}$. Ее элементы $\hat{g}(\varepsilon)\in\hat{G}$ определяют потоки на $\hat{\mathbb{E}}$, т.е. однопараметрические семейства пространственных директоров $\widetilde{\boldsymbol{b}}(\varepsilon)$:

$$\hat{g}(\varepsilon)\circ\boldsymbol{b}=\widetilde{\boldsymbol{b}}(\varepsilon)=\widetilde{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{b},\varepsilon),\quad \hat{g}(0)\circ\boldsymbol{b}=\widetilde{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{b},0)=\boldsymbol{b},$$

$$T\hat{\mathbb{E}}\Big|_{\boldsymbol{b}}\ni\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{b}}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\widetilde{\boldsymbol{b}}(\varepsilon,\boldsymbol{b})\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{4.4}$$

Наконец, на физических пространствах $\mathbb{P}$ действуют однопараметрические группы G, элементы которых $\mathrm{g}(\varepsilon)\in\mathrm{G}$ задают однопараметрические семейства физических параметров:

$$\widetilde{\vartheta_{(p)}}(\varepsilon)=\widetilde{\vartheta_{(p)}}(\vartheta_{(p)},\varepsilon),\quad \widetilde{\vartheta_{(p)}}(\vartheta_{(p)},0)=\vartheta_{(p)},$$

$$T\mathbb{P}|_{\vartheta_{(p)}} \ni \boldsymbol{v}|_{\vartheta_{(p)}} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\widetilde{\vartheta_{(p)}}(\vartheta_{(p)}, \varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}. \tag{4.5}$$

Остановимся подробнее на частных группах преобразований.

Рассматривается группа $\mathfrak{G}_T$ трансляции (сдвигов) пространства $\mathbb{M}$ по направлению 4-вектора $\boldsymbol{\mathfrak{X}}_0$:

$$\mathfrak{G}_T : \widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}} = \boldsymbol{\mathfrak{X}} + \varepsilon\boldsymbol{\mathfrak{X}}_0. \tag{4.6}$$

Инфинитезимальная образующая группы $\mathfrak{G}_T$ имеет вид:

$$\boldsymbol{v}|_{\boldsymbol{\mathfrak{X}}} = \boldsymbol{\mathfrak{X}}_0. \tag{4.7}$$

Пространственные вращения пространства $\mathbb{M}$ образуют группу $\mathfrak{G}_R$:

$$\mathfrak{G}_R : \widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon) = \boldsymbol{\Omega}(\varepsilon)\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}},$$

где $\boldsymbol{\Omega}(\varepsilon)$ — ортогональный тензор с положительным определителем, осуществляющий поворот трехмерного подпространства $\mathbb{E}_3 \subset \mathbb{E}_3^1 = \mathbb{M}$, и, следовательно, сохраняющий длины пространственноподобных векторов, т.е.

$$\boldsymbol{\Omega}(\varepsilon)\cdot\boldsymbol{\Omega}(\varepsilon)^* = \boldsymbol{\mathfrak{I}}, \quad \det\boldsymbol{\Omega}(\varepsilon) = +1, \quad \boldsymbol{\Omega}(\varepsilon)\cdot\boldsymbol{\mathfrak{e}}_4 = \boldsymbol{\mathfrak{e}}_4. \tag{4.8}$$

Общее представление $\boldsymbol{\Omega}(\varepsilon)$ может быть записано в виде [14]:

$$\boldsymbol{\Omega}(\varepsilon) = \Omega(\varepsilon)^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha \otimes \boldsymbol{\mathfrak{e}}^\beta, \tag{4.9}$$

где

$$\Omega(\varepsilon)^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} =$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda^2-\mu^2-\nu^2+\rho^2 & 2\,(\lambda\,\mu-\nu\,\rho) & 2\,(\lambda\,\nu+\mu\,\rho) & 0 \\ -2\,(\lambda\,\mu+\nu\,\rho) & \lambda^2-\mu^2+\nu^2-\rho^2 & 2\,(\lambda\,\rho-\mu\,\nu) & 0 \\ 2\,(\mu\,\rho-\lambda\,\nu) & -2\,(\mu\,\nu+\lambda\,\rho) & \lambda^2+\mu^2-\nu^2-\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

λ, μ, ν, ρ — параметры Кэли–Клейна, для которых имеет место равенство

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1. \tag{4.11}$$

Параметры Кэли–Клейна могут быть выражены через фиксированные величины α, β и параметр группы ε следующим образом:

$$\lambda = \cos\frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu = \sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\alpha, \quad \nu = \sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\beta, \quad \rho = \sin\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}. \tag{4.12}$$

Отметим, что константы α, β определяют ориентацию оси вращения, т.е. представляют собой углы между осями координат и осью вращения, а параметр группы ε определяет угол поворота вокруг этой оси[6].

[6]Непосредственным вычислением доказывается, что оператор, определенный формулами (4.9), (4.12) удовлетворяет условиям (4.8) и, следовательно, является оператором вращения. Обратное утверждение, состоящее и том, что любое вращение может быть представлено в виде (4.9), (4.12), доказывается, например, в [14].

Инфинитезимальные образующие $\boldsymbol{\nu}|_{\mathfrak{X}}$ группы $\mathfrak{G}_R$ определяются матрицами (матричными генераторами) $\omega^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}$

$$\boldsymbol{\nu}|_{\mathfrak{X}} = \omega\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \quad \omega = \omega^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{e}^\beta, \tag{4.13}$$

которые оказываются антисимметричными:

$$\omega^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \left.\frac{\partial\Omega^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}}{\partial\varepsilon}\right|_{\theta=0,\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2}} \delta\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta\varepsilon,$$

$$\omega^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \left.\frac{\partial^2\Omega^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}}{\partial\varepsilon\partial\alpha}\right|_{\theta=0,\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2}} \delta\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta\varepsilon,$$

$$\omega^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \left.\frac{\partial^2\Omega^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}}{\partial\varepsilon\partial\beta}\right|_{\theta=0,\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2}} \delta\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta\varepsilon.$$

Элементы группы $\mathfrak{G}_L$ задают пространственно–временные повороты (гиперболические вращения — бусты, т.е. линейные преобразования, сохраняющие величину пространственно–временного интервала)

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon) = \boldsymbol{\Lambda}(\varepsilon)\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}},$$

где

$$\boldsymbol{\Lambda}(\varepsilon) = \Lambda(\varepsilon)^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{e}^\beta,$$

$$\Lambda(\varepsilon)^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = $$
$$= \begin{pmatrix} \lambda^2-\mu^2+\nu^2-\rho^2 & 2\nu\rho & 2\mu\nu & 2\lambda\nu \\ 2\nu\rho & \lambda^2-\mu^2-\nu^2+\rho^2 & 2\mu\rho & 2\lambda\rho \\ 2\mu\nu & 2\mu\rho & \lambda^2+\mu^2-\nu^2-\rho^2 & 2\lambda\mu \\ 2\lambda\nu & 2\lambda\rho & 2\lambda\mu & \lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2 \end{pmatrix},$$

причем параметры Кэли–Клейна λ, μ, ν, ρ удовлетворяют условию

$$\lambda^2-\mu^2-\nu^2-\rho^2 = 1$$

и определяются следующим образом

$$\lambda = \operatorname{ch}\frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu = \operatorname{sh}\frac{\varepsilon}{2}\cos\alpha, \quad \nu = \operatorname{sh}\frac{\varepsilon}{2}\cos\beta, \quad \rho = \operatorname{sh}\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}.$$

Здесь α, β — фиксированные величины, задающие ориентацию оси гиперболического вращения.

Инфинитезимальные образующие $\boldsymbol{\nu}|_{\mathfrak{X}}$ подгруппы $\mathfrak{G}_L$ определяются матрицами $\lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}$

$$\boldsymbol{\nu}|_{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \quad \lambda = \lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{e}^\beta,$$

где

$$\lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \left.\frac{\partial\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}}{\partial\varepsilon}\right|_{\theta=0,\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2}}\delta\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta\varepsilon,$$

$$\lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \left.\frac{\partial^2\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}}{\partial\varepsilon\partial\alpha}\right|_{\theta=0,\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2}}\delta\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta\varepsilon,$$

$$\lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \left.\frac{\partial^2\Lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}}{\partial\varepsilon\partial\beta}\right|_{\theta=0,\alpha=0,\beta=\frac{\pi}{2}}\delta\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\delta\varepsilon.$$

Заметим, что матрицы $\lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}$, определяющие смешанные компоненты тензора $\boldsymbol{\lambda}$, симметрические, однако, если вычислить соответствующие ковариантные компоненты

$$\lambda_{\alpha\beta}\mathfrak{e}^{\alpha}\otimes\mathfrak{e}^{\beta}, \tag{4.14}$$

то в результате будут получены, как и в (4.13), антисимметричные матрицы:

$$\lambda_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma}\lambda^{\gamma\cdot}_{\cdot\beta}, \quad \lambda_{\alpha\beta} = -\lambda_{\beta\alpha}. \tag{4.15}$$

Таким образом, антисимметрические матрицы размерностью 4×4, образующие шестимерное векторное пространство, будут матричными генераторами группы собственных вращений пространства $\mathbb{M}$ ([24, p. 110]).

Преобразования n-мерного евклидова ассоциированного пространства $\hat{\mathbb{M}}$ — вращения:

$$\widetilde{\mathfrak{b}}(\mathfrak{b},\varepsilon) = \hat{\boldsymbol{\Omega}}\cdot\mathfrak{b}, \quad \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{*} = \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}.$$

Инфинитезимальные образующие группы определяются антисимметричными матрицами $\hat{\boldsymbol{\omega}}$.

Действие группы $\mathfrak{G}_S$ дилатации (изменения масштаба) определяется преобразованием

$$\mathfrak{G}_S:\ \widetilde{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X},\varepsilon) = e^{\varepsilon}\boldsymbol{B}\cdot\mathfrak{X}, \tag{4.16}$$

где $\boldsymbol{B}$ — симметричный положительно определенный тензор второго ранга:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}^{*}\cdot\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{\Delta} = \sum_{\alpha=1}^{4}\Delta_{\alpha}\mathfrak{e}^{\alpha}\otimes\mathfrak{e}_{\alpha}, \quad \boldsymbol{O}^{*} = \boldsymbol{O}^{-1}.$$

Собственные векторы тензора $\boldsymbol{B}$ определяют направления, по которым происходит изменение масштаба, а собственные значения Δ_{α} представляют собой коэффициенты масштабирования. Инфинитезимальная образующая группы $\mathfrak{G}_S$ имеет вид

$$\boldsymbol{v}|_{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{B}\cdot\mathfrak{X}. \tag{4.17}$$

Аналогичным образом определяется группа дилатации $\hat{\mathfrak{G}}_S$, действующая на ассоциированном пространстве $\hat{\mathbb{M}}$; соответствующая инфинитезимальная образующая — симметричный тензор $\hat{\boldsymbol{B}}$, действующий в n–мерном пространстве.

Таким образом, *на многообразии* $\mathbb{M} \times \hat{\mathbb{M}}$ *определены действия однопараметрических групп сдвига* $\mathfrak{G}_T$*; пространственных вращений* $\mathfrak{G}_R$, $\hat{\mathfrak{G}}_R$, *гиперболических вращений* $\mathfrak{G}_L$, *дилатации* $\mathfrak{G}_S$, $\hat{\mathfrak{G}}_S$[7].

Рассмотрим теперь преобразование пространства мест $\mathbb{E}$ и ассоциированного с ним пространства $\hat{\mathbb{E}}$.

Трансляционная группа G_T (сдвигов вдоль некоторого фиксированного направления $\boldsymbol{a}$) определяет преобразования пространственных координат:

$$\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\chi}, \varepsilon) = \boldsymbol{\chi} + \varepsilon \boldsymbol{a}. \tag{4.18}$$

Группа вращений G_R соответствует следующим преобразованиям:

$$\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\chi}, \varepsilon) = \boldsymbol{\Omega}'(\varepsilon)\cdot\boldsymbol{\chi}, \quad \boldsymbol{\Omega}'(\varepsilon)^* = \boldsymbol{\Omega}'(\varepsilon)^{-1}, \quad \det \boldsymbol{\Omega}'(\varepsilon) = +1.$$

Группа G_S дилатации пространства $\mathbb{E}$ задается симметрическим тензором $\boldsymbol{B}'$

$$\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\chi}, \varepsilon) = e^{\varepsilon} \boldsymbol{B}' \cdot \boldsymbol{\chi}, \quad \nu|_{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{B}' \cdot \boldsymbol{\chi}. \tag{4.19}$$

Группа $\hat{G}_R$ собственных вращений ассоциированного пространства $\hat{\mathbb{E}}$ определяется ортогональным тензором $\hat{\boldsymbol{\Omega}}'(\varepsilon)$, а инфинитезимальная образующая — антисимметричным тензором $\hat{\boldsymbol{\omega}}'$; группа $\hat{G}_S$ дилатации ассоциированного пространства $\hat{\mathbb{E}}$ определяется симметрическим тензором $\hat{\boldsymbol{B}}'$.

Итак, *на многообразии* $\mathbb{E}\times\hat{\mathbb{E}}$ *определены действия однопараметрических групп сдвига* G_T*; пространственных вращений* G_R, $\hat{G}_R$, *дилатации* G_S , $\hat{G}_S$[8].

Преобразования одномерных физических пространств сводятся к сдвигам, и соответствующие им группы преобразований – однопараметрические трансляционные группы:

$$\widetilde{\vartheta_{(p)}}(\vartheta_{(p)}, \varepsilon) = \vartheta_{(p)} + \varepsilon. \tag{4.20}$$

Локальное действие рассмотренных однопараметрических групп преобразований определяется групповым параметром ε, а также фиксированными тензорными величинами, имеющим определенный геометрический смысл, в частности, тензоры $\boldsymbol{\omega}$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$, $\boldsymbol{\omega}'$ или $\hat{\boldsymbol{\omega}}'$ определяют ось вращения, тензоры $\boldsymbol{B}$, $\hat{\boldsymbol{B}}$, $\boldsymbol{B}'$ или $\hat{\boldsymbol{B}}'$ — соотношение масштабных коэффициентов. *Отождествляя групповые параметры нескольких групп и явно указывая связь между этими тензорами, приходим к группам согласованных преобразований.*

---

[7]Разумеется, все перечисленные группы являются подгруппами расширенной группы линейных преобразований $n+4$-мерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{E}^1_{n+3}$, однако явное перечисление этих подгрупп позволяет конкретизировать их геометрический смысл и связать их с получаемыми ниже законами сохранения.

[8]Перечисленные группы являются подгруппами расширенной группы линейных преобразований $n+3$-мерного евклидова пространства $\mathbb{E}^1_{n+3}$.

5. Вариации

В вариационном исчислении [16] рассматриваются полные и частичные вариации координат и полей, которые определяются инфинитезимальными образующими рассматриваемых групп преобразований.

Вариация материальных координат $\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}$ представляет собой линейную часть приращения $\triangle\boldsymbol{\mathfrak{X}}(\varepsilon) = \widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon) - \boldsymbol{\mathfrak{X}}$ и может быть вычислена следующим образом

$$\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \left.\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \boldsymbol{\nu}|_{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}\, \delta\varepsilon. \tag{5.1}$$

В частности, вариация материальных координат $\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}$, соответствующая подгруппе сдвигов $\mathfrak{G}_T$, имеет вид

$$\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{\mathfrak{X}}_0\, \delta\varepsilon;$$

вариация материальных координат, соответствующая пространственным вращениям (т.е. группе $\mathfrak{G}_R$)

$$\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}}\, \delta\varepsilon = \omega^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} X^{\beta} \mathfrak{e}_{\alpha}\, \delta\varepsilon, \tag{5.2}$$

вариация материальных координат, соответствующая пространственно–временным вращениям (т.е. группе $\mathfrak{G}_L$)

$$\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}}\, \delta\varepsilon = \lambda^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} X^{\beta} \mathfrak{e}_{\alpha}\, \delta\varepsilon \tag{5.3}$$

и, наконец, вариация материальных координат, соответствующая изменению масштаба (группа $\mathfrak{G}_S$) записывается в виде

$$\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}}\, \delta\varepsilon = B^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} X^{\beta} \mathfrak{e}_{\alpha}\, \delta\varepsilon. \tag{5.4}$$

Вариация поля мест $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\mathfrak{X}})$ как линейная часть приращения

$$\triangle\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon) = \widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon), \varepsilon) - \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\mathfrak{X}})$$

может быть представлена следующим образом:

$$\delta\boldsymbol{\chi} = \left.\frac{d\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon), \varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \left.\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon + \\ + \left.\frac{\partial\boldsymbol{\chi}(\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon))}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon = \overline{\delta\boldsymbol{\chi}} + \delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}.$$

Согласно принятой терминологии [16] вариация $\delta\boldsymbol{\chi}$ называется полной, а $\overline{\delta\boldsymbol{\chi}}$ — частичной:

$$\overline{\delta\boldsymbol{\chi}} = \left.\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon. \tag{5.5}$$

Аналогичным образом определяются полные $\delta\boldsymbol{X}$ и частичные вариации $\overline{\delta\boldsymbol{X}}$ тензорных полей $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\mathfrak{X}})$:

$$\delta\boldsymbol{X} = \overline{\delta\boldsymbol{X}} + \delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{X}, \quad \overline{\delta\boldsymbol{X}} = \left.\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon \tag{5.6}$$

и скалярных полей $\vartheta_{(p)}$

$$\delta\vartheta_{(p)} = \overline{\delta\vartheta_{(p)}} + \delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}, \quad \overline{\delta\vartheta_{(p)}} = \sum_{k} \left.\frac{\partial\widetilde{\vartheta_{(p)}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}},\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \delta\varepsilon. \tag{5.7}$$

Важно отметить, что в силу своего определения частичные вариации коммутируют с оператором градиента

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\overline{\delta\boldsymbol{\chi}} = \delta\overline{\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}, \quad \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\overline{\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \delta\overline{\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}, \quad \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\overline{\delta\vartheta_{(p)}} = \delta\overline{\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}},$$

а полные — не коммутируют, но для них справедливы соотношения:

$$\delta\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi} = \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\chi} - \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}, \quad \delta\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}} = \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathcal{X}} - \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}},$$
$$\delta\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)} = \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\vartheta_{(p)} - \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}, \tag{5.8}$$

используемые далее для вычисления интеграла действия.

6. Вариация интеграла действия

Интеграл действия $\mathscr{J}$ (2.12) как функция материальных координат и полей, трансформируемых групповыми преобразованиями, является функцией параметра ε:

$$\widetilde{\mathscr{J}}(\varepsilon) = \int_{\widetilde{G}(\varepsilon)} \mathscr{L}(\varepsilon)\, d^4\widetilde{X}(\varepsilon), \quad \left.\widetilde{\mathscr{J}}(\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0} = \mathscr{J}. \tag{6.1}$$

В предположении достаточной гладкости функции $\widetilde{\mathscr{J}}(\varepsilon)$ представим ее в виде разложения Тейлора

$$\widetilde{\mathscr{J}}(\varepsilon) = \mathscr{J} + \varepsilon \left.\frac{d}{d\varepsilon}\widetilde{\mathscr{J}}(\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon),$$

в котором линейная часть

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\widetilde{\mathscr{J}}(\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0} = \int_G \left.\left[\frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon} + \widetilde{\mathscr{L}}(\varepsilon)\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right]\right|_{\varepsilon=0} d^4X \tag{6.2}$$

представляет собой инфинитезимальную образующую $\widetilde{\mathscr{J}}(\varepsilon)$.

Согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\widetilde{\mathscr{L}}(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\mathscr{L}\cdot\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}} : \frac{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\widetilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}} \vdots \frac{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}}{\partial\varepsilon} +$$
$$+ \sum_p \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}}\frac{\partial\widetilde{\vartheta_{(p)}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\cdot\frac{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\widetilde{\vartheta_{(p)}}}{\partial\varepsilon}\right] \tag{6.3}$$

и, следовательно, инфинитезимальная образующая (6.2) может быть представлена в виде:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\widetilde{\mathscr{J}}(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_G \Bigg\{ \underset{4}{\nabla}\cdot\left(\mathscr{L}\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{X}}}{\partial\varepsilon}\right) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\chi}}:\frac{\partial\underset{4}{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}}{\partial\varepsilon} +$$

$$+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\vdots\frac{\partial\underset{4}{\nabla}\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}}{\partial\varepsilon} + \sum_p\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}}\frac{\partial\widetilde{\vartheta}_{(p)}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\vartheta_{(p)}}\cdot\frac{\partial\underset{4}{\nabla}\widetilde{\vartheta}_{(p)}}{\partial\varepsilon}\right]\Bigg\}_{\varepsilon=0} d^4X. \quad (6.4)$$

Используя следующие тождества

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\chi}}:\frac{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\chi}}{\partial\varepsilon} = \underset{4}{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\chi}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial\varepsilon}\right) + \left(\underset{4}{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\chi}}\right)\cdot\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial\varepsilon},$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\vdots\frac{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}}{\partial\varepsilon} = \underset{4}{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}}{\partial\varepsilon}\right) + \left(\underset{4}{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right):\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}}{\partial\varepsilon},$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\vartheta_{(p)}}\cdot\frac{\partial\underset{4}{\nabla}\vartheta_{(p)}}{\partial\varepsilon} = \underset{4}{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\vartheta_{(p)}}\frac{\partial\widetilde{\vartheta}_{(p)}}{\partial\varepsilon}\right) + \left(\underset{4}{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\vartheta_{(p)}}\right)\frac{\partial\widetilde{\vartheta}_{(p)}}{\partial\varepsilon},$$

преобразуем выражение для инфинитезимальной образующей (6.4) к форме:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\widetilde{\mathscr{J}}(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_G \Bigg\{ \underset{4}{\nabla}\cdot\left(\mathscr{L}\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{X}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\chi}}\cdot\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}}{\partial\varepsilon} + \sum_p\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\vartheta_{(p)}}\frac{\partial\widetilde{\vartheta}_{(p)}}{\partial\varepsilon}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}} - \underset{4}{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\chi}}\right)\cdot\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial\varepsilon} + \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \underset{4}{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right):\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{X}}}}{\partial\varepsilon} +$$

$$+\sum_p\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}} - \underset{4}{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\vartheta_{(p)}}\right)\frac{\partial\widetilde{\vartheta}_{(p)}}{\partial\varepsilon}\Bigg\}_{\varepsilon=0} d^4X. \quad (6.5)$$

Отметим, что более компактной оказывается запись (6.5) через частичные вариации

$$\delta\mathscr{J} = \int_G \Bigg\{ \underset{4}{\nabla}\cdot\left(\mathscr{L}\delta\mathfrak{X} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\chi}}\cdot\overline{\delta\boldsymbol{\chi}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\overline{\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \sum_p\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\vartheta_{(p)}}\overline{\delta\vartheta_{(p)}}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}} - \underset{4}{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\chi}}\right)\cdot\overline{\delta\boldsymbol{\chi}} + \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \underset{4}{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right):\overline{\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}} +$$

$$+\sum_p\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}} - \underset{4}{\nabla}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\vartheta_{(p)}}\right)\overline{\delta\vartheta_{(p)}}\Bigg\} d^4X. \quad (6.6)$$

Вводится ток Нетер

$$\delta\boldsymbol{J} = \mathscr{L}\delta\mathfrak{X} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\chi}}\cdot\overline{\delta\boldsymbol{\chi}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\overline{\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \sum_p\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\vartheta_{(p)}}\overline{\delta\vartheta_{(p)}}, \quad (6.7)$$

$$\delta \boldsymbol{J} = \delta J^{\alpha} \boldsymbol{\mathfrak{e}}_{\alpha}, \quad \delta J^{\alpha} = \mathscr{L} \delta \mathfrak{X}^{\alpha} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\alpha} \chi^{k}} \overline{\delta \chi^{k}} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\alpha} \mathcal{X}^{k\cdot}_{\cdot\gamma}} \overline{\delta \mathcal{X}^{k\cdot}_{\cdot\gamma}} + \sum_{p} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\alpha} \vartheta_{(p)}} \overline{\delta \vartheta_{(p)}}$$

и выражения Эйлера–Лагранжа

$$\mathscr{E}_{\boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\chi}} - \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi}}, \quad \mathscr{E}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{X}}} - \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\mathcal{X}}}, \quad \mathscr{E}_{\vartheta_{(p)}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vartheta_{(p)}} - \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \vartheta_{(p)}}.$$

Теперь равенство (6.6) может быть записано в виде

$$\delta \mathscr{J} = \int_{G} \left\{ \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \delta \boldsymbol{J} + \mathscr{E}_{\boldsymbol{\chi}} \cdot \overline{\delta \boldsymbol{\chi}} + \mathscr{E}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \overline{\delta \boldsymbol{\mathcal{X}}} + \sum_{p} \mathscr{E}_{\vartheta_{(p)}} \overline{\delta \vartheta_{(p)}} \right\} d^{4}X \tag{6.8}$$

или, преобразуя по теореме Гаусса–Остроградского объемный интеграл от дивергенции тока Нетер в поверхностный, в следующей форме:

$$\delta \mathscr{J} = \oint_{\partial} \delta \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{N} \, dA + \int_{G} \left\{ \mathscr{E}_{\boldsymbol{\chi}} \cdot \overline{\delta \boldsymbol{\chi}} + \mathscr{E}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \overline{\delta \boldsymbol{\mathcal{X}}} + \sum_{p} \mathscr{E}_{\vartheta_{(p)}} \overline{\delta \vartheta_{(p)}} \right\} d^{4}X. \tag{6.9}$$

Здесь ∂ — граница $\boldsymbol{G}$ (гиперповерхность в $\mathbb{M}$), $\boldsymbol{N}$ — внешняя единичная нормаль к ∂.

Получим еще одну форму для $\delta \mathscr{J}$, преобразуя в (6.3) выражение для полной производной лагранжевой плотности следующим образом:

$$\begin{aligned} \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \mathscr{L} = \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}} \mathscr{L} + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\chi}} + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi} : \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi}} + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\mathcal{X}} : \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{X}}} + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\mathcal{X}} \vdots \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\mathcal{X}}} + \\ + \sum_{p} \left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \vartheta_{(p)} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vartheta_{(p)}} + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \vartheta_{(p)} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \vartheta_{(p)}} \right). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Здесь $\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}} \mathscr{L}$ — "явный" 4-градиент, вычисляемый при фиксированных полях, т.е.

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}} \mathscr{L} = \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mathfrak{X}}} \mathscr{L} \left(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}_0), \boldsymbol{\mathcal{X}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}_0), \vartheta_{(p)}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}_0) \right) \right]_{\boldsymbol{\mathfrak{X}}_0 = \boldsymbol{\mathfrak{X}}}. \tag{6.11}$$

В результате подстановки (6.10) в (6.3) и перегруппировки слагаемых приходим к следующему равенству

$$\frac{d}{d\varepsilon}\widetilde{\mathscr{J}}(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} = \int_G \Bigg\{ \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}}\mathscr{L}\cdot\frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}}{\partial\varepsilon} + \mathscr{L}\frac{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}}{\partial\varepsilon} + \\
+ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\chi}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}}{\partial\varepsilon}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}\right) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}:\left(\frac{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}}{\partial\varepsilon}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}\right) + \\
+ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\left(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}}{\partial\varepsilon}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\,\vdots\left(\frac{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}}{\partial\varepsilon}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right) + \\
+ \sum_p\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}}\left(\frac{\partial\vartheta_{(p)}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}}{\partial\varepsilon}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}\right) + \right. \\
\left.\left. + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\left(\frac{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}}{\partial\varepsilon}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}\right)\right]\right\}_{\varepsilon=0} d^4X. \quad (6.12)$$

Если воспользоваться обозначениями для полных вариаций, то полученный результат можно записать в виде

$$\delta\mathscr{J} = \int_G \Bigg\{ \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}}\mathscr{L}\cdot\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} + \mathscr{L}\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} + \\
+ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\delta\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}:\delta\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\delta\boldsymbol{\mathcal{X}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\,\vdots\,\delta\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}} + \\
+ \sum_p\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}}\delta\vartheta_{(p)} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\cdot\delta\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}\right]\Bigg\} d^4X. \quad (6.13)$$

Учитывая соотношения (5.8), приходим к выражению

$$\delta\mathscr{J} = \int_G \Bigg\{ \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}}\mathscr{L}\cdot\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} + \mathscr{L}\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}:\left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\,\vdots\left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right) - \\
- \sum_p\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}\right)\right] + \\
+ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\delta\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\delta\boldsymbol{\mathcal{X}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\,\vdots\,\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathcal{X}} + \\
+ \sum_p\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}}\delta\vartheta_{(p)} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\vartheta_{(p)}\right]\Bigg\} d^4X, \quad (6.14)$$

которое после перегруппировки слагаемых принимает вид

$$\delta\mathscr{J} = \int_G \Big\{ \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}}\mathscr{L}\cdot\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} +$$
$$+\left(\mathscr{L}\mathscr{E} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}\cdot\left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}\right)^* - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^* - \sum_p\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\otimes\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}\right]\right):\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} +$$
$$+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\delta\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\delta\boldsymbol{\mathcal{X}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\vdots\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathcal{X}} +$$
$$+\sum_p\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}}\delta\vartheta_{(p)} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\vartheta_{(p)}\right]\Big\}\, d^4X. \quad (6.15)$$

Вводится тензор энергии–импульса

$$\boldsymbol{\mathfrak{T}} = \mathscr{L}\boldsymbol{\mathfrak{I}} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}\cdot\left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}\right)^* - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^* - \sum_p\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\otimes\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}. \quad (6.16)$$

Компоненты его разложения в диадном базисе

$$\boldsymbol{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\boldsymbol{\mathfrak{e}}_\alpha\otimes\boldsymbol{\mathfrak{e}}^\beta$$

имеют вид

$$\mathfrak{T}^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \mathscr{L}\delta^\alpha_\beta - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\alpha\chi^k}\partial_\beta\chi^k - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\alpha\mathcal{X}^{k\cdot}_{\cdot\alpha}}\partial_\beta\mathcal{X}^{k\cdot}_{\cdot\alpha} - \sum_p\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\alpha\vartheta_{(p)}}\partial_\beta\vartheta_{(p)}.$$

Окончательно, приходим к следующему выражению:

$$\delta\mathscr{J} = \int_G\Big\{\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}}\mathscr{L}\cdot\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} + \mathscr{T}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\delta\boldsymbol{\chi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\chi} +$$
$$+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\delta\boldsymbol{\mathcal{X}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathcal{X}} + \sum_p\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta}\delta\vartheta_{(p)} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\vartheta_{(p)}\right]\Big\}\, d^4X. \quad (6.17)$$

Отметим, что в выражение (6.17) в качестве множителей входят полные вариации координат и полей, а также их градиенты. В этой связи *форма представления (6.17) оказывается наиболее удобной для получения в законов сохранения, соответствующих заданной группе преобразований.*

7. Уравнения Эйлера–Лагранжа

Если варьированию подвергаются только физические поля внутри области G (на границе поля закреплены), то интеграл от дивергенции тока Нетер обращается в нуль:

$$\int_G \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\delta\boldsymbol{J}\, d\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \oint_\partial \delta\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{N}\, dA = 0$$

и, следовательно,

$$\delta\mathscr{J} = \int_G \left(\mathscr{E}_u \overline{\delta\boldsymbol{\chi}} + \mathscr{E}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \overline{\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \mathscr{E}_{\vartheta_{(p)}} \overline{\delta\vartheta}\right) d^4X.$$

Инвариантность итеграла действия $\delta\mathscr{J} = 0$ и независимость полей приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа (уравнениям поля)

$$\mathscr{E}_{\boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}} - \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0}, \quad \mathscr{E}_{\boldsymbol{\chi}}{}^{\alpha} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\chi^{\alpha}} - \partial_{\beta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\beta}\chi^{\alpha}} = 0, \tag{7.1}$$

$$\mathscr{E}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \mathbf{0}, \quad \mathscr{E}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}}{}_{k.}^{\cdot\alpha} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathcal{X}^{k.}_{\cdot\alpha}} - \partial_{\beta}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\beta}\mathcal{X}^{k.}_{\cdot\alpha}} = 0, \tag{7.2}$$

$$\mathscr{E}_{\vartheta_{(p)}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}} - \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}} = 0, \quad \mathscr{E}_{\vartheta_{(p)}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}} - \partial_{\alpha}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\alpha}\vartheta_{(p)}} = 0. \tag{7.3}$$

8. Теорема Нетер

Утверждение теоремы Нетер состоит в следующем [8]. Если интеграл действия $\mathscr{J}(\varepsilon)$ является инфинитезимальным инвариантом некоторой группы преобразований, т.е. обращаются в нуль инфинитезимальная образующая

$$\delta\mathscr{J} = 0, \tag{8.1}$$

то дивергенция тока Нетер равна следующей комбинации лагранжевых выражений

$$-\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\delta\boldsymbol{J} = \mathscr{E}_{\boldsymbol{\chi}}\cdot\overline{\delta\boldsymbol{\chi}} + \mathscr{E}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \overline{\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \sum_p \mathscr{E}_{\vartheta_{(p)}}\overline{\delta\vartheta_{(p)}}. \tag{8.2}$$

Обратно, если имеется дивергентное соотношение вида (8.2), то сущетвует группа с инвариантом $\mathscr{J}(\varepsilon)$.

Если выполняются уравнения поля (уравнения Эйлера–Лагранжа) (7.1)–(7.3), то из (6.8) получаем слабые законы сохранения

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\delta\boldsymbol{J} = \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\left(\mathscr{L}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}\cdot\overline{\delta\boldsymbol{\chi}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \overline{\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \sum_p \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\overline{\delta\vartheta_{(p)}}\right) = 0, \tag{8.3}$$

а из (6.9) — инвариантные интегралы

$$\oint_{\partial}\boldsymbol{N}\cdot\delta\boldsymbol{J}\,dA =$$
$$= \oint_{\partial}\boldsymbol{N}\cdot\left(\mathscr{L}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}\cdot\overline{\delta\boldsymbol{\chi}} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \overline{\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \sum_p \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\overline{\delta\vartheta_{(p)}}\right) dA, \tag{8.4}$$

где $\boldsymbol{N}$ — внешняя единичная нормаль к границе ∂.

Законы сохранения без предположения о выполнении уравнений поля —

сильные законы сохранения вытекают из (6.17):

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}}\mathscr{L}\cdot\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}+\boldsymbol{\mathfrak{T}}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\delta\boldsymbol{\chi}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}\vdots\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\chi}+$$
$$+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\vdots\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}+\sum_{p}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}}\delta\vartheta_{(p)}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\vartheta_{(p)}\right]=0. \quad (8.5)$$

В координатной записи соотношение (8.5) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathfrak{X}^{\alpha}}\right)_{\text{expl}}\delta\mathfrak{X}^{\alpha}+\mathfrak{T}^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\partial_{\alpha}\delta\mathfrak{X}^{\beta}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\chi^{k}}\delta\chi^{k}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\alpha}\chi^{k}}\partial_{\alpha}\delta\chi^{k}+$$
$$+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathcal{X}^{k\cdot}_{\cdot\alpha}}\delta\mathcal{X}^{k\cdot}_{\cdot\alpha}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\beta}\mathcal{X}^{k\cdot}_{\cdot\alpha}}\partial_{\beta}\delta\mathcal{X}^{k\cdot}_{\cdot\alpha}+\sum_{p}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}}\delta\vartheta_{(p)}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\alpha}\vartheta_{(p)}}\partial_{\alpha}\delta\vartheta_{(p)}\right]=0.$$

9. Материальные законы сохранения

Предполагая, что, либо преобразования многообразий $\mathbb{M}$, $\hat{\mathbb{M}}$, $\mathbb{E}$, $\hat{\mathbb{E}}$, $\mathbb{P}$, независимы, либо эти преобразования тем или иным способом согласованы, из (8.5) можно получать различные законы сохранения, явным образом учитывающие согласованность преобразований.

Пусть преобразованию подвергается только материальное многообразие $\mathbb{M}$, т.е.

$$\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}\neq 0,\quad \delta\boldsymbol{\chi}=\mathbf{0},\quad \delta\boldsymbol{\mathcal{X}}=\mathbf{0},\quad \delta\vartheta_{(p)}=0.$$

Согласно (8.5), интеграл действия $\mathscr{J}(\varepsilon)$ остается инвариантным, если имеет место соотношение

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}}\mathscr{L}\cdot\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}+\boldsymbol{\mathfrak{T}}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}=0. \quad (9.1)$$

Допустим теперь, что преобразованию подвергается только ассоциированное пространство $\hat{\mathbb{M}}$. Тогда

$$\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}=0,\quad \delta\boldsymbol{\chi}=\mathbf{0},\quad \delta\boldsymbol{\mathcal{X}}\neq\mathbf{0},\quad \delta\vartheta_{(p)}=0,$$

и, следовательно, условием инвариантности $\mathscr{J}(\varepsilon)$ является равенство

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\vdots\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}=0. \quad (9.2)$$

Если же преобразованию подвергаются совместно материальное многообразие $\mathbb{M}$ и ассоциированное пространство $\hat{\mathbb{M}}$

$$\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}\neq 0,\quad \delta\boldsymbol{\chi}=\mathbf{0},\quad \delta\boldsymbol{\mathcal{X}}\neq\mathbf{0},\quad \delta\vartheta_{(p)}=0,$$

то условие инвариантности $\mathscr{J}(\varepsilon)$ формулируется в виде:

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}}\mathscr{L}\cdot\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\vdots\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}=0, \quad (9.3)$$

причем (9.3) следует рассматривать совместно с соотношением согласованности

$$F\,(\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \delta\boldsymbol{\mathcal{X}}) = 0. \tag{9.4}$$

Соотношения (9.1)–(9.3) можно рассматривать как формальные структуры законов сохранения, приобретающие конкретный вид при явном определении соответствующих групп преобразований.

Остановимся подробнее на группах преобразований, рассмотренных в разделе 4. Напомним, что преобразование, соответствующее сдвигу материальных координат, может быть задано следующим образом

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon) = \boldsymbol{\mathfrak{X}} + \varepsilon\boldsymbol{\mathfrak{X}}_0,$$

где $\boldsymbol{\mathfrak{X}}_0 \in \mathbb{M}$ — произвольный фиксированный 4-вектор. Непосредственное вычисление вариации $\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}$ и градиента $\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}$

$$\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{\mathfrak{X}}_0\,\delta\varepsilon, \quad \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \mathbf{0},$$

позволяет преобразовать соотношение (9.1) к виду:

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}}\mathscr{L} = \mathbf{0}, \quad (\partial_\alpha\mathscr{L})_{\text{expl}} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, 4. \tag{9.5}$$

Таким образом, *условием инвариантности интеграла действия при сдвигах материальных координат является равенство нулю явного градиента соответствующей лагранжевой плотности.*

Закон сохранения (9.5) может быть преобразован к дивергентной форме. Для этой цели воспользуемся тождеством

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{T}} = \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}}\mathscr{L} + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}\cdot\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}} + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}:\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \sum_p \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}\mathcal{E}_{\vartheta_{(p)}}$$

и, полагая в соответствии с (9.5) явный градиент лагранжевой плотности равным нулю, приходим к следующему выражению

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{T}} = \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}\cdot\mathcal{E}_{\boldsymbol{\chi}} + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}:\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \sum_p \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}\mathcal{E}_{\vartheta_{(p)}}. \tag{9.6}$$

Равенство (9.6) выполняется вне зависимости от уравнений поля (7.1)–(7.3) и потому представляет собой слабый закон сохранения. При выполнии уравнений (7.1)–(7.3) правая часть равенства (9.6) обращается в нуль и, следовательно, дивергенция тензора энергии–импульса должна исчезать:

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{T}} = \mathbf{0}, \quad \partial_\alpha\mathfrak{T}^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = 0. \tag{9.7}$$

Полученный закон является сильным законом сохранения. Таким образом, *если уравнения поля удовлетворяются, то условием инвариантности интеграла действия при сдвигах материальных координат является равенство нулю дивергенции тензора энергии–импульса.*

Следует обратить внимание на то, что, равенство

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{T}} = \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{expl}}\mathscr{L} \tag{9.8}$$

является следствием только уравнений поля. Этот факт будет использован в дальнейших преобразованиях.

Из (9.7) следует выражение для инвариантного $\boldsymbol{J}$-интеграла:

$$\boldsymbol{J} = \oint_{\partial} \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{T}}\, dS, \quad J_{\beta} = \oint_{\partial} N_{\alpha} \mathfrak{T}^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\, dS. \tag{9.9}$$

Преобразование, соответствующее вращению касательного пространства материального многообразия, может быть записано следующим образом:

$$\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{X}}}(\boldsymbol{\mathfrak{X}}, \varepsilon) = \boldsymbol{\Omega}(\varepsilon) \cdot \boldsymbol{\mathfrak{X}},$$

следовательно, вариации материальных координат и их градиенты могут быть вычислены по формулам

$$\delta \boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{X}} \delta\varepsilon, \quad \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \delta \boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{\omega} \delta\varepsilon,$$

а равенство (9.6) может быть приобразовано к виду

$$\left(\boldsymbol{\mathfrak{T}}^{*} + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathrm{expl}} \mathscr{L} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{X}} \right) : \boldsymbol{\omega} = 0, \tag{9.10}$$

или, учитывая, что тензор $\boldsymbol{\omega}$ является произвольным антисимметрическим, к следующей форме

$$\mathrm{Asym} \left[\boldsymbol{\mathfrak{T}}^{*} + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathrm{expl}} \mathscr{L} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{X}} \right] = \boldsymbol{0}. \tag{9.11}$$

Здесь выражение Asym[...] означает антисимметричную часть тензора [...]. В координатах (9.11) записывается в виде:

$$g_{\beta\alpha} \mathfrak{T}^{\alpha\cdot}_{\cdot\gamma} - g_{\gamma\alpha} \mathfrak{T}^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} + \left(\partial_{\beta} \mathscr{L} \right)_{\mathrm{expl}} g_{\gamma\alpha} \mathfrak{X}^{\alpha} - \left(\partial_{\gamma} \mathscr{L} \right)_{\mathrm{expl}} g_{\beta\alpha} \mathfrak{X}^{\alpha} = 0.$$

Следовательно, *условием инвариантности интеграла действия при специальных ортогональных преобразованиях (вращениях) материальных координат является симметрия тензора* $\boldsymbol{\mathfrak{T}}^{*} + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathrm{expl}} \mathscr{L} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{X}}$.

Если предположить, что плотность лагранжиана удовлетворяет условию

$$\mathrm{Asym} \left[\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathrm{expl}} \mathscr{L} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{X}} \right] = \boldsymbol{0} \tag{9.12}$$

(которое очевидно выполняется, если имеет место инвариантность в отношении сдвигов), то из (9.11) следует симметрия тензора энергии–импульса

$$\boldsymbol{\mathfrak{T}} = \boldsymbol{\mathfrak{T}}^{*} \quad \left(g_{\beta\alpha} \mathfrak{T}^{\alpha\cdot}_{\cdot\gamma} = g_{\gamma\alpha} \mathfrak{T}^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} \right). \tag{9.13}$$

Приведем (9.11) к дивергентной форме. Из соотношений (9.11) и (9.8), последнее из которых является следствием уравнений поля, вытекает равенство

$$\mathrm{Asym} \left[\boldsymbol{\mathfrak{T}}^{*} + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{T}} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{X}} \right] = \mathrm{Asym} \left[\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\boldsymbol{\mathfrak{T}} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{X}}) \right] = \boldsymbol{0}. \tag{9.14}$$

Таким образом, *если уравнения поля удовлетворяются, то условием инвариантности интеграла действия при специальных ортогональных преобразованиях (вращениях) материальных координат является симметрия тензора* $\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\boldsymbol{\mathfrak{T}} \otimes \boldsymbol{\mathfrak{X}})$.

Соотношению (9.14) можно придать более компактный вид, если ввести тензор Леви–Чивита $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot(\boldsymbol{\mathfrak{T}}\otimes\boldsymbol{\mathfrak{X}})\colon\boldsymbol{\epsilon}=\mathbf{0}. \tag{9.15}$$

Из (9.15) следует выражение для инвариантного L-интеграла:

$$\boldsymbol{L}=\oint_{\partial}\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{\mathfrak{T}}\otimes\boldsymbol{\mathfrak{X}})\colon\boldsymbol{\epsilon}\,dS,\quad L^{\nu}=\oint_{\partial}N_{\alpha}\mathfrak{T}^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}\mathfrak{X}^{\gamma}\epsilon^{\beta\cdot\nu}_{\cdot\gamma\cdot}\,dS. \tag{9.16}$$

Тензору второго ранга $(\boldsymbol{\mathfrak{T}}\otimes\boldsymbol{\mathfrak{X}})\colon\boldsymbol{\epsilon}$ соответствует антисимметричный по последним элементам триад тензор момента энергии–импульса (третьего ранга):

$$\boldsymbol{\mathfrak{M}}=\boldsymbol{\mathfrak{T}}\otimes\boldsymbol{\mathfrak{X}}-(\boldsymbol{\mathfrak{T}}\otimes\boldsymbol{\mathfrak{X}})^{(132)},\quad \mathfrak{M}^{\alpha\beta\gamma}=g^{\beta\nu}\mathfrak{T}^{\alpha\cdot}_{\cdot\nu}\mathfrak{X}^{\gamma}-g^{\gamma\nu}\mathfrak{T}^{\alpha\cdot}_{\cdot\nu}\mathfrak{X}^{\beta}. \tag{9.17}$$

Здесь $(\ldots)^{(132)}$ — изомер тензора $(\ldots)$, получаемый в результате транспозиции двух последних элементов триадного разложения. Соотношение (9.15) теперь может быть записано следующим образом (ср. [4, p. 111]):

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{M}}=\mathbf{0}. \tag{9.18}$$

Рассмотрим теперь вращения в ассоциированном пространстве $\hat{\mathbb{M}}$. Им соответствуют преобразования

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X},\varepsilon)=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\Omega}(\varepsilon),\quad \boldsymbol{\Omega}(\varepsilon)^{-1}=\boldsymbol{\Omega}^{*}(\varepsilon),\quad \det\boldsymbol{\Omega}(\varepsilon)=+1,$$

где $\boldsymbol{\Omega}(\varepsilon)$ — ортогональный тензор, действующий в $\hat{\mathbb{M}}$. Соответствующие инфинитезимальные образующие $\delta\boldsymbol{X}$ и их градиенты имеют вид

$$\delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\delta\varepsilon,\quad \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{X}=\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\delta\varepsilon. \tag{9.19}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — антисимметричный тензор. Подстановка (9.19) в (8.5) приводит к следующему соотношению

$$\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^{*}\cdot\boldsymbol{X}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{X}}\right)^{**}\colon\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{X}\right]\colon\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0} \tag{9.20}$$

или, учитывая произвольность антисимметричного тензора $\boldsymbol{\omega}$ к условию симметричности

$$\operatorname{Asym}\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^{*}\cdot\boldsymbol{X}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{X}}\right)^{**}\colon\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{X}\right]=\mathbf{0}. \tag{9.21}$$

Итак, получен слабый закон: *условием инвариантности интеграла действия при вращениях пространства, ассоциированного с материальным, является симметрия тензора* $\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)^{*}\cdot\boldsymbol{X}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{X}}\right)^{**}\colon\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{X}$.

Если выполняются уравнения поля, то имеет место равенство

$$\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{X}}\right)=\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{X}}\right),$$

следовательно,

$$\operatorname{Asym}\left[\underset{4}{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{X}}\right)^{**}\cdot\boldsymbol{X}\right]\right]=\mathbf{0},\quad \text{т.е.}\quad \underset{4}{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{X}}\right)^{**}\cdot\boldsymbol{X}\right]:\boldsymbol{\epsilon}=\mathbf{0}, \tag{9.22}$$

и соответствующий сильный закон сохранения может быть сформулирован следующим образом: *если уравнения поля удовлетворяются, то условием инвариантности интеграла действия при вращениях пространства, ассоциированного с материальным, является симметрия тензора*

$$\underset{4}{\nabla}\cdot\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{X}}\right)^{**}\cdot\boldsymbol{X}\right].$$

Инвариантный L-интеграл теперь может быть записан в виде

$$\boldsymbol{L}=\oint_{\partial}\boldsymbol{N}\cdot\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{X}}\right)^{**}\cdot\boldsymbol{X}\right]:\boldsymbol{\epsilon}\,dS. \tag{9.23}$$

Если ввести обозначение для спин-тензора $\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{S}=\left(\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{X}}\right)^{**}\cdot\boldsymbol{X}\right)-\left(\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{X}}\right)^{**}\cdot\boldsymbol{X}\right)^{(132)}, \tag{9.24}$$

то закон сохранения (9.22) может быть записан следующим образом:

$$\underset{4}{\nabla}\cdot\mathfrak{S}=\mathbf{0}. \tag{9.25}$$

Группа дилатации $\mathfrak{G}_S$ определяет преобразование масштаба:

$$\widetilde{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X},\varepsilon)=e^{\varepsilon}\boldsymbol{B}\cdot\mathfrak{X},\quad \boldsymbol{B}^{*}=\boldsymbol{B},\quad \delta\mathfrak{X}=\boldsymbol{B}\cdot\mathfrak{X}\delta\varepsilon,\quad \underset{4}{\nabla}\delta\mathfrak{X}=\boldsymbol{B}\delta\varepsilon.$$

Соответвтующий сильный закон сохранения имеет вид:

$$\left(\mathfrak{T}^{*}+\underset{4}{\nabla}_{\text{expl}}\mathscr{L}\otimes\mathfrak{X}\right):\boldsymbol{B}=\mathbf{0}. \tag{9.26}$$

Если же тензор $\boldsymbol{B}$ изотропный ($\boldsymbol{B}=\beta\mathfrak{I}$), то закон сохранения может быть записан в виде

$$\mathfrak{I}:\mathfrak{T}+\underset{4}{\nabla}_{\text{expl}}\mathscr{L}\cdot\mathfrak{X}=0. \tag{9.27}$$

Из уравнений поля и сильного закона сохранения (9.26) получаем слабый закон сохранения

$$\underset{4}{\nabla}\cdot(\mathfrak{T}\otimes\mathfrak{X}):\boldsymbol{B}=\mathbf{0}, \tag{9.28}$$

или, в предположении изотропности тензора $\boldsymbol{B}$,

$$\underset{4}{\nabla}\cdot(\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{X})=0. \tag{9.29}$$

Слабому закону сохранения (9.26) соответствует инвариантный интеграл:

$$\oint_{\partial}\boldsymbol{N}\cdot\mathfrak{T}\cdot\mathfrak{X}\,dS. \tag{9.30}$$

Изменение масштаба ассоциированного пространства $\hat{\mathbb{M}}$ определяется дилатационной группой $\hat{\mathfrak{G}}_S$

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(\boldsymbol{\mathcal{X}},\varepsilon) = e^{\varepsilon}\boldsymbol{\mathcal{X}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}, \quad \hat{\boldsymbol{B}}^* = \hat{\boldsymbol{B}}, \quad \delta\boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}\,\delta\varepsilon, \quad \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathcal{X}} = \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\cdot\hat{\boldsymbol{B}}\,\delta\varepsilon. \tag{9.31}$$

Подстановка (9.31) в (8.5) приводит к следующему закону сохранения

$$\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^*\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}} + \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{**}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right]:\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{0}. \tag{9.32}$$

или, в предположении изотропности тензора $\hat{\boldsymbol{B}} = \hat{\beta}\boldsymbol{\mathfrak{I}}$,

$$\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right):\boldsymbol{\mathcal{X}} + \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right):\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}} = 0. \tag{9.33}$$

Соответствующий слабый закон сохранения имеет вид

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\left[\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{**}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}\right]:\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{0} \tag{9.34}$$

или, при $\hat{\boldsymbol{B}} = \hat{\beta}\boldsymbol{\mathfrak{I}}$

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\boldsymbol{\mathcal{X}}\right] = 0. \tag{9.35}$$

Закону сохранения (9.35) соответствует инвариантный интеграл

$$\oint_{\partial}\left(\boldsymbol{N}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right):\boldsymbol{\mathcal{X}}\,dS. \tag{9.36}$$

Пусть теперь инфинитезимальные ортогональные преобразования материального многообразия, задаваемые антисимметрическим тензором $\boldsymbol{\omega}$, согласованы с ортогональными преобразованиями ассоциированного пространства, которые определяются другим антисимметрическим тензором $\hat{\boldsymbol{\omega}}$, т.е.

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{S}:\boldsymbol{\omega}, \tag{9.37}$$

где $\boldsymbol{S}$ — тензор четвертого ранга, антисимметричный по первой и второй парам полиадного разложения. Тогда

$$\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}}\delta\varepsilon, \quad \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}} = \boldsymbol{\omega}\delta\varepsilon, \quad \delta\boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{\mathcal{X}}\cdot\boldsymbol{S}:\boldsymbol{\omega}\,\delta\varepsilon, \quad \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathcal{X}} = \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\cdot\boldsymbol{S}:\boldsymbol{\omega}\,\delta\varepsilon$$

и, следовательно, из (8.5) вытекает равенство

$$\left(\boldsymbol{\mathfrak{T}}^* + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathrm{expl}}\mathscr{L}\otimes\boldsymbol{\mathfrak{X}} + \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^*\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}:\boldsymbol{S} + \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{**}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}:\boldsymbol{S}\right):\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}, \tag{9.38}$$

которое в силу произвольности $\boldsymbol{\omega}$ эквивалентно следующему условию симметричности

$$\mathrm{Asym}\left[\boldsymbol{\mathfrak{T}}^* + \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathrm{expl}}\mathscr{L}\otimes\boldsymbol{\mathfrak{X}} + \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^*\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}:\boldsymbol{S} + \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{**}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}:\boldsymbol{S}\right] = \boldsymbol{0}. \tag{9.39}$$

Симметричность левой части (9.39) *представляет слабый закон сохранения, соответствующий согласованным вращениям материального многообразия и ассоциированного пространства.*

Это соотношение можно преобразовать к дивергентной форме в предположении, что уравнения поля удовлетворяются:

$$\operatorname{Asym}\left[\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\left(\mathfrak{T}\otimes\mathfrak{X}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{**}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}:\boldsymbol{S}\right)\right]=\boldsymbol{0} \tag{9.40}$$

или в в веденных выше обозначениях в виде

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathfrak{M}+\left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\mathfrak{S}\right):\boldsymbol{S}=\boldsymbol{0}. \tag{9.41}$$

Симметричность левой части (9.40) *представляет слабый закон сохранения, соответствующий согласованным вращениям материального многообразия и ассоциированного пространства.*

Соответствующий инвариантный интеграл может быть записан в следующей форме:

$$\oint_{\partial}\boldsymbol{N}\cdot\left[\mathfrak{T}\otimes\mathfrak{X}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{**}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}:\boldsymbol{S}\right]:\boldsymbol{\epsilon}\,dS. \tag{9.42}$$

Отметим, что если $\boldsymbol{S}$ — тензорная единица, то это условие принимает вид, аналогичный [4]:

$$\operatorname{Asym}\left[\mathfrak{T}^{*}+\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathrm{expl}}\mathscr{L}\otimes\mathfrak{X}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{*}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{**}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right]=\boldsymbol{0}. \tag{9.43}$$

Пусть теперь изменения масштаба материального многообразия, задаваемые симметричным тензором $\boldsymbol{B}$, согласованы с изменениями масштаба в ассоциированном пространстве, которые определяются симметрическим тензором $\hat{\boldsymbol{B}}$, т.е.

$$\hat{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{S}:\boldsymbol{B}, \tag{9.44}$$

где $\boldsymbol{S}$ — тензор четвертого ранга, симметричный по первой и второй парам полиадного разложения. Тогда сильный закон сохранения может быть записан в виде

$$\left[\mathfrak{T}^{*}+\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathrm{expl}}\mathscr{L}\otimes\mathfrak{X}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{*}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}:\boldsymbol{S}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{**}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}:\boldsymbol{S}\right]:\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0} \tag{9.45}$$

или, в предположении изотропности тензоров $\boldsymbol{B}=\beta\mathfrak{I}$, $\hat{\boldsymbol{B}}=\hat{\beta}\mathfrak{I}$,

$$\left(\mathfrak{I}:\mathfrak{T}+\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathrm{expl}}\mathscr{L}\cdot\mathfrak{X}\right)\beta+\left(\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right):\boldsymbol{\mathcal{X}}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)\vdots\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)\hat{\beta}=0, \tag{9.46}$$

а соответствующий слабый закон сохранения

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\left[\mathfrak{T}\otimes\mathfrak{X}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{**}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}:\boldsymbol{S}\right]:\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0} \tag{9.47}$$

при согласованных изотропных масштабных преобразованях принимает следующую форму

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\left[\boldsymbol{\mathfrak{T}}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}}\beta+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\boldsymbol{\mathcal{X}}\hat{\beta}\right]=0 \qquad (9.48)$$

и определяет инвариантный интеграл:

$$\oint_{\partial}\boldsymbol{N}\cdot\left[\boldsymbol{\mathfrak{T}}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{X}}\beta+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\boldsymbol{\mathcal{X}}\hat{\beta}\right]dS. \qquad (9.49)$$

10. Пространственные законы сохранения

Будем полагать, что преобразованию подвергается пространство мест $\mathbb{E}$, т.е.

$$\delta\boldsymbol{\mathfrak{X}}=0,\quad \delta\boldsymbol{\mathcal{X}}=0,\quad \delta\boldsymbol{\chi}\neq 0.$$

Из выражения (8.5) следует, что интеграл действия остается инвариантным при условии

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\delta\boldsymbol{\chi}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\chi}=0. \qquad (10.1)$$

Если преобразованию подвергается ассоциированное пространство $\hat{\mathbb{E}}$, то, согласно (8.5), условие инвариантности интеграла действия может быть записано в виде

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\vdots\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}=0. \qquad (10.2)$$

Наконец, при согласованном преобразовании пространств $\mathbb{E}$, $\hat{\mathbb{E}}$ интеграл действия инвариантен, если

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\cdot\delta\boldsymbol{\chi}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}:\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\chi}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}:\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\vdots\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}=0. \qquad (10.3)$$

Рассмотрим частные группы преобразований. Группа сдвигов определяет преобразование поля мест

$$\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\varepsilon)=\boldsymbol{\chi}+\varepsilon\boldsymbol{a},$$

где $\boldsymbol{a}$ — фиксированный пространственный вектор. Инфинитезимальные образующие и их градиенты имеют вид

$$\delta\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{a}\delta\varepsilon,\quad \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{0}.$$

В результате подстановки этих соотношений в (8.5) приходим к следующему выражению

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}=0, \qquad (10.4)$$

которое представляет собой не что иное, как условие галилеевой инвариантности. Итак, *интеграл действия инвариантен при преобразованиях сдвига* *пространства мест, если лагранжева плотность не зависит явно от полей* $\boldsymbol{\chi}$. Если выполняются уравнения поля, то

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\chi}} = \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi}} \tag{10.5}$$

и тогда соотношение (10.4) преобразуется к дивергентной форме

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi}} = 0, \tag{10.6}$$

которая представляет собой слабую форму закона сохранения. Из полученного соотношения вытекает инвариантность интеграла

$$\oint_{\partial} \boldsymbol{N} \cdot \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi}} \, dS. \tag{10.7}$$

Обратимся теперь к преобразованиям, соответствующим вращениям пространства мест $\mathbb{E}$

$$\widetilde{\boldsymbol{\chi}}(\boldsymbol{\chi}, \varepsilon) = \boldsymbol{\Omega}(\varepsilon) \cdot \boldsymbol{\chi}, \quad \boldsymbol{\Omega}(\varepsilon)^* = \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\varepsilon).$$

Вычисление инфинитезимальных образующих, их градиентов

$$\delta \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\chi} \, \delta\varepsilon, \quad \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \delta \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\omega} \cdot \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi} \, \delta\varepsilon, \quad \boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega},$$

и подстановка в (8.5) приводит к следующему результату

$$\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \otimes \boldsymbol{\chi} + \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi}} \right)^* \cdot \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi} \right] : \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \tag{10.8}$$

или, учитывая произвольность антисимметричного тензора $\boldsymbol{\omega}$

$$\operatorname{Asym} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \otimes \boldsymbol{\chi} + \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi}} \right)^* \cdot \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi} \right] = \mathbf{0}. \tag{10.9}$$

Таким образом, приходим к сильному закону сохранения. *Интеграл действия инвариантен при вращениях пространства мест, если симметричен тензор*

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \otimes \boldsymbol{\chi} + \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi}} \right)^* \cdot \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi}.$$

Отметим, что при условии

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \otimes \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0}, \tag{10.10}$$

которое выполняется, если имеет место инвариантность интеграла действия при сдвигах пространства мест, инвариантность в отношении вращений эквивалентна симметрии тензора $\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi}} \right)^* \cdot \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi}$, (этот тензор с точностью до скалярного множителя $|\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\chi}|$ — тензор истинных силовых напряжений Коши).

Сильный закон сохранения имеет вид

$$\operatorname{Asym}\left[\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}\otimes\boldsymbol{\chi}\right)\right]=\mathbf{0},\tag{10.11}$$

а соответствующий инвариантный интеграл

$$\oint_{\partial}\boldsymbol{N}\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}\otimes\boldsymbol{\chi}\right):\boldsymbol{\epsilon}\,dS.\tag{10.12}$$

Ортогональные преобразования пространства, ассоциированного с пространством мест, определяют вариацию поля микродеформаций $\boldsymbol{\mathcal{X}}$

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}},\quad \nabla\delta\boldsymbol{\mathcal{X}}=\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{\mathcal{X}}.$$

Из (8.5) теперь можно получить следующее соотношение

$$\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}^{*}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{*}:\left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^{**}\right]:\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0},\tag{10.13}$$

которое в силу произвольности $\boldsymbol{\omega}$ эквивалентно условию симметричности

$$\operatorname{Asym}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}^{*}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{*}:\left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^{**}\right]=\mathbf{0}.\tag{10.14}$$

Итак, получен сильный закон сохранения: *интеграл действия симметричен относительно ортогональных преобразований пространства, ассоциированного с пространством мест при условии симметричности тензора*

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}^{*}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{*}:\left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^{**}.$$

Соответствующий слабый закон сохранения имеет вид

$$\operatorname{Asym}\left[\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)\right]=\mathbf{0}\tag{10.15}$$

и определяет инвариантный интеграл

$$\oint_{\partial}\boldsymbol{N}\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}\right):\boldsymbol{\epsilon}\,dS.\tag{10.16}$$

Наконец, согласованное ортогональное преобразование пространства мест и ассоциированного с ним пространства

$$\delta\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\chi},\quad \delta\boldsymbol{\mathcal{X}}=\boldsymbol{S}:\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}$$

приводит к следующему условию инвариантности интеграла действия, т.е. к сильному закону сохранения:

$$\operatorname{Asym}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}}\otimes\boldsymbol{\chi}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}\right)^{*}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}:\boldsymbol{S}^{*}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{X}}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}^{*}+\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{*}:\left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^{**}:\boldsymbol{S}^{*}\right]=\mathbf{0}.\tag{10.17}$$

Соответствующий слабый закон сохранения может быть записан следующим образом:

$$\mathrm{Asym}\left[\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}\otimes\boldsymbol{\chi}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}^{*}:\boldsymbol{S}^{*}\right)\right]=\mathbf{0}. \tag{10.18}$$

Ему соответствует инвариантный интеграл

$$\oint_{\partial}\boldsymbol{N}\cdot\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}}\otimes\boldsymbol{\chi}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{X}}^{*}:\boldsymbol{S}^{*}\right):\boldsymbol{\epsilon}\,dS. \tag{10.19}$$

11. Физические законы сохранения

Физические поля $\vartheta_{(p)}$ одномерны. Если преобразованию подвергается поле $\vartheta_{(p)}$ то, согласно (8.5), условием инвариантности интеграла действия является следующее равенство

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}}\delta\vartheta_{(p)}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\cdot\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\vartheta_{(p)}=0. \tag{11.1}$$

Пусть рассматривается группа преобразований сдвига. Тогда

$$\widetilde{\vartheta_{(p)}}(\varepsilon)=\vartheta_{(p)}+\varepsilon.$$

Инфинитезимальные образующие и их градиенты

$$\delta\vartheta_{p}=\delta\varepsilon,\quad \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\delta\vartheta_{p}=0$$

определяют следующую форму закона сохранения

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}}=0. \tag{11.2}$$

Если выполняются уравнения поля, то равенство (11.2) может быть преобразовано к дивергенной форме

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}=0, \tag{11.3}$$

из которой следует выражение для инвариантного интеграла

$$\oint_{\partial}\boldsymbol{N}\cdot\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}}\,dS. \tag{11.4}$$

12. Нелинейные уравнения поля

Полученные законы сохранения компактно записываются через 4-градиенты, однако в таком виде они трудноузнаваемы. Введем обозначения, принятые в механике сплошных сред для тензора дисторсии $\boldsymbol{\mathcal{F}}$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}=(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi})^{*}=\mathcal{F}^{k\cdot}_{\cdot\alpha}\boldsymbol{e}_{k}\otimes\boldsymbol{\mathfrak{e}}^{\alpha},\quad \mathcal{F}^{k\cdot}_{\cdot\alpha}=\partial_{\alpha}\chi^{k} \tag{12.1}$$

и скорости поступательного движения среды $\dot{\boldsymbol{\chi}}$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \partial_t \boldsymbol{\chi} = \dot{\chi}^k \boldsymbol{e}_k, \quad \dot{\chi}^k = \partial_t \chi^k. \tag{12.2}$$

Теперь 4-градиент деформации $\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}$ может быть представлен следующим образом

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi} = \mathfrak{F}^* + \boldsymbol{e}^t \otimes \dot{\boldsymbol{\chi}}. \tag{12.3}$$

Для аналогичной записи 4-градиента тензора $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ введем тензор градиента микродеформации $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}$

$$\mathfrak{G} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}} = \mathfrak{G}_{\alpha.\beta}^{.k.} \mathfrak{e}^\alpha \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \mathfrak{e}^\beta, \quad \mathfrak{G}_{\alpha.\beta}^{.k.} = \partial_\alpha \mathcal{X}^{k.}_{.\beta} \tag{12.4}$$

и тензорное поле скоростей микродеформации $\dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}$

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \partial_t \boldsymbol{\mathcal{X}} = \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}^{k.}_{.\alpha} \boldsymbol{e}_k \otimes \mathfrak{e}^\alpha, \quad \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}^{k.}_{.\alpha} = \partial_t \mathcal{X}^{k.}_{.\alpha}. \tag{12.5}$$

В введенных обозначениях 4-градиент $\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}$ записывается в виде

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}} = \mathfrak{G} + \mathfrak{e}^t \otimes \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}. \tag{12.6}$$

Наконец, пространственные градиенты скрытых переменных состояния $\boldsymbol{\nabla}\vartheta_{(p)}$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_{(p)} = \boldsymbol{\nabla}\vartheta_{(p)} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_{(p)\alpha} \mathfrak{e}^\alpha, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}_{(p)\alpha} = \partial_\alpha \vartheta_{(p)} \tag{12.7}$$

и скорости их изменения $\dot{\vartheta}_{(p)}$

$$\dot{\vartheta}_{(p)} = \partial_t \vartheta_{(p)} \tag{12.8}$$

определяют 4-градиенты скрытых переменных

$$\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_{(p)} + \mathfrak{e}^t \dot{\vartheta}_{(p)}. \tag{12.9}$$

Рассмотрим производные лагранжевой плотности по 4-градиентам. Введем обозначение для силовых напряжений Пиола–Кирхгофа $\boldsymbol{\mathcal{S}}$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}} = -\left(\frac{\mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}}}\right)^* = \mathcal{S}^{\alpha.}_{.k} \mathfrak{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}^k, \quad \mathcal{S}^{\alpha.}_{.k} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\alpha \chi^k} \tag{12.10}$$

и физического импульса $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\chi}}} = P_k \boldsymbol{e}^k, \quad P_k = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\chi}^k}. \tag{12.11}$$

Это позволяет определить 4-тензор силовых напряжений в виде

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}} = -\boldsymbol{\mathcal{S}} + \mathfrak{e}^t \otimes \boldsymbol{P}. \tag{12.12}$$

Для разложения на пространственную и временную части 4-тензора $\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}}$ введем 3-тензорное поле микросил Пиола–Кирхгофа $\boldsymbol{\mathcal{N}}$

$$\boldsymbol{\mathcal{N}} = \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^* = \mathcal{N}^{\alpha.}_{.k} \mathfrak{e}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}^k, \quad \mathcal{N}^{\alpha.}_{.k} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathcal{X}^{k.}_{.\alpha}}, \tag{12.13}$$

3-тензорное поле микронапряжений Пиола–Кирхгофа $\boldsymbol{\mathcal{M}}$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} = -\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla\boldsymbol{\mathcal{X}}}\right)^{*} = -\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\mathcal{G}}}\right)^{*} = \mathcal{M}^{\alpha.\beta}_{.k.}\mathfrak{e}_{\alpha}\otimes\boldsymbol{e}^{k}\otimes\mathfrak{e}_{\beta}, \quad \mathcal{M}^{\alpha.\beta}_{.k.} = -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\alpha}\mathcal{X}^{k.}_{.\beta}} \tag{12.14}$$

и 3-тензорное поле микроимпульса $\boldsymbol{\mathcal{J}}$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}} = \mathcal{J}^{.\alpha}_{k.}\boldsymbol{e}^{k}\otimes\boldsymbol{e}_{\alpha}, \quad \mathcal{J}^{.\alpha}_{k.} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}^{k.}_{.\alpha}}. \tag{12.15}$$

Теперь 4-тензор моментных напряжений может быть представлен в форме разложения

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}} = -\boldsymbol{\mathcal{M}}^{**} + \mathfrak{e}^{t}\otimes\boldsymbol{\mathcal{J}}. \tag{12.16}$$

Если определить векторное поле $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{(p)}$ потока, сопряженного внутренней переменной состояния $\vartheta_{(p)}$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{(p)} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla\vartheta_{(p)}} = \mathcal{P}_{(p)}{}^{\alpha}, \quad \mathcal{P}_{(p)}{}^{\alpha} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\alpha}\vartheta_{(p)}} \tag{12.17}$$

и производство $\mathcal{R}_{(p)}$, отнесенное к единице объема

$$\mathcal{R}_{(p)} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{t}\vartheta_{(p)}}, \tag{12.18}$$

то 4-градиенты $\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\vartheta_{(p)}}$ могут быть представлены следующим образом

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\underset{4}{\nabla}\vartheta_{(p)}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}_{(p)} + \mathfrak{e}^{t}\mathcal{R}_{(p)}. \tag{12.19}$$

Явный градиент лагранжиана $\underset{4}{\nabla}_{\mathrm{expl}}\mathscr{L}$ также может быть представлен в форме разложения

$$\underset{4}{\nabla}_{\mathrm{expl}}\mathscr{L} = \mathfrak{f} + \mathfrak{e}^{t}\mathfrak{d}, \tag{12.20}$$

где векторное поле $\mathfrak{f}$ — поле конфигурационных сил (сил Эшелби)

$$\mathfrak{f} = \nabla_{\mathrm{expl}}\mathscr{L}, \tag{12.21}$$

а скалярное поле $\mathfrak{d}$ — поле диссипативных сил

$$\mathfrak{d} = (\partial_{t}\mathscr{L})_{\mathrm{expl}}\,. \tag{12.22}$$

Введем обозначения для объемных сил $\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{f} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{\chi}} \tag{12.23}$$

и обобщенных термодинамических сил, сопряженных скрытым переменным состояния $d_{(p)}$

$$d_{(p)} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\vartheta_{(p)}}. \tag{12.24}$$

Потребуется также разложение тензора энергии–импульса $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{T} = \mathscr{L}\mathfrak{I} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}} \cdot \left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\chi}\right)^* - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{\mathcal{X}}\right)^* - \sum_p \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)}} \otimes \underset{4}{\boldsymbol{\nabla}}\vartheta_{(p)} =$$

$$= \mathfrak{N} - \mathfrak{e}^t \otimes \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} \otimes \mathfrak{e}_t - \mathscr{H}\mathfrak{e}^t \otimes \mathfrak{e}_t, \quad (12.25)$$

где $\mathfrak{N}$ — тензор Эшелби

$$\mathfrak{N} = \mathscr{L}\boldsymbol{I} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi})^* - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}} : (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}})^* - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\nabla}\vartheta} \otimes \boldsymbol{\nabla}\vartheta =$$

$$= \mathscr{L}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\mathcal{S}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}} + \boldsymbol{\mathcal{M}} : \boldsymbol{\mathcal{G}} - \sum_p \boldsymbol{\mathcal{P}}_{(p)} \otimes \boldsymbol{\mathcal{B}}_{(p)}, \quad (12.26)$$

$\mathscr{H}$ — плотность гамильтониана

$$-\mathscr{H} = \mathscr{L} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\chi}}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}} : \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \sum_p \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\vartheta}_{(p)}} \dot{\vartheta}_{(p)} =$$

$$= \mathscr{L} - \boldsymbol{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} - \boldsymbol{\mathcal{J}} : \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}} - \sum_p \mathcal{R}_{(p)} \dot{\vartheta}_{(p)}, \quad (12.27)$$

$\mathfrak{P}$ — канонический импульс

$$\mathfrak{P} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\chi}}} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi})^* + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}}} : (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}})^* + \sum_p \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\vartheta}} \boldsymbol{\nabla}\vartheta =$$

$$= \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\mathcal{F}} + \boldsymbol{\mathcal{J}} F : \boldsymbol{\mathcal{G}} * + \sum_p \mathcal{R}_{(p)} \boldsymbol{\mathcal{P}}_{(p)}, \quad (12.28)$$

$\mathfrak{Q}$ — вектор Умова–Пойтинга (вектора потока энергии)

$$\mathfrak{Q} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\chi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}} + \sum_p \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{\nabla}\vartheta_{(p)}} \dot{\vartheta}_{(p)} =$$

$$= -\boldsymbol{\mathcal{S}} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} - \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \boldsymbol{\mathcal{M}} + \sum_p \boldsymbol{\mathcal{P}}_{(p)} \dot{\vartheta}_{(p)}. \quad (12.29)$$

Теперь уравнения Эйлера–Лагранжа (7.1)– (7.1) могут быть записаны следующим образом

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}} - \partial_t \boldsymbol{P} + \boldsymbol{f} = 0, \\ &\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}^{**} - \partial_t \boldsymbol{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\mathcal{N}} = 0, \\ &\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}_{(p)} + \partial_t \mathcal{R}_{(p)} - d_{(p)} = 0. \end{aligned} \quad (12.30)$$

Сильные законы сохранения, вытекающие из инвариантности интеграла действия при сдвигах материальных координат, принимают вид

$$\mathfrak{f} = 0, \quad \mathfrak{d} = 0. \quad (12.31)$$

Слабые законы сохранения предполагают, что уравнения поля выполняются. Отметим, что из (9.7) вытекает закон изменения канонического импульса (закон Эшелби)

$$\breve{\mathfrak{I}} \cdot \left(\underset{4}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathfrak{T}\right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathfrak{N} - \dot{\mathfrak{P}} = \mathfrak{f} \quad (12.32)$$

и уравнение балана энергии (закон изменения потока энергии)

$$\mathfrak{e}^4 \cdot \left(\underset{4}{\nabla} \cdot \mathfrak{T} \right) = \nabla \cdot \mathfrak{Q} + \dot{\mathscr{H}} = \mathfrak{d}. \tag{12.33}$$

Приходим к слабым законам сохранения, а именно к закону сохранения канонического момента (9.7)

$$\breve{\mathfrak{I}} \cdot \left(\underset{4}{\nabla} \cdot \mathfrak{T} \right) = \nabla \cdot \mathfrak{N} - \dot{\mathfrak{P}} = 0 \tag{12.34}$$

и закону сохранения энергии

$$\mathfrak{e}^4 \cdot \left(\underset{4}{\nabla} \cdot \mathfrak{T} \right) = \nabla \cdot \mathfrak{Q} + \dot{\mathscr{H}} = 0. \tag{12.35}$$

Учитывая выражение для вектора Умова–Пойтинга, полученное уравнение может быть преобразовано к виду

$$\dot{\mathscr{H}} = -\nabla \cdot \mathfrak{Q} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} + \boldsymbol{\mathcal{S}} : \nabla \dot{\boldsymbol{\chi}} + \nabla \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \,\vdots\, \boldsymbol{\mathcal{M}} + \\ + \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}^{**} + \sum_p \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}_{(p)} \right) \dot{\vartheta}_{(p)} + \boldsymbol{\mathcal{P}}_{(p)} \cdot \nabla \dot{\vartheta}_{(p)}. \tag{12.36}$$

Если выполняются уравнения поля, то

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{S}} = \dot{\boldsymbol{P}} - \boldsymbol{f}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}^{**} = \dot{\boldsymbol{\mathcal{J}}} - \boldsymbol{\mathcal{N}}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}_{(p)} = d_{(p)} - \dot{\mathcal{R}}_{(p)} \tag{12.37}$$

и, следовательно, закону сохранения энергии можно придать следующий вид

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} : \nabla \dot{\boldsymbol{\chi}} + \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}^{**} + \sum_p \boldsymbol{\mathcal{P}}_{(p)} \cdot \nabla \dot{\vartheta}_{(p)} = \\ = \boldsymbol{P} \cdot \ddot{\boldsymbol{\chi}} + \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{\chi}} + \ddot{\boldsymbol{\mathcal{X}}} : \boldsymbol{\mathcal{J}} + \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{N}} + R \ddot{\vartheta}_{(p)} - d_{(p)} \dot{\vartheta}_{(p)} - \dot{\mathscr{L}}. \tag{12.38}$$

Сильные законы сохранения, вытекающие из инвариантности интеграла действия при вращениях материальных координат, принимают вид

$$\operatorname{Asym} \left[\mathfrak{T}^* + \mathfrak{f} \otimes \mathfrak{X} + \boldsymbol{\mathcal{N}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{X}} - \boldsymbol{\mathcal{M}}^* : \nabla \boldsymbol{\mathcal{X}} - \boldsymbol{\mathcal{J}}^* \cdot \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \right] = 0, \tag{12.39}$$

причем из симметричности записанного тензора вытекает соотношение между каноническим импульсом и вектором потока энергии (вектором Умова–Пойтинга)

$$g_{44} \mathfrak{P} = \mathfrak{Q} \quad (g_{44} = c^2). \tag{12.40}$$

Интеграл действия инвариантен по отношению к сдвигам пространства, если отсутствуют объемные силы (внешние поля)

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}, \tag{12.41}$$

а по отношению к вращениям, если выполняется следующее равенство:

$$\operatorname{Asym} \left[\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\mathcal{S}}^* \cdot \nabla \boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{P} \otimes \dot{\boldsymbol{\chi}} + \boldsymbol{\mathcal{N}}^* \cdot \boldsymbol{\mathcal{X}}^* - \boldsymbol{\mathcal{M}} : \nabla \boldsymbol{\mathcal{X}} - \boldsymbol{\mathcal{J}} \cdot \dot{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \right] = \boldsymbol{0}. \tag{12.42}$$

Инвариантность интеграла действия по отношению к сдвигам полей скрытых переменных состояния $\vartheta_{(p)}$ имеет место при условии, что соответствующие обобщенные термодинамические силы равны нулю:

$$d_{(p)} = 0. \tag{12.43}$$

Литература

[1] Truesdell, C.A. The classical field theories. Handbuch der Physik III/I / C.A. Truesdell, R. Toupin. – Berlin: Springer-Verlag, 1960. – 227–793 p.

[2] Eringen, A.C. Microcontinuum field theories: foundations and solids / A.C. Eringen. – NewYork: Springer–Verlag, 1999. – 325 p.

[3] Nowacki, W. Theory of asymmetric elasticity / W. Nowacki. – Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1986. 383 p.

[4] Chen, J.K. Ultrafast thermoelasticity for short-pulse laser heating / J.K. Chen, J.E. Beraun, C.L. Tham // Int. J. of Eng. Sci. – 2004. – V. 42. – P. 793–807

[5] Bargmann, S. Theoretical and computational aspects of non-classical thermoelasticity / S. Bargmann, P. Steinmann // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2006. – V. 196. – P. 516–527

[6] Hetnarski, R.B. Nonclassical dynamical thermoelasticity / R.B. Hetnarski, J. Ignaczak // Int. J. of Solids and Structures. – 2000. – V. 37. – P. 215–224

[7] Kalpakides V. K., Maugin G.A. Canonical Formulation and Conservation Laws of Thermoelasticity without Dissipation / V.K. Kalpakides, G.A. Maugin //Reports in Mathematical Physics. – 2004. – V. 53. – P. 371–391.

[8] Нетер, Э. Инвариантные вариационные задачи / Э. Нетер // Вариационные принципы механики: сборник статей классиков науки (под ред. Л.С. Полака).

[9] Eshelby J.D. The force on an elastic singularity / J.D. Eshelby // Phil. Trans. Roy. Soc. – A 244. – London, 1951. – P. 87—112.

[10] Морс, Ф.М. Методы теоретической физики. Т. 1 / Ф.М. Морс, Г. Фешбах. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 930 с.

[11] Günther, W. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums / W. Günther // Abh. Braunschw. Wiss. Ges. – 10. – 1958. –

[12] Cosserat, E. Théorie des corps déformables / E. Cosserat, F. Cosserat. – Paris, 1909. – 226 p.

[13] Миндлин, Р.Д. Микроструктура в линейной теории упругости / Р.Д. Миндлин. – М.: Механика. Сборник переводов, 1971. – №4. – С. 129–159.

[14] Румер, Ю.Б. Спинорный анализ / Ю.Б. Румер. – М., Л., 1936. – 104 с.

[15] Олвер, П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – М.: Мир, 1989. – 640 с.

[16] Гельфанд, И.М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – 1961.

[17] Pucci, E. Symmetries and conservation laws in micropolar elasticity / E. Pucci, G. Saccomandi // Int. J. Engng Sci. – 1990. – V. 28. – No. 7. – P. 557–562. – 2004. – V. 53. – P. 371–391.

[18] Maugin, G.A. On the structure of the theory of polar elasticity / G.A. Maugin // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. – 1998. – 356. – P. 1367–1395.

[19] Maugin, G.A. On canonical equations of continuum thermomechanics / G.A. Maugin // Mechanics Research Communications. – V. 33. – 2006. – P. 705-–710

[20] Egorov, R.F. The variational symmetries and conservation laws in classical theory of Heisenberg (anti)ferromagnet / R.F. Egorov, I.G. Bostrem, A.S. Ovchinnikov // Physics Letters. – A 292. – 2002. – P. 325-–334

[21] Lazar, M. The Eshelby stress tensor, angular momentum tensor and scaling flux in micropolar elasticity / M. Lazar, H.O.K. Kirchner // Int. J. of Solids and Structures. – V. 44. – Iss. 7–8. – 2007. – P. 2477–2486

[22] Lazar, M. Lie point symmetries and conservation laws in microstretch and micromorphic elasticity / M. Lazar, C. Anastassiadis // Int. J. Eng. Sci. – 2006. – V. 44. – P. 1571–1582.

[23] Knowles, J.K. On a Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics / J.K. Knowles, E. Sternberg // Arch. ration. Mech. Analysis. – 1972. – V. 44. – P. 187–211.

[24] Maugin, G. Material Inhomogeneities in Elasticity / G. Maugin. – London: Chapman and Hall, 1993. – 276 p.

[25] Эринген, А.С. Законы сохранения в микроморфной механике / А.С. Эринген. – М.:Механика. Сборник переводов. – 1971. – №4. – С. 119–128.

[26] Миндлин, Р.Д. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости / Р.Д. Миндлин, Г.Ф. Тирстен. – М.: Механика. Сборник переводов, 1971. – №4. – С. 80–114.

[27] Грин, А.Е. Микроструктура материалов и мультиполярная механика сплошных сред / А.Е. Грин. – М.: Механика. Сборник переводов, 1966. – №5. – С. 118–122.

[28] Койтер, В.Т. Моментные напряжения в теории упругости / В.Т. Койтер. – М.: Механика. Сборник переводов, 1965. – №3. – С. 89–112.

[29] Тупин, Р.А. Теории упругости, учитывающие моментные напряжения / Р.А. Тупин. – М.: Механика. Сборник переводов, 1965. – №3. – С. 113–140.

Поступила в редакцию 15/V/2007;
в окончательном варианте — 15/V/2007

ON CONSERVATION LAWS OF MICROMORPHIC NONDISSIPATIVE THERMOELASTICITY[9]

© 2007 S.A. Lychev[10]

In this paper following Noether's theorem from the variational symmetries of the action integral in micromorphic nondissipative thermoelasticity of the Green-Nagdy type new conservation laws associated with translational, rotational and scaling transformations of material, 3-spatial and physical manifolds are derived. Explicit corresponding of transformations of microstructure to macrostructure manifolds is of new results obtained in the paper.

Paper received 15/V/2007;
Paper accepted 15/V/2007

[9]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

[10]Lychev Sergey Alexandrovich, Dept. of Continuum mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.