

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ ИМ. А.Ю. ИШЛИНСКОГО
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

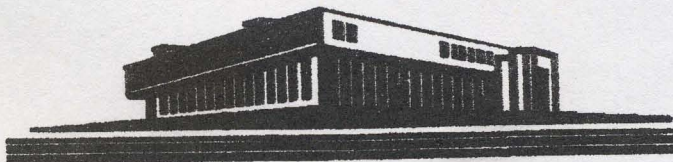


С.А. Лычев, К.Г. Койфман

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ
ТЕОРИИ НЕСОВМЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ**

Единообразные конфигурации

Препринт № 1146



Москва, 2017 г.

Аннотация

Работа посвящена геометрическим методам моделирования конечных несовместных деформаций твердых тел. Несовместность деформаций может быть вызвана различными физическими явлениями, например, распределенными дислокациями и дисклинациями, точечными дефектами, неоднородными температурными полями, усадкой, и т.п. Следствиями несовместных деформаций являются остаточные напряжения и искажение геометрической формы тела. Эти факторы определяют критические параметры современных высокоточных технологий, в частности, в технологиях аддитивного изготовления. В этой связи развитие методов их количественного описания является актуальной проблемой современной механики деформируемого твердого тела. Геометрические методы основаны на представлении тела и физического пространства гладкими многообразиями: материальным и физическим. На этих многообразиях задаются специальные метрики и связности, в общем случае, неевклидовы, наделяющие их свойствами неевклидовых пространств.

Summary

This paper is intended to provide a systematic treatment of those parts of modern differential geometry that are essential for modeling of incompatible finite deformations in solids. The incompatibility of deformations may be caused by a variety of physical phenomena; among them are: distributed dislocations and disclinations, point defects, non-uniform thermal fields, shrinkage, *etc.* Incompatible deformations results in residual stresses and distortion of geometrical shape. These factors are associated with critical parameters in modern high-precision technologies, particularly, in additive manufacturing, and considered to be *Ipsa Facto* essential constituents in corresponding mathematical models. In this context, the development of methods for their quantitative description is the actual problem of modern solid mechanics. The methods in question are based on the representation of a body and physical space in terms of differentiable manifolds, namely material manifold and physical manifold. These manifolds are equipped with specific metrics and connections, non-Euclidian in general.

ISBN 978-5-91741-198-9

055(02)2 © Институт проблем механики РАН 2017

Оглавление

Предисловие	4
Список основных обозначений	6
1 Единообразные конфигурации	9
1. Введение	9
2. Геометрическая мотивация	15
3. Геометрическая формализация тела и физического пространства	24
3.1. Тело как гладкое многообразие	25
3.2. Физическое пространство	35
3.3. Вложение тела в физическое пространство	40
3.4. Образ тела как подмногообразие физического пространства	43
3.5. Конфигурации и движения	47
2 Меры деформаций	69
1. Введение	69
2. Конфигурации и деформации	72
3. Структурно неоднородные тела	97
4. Риманова материальная структура	108
Литература	112

Предисловие

Работа посвящена геометрическим методам моделирования конечных несовместных деформаций твердых тел. Несовместность деформаций может быть вызвана различными физическими явлениями, например, распределенными дислокациями и дисклинациями, точечными дефектами, неоднородными температурными полями, усадкой, ростом, и т.п. Следствиями несовместных деформаций являются остаточные напряжения и искажение геометрической формы тела. Эти факторы определяют критические параметры современных высокоточных технологий, в частности, в технологиях аддитивного изготовления. В этой связи развитие методов их количественного описания является актуальной проблемой современной механики деформируемого твердого тела. Геометрические методы основаны на представлении тела и физического пространства гладкими многообразиями: материальным и физическим. На этих многообразиях задаются специальные метрики и связности, в общем случае, неевклидовы, наделяющие их свойствами неевклидовых пространств.

Вся работа в целом представляет собой последовательное изложение геометрических аспектов теории несовместных конечных деформаций и разделена на две главы.

Первая глава посвящена физической интерпретации неевклидовой структуры материального и физического пространств. Связность физического пространства задается а priori и определяется соображениями, не зависящими от свойств деформируемого тела. Показано, что примером неевклидова физического пространства может служить двумерная жесткая поверхность, формализующая криволинейную подложку, используемую при осаждении в ходе аддитивного процесса. Связность материального пространства отражает внутренние свойства (собственную геометрию) тела и определяется полем локальных единообразных конфигураций, осуществляющих его «сборку» из идентичных единообразных блоков. Единообразность понимается в том смысле, что функционал отклика дает для них один и тот же дескриптор отклика на всевозможных гладких деформациях. В результате сборки получается тело, которое не может быть погружено без деформации в физическое пространство, что является характерной чертой самонапряженных тел, получаемых в аддитивных процессах. По этой причине для его формализации удобно использовать погружение в неевклидово пространство

(материальное многообразие с неевклидовой связностью). На языке теории гладких многообразий построены формализации тела и физического пространства. При этом деформация определяется как вложение (или, в особом случае, погружение) материального многообразия в физическое.

Вторая глава посвящена формализации мер деформаций в неевклидовых пространствах. Привлечение положений неевклидовой геометрии позволяет: **i**) определить глобальную единообразную отсчетную форму для тел с распределенными дефектами или структурной неоднородностью, вызванной поэтапным созданием тела в ходе аддитивного процесса; **ii**) определить глобальную актуальную форму для тел в неевклидовом физическом пространстве, в частности, двумерных криволинейных мембран (материальных поверхностей).

Сформулированы соотношения для мер деформаций Коши–Грина, порождаемых вложениями риманова многообразия, формализующего тело, в риманово многообразие, формализующее пространство. Предложен способ описания деформируемого тела переменного состава как семейства римановых многообразий, над которым определены операции разбиения и соединения, характеризующие структурные особенности неоднородностей, задаваемых сценарием аддитивного процесса. Подробно рассмотрены случаи дискретной и непрерывной структурной неоднородности.

Список основных обозначений

\mathfrak{B}	— Тело
\vee	— Операция соединения тел
\mathfrak{P}	— Физическое пространство
$\mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$	— Множество всех конфигураций $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$
V, v	— Материальная и пространственная скорости движения тела
\mathcal{E}	— Правый тензор Коши – Грина
\mathcal{B}	— Левый тензор Коши – Грина
\mathcal{T}, σ	— Напряжения Коши
\mathcal{P}, ρ	— Напряжения Пиолы – Кирхгофа первого рода
$\mathcal{S}, \mathfrak{s}$	— Напряжения Пиолы – Кирхгофа второго рода
e	— Тензор Эшелби
\mathfrak{M}^n	— Абстрактное многообразие размерности n
$\mathcal{C}^r(\mathfrak{M}^n; \mathfrak{N}^m)$	— Множество всех отображений из \mathfrak{M}^n в \mathfrak{N}^m класса C^r
$\mathcal{O}^k(p)$	— Множество всех отображений из \mathfrak{M}^n в \mathbb{R} , имеющих класс C^k в некоторой окрестности $p \in \mathfrak{M}^n$
$T_p \mathfrak{M}^n$	— Касательное пространство к многообразию \mathfrak{M}^n в точке p
$T\mathfrak{M}^n$	— Касательное расслоение многообразия \mathfrak{M}^n
$T_p^* \mathfrak{M}^n$	— Кокасательное пространство к многообразию \mathfrak{M}^n в точке p
$T^* \mathfrak{M}^n$	— Кокасательное расслоение многообразия \mathfrak{M}^n
$\mathcal{V}^r(\mathfrak{M}^n)$	— Множество всех векторных полей на \mathfrak{M}^n класса C^r
$\mathcal{F}_k^r(\mathfrak{M}^n)$	— Множество всех k -форм на \mathfrak{M}^n класса C^r
u	— Вектор, векторное поле (сечение касательного расслоения)
$(\partial_i), (dx^i)$	— Координатный репер и корепер
ω	— Внешняя форма, поле форм (греческий шрифт)

\otimes	— Тензорное произведение векторных пространств, тензорное произведение элементов векторных пространств
\wedge	— Внешнее произведение
\mathcal{L}_u	— Производная Ли вдоль векторного поля u
$[u, v]$	— Скобки Ли векторных полей u и v
g	— Риманова метрика
$(\cdot)^b, (\cdot)^\sharp$	— «Музыкальные» изоморфизмы
Tf	— Касательное отображение к f
f^*	— Обратный образ («pullback»)
f_*	— Прямой образ («pushforward»)
∇	— Аффинная связность
\mathfrak{T}	— Кручение аффинной связности
\mathfrak{R}	— Кривизна аффинной связности
Ω	— Неметричность
$*$	— Оператор («звезда») Ходжа
$\mathfrak{d}, \mathfrak{D}$	— Операторы Картана
$(\mathcal{E}^m, \mathcal{V}^m)$	— Аффинное пространство \mathcal{E}^m с трансляционным векторным пространством \mathcal{V}^m размерности m
\mathbf{u}, \mathbf{T}	— вектор из \mathcal{V}^m и любой из тензоров, принадлежащих $\mathcal{V}^m \otimes \mathcal{V}^m, \mathcal{V}^m \otimes (\mathcal{V}^m)^*$ и тд.
(\cdot)	— скалярное произведение, $\cdot : \mathcal{V}^m \times \mathcal{V}^m \rightarrow \mathbb{R}$
\lrcorner, \llcorner	— Операции свертки

В третьей главе [1] кратко приведены необходимые сведения из дифференциальной геометрии.

1. Введение

1°. Геометрические методы математического моделирования континуума [2–4] основаны на теоретических положениях современной геометрии и теории гладких многообразий [5–7]. То, что геометрический язык позволяет эффективно формализовать многие физические феномены, было показано еще в конце XIX века в пионерских работах Бельтрами, Пуанкаре, Леви–Чивиты, а затем, Эйнштейна, Вейля, Картана и др. [8]. Плодотворность геометрического подхода для описания тел с дефектами (дислокациями, дисклинациями и т.д.) убедительно продемонстрирована в ряде классических работ [9–12]. Геометрические методы успешно применяются для решения нелинейных задач теории растущих тел [13–18]. Несмотря на то, что геометрическим методам в физике и механике континуума посвящен ряд зарубежных монографий [19, 20], теоретический аппарат современной геометрии пока имеет лишь частичное (и довольно слабое) пересечение с методологией, используемой в современной механике континуума. Настоящая работа в известной мере расширяет это пересечение.

2°. Сделаем несколько замечаний об актуальности геометрических методов механики континуума. В настоящее время интенсивно развиваются технологические процессы, основанные на изготовлении деталей

путем последовательного нанесения материала на подложку, которая может иметь весьма сложную геометрическую форму. Локальная полимеризация, электрохимическое осаждение [21], наплавка, селективное лазерное спекание, стереолитография [22] — лишь часть списка таких технологий. Эти технологии принято называть аддитивными [23, 24]. Аддитивные технологии позволяют изготавливать детали со сложной геометрической формой и, теоретически, из любого материала. Помимо явных технических преимуществ, аддитивные технологии весьма привлекательны с экономической точки зрения: существенно сокращается путь от проекта до изделия, появляется возможность оперативного изменения проекта в ходе разработки, стоимость и ресурсоемкость изделий сложной формы, несмотря на относительно высокую стоимость расходного материала (порошки, полимеры и т.п.) может оказаться меньше, чем при их изготовлении традиционным способом [25].

Внедрению новой технологии сопутствуют технологические проблемы. Одна из них — искажения финальной формы, вызванные усадкой при отверждении (солидификации) материала. При изготовлении тонкостенных деталей эти искажения могут существенно превосходить заданную точность. Один из способов уменьшения искажений — их компенсация начальными искажениями, учитываемыми в проекте. Образно говоря, для изготовления геометрически правильного тела, например, куба, следует передать в технологическую машину цифровую модель тела сложной формы, такую, что ее отличия от куба нивелировались бы искажениями, возникающими при солидификации в ходе процесса [26, 27]. Задача теоретического определения начальных компенсирующих искажений — сложная задача, относящаяся к классу обратных задач, и на настоящий момент не решенная. Ее решение предполагает предварительное исследование прямой задачи о теоретическом определении искажений создаваемого тела в ходе технологического процесса.

3°. Как правило, в аддитивных технологических процессах существенно проявляются нелинейные эффекты. Это связано с высокой концентрацией энергии в зоне спекания (в процессах лазерной наплавки), либо со сложной реологией фотохимических процессов солидификации полимера. В этой связи, построение общих моделей следует осуществлять в рамках нелинейной механики сплошной среды.

Обширная область реализации обсуждаемых аддитивных технологий — создание многослойных структур микронного масштаба, в част-

ности, многослойных мембран (LbL полимерные структуры, многолистные мембраны из графена), характерный размер которых составляет несколько мкм. Такой масштаб все еще позволяет использовать для описания физического состояния подходы континуальной механики, и учитывать специфику, связанную с масштабом, особыми нелинейными формулировками определяющих соотношений (более детально см., например, [28, 29]).

Характерная особенность тел, созданных в ходе некоторого аддитивного процесса — отсутствие натуральной конфигурации в традиционном понимании этого термина. С физической точки зрения это означает, что в теле запасена упругая энергия, которая не может быть высвобождена ни при какой гладкой деформации. Высвобождение этой энергии возможно только при разрезании тела на бесчисленное множество несвязанных частей — процесс, в некотором смысле, обратный аддитивному изготовлению. Аналогичная ситуация возникает в теории распределенных полей дефектов (дислокаций, дисклинаций, пор) [30], в задачах нелинейной термомеханики [31].

Эффекты, возникающие из-за отсутствия натуральной конфигурации, могут быть математически формализованы различными понятиями, такими, как несовместность деформаций [10, 11], плотность полей дефектов [32], источники внутренних напряжений [33]. Такие понятия взаимосвязаны и могут быть описаны в рамках единого представления о деформации, как о геометрическом преобразовании объектов в пространствах с неевклидовой структурой. Эта точка зрения систематически развивается в настоящей статье, что отражено в ее названии.

4°. Первые работы, в которых использовалась неевклидова геометрия для построения механики сплошных сред, были опубликованы в начале 20 века. В них были предложены релятивистские модели деформируемого континуума, для описания которого использовались риманова и нериманова геометрии пространства–времени [34–39]. Таким образом, неевклидовой структурой снабжалось физическое пространство, вмещающее деформируемое тело. Идею о том, что неевклидовой структурой должно обладать пространство, вмещающее отсчетную ненапряженную форму тела, по-видимому впервые высказали Эккарт¹ [40] и Кондо [41–44], хо-

¹Carl Eckart, 1948: «*The traditional theory of the solid state rests on two false assumptions. One is the principle of a constant relaxed (or standard) state. The other is the principle of relaxability-in-the-large, first formulated mathematically by de Saint-*

тия исследования деформации твердого тела, вызванной дисторсией, не удовлетворяющей условиям совместности, восходят к работам Вейнгартена [45] и Вольтерра [46]. При этом, физическое пространство, вмещающее наблюдаемую (актуальную) форму, сохраняло евклидову структуру. Образно говоря, тело из вымышленного неевклидова пространства отображалось в физическое, евклидово, что приводило к деформациям, которые можно назвать собственными, поскольку они не вызваны внешними полями. Кондо показал, что такие собственные деформации полностью характеризуют поля дефектов, как внутренних источников напряжений, которые, в свою очередь, могут быть определены правилом параллельного переноса в пространстве, вмещающем отсчетную форму. Они количественно характеризуются соответствующей кривизной и кручением аффинной связности. Идея о том, что пространства, вмещающие отсчетную и актуальную формы, не являются евклидовыми, была революционной для того времени (Куниин ввел весьма образный термин — внутренняя геометрия тела [47]) и инициировала отдельное теоретическое направление в механике сплошных сред, см., Бильби [48], Зигер [49], Най [9], Крёнер [50], Нолл [51], Ван [52], Можен [4], Эпштейн [2, 3], Мясников [53]. Следует отметить, что методология этого направления близка к методологии рациональной механики, развитой школой Трусделла [54, 55] в середине XX века, что определяет характерный «абстрактный» вид теории. Настоящая работа следует этой методологии.

Замечание 1. Физико-механические особенности тел, получаемых в ходе аддитивных технологических процессов, в основном, обусловлены несовместными деформациями, определяемыми сценарием процесса. В этой связи такие тела подобны кристаллическим телам, в которых несовместность деформаций вызвана дефектами их структуры. Для моделирования их напряженного состояния может быть использован единый подход теории несовместности, основы которой были заложены в работах Крёнера [11] и Де Вита [10].

Напомним, что теория несовместности Крёнера основана на представлении тензорного поля дисторсии β как произвольного гладкого тензорного поля второго ранга, которое может быть представлено как градиент некоторого гладкого векторного поля лишь в частных случаях. Эти частные случаи соответствуют классическим соотношениям для бездефектной среды и характеризуются условием интегрируемости уравнения $\nabla \mathbf{u} = \beta$, которое, как это известно из теории потенциала, сводится к соотношению $\nabla \times \beta = \mathbf{0}$. Нарушение этого условия определяет меру дислокаций $\alpha = \nabla \times \beta$ (здесь α — тензор плотности дислокаций, [11]). В классических работах по теории упругости условия интегрируемости формулируются в терминах полей де-

Venant. His equations are essentially identical with Riemann's equations expressing the condition that a geometry be Euclidean-in-the-large.

формаций $\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\beta}]^{\text{sym}}$ и вращений $\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\beta}]^{\text{asym}}$ следующим образом: $\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} - (\nabla \vec{\boldsymbol{\omega}})^{\text{T}} = \mathbf{0}$, где $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ — вектор, ассоциированный с антисимметричным тензором $\boldsymbol{\omega}$. Повышая порядок дифференциальных операций в левой части этого равенства, можно получить независимые условия для $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$, а именно, условия Сен-Венана $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^{\text{T}} = \mathbf{0}$ и $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}}$. Вместе с тем, как показал Де Вит, эти условия являются необходимыми, но не достаточными; при выполнении этих условий поле перемещений, соответствующее заданным $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$, находится с точностью до жесткого движения и градиента некоторой скалярной функции [10]. Если этот произвол нивелируется дополнительными условиями (например, краевыми), то перемещения однозначно определяются формулами Чезаро. В терминах тензора изгиба-кручения $\boldsymbol{\kappa} = \nabla \vec{\boldsymbol{\omega}}$ можно сформулировать более общие условия совместности: $\nabla \times \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\kappa} = -(\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^{\text{T}}$ [10]. Эти условия являются необходимыми и достаточными. Последнее условие явно указывает на связь между малыми деформациями и поворотами. Если поля $\boldsymbol{\kappa}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ известны и удовлетворяют перечисленным условиям совместности, то искомые повороты и перемещения определяются по формулам типа Чезаро [10]:

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}) = \vec{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}'),$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) + \vec{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}') + \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\},$$

где \mathbf{r}_0 — вектор места фиксированной точки. Эти соотношения определяют однозначные, не зависящие от пути интегрирования поля, что следует из теоремы Стокса и условий совместности в терминах $\boldsymbol{\kappa}$.

Нарушение условий совместности характеризует феномен пластической деформации, которая является следствием возникновения и перераспределения дефектов в идеальном теле (кристалле). Физическая интерпретация пластической деформации кристаллов была сформулирована в работах Делингера, Тейлора, Орована, Поляни [56–60], которые объяснили расхождение теоретической оценки механических свойств кристаллов, полученной Френкелем [61], и экспериментальных данных. Следует отметить, что в рамках этих воззрений известной считалась пластическая дисторсия $\boldsymbol{\beta}^{\text{P}}$, а несовместной полагалась ее симметричная часть, $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{P}}$. Мера несовместности определялась тензором несовместности $\boldsymbol{\eta} = -\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{P}})^{\text{T}}$, или тензором плотности дислокаций $\boldsymbol{\alpha} = -\nabla \times \boldsymbol{\beta}^{\text{P}}$ [10]. Последняя характеристика имеет ясную геометрическую интерпретацию как подынтегрального выражения для определения вектора Бюргерса [11]. При этом напряженное состояние в теле полностью определяется упругой деформацией, накладываемой на пластическую так, что тело не распадается на отдельные части [11, стр. 23]. Это позволяет классифицировать тело как локально простое. Отметим, что упругая деформация и поворот, связанные между собой соотношением $(\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon})^{\text{T}} + \nabla \vec{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{K}$, где \mathbf{K} — коссера-наевский тензор, характеризующий относительный поворот кристаллической решетки.

Таким образом, вследствие несовместной пластической деформации, тело распадается на «пазл» бесконечно малых элементов (осколков), которые могут собраны

в сплошное тело посредством упругой индивидуальной деформации каждого такого осколка. Более общая ситуация возникает, если считать, что помимо индивидуальной деформации, каждому осколку следует сообщить индивидуальный упругий поворот, не связанный с деформацией, определив тем самым ориентацию директоров (по терминологии теории моментных сред). Для этой цели, по предложению Де Вита, используется тензор изгиба-кручения κ , который в случае совместной деформации определяется равенством $\kappa = \nabla \vec{\omega}$, а в общем случае задается как произвольное гладкое поле [10]. Напряженное состояние тела в этом случае зависит от двух независимых полей — упругой деформации и упругого изгиба-кручения, которые обеспечивают интегрируемость соотношений для полных полей. Источники собственных напряжений определяются мерами несовместности деформаций (плотностью дислокаций α) и мерой плотности дисклинаций, определенной равенством $\theta = -\nabla \times \kappa^P$. Образно говоря, вследствие непрерывного распределения дефектов двух типов — дислокаций и дисклинаций, тело распадается на «пазл» осколков, которые могут быть собраны в сплошное тело посредством упругой индивидуальной деформации и независимой упругой ориентации граней. В рамках этого подхода упругая дисторсия оказывается неопределенной, но ее симметрическая часть определена однозначно. Напряженное состояние тела характеризуется законами состояния для сред с моментными напряжениями [62] или микроструктурой [63]. Экспериментальная идентификация дисклинаций была осуществлена в середине XX века [64–66], в частности, при исследовании механики жидких кристаллов. Заметим, что еще в пионерских работах Крёнера и Де Вита [10, 11] отмечалась тесная связь тензоров плотностей дислокаций и дисклинаций с тензорами кручения и кривизны материальной связности. Ими же было указано на связь континуальной теории дислокаций с теорией гравитации Эйнштейна – Картана.

Геометрическая теория дефектов при конечных деформациях получила развитие в последней декаде (см., например, [67]). Следует отметить, что в рамках линейной теории существуют иные подходы к описанию классов дефектов, основанные на свойствах интегрируемости уравнений, характеризующих кинематику континуума [68–70]. В этих работах предложена иерархическая классификация дефектов по порядку их интегрируемости и более детальная классификация, связанная с понятиями ранга, типа, сортности и глубины. ♠

5°. В работе используется язык современной дифференциальной геометрии и теории гладких многообразий, в частности, теории связностей и внешнего исчисления Картана. Несмотря на то, что такой способ описания механики сплошных сред проиллюстрирован в ряде монографий (см. [19, 20, 71]), его нельзя назвать общепринятым. По этой причине, в тексте подробно поясняются используемые геометрические понятия и приводится их интерпретация с позиций механики.

2. Геометрическая мотивация

6°. В классической теории упругости деформации вычисляются относительно некоторой конфигурации, которую называют отсчетной. Перемещения отсчитываются от образа этой конфигурации, а вычисленные по ним деформации подставляются в закон состояния, который определяет напряжения. При этом, отсчетная конфигурация полагается свободной от напряжений, или, как принято говорить, натуральной. Здесь требуется пояснение термина «свободный от напряжений». Дело в том, что механическое напряжение — термодинамическая величина и для ее корректного определения вводится концепция элементарного объема, который полагается достаточно малым в сравнении с телом (настолько малым, что его можно считать бесконечно малой окрестностью материальной точки), и достаточно большим в сравнении с микроструктурой материала (настолько большим, что можно считать предположение о локальном термодинамическом равновесии аксиомой² [73, 74]). Предположим, что найден требуемый компромисс и тело представлено в виде объединения элементарных объемов. Деформация тела вызывает деформацию каждого такого объема. Выбирая тестовое тело простой геометрической формы, например, куб, и реализуя в нем однородную деформацию, предполагая при этом, что все элементарные объемы откликаются на нее одинаково, можно определить зависимость потенциальной энергии, запасаемой каждым элементарным объемом, от его деформации, и по известным формулам найти напряжения. Если определение зависимости предполагало аппроксимацию экспериментальных данных, то описанная процедура привела бы к идентификации закона состояния. Подчеркнем, что закон состояния имеет локальный характер, т.е. связывает искажение формы элементарного объема и энергию (напряжения), добавляемую или убавляемую в нем. При этом, речь идет лишь о при-

²Часто элементарный объем называют представительным. Концепция элементарного объема подразумевает выбор того или иного структурного уровня, используемого для построения теории. В зависимости от структурного уровня, согласно Н.Н. Давиденкову (Н.Н. Давиденков, Сборник «Рентгенография к приложению к испытанию материалов», 1936, стр. 393), различают собственные напряжения трех родов. Это — напряжения на макроскопическом уровне, в областях порядка зерен кристалла и в областях порядка кристаллической ячейки [72]. В настоящей работе представительный объем берется настолько большим, чтобы исключить из рассмотрения напряжения второго и третьего родов.

ращениях энергии (напряжений) а не об их абсолютных значениях.

Теперь результаты, полученные для тестового тела, переносятся на тело, подлежащее математическому моделированию. Для моделирования мы должны предполагать, что тело «собрано» из таких же элементарных объемов, что и тестовое, и что все эти объемы находятся в том же физическом состоянии, что и объемы тестового тела перед началом эксперимента. Тогда, решая соответствующую краевую задачу, расчетным путем удастся определить распределения плотности энергии (напряжений) в моделируемом теле. Итак, классический подход предполагает гипотезу: *элементарные объемы, составляющие тестовое тело перед экспериментом, и объемы, составляющие моделируемое тело, находятся в одинаковом физическом состоянии*. Заметим, что это состояние не предполагает отсутствие напряжений. По терминологии [51], тестовое и моделируемое тела имеют *единообразную отсчетную конфигурацию*. В этой связи, вместо термина «натуральная отсчетная конфигурация», мы будем далее использовать термин «единообразная отсчетная конфигурация».

Но единообразная отсчетная конфигурация существует далеко не всегда! Тело может иметь различные источники, возмущающие его единообразие: дефекты, в частности, дислокации и дисклинации, неоднородные поля температур, неоднородная усадка, вызванная химической реакцией и т.п. Технически, отклонение от единообразия можно определить, разрезая тело на малые части и позволяя им деформироваться независимо (на этой идее основаны большинство методов экспериментального исследования остаточных напряжений [75]). Такой прием, с теоретической точки зрения, эквивалентен удалению связей между элементарными объемами. Деформируясь свободно, элементарные объемы переходят в единообразное состояние, однако их совокупность перестает быть сплошным телом: описание такой совокупности в рамках классической континуальной физики представляет существенную проблему. Возможны два способа решения этой проблемы: **1.** Отказаться от единообразной отсчетной конфигурации и производить вычисления относительно сплошной, но не единообразной формы. **2.** Собрать геометрически несовместные элементарные объемы в сплошное тело за счет погружения их в пространство с дополнительными параметрами, характеризующими неевклидово правило параллельного переноса. Будем использовать для этой цели про-

странство аффинной связности.

7°. Будем рассматривать только простые материалы [51]. Их отклик полностью определяется линейным преобразованием, определяемым локальной деформацией. Обратим внимание на формальное соответствие между математическим описанием несовместных деформаций в простых материалах и геометрией пространств аффинной связности. Трансформация каждого элементарного объема в единообразное состояние осуществляется линейным преобразованием; в совокупности эти преобразования определяют (по предположению) непрерывное поле преобразований. Построение пространства аффинной связности методом подвижного репера Картана также определяется полем линейных преобразований, действующих на координатные реперы. Таким образом, построение пространства, вмещающего произвольные искаженные элементарные объемы в совместной форме, сводится к процедуре построения пространства Картана. Особые геометрические свойства построенного таким образом пространства — внутренняя геометрия тела (по терминологии Кунина) — характеризуют источники собственных напряжений.

8°. В работах [15–18, 31, 51, 52, 67] физическое пространство, вмещающее формы тел, предполагалось аффинно–евклидовым. В настоящей работе физическое пространство рассматривается с общих позиций — как риманово пространство с кривизной, отличной от нуля. Это, во–первых, делает теорию более полной и согласованной, т.к. с формальной точки зрения тело и физическое пространство становятся равноправными геометрическими объектами. Во–вторых, при моделировании двумерных тел — мембран — образы их конфигураций могут определяться на некоторой фиксированной поверхности. Такая ситуация возникает, например, при осаждении тонкой пленки на поверхность шара. В этом случае удобно рассматривать поверхность осаждения как двумерное физическое пространство, вообще говоря, с неевклидовой связностью.

Для пояснения этих соображений приведем простой пример деформирования мембраны, полагая, что образы отсчетной и актуальной форм известны, причем, одна из них, или обе сразу, не могут быть погружены в евклидову плоскость.

Представим себе, что наблюдателями, описывающими «физическую реальность», будут вымышленные «двумерные существа», населяющие мембрану — двумерную поверхность, подобно жителям Сферландии³.

³В художественной форме двумерный мир со сферической геометрией, населен-

Они не могут непосредственно наблюдать деформацию мембраны, но ощущают изменение физических свойств своего двумерного мира, вызванные деформацией. Кроме «двумерных наблюдателей», за деформацией мембраны следят могущественные «трехмерные наблюдатели», способные видеть форму мембраны в ее возможных вложениях в объемлющее трехмерное пространство. Рассмотрим две ситуации.

Образ единообразной конфигурации мембраны не может быть вложен в евклидову плоскость, но может быть вложен в объемлющее евклидово пространство как часть сферы (рис. 1.1). При таком вложении,

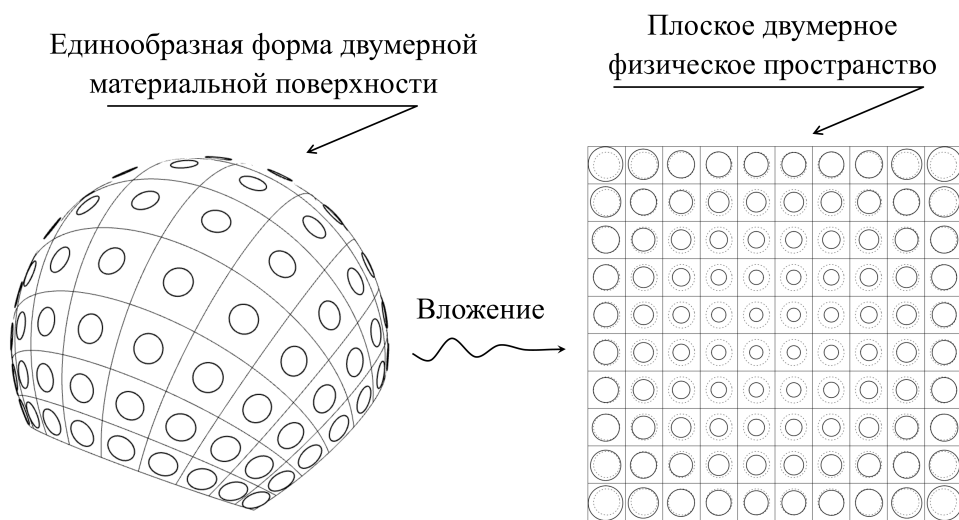


Рис. 1.1. Вложение двумерного тела с неевклидовой внутренней геометрией в плоское физическое пространство

малые окрестности находятся в единообразном, т.е. физически неразличимом состоянии. Некоторые из них изображены окружностями на рис. 1.1. «Двумерные наблюдатели» не могут ничего сказать о «сферичности» формы их мира и могут быть убеждены в том, что их мир — плоский. Пусть физическое пространство плоское. Любое вложение мембраны в физическое пространство приведет к ее деформации. При этом, «двумерные наблюдатели» обнаружат, что их единообразный мир перестал быть таковым: окружности, характеризующие окрестности на рис. 1.1, исказятся, причем это искажение произойдет без видимой для «двумерных наблюдателей» причин — никакие внешние силовые поля не

ный «двумерными существами», описан в фантастическом романе Диониса Бюргера «Сферландия» [76].

прикладывались. Искаженные окружности показаны на рис. 1.1 сплошными линиями. Рядом с ними, для сравнения, пунктиром показаны неискаженные окружности. Согласно [4], мембрана приобрела материальную неоднородность (material inhomogeneity), оставаясь материально единообразной (materially uniform), т.е. выполненной из одного и того же материала. Разумеется, изменение геометрических образов смогут наблюдать только могущественные «трехмерные наблюдатели». С их точки зрения и представлены изображения на рис. 1.1. «Двумерные наблюдатели» заметят лишь изменение физических свойств своего мира. Например, упругость при малых возмущениях различных участков мембраны станет различной, а, если мембрана обладает оптическими свойствами, то она станет оптически неоднородной — в мире «двумерных наблюдателей» появится нечто вроде радуги.

Замечание 2. Вложение двумерного тела \mathcal{S} в объемлющее трехмерное пространство \mathcal{E} , изображенное на рис. 1.1, осуществлялось с помощью формул для стереографической проекции:

$$X = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad Y = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad Z = -\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}. \quad (1.2.1)$$

Здесь x, y — поверхностные координаты, доступные для восприятия «двумерного наблюдателя», а X, Y, Z — декартовы координаты объемлющего евклидова пространства, определяющие геометрические места точек двумерного тела при его вложении, доступные для восприятия могущественными «трехмерными существами». Окружности, символизирующие единообразные окрестности точек на \mathcal{S} для «трехмерных наблюдателей» представляются параметрически формулами:

$$X = X_0 + \frac{r_0}{\omega} n_3 \cos \varphi, \quad Y = Y_0 + \frac{r_0}{\omega} n_3 \sin \varphi, \quad Z = Z_0 + \frac{r_0}{\omega} (n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi),$$

$$\omega = \sqrt{n_3^2 + (n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi)^2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi[,$$

где X_0, Y_0, Z_0 — трехмерные координаты центров окружностей, вычисляемые по формулам (1.2.1) для заданных x_0, y_0, r_0 — их радиус (одинаковый для всех), (n_1, n_2, n_3) — компоненты нормали к образу тела.

Вложение тела \mathcal{S} в двумерное физическое пространство \mathcal{P} задается преобразованием

$$\tilde{x} = \frac{X}{1+Z}, \quad \tilde{y} = \frac{Y}{1+Z}.$$

В результате этого преобразования окружности трансформируются в замкнутые кривые, параметризуемые в \mathcal{P} посредством отображения $(x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y})$, определенного правилом

$$\tilde{x} = \frac{\omega X_0 + r_0 n_3 \cos \varphi}{\omega + \omega Z_0 - r_0 (n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi)}, \quad \tilde{y} = \frac{\omega Y_0 + r_0 n_3 \sin \varphi}{\omega + \omega Z_0 - r_0 (n_1 \cos \varphi + n_2 \sin \varphi)},$$

где $\varphi \in [0, 2\pi[$. ♠

Преобразование окружностей, символизирующих единообразные окрестности, в искаженные образы происходит с точки зрения «двумерных наблюдателей» по причинам, не связанным с видимой деформацией их двумерного мира, в то время, как «трехмерный наблюдатель» явно видит эту деформацию. Однако, «двумерные наблюдатели» могут предположить, что по некоторым причинам их двумерный мир изменил свои геометрические свойства: его сферическая геометрия трансформировалась в плоскую. Обе точки зрения могут быть использованы для описания вложения тела в физическое пространство, однако апелляция к могущественному «многомерному наблюдателю» часто является громоздкой и связанной с трудноинтерпретируемыми геометрическими образами. В настоящей работе развивается методология «внутреннего наблюдателя», который может оперировать двумя понятиями: деформацией тела и изменением геометрии пространства, вмещающего это тело.

В рассмотренном примере неевклидовой структурой обладало пространство, содержащее единообразную отсчетную форму тела, а физическое пространство — евклидова плоскость. Легко представить обратную ситуацию: единообразная форма определяется плоской геометрией, а физическое пространство — риманово пространство с нетривиальной кривизной. Рисунок 1.2 иллюстрирует это соображение: плоская мембрана наносится с возможностью проскальзывания на недеформируемое сферическое основание. Для построения изображений вновь использовалось преобразование (1.2.1).

Таким образом, согласно сказанному выше, несовместные деформации тела характеризуются двумя геометрическими понятиями: вложением в физическое пространство и структурой пространства, содержащего его отсчетную единообразную конфигурацию.

9°. Приведем еще одну геометрическую интерпретацию неевклидовой структуры отсчетной формы. Пусть тело \mathfrak{B} и физическое пространство \mathfrak{P} представлены двумерными многообразиями, причем по условию \mathfrak{P} — евклидово (т.е. кручение и кривизна связности на \mathfrak{P} тождественно равны нулю). В виду евклидовости \mathfrak{P} его можно изобразить двумя ортогональными осями (x^1, x^2) как на рис. 1.3, 1.4. Пусть с физическим пространством \mathfrak{P} связан наблюдатель A , который «видит» все, что происходит в \mathfrak{P} , но не может заглянуть за его пределы: он живет в плоском мире, как персонажи Эдвина Эбботта в Флатландии [76]. Предположим, что физи-

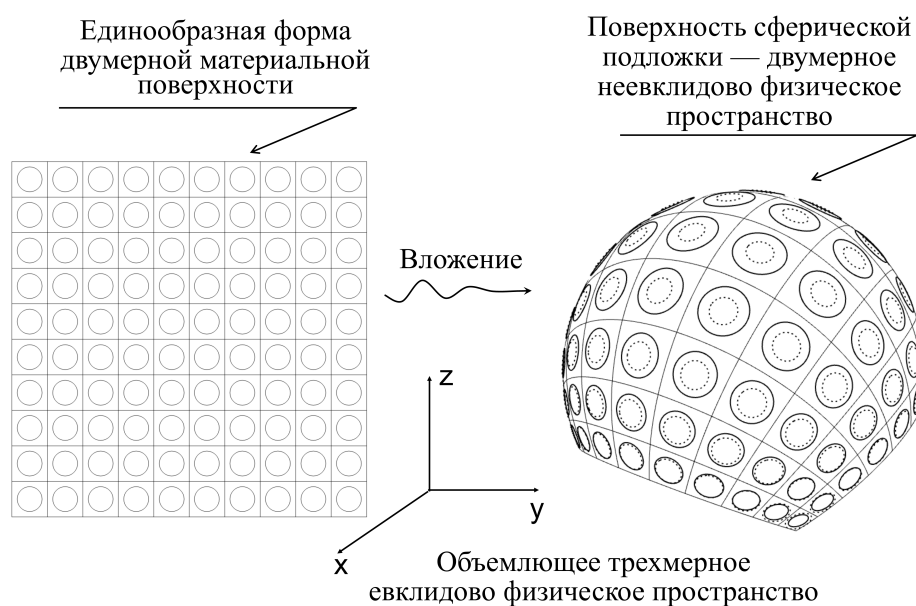


Рис. 1.2. Вложение двумерного тела с евклидовой внутренней геометрией в неевклидово физическое пространство

ческое пространство \mathfrak{P} представляет собой типичный слой трехмерного пространства событий $\mathfrak{S} = \mathbb{T} \times \mathfrak{P}$, в котором добавочное измерение соответствует времени: движения в \mathfrak{P} характеризуются изменениями взаимных положений точек в \mathfrak{P} при переносе слоя \mathfrak{P} вдоль добавочной хронометрической оси \mathbb{T} . В пространстве \mathfrak{S} находится более могущественный наблюдатель, который видит сразу все образы конфигураций тела \mathfrak{B} в совокупности — т.е. наблюдает мировую трубку тела \mathfrak{B} (см. рис. 1.3, 1.4). Каждое сечение мировой трубки — образ конфигурации, соответствующий некоторому моменту времени. Если тело обладает натуральной конфигурацией то эту конфигурацию наблюдатель A может увидеть в одном из сечений. Однако в общем случае, такого сечения может не оказаться: наблюдатель A сделает вывод о том, что деформации тела \mathfrak{B} несовместны. В то же время, наблюдатель A может обнаружить последовательность сечений (с его точки зрения, последовательность моментов времени), в которых материальные точки на некоторых криволинейных отрезках оказываются в натуральном состоянии. Более могущественный наблюдатель B , в отличие от A , видит все эти отрезки в совокупности и наблюдает некоторую двумерную поверхность в \mathfrak{S} : пересечение поверхности общего вида и мировой трубки тела. Все материальные точки этой поверхности находятся в единообразном состоянии и, следовательно, по-

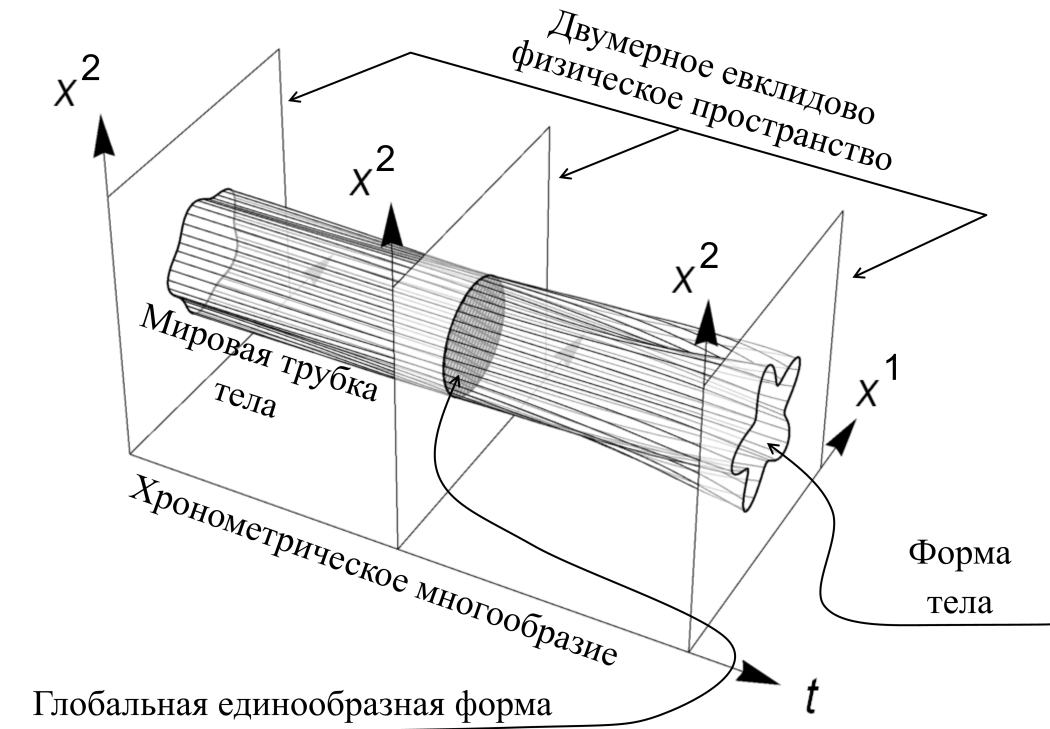


Рис. 1.3. Единообразная отсчетная конфигурация полностью погружена в физическое пространство наблюдателя

верхность представляет образ натуральной конфигурации тела. Таким образом, наблюдатель A видит образ единообразной конфигурации по частям, а наблюдатель B — весь образ сразу. Важным является то, что образ конфигурации при совместных и при несовместных деформациях — двумерная поверхность, и ее «визуализация» зависит от геометрической фантазии наблюдателя.

Тот факт, что отрезки «склеились» в сечение мировой трубки, которое может быть формализовано гладким многообразием, основан на дополнительной гипотезе о гладкости единообразной конфигурации. Можно предложить более общую ситуацию, когда в каждый момент времени в единообразное состояние переходит окрестность одной точки. В этом случае, наблюдатель B видит «нить», проходящую вдоль мировой трубки. О классификации образов единообразных отсчетных конфигураций см. [15].

10°. При моделировании растущих тел [15, 17] исследуются процессы, в ходе которых тело может изменяться столь существенно, что при его математической формализации как гладкого многообразия потребуется

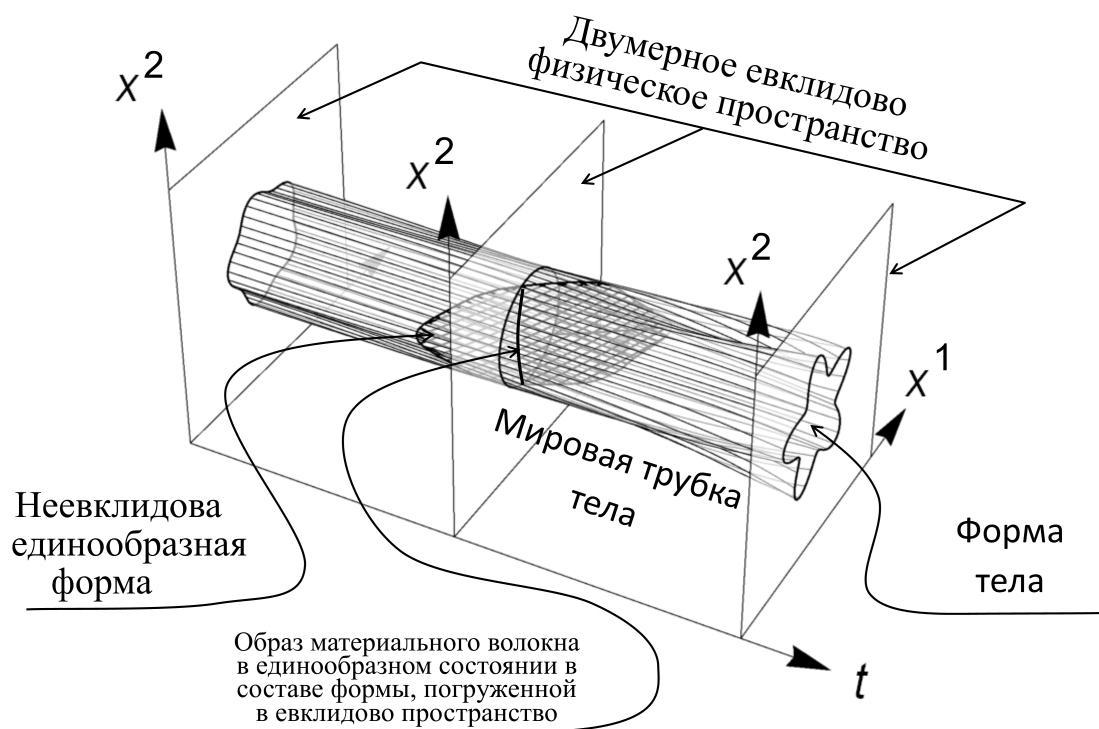


Рис. 1.4. Единообразная отсчетная конфигурация частично погружена в физическое пространство наблюдателя

принимать во внимание изменение топологической структуры. Следует отметить, что топологические свойства тела могут быть весьма нетривиальны, в частности, тело может иметь структуру неориентируемой поверхности, например, поверхности Клейна⁴. «Физическое» воплощение такого тела может быть представлено самопересекающейся сетчатой оболочкой [77]. В виду бурного развития технологий аддитивного изготовления, такие «экзотические» тела могут быть с легкостью воплощены в материале. Так, на рис. 1.5 показана трехмерная конструкция, напечатанная на 3D-принтере. Она может быть рассмотрена как сетчатая оболочка, поверхность осреднения которой представляет собой поверхность Клейна.

11°. Подводя итог раздела, выделим следующие основные понятия, играющие определяющую роль в дальнейшем изложении:

- (i) топология тела;

⁴Поверхность Клейна часто называют «бутылкой Клейна». По-видимому, это название произошло из-за сходства в написании слов Fläche (поверхность) и Flasche (бутылка).



Рис. 1.5. Сетчатая поверхность Клейна

- (ii) вложение и погружение тела в физическое пространство;
- (iii) локальные дифференциально–геометрические свойства (метрика и связность) образа тела при его вложении в физическое пространство;
- (iv) локальные дифференциально–геометрические свойства (метрика и связность) тела в образе единообразной конфигурации.

3. Геометрическая формализация тела и физического пространства

12°. Интуитивные представления о сплошном теле могут быть сведены к следующим соображениям. Тело \mathfrak{B} — это множество материальных точек. Каждая материальная точка соседствует с другими материальными точками, непрерывно заполняющими ее окрестность, причем, это заполнение подобно заполнению интервала числовой оси действительными числами⁵. Эти соображения приводят к формализации \mathfrak{B} как топологического пространства, т.е. к определению на множестве \mathfrak{B} семейства открытых (или замкнутых) подмножеств [78, 79]. Как правило (и мы будем ему следовать), топологическая структура тела \mathfrak{B} полагается такой, что:

- 1) Мощность \mathfrak{B} равна мощности континуума (\mathbb{R}).
- 2) \mathfrak{B} — отделимо (удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа).

⁵Это утверждение можно трактовать как самостоятельную гипотезу.

3) \mathfrak{B} — топологическое пространство со счетной базой.

4) Локальная топологическая размерность \mathfrak{B} постоянна: $\dim \mathfrak{B} = n$ (для мембран $n = 2$, для трехмерных тел $n = 3$).

Для идентификации материальных точек требуется способ их аналитического описания: здесь целесообразно воспользоваться идеей картрирования топологического пространства, развитой в теории гладких многообразий [5–7, 80–84]. Картрирование устанавливает аналитическую структуру на \mathfrak{B} , определяя на нем понятие гладкости. Важность этой структуры отмечалась в работах представителей школы рациональной механики еще в 50-х годах 20 в. В частности, В. Нолл ввел понятие «гладкого тела» [51]. В результате картрирования для каждой материальной точки можно выбрать окрестность, гомеоморфную арифметическому пространству \mathbb{R}^n (для трехмерных тел \mathbb{R}^3 , а для мембран \mathbb{R}^2).

Значения картрирующих функций определяют широко используемое в механике понятие — координаты. Тот факт, что в нелинейной теории определяются различные координаты: материальные, отсчетные, актуальные и т.п., говорит о том, что при моделировании процесса деформирования используется несколько картрирований одновременно. Мы используем еще большую детализацию: будем различать тело, физическое пространство и образ тела при его вложении в физическое пространство, как три различных гладких многообразия. Свойства гладкости функций, характеризующих деформирование и сопутствующие ему физические поля, также определяются в терминах карт.

3.1. Тело как гладкое многообразие

13°. Представление тела, как гладкого многообразия, впервые было использовано в работах Нолла [51], Вана [52], Гёртина [85]. Так, В. Нолл в работе [51] ввел аксиоматическое определение гладкого тела, как множества, наделенного семейством его отображений в физическое пространство, называемых конфигурациями, и удовлетворяющих некоторой специальной системе аксиом. М. Гёртин и А. Ian Murdoch в работе [85], основываясь на аксиомах Нолла, дали замкнутое определение двумерной материальной поверхности.

Замечание 3. Система аксиом Нолла опирается на понятие конфигурации \mathfrak{z} , как отображения множества \mathfrak{B} , представляющего совокупность материальных точек, образующих тело, в абсолютное (евклидово) физическое пространство \mathcal{E} , т.е. $\mathfrak{z} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$. Пусть задан класс конфигураций \mathcal{C} . Тело \mathfrak{B} называется непрерывным телом

класса C^p , если класс конфигураций \mathfrak{C} удовлетворяет следующим условиям:

(i) Каждая конфигурация $\varkappa \in \mathfrak{C}$ — гомеоморфизм⁶, а область значений $\varkappa(\mathfrak{B})$ — открытое множество в \mathcal{E} , которое называется областью, занимаемой телом \mathfrak{B} в конфигурации \varkappa .

(ii) Если $\gamma, \varkappa \in \mathfrak{C}$, то композиция

$$\lambda = \gamma \circ \varkappa^{-1} : \varkappa(\mathfrak{B}) \rightarrow \gamma(\mathfrak{B})$$

является отображением класса C^p , которое называется деформацией тела \mathfrak{B} из конфигурации \varkappa в конфигурацию γ .

(iii) Если $\varkappa \in \mathfrak{C}$ и если $\lambda : \varkappa(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathcal{E}$ — отображение класса C^p , то $\lambda \circ \varkappa \in \mathfrak{C}$. Отображение $\lambda \circ \varkappa$ называется конфигурацией, получаемой из конфигурации \varkappa посредством деформации λ .

Таким образом, порядок гладкости тела определяется гладкостью композиций его конфигураций. ♠

Определение гладкого тела, которое дал В. Нолл, представляет его многообразием простой топологической структуры — тривиальным многообразием, атлас которого содержит только одну карту [5]. Соображения 10° оказываются за пределами теории, построенной на этой аксиоматике (о необходимости использования нетривиальных многообразий, представляющих тело, см. также [52]). Кроме того, постулирование абсолютного физического пространства не позволяет учесть соображения 8° .

Аксиоматика Нолла использовалась в работах [15, 17]. В рамках настоящей статьи будем использовать более широкий класс многообразий, представляющих как тело, так и пространство. Их формализация приведена в настоящем разделе.

14° . Будем называть топологическое пространство \mathfrak{M} многообразием размерности $\dim \mathfrak{M} = n$, если оно удовлетворяет следующим условиям [82, 84]:

- (i) \mathfrak{M} удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа;
- (ii) \mathfrak{M} имеет счетную базу топологии;
- (iii) существует семейство $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ открытых подмножеств \mathfrak{M} , таких, что⁷: **1)** $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, **2)** каждое из множеств U_α гомеоморфно \mathbb{R}^n , то есть

⁶Гомеоморфизмом называется всякое непрерывное биективное отображение одного топологического пространства в другое, обратное к которому также непрерывно. Под непрерывностью здесь понимается свойство, согласно которому прообраз любого открытого множества есть открытое множество [84].

⁷Согласно свойству 1), $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ есть открытое покрытие \mathfrak{M} , согласно свойству (ii) \mathfrak{M} обладает счетной базой. По теореме Линделефа [84], из $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ можно извлечь не более, чем счетную подсистему, также являющуюся покрытием \mathfrak{M} .

для любого $\alpha \in I$ существует гомеоморфизм $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow U_\alpha$.

Поясним подробнее используемую терминологию. Пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, где U_α и φ_α определены в (iii), называется картой в \mathfrak{M} ; U_α — район действия карты; совокупность карт $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, где $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — открытое покрытие \mathfrak{M} , составляет атлас многообразия \mathfrak{M} . Пусть $p \in \mathfrak{M}$ — некоторая точка многообразия. Карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, для которой $p \in U_\alpha$, будем называть картой, содержащей точку p .

Атлас порождает систему локальных координат на многообразии, а именно: всякая точка p , принадлежащая \mathfrak{M} , содержится хотя бы в одном из множеств U_α , поэтому ей однозначно соответствует упорядоченная n -ка $(\xi^1, \dots, \xi^n) = \varphi_\alpha^{-1}(p)$. Этот упорядоченный набор — локальные координаты точки p . Если пересечение $U_\alpha \cap U_\beta$, где U_α, U_β взяты из одного атласа, не пусто, то любая точка p из этого пересечения имеет локальные координаты $(\xi^1, \dots, \xi^n) = \varphi_\alpha^{-1}(p)$ и $(\eta^1, \dots, \eta^n) = \varphi_\beta^{-1}(p)$, связанные друг с другом формулами пересчета: отображение

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha|_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta), \quad (1.3.1)$$

как композиция гомеоморфизмов, есть гомеоморфизм, который связывает локальные координаты (ξ^1, \dots, ξ^n) и (η^1, \dots, η^n) .

В настоящей работе символом \mathfrak{M}^n обозначается абстрактное многообразие размерности n , то есть топологическое пространство, удовлетворяющее условиям (i)–(iii).

15°. Абстрактное многообразие формализует свойство непрерывности, присущее телу и физическому пространству, однако, при этом ничего не говорится о гладкости отображений, определенных на них. Для этого на \mathfrak{M}^n вводится дифференциальная структура.

Замечание 4. Возможны два эквивалентных способа определения структуры дифференцируемых функций на многообразии. Мы используем методологию, изложенную в [82–84]. Иной способ приведен в [80]. ♠

Карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) в \mathfrak{M}^n являются C^r -согласованными, если либо 1) $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, либо 2) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ и гомеоморфизм пересчета (1.3.1) есть C^r -диффеоморфизм⁸ на $\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Атлас, в котором любые две карты C^r -согласованы, называется C^r -атласом.

⁸Биективное отображение $f : X \rightarrow Y$ открытого подмножества \mathbb{R}^n в открытое подмножество \mathbb{R}^n есть C^r -диффеоморфизм, если как оно, так и обратное, имеют класс гладкости C^r [84].

Если объединение двух C^r -атласов многообразия \mathfrak{M}^n дает C^r -атлас, то есть любая карта из одного атласа C^r -согласована с любой другой картой из второго атласа, то такие атласы равноправны. Гладкость отображения, заданного на многообразии, должна зависеть не от конкретного C^r -атласа, а от совокупности всех возможных C^r -атласов, равноправных между собой: заменив атлас данной совокупности на другой, мы должны получить отображение такого же класса гладкости. Этим мотивируется следующее определение. Говорят, что два C^r -атласа $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, $B = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J}$ эквивалентны ($A \sim B$), если их объединение $A \cup B$ дает C^r -атлас. Введенное отношение есть отношение эквивалентности в его теоретико-множественном определении, и множество всех C^r -атласов распадается на классы эквивалентности $D = [A]$. Эти классы эквивалентности называют C^r -структурами на многообразии \mathfrak{M}^n .

Замечание 5. Часто используют обобщение понятия карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, когда гомеоморфизм φ_α действует из некоторого открытого подмножества \mathbb{R}^n [80]. В таком случае, используя аналогичные рассуждения, можно ввести понятия C^r -согласования и C^r -структуры. Однако, C^r -структура, атласы которой состоят из «обобщенных» карт, необходимо содержит атлас, состоящий из определенных в $\mathbf{14}^\circ$ карт. Действительно, рассмотрим в такой, новым образом определенной, C^r -структуре произвольный атлас из «обобщенных» карт. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — произвольная карта из такого атласа, где $\varphi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$ — гомеоморфизм, а множество $O_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — открыто. Поскольку любое открытое подмножество \mathbb{R}^n можно представить в виде объединения некоторых открытых шаров D_β^n , то $O_\alpha = \bigcup_{\beta} D_\beta^n$. Но, известно [84], что любой открытый шар в \mathbb{R}^n является C^∞ -диффеоморфным самому \mathbb{R}^n . Пусть $f_\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow D_\beta^n$ — такой диффеоморфизм. Поскольку указанное разложение O_α на открытые шары индуцирует разложение $U_\alpha = \bigcup_{\beta} V_{\alpha,\beta}$, в котором множества $V_{\alpha,\beta} = \varphi_\alpha(D_\beta^n)$ являются открытыми в \mathfrak{M}^n , то можно ввести карты $(V_{\alpha,\beta}, \psi_{\alpha,\beta})$, в которых $\psi_{\alpha,\beta} = \varphi_\alpha|_{D_\beta^n} \circ f_\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow V_{\alpha,\beta}$ — гомеоморфизмы. Проведя такие построения во всех картах исходного атласа, заметим, что попарная C^r -согласованность построенных карт зависит только от C^r -согласованности соответствующих исходных карт, ибо гомеоморфизмы $\psi_{\alpha,\beta}$ есть композиции C^∞ -диффеоморфизмов и соответствующих сужений φ_α . Поэтому, полученный атлас эквивалентен исходному, состоящему из «обобщенных» карт. Определенная ранее C^r -структура, таким образом, содержится в некоторой C^r -структуре, атласы которой состоят из «обобщенных» карт.

В настоящей работе отдано предпочтение определению карты из $\mathbf{14}^\circ$ в котором картирующие отображения действуют из всего \mathbb{R}^n . Это объясняется следующим. Во-первых, такой подход вносит определенную стандартизацию, ибо все гомеоморфизмы карт действуют из \mathbb{R}^n и нужно лишь указать районы их действия и сами гомеоморфизмы. Во-вторых, вопрос о гладкости отображения в окрестности точки

на многообразии сводится, как будет определено далее, к вопросу о гладкости координатного представления этого отображения в окрестности образа этой точки в \mathbb{R}^n . При этом, совершенно неважно, как определено такое отображение: на открытом подмножестве, или всем \mathbb{R}^n . В теоретическом плане «обобщенная» карта ничего нового не дает. Ее использование оправдано лишь сокращением выкладок, что будет использовано далее в некоторых примерах. ♠

Замечание 6. C^0 -структуру называют топологической, а C^r -структуру при $r \geq 1$ называют дифференциальной. Отметим, что для задания C^r -структуры достаточно указать один C^r -атлас. Если объединить все атласы данной C^r -структуры, то получается C^r -атлас, называемый максимальным. Задание C^r -структуры эквивалентно заданию соответствующего максимального атласа. ♠

Многообразие \mathfrak{M}^n с заданной на нем C^r -структурой, то есть, пару (\mathfrak{M}^n, D) , называют C^r -многообразием. Если $r \geq 1$, то многообразие называют гладким, а при $r = 0$ — топологическим.

16°. Рассмотрим пример. Пусть \mathfrak{B} — двумерное тело, которое может быть представлено единичной сферой в трехмерном евклидовом пространстве: его образ описывается уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, где x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты. На этом теле может быть определен атлас, состоящий из двух карт $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$, картирующие отображения которых определяются, как стереографические проекции. Так, стереографические проекции частей сферы на плоскость, точки которой имеют нулевую координату x_3 , при отождествлении этой плоскости с \mathbb{R}^2 , представляются следующими отображениями:

$$h_1 : \mathfrak{B} \setminus (0, 0, -1) \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right),$$

$$h_2 : \mathfrak{B} \setminus (0, 0, 1) \ni (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right),$$

первое из которых устанавливает биекцию между точками сферы и плоскости, которые «прокалывает» луч с началом в точке «южного полюса» с координатами $(0, 0, -1)$, а второе устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками сферы и плоскости, которые «прокалывает» луч с началом в точке «северного полюса» с координатами $(0, 0, 1)$.

На рис. 1.6 и далее штриховая линия со значком вложения обозначает отношение между множествами и подмножествами, а стрелка обозначает направление действия отображения.

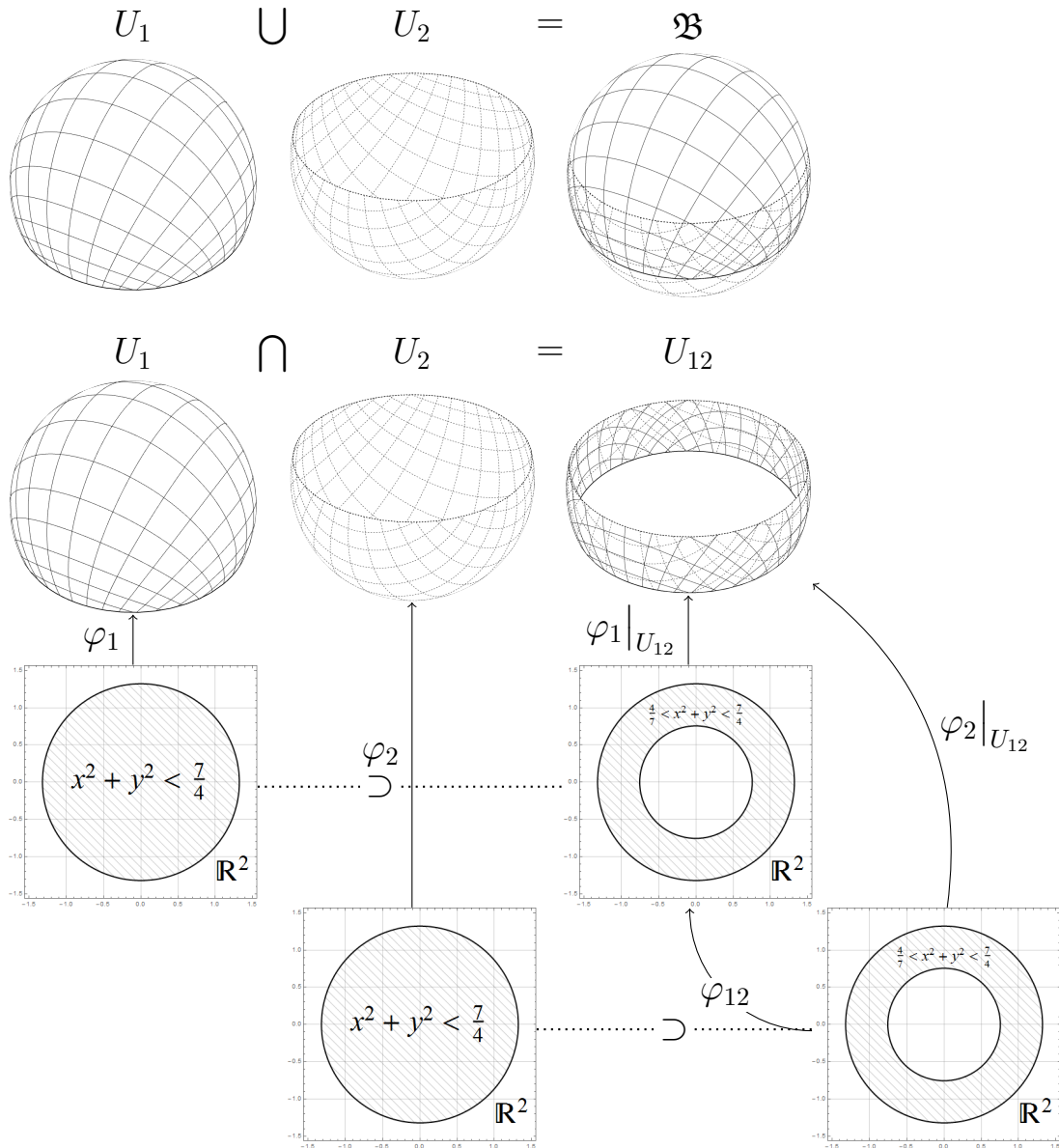


Рис. 1.6. Картирование сферы и функции перехода между картами

В качестве районов действия карт, U_1 и U_2 , используются прообразы $h_1^{-1}(D)$, $h_2^{-1}(D)$ открытого диска $D = \{(\xi^1, \xi^2) \mid (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 < \frac{7}{4}\}$. Сужения отображений h_1^{-1} и h_2^{-1} на D примем за $\varphi_1 : D \rightarrow U_1$ и $\varphi_2 : D \rightarrow U_2$:

$$\varphi_1(\xi^1, \xi^2) = \left(\frac{2\xi^1}{1 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}, \frac{2\xi^2}{1 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}, \frac{\xi^1 + \xi^2 - 1}{1 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} \right);$$

$$\varphi_2(\eta^1, \eta^2) = \left(\frac{2\eta^1}{1 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2}, \frac{2\eta^2}{1 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2}, -\frac{\eta^1 + \eta^2 - 1}{1 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2} \right).$$

Области $U_{12} = U_1 \cap U_2$ в \mathbb{R}^2 соответствует множество пар (ξ^1, ξ^2) , таких, что $\frac{4}{7} < (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 < \frac{7}{4}$. Гомеоморфизм перехода, при этом, имеет вид

$$\varphi_{12} : U_{12} \rightarrow U_{12}, \quad (\eta^1, \eta^2) \mapsto (\xi^1, \xi^2) = \left(\frac{(\eta^1)^2}{(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2}, \frac{(\eta^2)^2}{(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2} \right),$$

и является C^∞ -диффеоморфизмом. Таким образом, сфера \mathfrak{B} является 2-мерным многообразием со C^∞ -структурой, индуцированной построенным атласом (рис. 1.6).

17°. Плотность упругой энергии, запасаемая телом при деформации, или плотность действия (лагранжиан), являются примерами вещественнозначных функций, заданных на многообразии. C^r -структура позволяет определить на многообразии классы гладкости таких отображений. Поясним это подробнее.

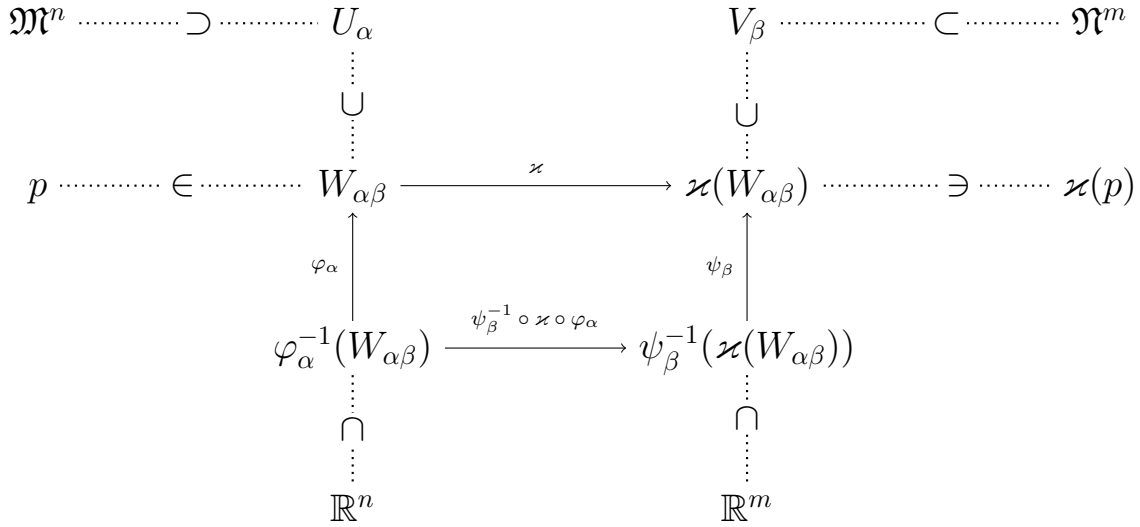
Пусть на \mathfrak{M}^n задана C^r -структура. Функция $f : \mathfrak{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется функцией класса C^r в окрестности точки $p \in \mathfrak{M}^n$, если найдется карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ из атласа данной C^r -структуры, содержащая точку p , такая, что отображение $f \circ \varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ есть C^r -отображение на \mathbb{R}^n . В силу C^r -согласованности, это определение не зависит от атласа из данной структуры. Приведенные соображения иллюстрируются диаграммой

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \varphi_\alpha \uparrow & \nearrow f \circ \varphi_\alpha & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

18°. Основную роль в дальнейших построениях играют отображения между многообразиями. К ним, например, относятся конфигурации — отображения тела в физическое пространство. Для таких отображений свойство гладкости вводится следующим образом. Рассмотрим непрерывное отображение $\varkappa : \mathfrak{M}^n \rightarrow \mathfrak{N}^m$ двух C^r -многообразий в произвольной точке $p \in \mathfrak{M}^n$. Выберем карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ многообразия \mathfrak{M}^n , содержащую p , и карту (V_β, ψ_β) многообразия \mathfrak{N}^m , содержащую $\varkappa(p)$. Обозначим $W_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap \varkappa^{-1}(V_\beta)$ и рассмотрим отображение

$$\psi_\beta^{-1} \circ \varkappa \circ \varphi_\alpha|_{W_{\alpha\beta}} : \varphi_\alpha^{-1}(W_{\alpha\beta}) \rightarrow \psi_\beta^{-1}(\varkappa(W_{\alpha\beta})),$$

которое называется *координатным представлением отображения \varkappa в окрестности точки p* [84]. Это отображение: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, и оно не зависит от выбора координатных карт в данных C^r -структурах на \mathfrak{M}^n и \mathfrak{N}^m , ибо карты на этих многообразиях C^r -согласованы. Приведенные построения иллюстрирует диаграмма



Координатное представление позволяет определить гладкость отображения $\varkappa : \mathfrak{M}^n \rightarrow \mathfrak{N}^m$ в окрестности некоторой точки. Именно, непрерывное отображение $\varkappa : \mathfrak{M}^n \rightarrow \mathfrak{N}^m$ называется C^r — отображением в окрестности точки $p \in \mathfrak{M}^n$, если некоторое координатное представление отображения \varkappa в окрестности этой точки, является C^r — отображением.

В дальнейшем через $\mathcal{E}^r(\mathfrak{M}^n; \mathfrak{N}^m)$ обозначается множество всех C^r — отображений C^r — многообразия \mathfrak{M}^n в C^r — многообразии \mathfrak{N}^m . В частности, $\mathcal{E}^r(\mathfrak{M}^n; \mathbb{R})$ есть множество всех C^r — отображений из C^r — многообразия \mathfrak{M}^n в тривиальное C^r — многообразии \mathbb{R} . В рамках этой терминологии диффеоморфизмом из C^r — многообразия \mathfrak{M}^n в C^r — многообразии \mathfrak{N}^n будем называть любое отображение $\varkappa \in \mathcal{E}^r(\mathfrak{M}^n; \mathfrak{N}^n)$, такое что 1) существует \varkappa^{-1} и 2) $\varkappa^{-1} \in \mathcal{E}^r(\mathfrak{N}^n; \mathfrak{M}^n)$.

19°. Хотя C^0 — структура на любом пространстве \mathfrak{M}^n единственна, при $r \geq 1$ пространство \mathfrak{M}^n может допускать несколько различных C^r — структур. Если D_1, D_2 — различные C^r — структуры на \mathfrak{M}^n , то $(\mathfrak{M}^n, D_1), (\mathfrak{M}^n, D_2)$ — два разных C^r — многообразия.

В этой связи сделаем замечание о существовании C^r — структур. Справедливо [81, стр. 71], что если на пространстве \mathfrak{M}^n существует C^r — структура ($r \geq 1$), то на нем существует и C^∞ — структура, диффеоморфная

данной. Исключением является случай $r = 0$, в котором играет роль размерность многообразия. На любом C^0 -многообразии размерности $n < 4$ можно ввести C^1 -структуру, а, следовательно, и C^∞ -структуру. Но для любого $n \geq 4$ существуют многообразия, не допускающие введения C^1 -структуры [84]. В настоящей работе такие случаи не рассматриваются, ибо а-priori и тело, и физическое пространство снабжены C^0 -структурами, и размерности этих двух многообразий не превосходят 3.

20°. В дальнейшем используются следующие обозначения и соглашения.

Отображение $\pi_n^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ есть отображение, действующее по правилу: $\pi_n^i : (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$.

Если (U, φ) — некоторая карта на \mathfrak{M}^n , то она, как говорилось выше, задает на U систему координат. Эту систему координат обозначаем, как $(U; x^1, \dots, x^n)$, или, если ясно из контекста, как (x^i) , где x^1, \dots, x^n есть общее обозначение координат точек на U ; $\pi_n^i \circ \varphi^{-1} : p \mapsto (\pi_n^i \circ \varphi^{-1})(p) = x^i$. В зависимости от удобства, используется любая из записей (U, φ) , $(U; x^1, \dots, x^n)$, где последняя подразумевает, что имеется соответствующая карта из данной C^r — структуры.

В некоторых случаях, если никакой путаницы возникнуть не может, координатное представление

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^m) = [\psi^{-1} \circ f \circ \varphi](x^1, \dots, x^n)$$

отображения $f : \mathfrak{M}^n \rightarrow \mathfrak{N}^m$ в соответствующих координатных системах $(U; x^1, \dots, x^n)$ и $(V; y^1, \dots, y^m)$ гладких многообразий \mathfrak{M}^n и \mathfrak{N}^m обозначается как $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, m$.

Заметим, что одно и то же топологическое многообразие с двумя различными C^r -структурами представляет два различных гладких многообразия. В математической литературе, например в [82], гладкое многообразие, как правило, указывается, как пара: исходное многообразие и выбранная дифференциальная структура. Мы считаем, что тело и физическое пространство наделены фиксированными дифференциальными структурами, поэтому явно в рассуждениях их не выделяем, ибо вопрос о смене одной структуры на другую выходит за рамки настоящей работы.

Вопрос о порядке структуры (то есть, о величине r), в настоящей работе не обсуждается. Мы предполагаем, что используемые дифференциальные структуры имеют такой порядок, чтобы дальнейшие рассуждения, использующие гладкость многообразия, имели смысл. Во всяком

случае, всегда $r \geq 1$. Иногда применяемая фраза « \mathfrak{M}^n — гладкое многообразие» означает, что \mathfrak{M}^n есть C^r -многообразие с $r \geq 1$. При этом, мы имеем в виду, что на таком многообразии существует и C^∞ -структура, но ее не используем, ибо это подразумевает введение дополнительной физической гипотезы. Кроме того, это позволяет показать соотношения между порядками структуры и зависящих от них величин, таких, как риманова метрика.

В настоящей работе, за исключением отдельных случаев, явно не указываются размерности тела и физического пространства. Предполагается, что⁹ $\dim \mathfrak{B} = n \leq m = \dim \mathfrak{P} \leq 3$.

Следуя обозначениям, использованным в работе [85], для конечномерных векторных пространств \mathcal{V} , \mathcal{W} , множество всех линейных отображений из \mathcal{V} в \mathcal{W} будем обозначать через $\text{Lin}(\mathcal{V}; \mathcal{W})$, а его подмножество, состоящее из всех обратимых отображений (может быть пустым) — через $\text{Invlin}(\mathcal{V}; \mathcal{W})$.

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^m , дифференцируемое во всех точках области определения. Через $\mathcal{J}_{p;f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ обозначается производное отображение [86] f в точке $p \in D$. То есть, $\mathcal{J}_{p;f} \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, и

$$f(p+h) = f(p) + \mathcal{J}_{p;f}[h] + o(\|h\|), \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

для всех $h \in \mathbb{R}^n$, таких, что $p+h \in D$. В паре естественных базисов \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m матрица производного отображения есть матрица Якоби $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_p \right)$, где $y^i = (\pi_m^i \circ f)(x^1, \dots, x^n)$.

⁹Классическое определение размерности как мощности линейно независимой системы векторов, которая становится линейно зависимой при добавлении к ней любого вектора, предполагает выполнение бесконечного числа проверок. Такая процедура не может быть выполнена конструктивно. На языке механики эти соображения можно выразит следующим образом: мы располагаем возможностью воспроизводить в наблюдаемом пространстве три независимых смещения. Это позволяет ввести математическую абстракцию в форме векторного пространства, порождаемого тремя линейно независимыми элементами. Но мы не можем утверждать, что объемлющее пространство трехмерно: у нас нет возможности провести бесчисленное множество экспериментов, доказывающих это. Подобного рода рассуждения имеют давнюю историю, в частности, они привели к теологическому определению: «Lord is the dwelling-place of His world but His world is not His dwelling-place» (Midrash Rabbah, Genesis II, LXVIII, 9).

Используется соглашение о суммировании по повторяющимся латинским индексам.

В работе используются отображения вида $f : X \rightarrow Y$, являющиеся биекциями на свой образ, т.е. на $f(X)$. В этой связи, с каждым таким отображением ассоциируется биекция $\widehat{f} : X \rightarrow f(X)$, получаемая сужением области прибытия f до его множества значений. Таким образом, \widehat{f} определяется правилом: $\widehat{f} : x \mapsto f(x)$. Отметим, что отображения f и \widehat{f} различны¹⁰.

3.2. Физическое пространство

21°. В рамках развиваемого в настоящей работе подхода, физическое пространство \mathfrak{F} должно быть описано структурой, подобной формализации тела, т.е. гладким многообразием, размерность которого не меньше размерности тела (в противном случае, нельзя было бы говорить о вложении тела в физическое пространство). Вместе с тем, в отличие от тела, при формализации физического пространства необходимо учитывать данные извне ограничения: например, оно должно быть евклидовым (классическая механика Галилея – Ньютона) или римановым, с заданной кривизной (общая теория относительности). Напомним, что риманова структура физического пространства может быть продиктована не только соображениями общей теории относительности, но и более «земными» причинами, например, описанием деформирования мембраны на фиксированной поверхности (см. **8°**).

22°. В классической механике физическое пространство рассматривается в рамках концепции Ньютона, как абсолютное пространство–время, являющееся четырехмерным многообразием \mathfrak{S} . Точки такого многообразия представляют события. Между двумя событиями устанавливается отношение: одно из них произошло не позже другого. С абстрактной точки зрения это означает, что на \mathfrak{S} задано абсолютное время, которое устанавливает на нем отношение порядка. Это можно сформулировать математически, как существование сюръективного отображения $t : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{T}$, где \mathbb{T} — линейно упорядоченное (хронометрическое) многообразие, диф-

¹⁰Отображение $f : X \rightarrow Y$ представляет собой тройку $f = (X, F, Y)$, где X — область определения отображения, Y — область прибытия, а F — функциональное отношение, область определения которого — X [87].

феоморфное \mathbb{R} .

23°. По-видимому, впервые абстрактное описание свойств классического пространства–времени дал Э. Картан [88]. Классическое пространство–время, обладающее аффинной структурой, использовалось в работах представителей школы рациональной механики, в частности, в работах Нолла, Вана и Трусделла. Другой подход, в котором физическое пространство «расщепляется» на пространство (гладкое многообразие), и время (одномерное многообразие, диффеоморфное \mathbb{R}), используется в работе [20, с. 156]. Он основан на формализации понятия наблюдателя как отображения, осуществляющего такое расщепление, и формулируется следующим образом.

Пусть \mathfrak{S} — гладкое четырехмерное многообразие, \mathfrak{P} — гладкое трехмерное многообразие, \mathbb{T} — гладкое линейно упорядоченное одномерное многообразие, диффеоморфное \mathbb{R} . Под нарезкой (slicing) \mathfrak{S} на \mathfrak{P} понимается диффеоморфизм

$$i : \mathbb{T} \times \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{S},$$

а обратный к нему диффеоморфизм $f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathfrak{P}$ называется слоением (framing). В рамках классического пространства–времени также постулируется, что существует гладкое сюръективное отображение (мировое время) $\tau : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{T}$, матрица Якоби координатного представления которого во всех точках \mathfrak{S} отлична от нуля. При этом,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{T} : \quad (\mathfrak{P}_t = \tau^{-1}(t) \text{ диффеоморфно } \mathfrak{P}), \\ \forall t \in \mathbb{T} \quad \forall X \in \mathfrak{P} : \quad (\tau(i(t, X)) = t). \end{aligned}$$

Конструкция $(\mathfrak{S}, \mathfrak{P}, \tau, i)$ является частным случаем тривиального расслоения [84] с базой \mathbb{T} , типовым слоем \mathfrak{P} и проекцией τ : в отличие от соответствующего координатного гомеоморфизма в тривиальных расслоениях, здесь i — диффеоморфизм. Кроме того, в рамках классического пространства–времени постулируется взаимосвязь между связностью на \mathfrak{S} и отображением τ . Эта связь рассмотрена в четвертой главе.

Примером нарезки является тождественное отображение из $\mathbb{T} \times \mathfrak{P}$ в $\mathfrak{S} = \mathbb{T} \times \mathfrak{P}$. Рисунки 1.3, 1.4 иллюстрируют случай, когда $\mathfrak{S} = \mathbb{T} \times \mathfrak{P}$ (в этом случае \mathfrak{P} — двумерное многообразие, а \mathfrak{S} — трехмерное). Слой \mathfrak{P} — евклидово пространство. Однако, возможна и более общая ситуация, когда слой является римановым пространством. Эта ситуация

рассматривалась в \mathcal{S}° , в примере, соответствующем рис. 1.2: физическое пространство представляло собой поверхность двумерной сферы.

24°. Первый закон Ньютона (существование инерциальной системы отсчета) утверждает существование класса глобальных координатных систем $\Gamma : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^4$, и класса кривых на многообразии \mathcal{S} , называемых мировыми линиями свободных материальных точек, определяемых координатами Γ посредством линейных однородных уравнений. Это устанавливает аффинную структуру на \mathcal{S} и \mathbb{T} , т.е. представление пространства событий как декартово произведение $\mathcal{S} = \mathbb{T} \times \mathcal{E}$, где \mathcal{E} является точечным аффинным пространством: непустым множеством, элементы которого называются точками. Для него заданы [86]:

а) векторное пространство \mathcal{V} , называемое трансляционным пространством;

б) отображение, сопоставляющее любой упорядоченной паре (A, B) точек $A, B \in \mathcal{E}$ некоторый вектор из \mathcal{V} , обозначаемый символом \overrightarrow{AB} или $B - A$, и называемый вектором с началом в A и концом в B . При этом, требуется выполнение следующих двух аксиом, называемых аксиомами Вейля [89]:

(i) для любых точек $A, B, C \in \mathcal{E}$ справедливо соотношение Шаля: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0} \in \mathcal{V}$;

(ii) для любой точки $A \in \mathcal{E}$ и любого вектора $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ существует, и притом единственная, точка $B \in \mathcal{E}$, для которой $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$.

В силу аксиомы (ii), для фиксированной точки $A \in \mathcal{E}$ отображение $\varphi_A : \mathcal{E} \ni X \mapsto \overrightarrow{AX} \in \mathcal{V}$ является биекцией \mathcal{E} на \mathcal{V} , и поэтому можно определить внешнюю операцию

$$+ : \mathcal{E} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{E}, \quad + : (A, \mathbf{v}) \mapsto A + \mathbf{v} := \varphi_A^{-1}(\mathbf{v}),$$

сопоставляющую упорядоченной паре (A, \mathbf{v}) ту единственную точку $B \in \mathcal{E}$, для которой $\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}$.

Размерностью аффинного пространства \mathcal{E} называется размерность трансляционного пространства \mathcal{V} : $\dim \mathcal{E} := \dim \mathcal{V}$. В соответствии с принятыми в настоящей работе обозначениями, запись $(\mathcal{E}^m, \mathcal{V}^m)$ обозначает аффинное пространство размерности m с ассоциированным векторным пространством \mathcal{V}^m .

Замечание 7. Согласно классификации Ф. Клейна [90], аффинность точечного пространства определяется свойством геометрических объектов сохранять свой

класс (быть инвариантными) при аффинных, т.е. линейных неоднородных преобразованиях $(x^s)_{s=1}^m \mapsto (\tilde{x}^s)_{s=1}^m$, которые в координатной форме имеют вид $\tilde{x}^k = A_s^k x^s + c^k$, $\det A \neq 0$, где \tilde{x}^s , x^s — новые и старые координаты соответственно, $A = (A_s^k)$ — невырожденная матрица, осуществляющая линейное преобразование, $c = (c^k)$ — арифметический вектор, определяющий сдвиг начала координат. При этом под инвариантными геометрическими объектами понимаются точки, прямые, плоскости (и, в случае высокой размерности, точечные множества, определяемые линейными уравнениями). Термин «аффинность» означает, что при допустимых преобразованиях бесконечно удаленные точки не изменяются, т.е. «концы пространства остаются на своих местах» [90]. Таким образом, аффинное пространство — это абсолютный мир классических прямых и плоскостей, таких, какими их представляли еще в античности. ♠

Аффинная структура \mathcal{E}^m позволяет ввести глобальный репер с базисными трансляционными векторами \mathbf{i}_k , $k = 1, \dots, m$, ассоциированных с некоторой «начальной» точкой O ; все иные реперы получаются из глобального сдвигами вдоль векторов из \mathcal{V}^m .

Замечание 8. С физической точки зрения выбор единого репера означает существование в физическом пространстве жестких масштабов. ♠

Определим отображение $\mathcal{X}_m : \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{V}^m$, называемое полем векторов места, равенством

$$\forall P \in \mathcal{E}^m : \quad \mathcal{V}^m \ni \mathbf{x} = \mathcal{X}_m(P) = P - O. \quad (1.3.2)$$

Это биективное отображение («векторизация») реализует изоморфизм¹¹ $\mathcal{E}^m \cong \mathcal{V}^m$, где \mathcal{V}^m рассматривается как аффинное пространство. Как известно, $\mathcal{V}^m \cong \mathbb{R}^m$, то есть существует отображение $\mathcal{A}_m : \mathcal{V}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, которое является изоморфизмом¹² (декартова «арифметизация»). Таким образом, $\mathcal{E}^m \cong \mathbb{R}^m$. Следующая диаграмма иллюстрирует соотношения между \mathcal{E}^m , \mathcal{V}^m , \mathbb{R}^m :

¹¹Здесь и далее символ \cong обозначает изоморфность аффинных или векторных пространств.

¹²Если через $(\mathbf{1}_k)_{k=1}^m$ обозначить естественный базис \mathbb{R}^m , то $\mathcal{A}_m = \mathbf{1}_k \otimes \mathbf{i}^k$, где $(\mathbf{i}^k)_{k=1}^m$ — дуальный репер к $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^m$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E}^m & \xrightarrow{\mathcal{X}_m} & \mathcal{V}^m \\
 \searrow \mathcal{D}_m = \mathcal{A}_m \circ \mathcal{X}_m & & \downarrow \mathcal{A}_m \\
 & & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

По этой причине \mathcal{E}^m и \mathbb{R}^m часто отождествляют. Мы будем избегать таких отождествлений, всегда понимая под \mathbb{R}^m множество всех упорядоченных наборов из n действительных чисел, а под \mathcal{E}^m — m -мерное евклидово аффинное пространство с фиксированной декартовой системой координат. Формализованное таким образом физическое пространство может быть представлено тривиальным (его атлас состоит из одной карты) m -мерным многообразием класса C^∞ с картой $(\mathcal{E}^m, \mathcal{D}_m^{-1})$, где $\mathcal{D}_m = \mathcal{A}_m \circ \mathcal{X}_m$; топология в \mathcal{E}^m индуцируется из \mathbb{R}^m .

Поскольку в ходе изложения аффинные пространства разных размерностей одновременно не рассматриваются, то индекс m у $\mathcal{X}_m, \mathcal{A}_m, \mathcal{D}_m$ далее не указываем.

25°. С более общей точки зрения физическое пространство \mathfrak{P} формализуется как риманово многообразие с отличной от нуля кривизной. Мотивация такого обобщения приведена в **8°**. В этом случае места материальных точек определяются как точки гладкого многообразия в терминах карттрирующих отображений. Поскольку аксиомы Вейля уже не выполняются, то понятие трансляционного пространства теряет смысл. Локально, тензорные поля представляются с помощью дополнительной надстройки над \mathfrak{P} — векторного расслоения (см. [1], Глава 3) — и определяются как сечения соответствующего расслоения. В рамках этих представлений аффинно-евклидово физическое пространство можно рассматривать как частный случай: все слои касательного расслоения отождествляются и представляются единым векторным пространством — трансляционным пространством \mathcal{V} . Определяется риманова метрика, как сечение $g : \mathfrak{P} \rightarrow T^*\mathfrak{P} \otimes T^*\mathfrak{P}$ расслоения тензоров второго ранга, значения которого есть дефинитные симметричные билинейные отображения на $T_X\mathfrak{P}$.

3.3. Вложение тела в физическое пространство

26°. В качестве гипотезы полагаем, что тело и физическое пространство наделены C^r -структурами с одинаковыми $r \geq 1$. Связь между телом, как континуальным множеством материальных точек, и множеством мест этих точек в физическом пространстве, устанавливается посредством отображения $\kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$, называемого конфигурацией. В настоящей работе это отображение наделяется дополнительными свойствами гладкости и регулярности. Поясним это подробнее.

Среди отображений класса $\mathcal{E}^r(\mathfrak{M}^n; \mathfrak{N}^m)$ выделим те, которые удовлетворяют требованию регулярности в каждой точке \mathfrak{M}^n : мы называем точку $p \in \mathfrak{M}^n$ регулярной точкой отображения $\kappa \in \mathcal{E}^r(\mathfrak{M}^n; \mathfrak{N}^m)$ [84], если координатное представление κ в окрестности точки p имеет матрицу Якоби в точке $\varphi_\alpha^{-1}(p)$ (где $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — карта, содержащая p) ранга $\min\{m, n\}$. В случае $n \leq m$, отображение $\kappa \in \mathcal{E}^r(\mathfrak{M}^n; \mathfrak{N}^m)$, регулярное в каждой точке $p \in \mathfrak{M}^n$, называется C^r -иммерсией (погружением) [82, 84].

27°. Образ конфигурации, как C^r -иммерсии \mathfrak{B} на \mathfrak{P} , может иметь точки *самопересечения*. Как было отмечено в **10°**, в некоторых случаях самопересечения допустимы (сетчатые оболочки), в других им соответствует физически неосуществимое самопроникновение [74]. Для выделения класса конфигураций, образы которых не имеют самопересечений, сузим класс всех C^r -иммерсий $\kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$, выделив те из них, которые являются гомеоморфизмами на свой образ, т.е. на подпространство $\kappa(\mathfrak{B})$ топологического пространства \mathfrak{P} . Такие отображения называют C^r -вложениями [82, 84].

Под регулярной конфигурацией κ тела мы будем понимать C^r -вложение \mathfrak{B} в \mathfrak{P} . Таким образом, κ есть гомеоморфизм тела \mathfrak{B} на свой образ $\kappa(\mathfrak{B})$. Регулярная конфигурация позволяет надделить образ тела структурой гладкого многообразия, согласованной со структурой физического пространства, о чем речь пойдет в следующем разделе.

Для иллюстрации приведем примеры двумерных тел, представляемых многообразиями: лентой Мебиуса и поверхностью Клейна¹³. Возможность вложения или погружения этих тел в физическое пространство зависит от его размерности и топологической структуры. Действительно, для ленты Мебиуса (рис. 1.7) можно определить конфигурацию,

¹³Эти многообразия неориентируемы, однако на этом этапе рассуждений ориентированность не требуется.

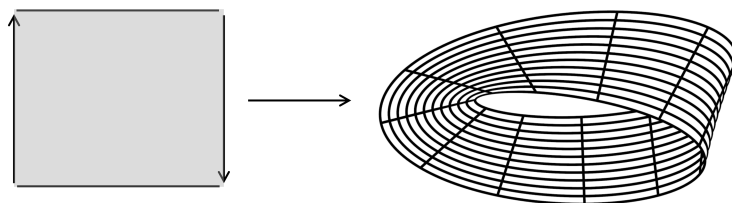


Рис. 1.7. Двумерное тело — лента Мебиуса

образ которой — точечное множество в трехмерном евклидовом пространстве \mathcal{E}^3 :

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = \left(3 + r \cos \frac{\varphi}{2}\right) \cos \varphi \mathbf{i} + \left(3 + r \cos \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi \mathbf{j} + r \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{k}, \quad (r, \varphi) \in]-1, 1[\times [0, 2\pi[.$$

Здесь \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — орты декартовой системы координат, а \mathbf{x} — вектор места точки поверхности. Это множество не имеет самопересечений и, следовательно, конфигурация регулярна (определяет вложение). В то же время, проекция этого множества на любую плоскость, например, $ХОУ$, не является вложением в двумерное евклидово пространство. Вместе с тем, имеется возможность вложения в двумерное пространство, топологически эквивалентное поверхности Клейна (рис. 1.8). Если физическое про-

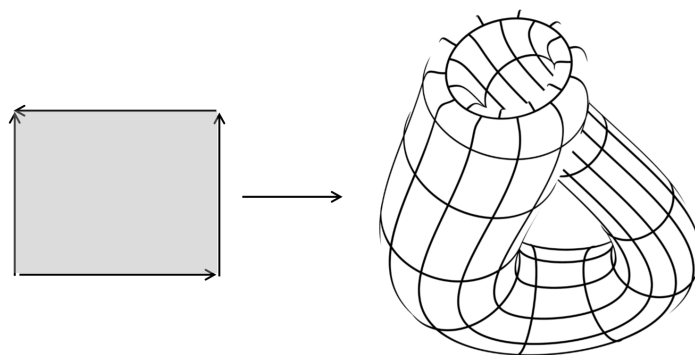


Рис. 1.8. Двумерное тело — поверхность Клейна

странство представлено многообразием с подобной топологией, то для тел, топологически эквивалентных ленте Мебиуса, существует континуальное семейство регулярных конфигураций.

Поверхность («бутылка») Клейна (рис. 1.8) может быть представлена

в \mathcal{E}^3 отображением

$$\mathbf{x}(t, \theta) = \boldsymbol{\alpha}(t) + r(t) (\cos \theta G(\boldsymbol{\tau}(t)) + \sin \theta \mathbf{k}), \quad (t, \theta) \in]0, 2\pi[\times [0, 2\pi[,$$

где $\boldsymbol{\alpha}(t) = a(1 - \cos t)\mathbf{i} + b \sin t(1 - \cos t)\mathbf{j}$, $r(t) = c - d(t - \pi)\sqrt{t(2\pi - t)}$, $G(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, $\boldsymbol{\tau}(t) = \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|^{-1}\boldsymbol{\alpha}'(t)$. Это отображение является гладким и, следовательно, оно является погружением. Однако, его образ в \mathcal{E}^3 имеет самопересечения. Наименьшим по размерности пространством, в которое можно вложить поверхность Клейна, является $\mathcal{E}^4 \cong \mathbb{R}^4$. Это соответствует результатам теории многообразий, в которой доказываются теоремы о вложениях. Одна из них, «слабая теорема Уитни», утверждает, что для любого компактного n -мерного C^r -многообразия \mathcal{M}^n , где $r \geq 2$, существует C^r -вложение \mathcal{M}^n в \mathbb{R}^{2n+1} . Она доказывается, например, в [81, 82]. По поводу усиления теоремы см. замечание в [81, стр. 40]. В частности, «сильная теорема Уитни» говорит о том, что любое гладкое n -мерное ($n > 1$) многообразие можно погрузить в \mathbb{R}^{2n-1} и можно вложить в \mathbb{R}^{2n} . При этом, значения $2n - 1$ и $2n$ неулучшаемы.

Различные варианты параметризации поверхности Клейна представлены в работе [91]. Показанная на рис. 1.8 поверхность построена при значениях параметров $(a, b, c, d) = (20, 8, \frac{11}{2}, \frac{2}{5})$.

Замечание 9. Необходимость исследования нерегулярных конфигураций очевидна для тел, размерность которых меньше размерности физического пространства (см. 8°). Однако, нерегулярные конфигурации могут представлять интерес как объект континуальной механики и в случае, когда размерности тела и физического пространства совпадают. Примером этого является «кристалл Мебиуса», исследованный Ваном [52]. Кратко остановимся на этом примере.

Тело материально единообразно [52], если все его точки материально изоморфны друг другу. С физической точки зрения это означает, что все материальные точки выполнены из одного материала. Материально единообразное тело обладает гладким единообразием, если для каждой его точки существует открытая окрестность, в которой функция единообразности непрерывно зависит от материальных точек. Заметим, что гладкость – локальное свойство. Действительно, можно привести примеры локально единообразных тел, для которых указанную окрестность нельзя расширить до всего тела.

Рассмотрим тело, форма которого в натуральной конфигурации представляет собой длинный круговой цилиндр. Полагаем, что материал анизотропен и обладает ромбической симметрией. Это означает, что с каждой точкой тела ассоциированы три кристаллографических оси $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, такие, что механические свойства материала не меняются при вращении на угол π вокруг этих осей. Никаких иных материальных симметрий нет. Допустим, что в натуральной конфигурации все материальные

точки ориентированны таким образом, что соответствующие им кристаллографические оси параллельны и одна из них, например, e_1 , параллельна оси цилиндра. В натуральной конфигурации существует единственный гладкий материальный изоморфизм [52], представляемый трансляцией в евклидовом пространстве. Произведем следующие преобразования: вначале закрутим цилиндр так, что его нижнее основание повернется относительно верхнего на угол π , затем изогнем цилиндр в кольцо и «склеим» основания. Полученное тело тороидальной формы С.-С. Wang назвал «кристаллом Мебиуса» (Moebius crystal). Ясно, что любая односвязная часть полученного таким образом тела обладает гладким полем материальных изоморфизмов, но его нельзя распространить на все тело. ♠

3.4. Образ тела как подмногообразиие физического пространства

28°. Регулярная конфигурация κ позволяет индуцировать на множество $\kappa(\mathfrak{B})$ C^r -структуру тела \mathfrak{B} и, тем самым, установить на $\kappa(\mathfrak{B})$ структуру гладкого многообразия. Именно, пусть на теле \mathfrak{B} выбран некоторый C^r -атлас $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. Так как $\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, то $\kappa(\mathfrak{B}) = \bigcup_{\alpha \in I} \kappa(U_\alpha)$. Композиции $\kappa \circ \varphi_\alpha$ являются гомеоморфизмами $\mathbb{R}^{\dim \mathfrak{B}}$ на $\kappa(U_\alpha)$. Непосредственно проверяется, что $A_\kappa = \{(\kappa(U_\alpha), \kappa \circ \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ есть C^r -атлас на $\kappa(\mathfrak{B})$ и он порождает соответствующую C^r -структуру. Как подпространство \mathfrak{P} , пространство $\kappa(\mathfrak{B})$ является хаусдорфовым, со счетной базой. Следовательно, $\kappa(\mathfrak{B})$ есть гладкое многообразиие размерности $\dim \mathfrak{B}$ с определенной выше C^r -структурой. По терминологии, принятой в теории гладких многообразий, подпространство $\kappa(\mathfrak{B})$ пространства \mathfrak{P} с C^r -структурой, индуцированной вложением κ , называется подмногообразиием \mathfrak{P} [84].

Замечание 10. Классическим является случай $\mathfrak{P} = \mathcal{E}^3$. Пусть \mathfrak{B} — двумерное тело. В этом случае, регулярная конфигурация $\kappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}^3$ есть вложение двумерного тела в трехмерное евклидово пространство. Обозначим $\mathcal{S} = \kappa(\mathfrak{B})$. Если $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ есть C^r -атлас на теле, то $A_\kappa = \{(\kappa(U_\alpha), \kappa \circ \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, как отмечалось выше, есть C^r -атлас на \mathcal{S} . Таким образом, точки \mathcal{S} локально описываются координатами (ξ^1, ξ^2) — образами точек \mathcal{S} при отображении $\varphi_\alpha^{-1} \circ \kappa^{-1} : \kappa(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^2$. В классической теории поверхностей числа ξ^1, ξ^2 называют криволинейными координатами на поверхности.

Точка $P(\xi^1, \xi^2) = (\kappa \circ \varphi_\alpha)(\xi^1, \xi^2)$ является элементом \mathcal{E}^3 , поэтому можно говорить о значении поля векторов места \mathcal{X} на ней: $\mathcal{X}(P(\xi^1, \xi^2)) = (\kappa \circ \varphi_\alpha)(\xi^1, \xi^2) - O$. Та-

ким образом, в рамках одной карты имеем параметрическое описание поверхности: $(\xi^1, \xi^2) \mapsto (\mathcal{X} \circ \kappa \circ \varphi_\alpha)(\xi^1, \xi^2)$. Высказанные соображения иллюстрируются следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccc}
 U_\alpha & \xrightarrow{\kappa} & \kappa(U_\alpha) \\
 \varphi_\alpha \uparrow & & \downarrow \mathcal{X} \\
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathcal{X} \circ \kappa \circ \varphi_\alpha} & \mathcal{V}^3
 \end{array}$$



29°. С точки зрения наблюдателя, пребывающего в физическом пространстве, и определившего на нем некоторую систему локальных координат (атлас), образ тела $\kappa(\mathfrak{B})$ должен описываться локальными координатами, индуцированными введенной системой координат в \mathfrak{B} . При этом, удобно подобрать такую систему координат в \mathfrak{B} , соответствующую рассматриваемому телу, чтобы число независимых значений координат на образе тела соответствовало его размерности. Например, в трехмерном случае сфера является координатной поверхностью сферических координат, цилиндр — цилиндрических, и так далее. Им соответствуют два независимых параметра, а не три, как для всего пространства.

Рассмотрим C^r -вложение $\kappa : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{N}^m$ одного C^r -многообразия в другое; здесь $n \leq m$. В максимальном атласе заданной C^r -структуры на \mathcal{N}^m существует подмножество [84] $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, покрывающее $\kappa(\mathcal{M}^n)$ и удовлетворяющее условию: гомеоморфизмы $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow U_\alpha$, таковы, что $\varphi_\alpha(\mathbb{R}^n) = U_\alpha \cap \kappa(\mathcal{M}^n)$. Таким образом, открытые в $\kappa(\mathcal{M}^n)$ множества $U_\alpha \cap \kappa(\mathcal{M}^n)$ в совокупности с отображениями $\varphi_\alpha|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_\alpha \cap \kappa(\mathcal{M}^n)$ задают C^r -атлас, определяющий структуру¹⁴ n -мерного C^r -многообразия на $\kappa(\mathcal{M}^n)$. Приведенные рассуждения соответствуют диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 U_\alpha \cap \kappa(\mathcal{M}^n) & \dots\dots\dots \subset & \dots\dots\dots U_\alpha \\
 \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \kappa(\mathcal{M}^n)} \uparrow & & \uparrow \varphi_\alpha \\
 \mathbb{R}^n & \dots\dots\dots \subset & \dots\dots\dots \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

¹⁴Ее называют структурой, согласованной со структурой \mathcal{N}^m [84].

Утверждение, эквивалентное предыдущему, заключается в том, что на многообразии \mathfrak{N}^m существует система $\{(U; x^1, \dots, x^m)\}$ локальных координат, покрывающая $\varkappa(\mathfrak{M}^n)$ и такая, что функции $\pi_n^i \circ \varphi^{-1}|_{U \cap \varkappa(\mathfrak{M}^n)} : q \mapsto y^i = x^i, i = 1, \dots, n$ задают координаты (y^i) на $U \cap \varkappa(\mathfrak{M}^n)$. Здесь (U, φ) — соответствующая карта. Точка $q \in U$ тогда и только тогда принадлежит $U \cap \varkappa(\mathfrak{M}^n)$, когда $x^j = \pi_n^j \circ \varphi^{-1}(q) = 0, j = n+1, \dots, m$ [5]. Далее приведена диаграмма, являющаяся координатным аналогом предыдущей:

$$\begin{array}{ccc} U \cap \varkappa(\mathfrak{M}^n) & \dots\dots\dots \subset & \dots\dots\dots U \\ \downarrow (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) & & \downarrow (x^1, \dots, x^m) \\ \mathbb{R}^n & \dots\dots\dots \subset & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Соображения об особом атласе на \mathfrak{N}^m , в котором точки из $\varkappa(\mathfrak{M}^n)$ описываются лишь первыми n координатами, являются следствием теоремы о выпрямлении [84]. Суть этой теоремы, применительно к рассматриваемому случаю, заключается в следующем. Пусть $\varkappa : \mathfrak{M}^n \rightarrow \mathfrak{N}^m$ — C^r -вложение. Выберем произвольную точку \mathfrak{X} из \mathfrak{M}^n . Пусть (U, φ) — карта \mathfrak{M}^n , содержащая \mathfrak{X} , а (V, ψ) — карта \mathfrak{N}^m , содержащая $\varkappa(\mathfrak{X})$. Обозначим $W = U \cap \varkappa^{-1}(V)$. Точка $x = \varphi^{-1}(\mathfrak{X}) \in \varphi^{-1}(W)$ является регулярной для отображения $g = \psi^{-1} \circ \varkappa \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(W)}$. По теореме о выпрямлении, существуют открытые окрестности $O_x \subset \varphi^{-1}(W)$ точки x , $S_{g(x)}$ точки $g(x)$, открытое множество $W_1 \subset \mathbb{R}^m$ и C^r -диффеоморфизм $F : S_{g(x)} \rightarrow W_1$, такие, что

$$g(O_x) \subset S_{g(x)}, \quad F \circ g|_{O_x} : (\xi^1, \dots, \xi^n) \mapsto (\xi^1, \dots, \xi^n, 0, \dots, 0).$$

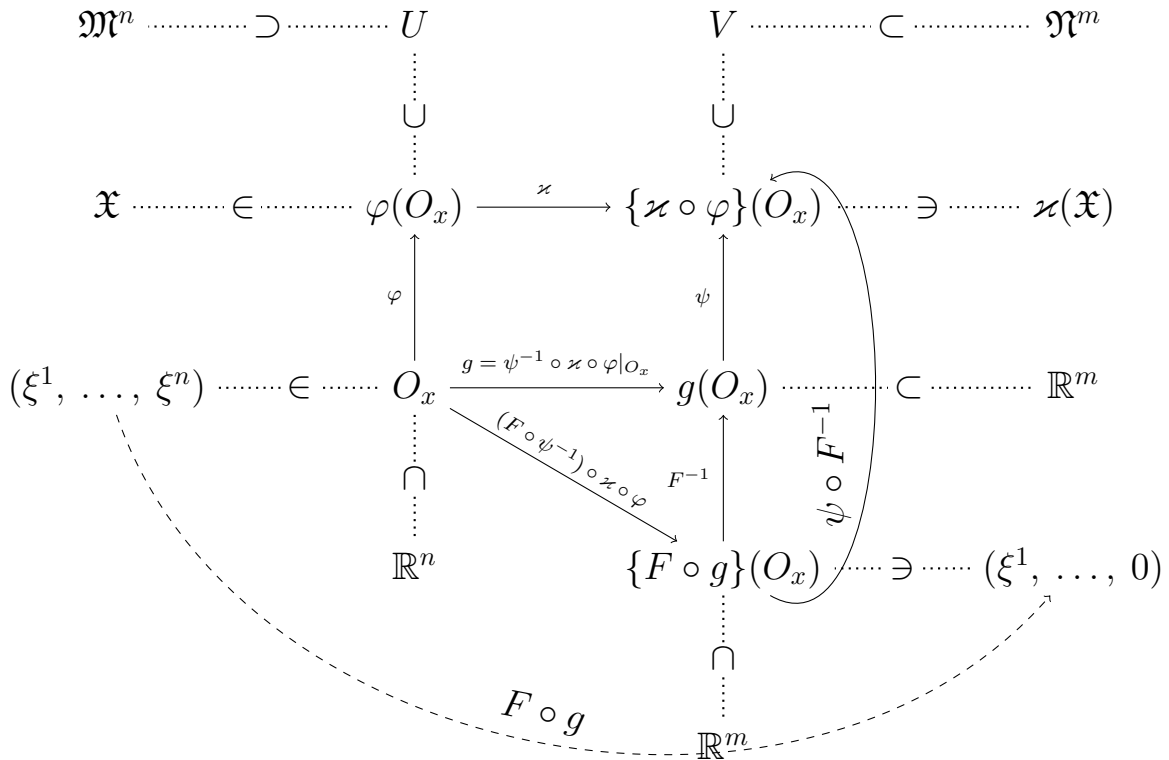
Множество $\psi(g(O_x)) = \{\varkappa \circ \varphi\}(O_x)$ открыто в $\varkappa(\mathfrak{M}^n)$, но в общем случае, не открыто в \mathfrak{N}^m . Существует открытое в \mathfrak{N}^m множество V' , такое, что $\psi(g(O_x)) = \varkappa(\mathfrak{M}^n) \cap V'$. Поскольку $\psi(g(O_x)) \subset V$, то можно считать, что $V' \subset V$. Множество $\psi(S_{g(x)})$ открыто в V и содержит $\psi(g(O_x))$. Следовательно, множество $\tilde{V} = V' \cap \psi(S_{g(x)})$ содержится в V , открыто в \mathfrak{N}^m и содержит $\psi(g(O_x))$. Кроме того, $\psi(g(O_x)) = \varkappa(\mathfrak{M}^n) \cap \tilde{V}$. Обозначим $\tilde{\psi} = \psi \circ F^{-1}|_{\{F \circ \psi^{-1}\}(\tilde{V})}$ и рассмотрим упорядоченную пару $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$. Эта пара является картой в \mathfrak{N}^m и обладает тем свойством, что

$$\forall \mathfrak{Y} \in \tilde{V} : (\mathfrak{Y} \in \varkappa(\mathfrak{M}^n) \Leftrightarrow \mathfrak{Y} \in \psi(g(O_x))).$$

Кроме того, все точки из $\psi(g(O_x))$ имеют локальные координаты $\eta^{n+1} = \dots = \eta^m = 0$. Действительно, если $\mathfrak{Y} \in \psi(g(O_x))$, то в силу биективности g существует $y = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in O_x$, такое, что $\mathfrak{Y} = (\varkappa \circ \varphi)(y)$. Координаты этой точки есть m -ка

$$(\eta^1, \dots, \eta^m) = \tilde{\psi}^{-1}(\mathfrak{Y}) = \{F \circ \psi^{-1}\}(\mathfrak{Y}) = \{F \circ g\}(y) = (\xi^1, \dots, \xi^n, 0, \dots, 0).$$

Высказанные соображения иллюстрирует следующая диаграмма:



Для каждой точки \mathfrak{M}^n , согласно описанной процедуре, построим карту вида $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$, в которой точки $\varkappa(\mathfrak{M}^n)$ имеют локальные координаты $(\xi^1, \dots, \xi^n, 0, \dots, 0)$. Тем самым, множество $\varkappa(\mathfrak{M}^n)$ будет покрыто некоторым семейством карт $\{(\tilde{V}_\alpha, \tilde{\psi}_\alpha)\}$, C^r -согласованных между собой и принадлежащих C^r -структуре многообразия \mathfrak{N}^m . Соответствующее семейство $\{(\tilde{V}_\alpha \cap \varkappa(\mathfrak{M}^n), \tilde{\psi}_\alpha|_{\{\tilde{\psi}^{-1} \circ \varkappa\}(\mathfrak{M}^n)})\}$ образует атлас на $\varkappa(\mathfrak{M}^n)$. Особенность добавленных карт заключается в следующем: для выделения точечного множества, соответствующего образу тела, достаточно положить равными нулю $m - n$ последних координат.

3.5. Конфигурации и движения

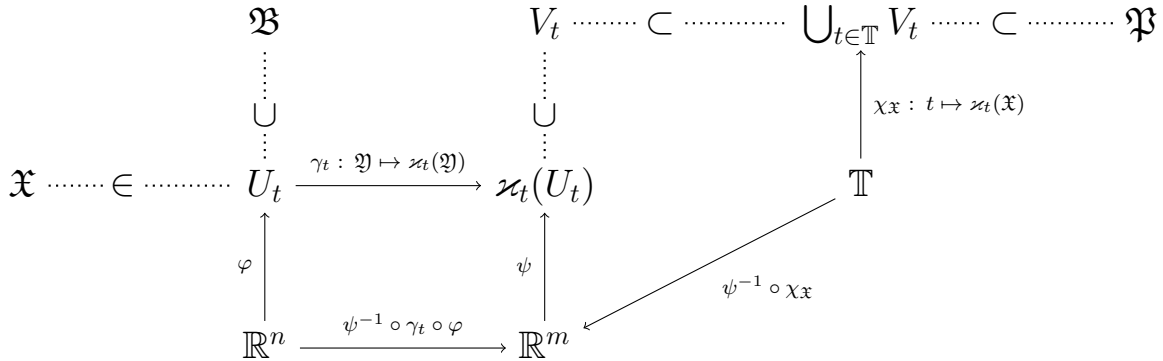
30°. Перейдем к терминологии, принятой в механике континуума. Любое C^r -вложение $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$ будем называть (*регулярной*) *конфигурацией*. Через $\mathfrak{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$ обозначается множество всех конфигураций тела \mathfrak{B} .

Замечание 11. В настоящей работе под конфигурацией понимается отображение, а не точечное множество мест в физическом пространстве. Последнее есть образ множества \mathfrak{B} , т.е. $\varkappa(\mathfrak{B})$. В ряде монографий, в частности, в [54, с. 81], конфигурацией называют точечное множество. Интересно отметить, что трактовка понятия конфигурации принципиально изменена во втором издании этой монографии [55]. В нем понятие «конфигурация» не используется вовсе и отмечается, что смешение понятий конфигурации как отображения и образа этого отображения ведет к путанице; вместо понятия «конфигурация» вводятся «движение» (motion), определяющее вложение тела в физическое пространство, и дополнительное понятие «форма» (shape), для образа этого вложения. ♠

Следуя [55], образ конфигурации, т.е. точечное множество $\varkappa(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{P}$ будем называть *формой* тела \mathfrak{B} . Движение тела в физическом пространстве характеризуется континуальной последовательностью конфигураций, определяющих континуальное семейство форм. Формализация этого понятия может быть осуществлена следующим образом [20]. Пусть $]t_1, t_2[= \mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ — хронометрическое многообразие (t_1, t_2 могут быть конечными, либо бесконечными). Отображение $\mathbb{T} \rightarrow \mathfrak{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$, которое ставит в соответствие каждому $t \in \mathbb{T}$ некоторую конфигурацию \varkappa_t , т.е. $t \mapsto \varkappa_t$, представляет движение \mathfrak{B} за интервал \mathbb{T} .

31°. Для фиксированной материальной точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ отображение $\mathbb{T} \ni t \mapsto \varkappa_t(\mathfrak{X})$ определяет траекторию точки \mathfrak{X} . Если все такие траектории — кривые класса C^r , то движение называется *движением класса C^r* . Если фиксировать время t , то получим отображение $\mathfrak{B} \ni \mathfrak{X} \mapsto \varkappa_t(\mathfrak{X})$, область значений которого — форма, которую имеет тело в момент t . Если выбрать на теле \mathfrak{B} и физическом пространстве \mathfrak{P} атласы из их C^r -структур, то локально, в соответствующих картах (U, φ) и (V, ψ) для тела и физического пространства, имеем координатные представления,

изображенные на следующей диаграмме:



На диаграмме, материальные точки обозначены символами $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{B}$, при этом \mathfrak{X} фиксирована, а \mathfrak{Y} находится в достаточно малой окрестности точки \mathfrak{X} . Согласно **18°**, континуальному семейству $\{\mathfrak{X}_t\}$ соответствуют континуальные семейства открытых множеств $\{U_t\}$ и $\{V_t\}$, таких, что

$$\forall t \in \mathbb{T} : (\mathfrak{X} \in U_t) \wedge (\mathfrak{X}_t(U_t) \subset V_t).$$

В силу этого, для точки \mathfrak{X} имеем $\mathbb{T} \ni t \mapsto \mathfrak{X}_t(\mathfrak{X}) \in \bigcup_{t \in \mathbb{T}} V_t$. Координатные отображения, указанные в приведенной диаграмме, принадлежат следующим классам:

$$\psi^{-1} \circ \gamma_t \circ \varphi \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), \quad \psi^{-1} \circ \chi_{\mathfrak{X}} \in \mathcal{C}^r(\mathbb{T}; \mathbb{R}^m).$$

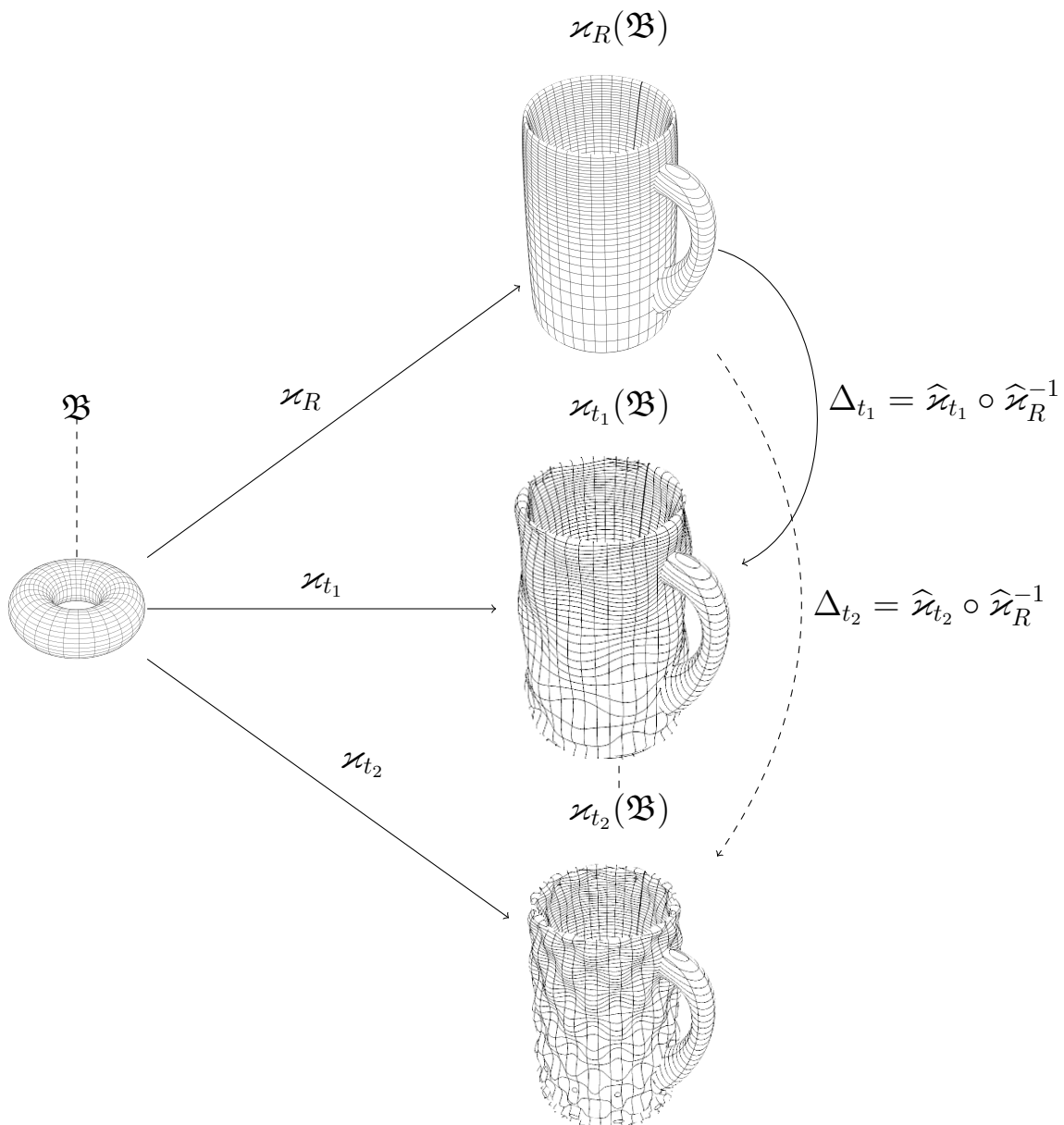
32°. В классической механике деформируемого трехмерного твердого тела, как правило, предполагается существование глобальной единообразной конфигурации (см. **6°**), образ которой (форма) может быть целиком погружена в евклидово физическое пространство [92–96]. Такая конфигурация называется отсчетной и обозначается символом \mathfrak{X}_R (reference). Существование отсчетной конфигурации значительно упрощает теорию: катрирование тела осуществляется непосредственно отображением¹⁵ \mathfrak{X}_R . При этом материальное многообразие становится тривиальным (атлас состоит из одной карты) и может быть отождествлено с отсчетной формой. В виду этих соображений, которые, как правило,

¹⁵При этом евклидово физическое пространство отождествляется по изоморфизму с \mathbb{R}^3 .

производятся неявно, движение тела рассматривается как преобразование его отсчетной формы $\kappa_R(\mathfrak{B})$ в актуальную $\kappa_t(\mathfrak{B})$, представляемое отображением Δ_t :

$$\Delta_t = \widehat{\kappa}_t \circ \widehat{\kappa}_R^{-1} : \kappa_R(\mathfrak{B}) \rightarrow \kappa_t(\mathfrak{B}),$$

т.е. деформацией тела из $\kappa_R(\mathfrak{B})$ в $\kappa_t(\mathfrak{B})$. Отношения между конфигурациями и деформациями представлены на следующей диаграмме:



33°. Соображения предыдущего пункта основывались на предположении о существовании глобальной единообразной формы, которая мо-

жет быть вложена в аффинно-евклидово физическое пространство. Как уже отмечалось, такое предположение не может быть принято при моделировании тел с несовместными деформациями. В этом случае требуется более детальное описание способа вложения тела в физическое пространство с указанием для каждого элементарного объема его индивидуальной отсчетной формы. Формализация такого описания основывается на принципе локализации, предложенном Ноллом [97].

34°. Принцип локализации математически выражает идею близкодействия, согласно которой состояние (отклик) достаточно малой окрестности определяется, главным образом, искажениями этой окрестности, а искажения во внешней по отношению к ней части тела вносят пренебрежимо малый вклад. Формулировка принципа локализации для случая, когда $\mathfrak{P} = \mathcal{E}^m$, может быть дана следующим образом.

Пусть $\mathcal{N}_{\mathfrak{X}}$ — множество всех окрестностей точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$. Введем отношение эквивалентности на множестве функций $\psi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{V}^m$, таких, что $\psi(\mathfrak{X}) = 0$:

$$(\psi \sim \tilde{\psi}) \Leftrightarrow (\exists N \in \mathcal{N}_{\mathfrak{X}} \quad \forall \mathfrak{Z} \in N : \quad \psi(\mathfrak{Z}) = \tilde{\psi}(\mathfrak{Z})).$$

Пусть теперь $\varkappa \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$. Локализация конфигурации \varkappa в точке \mathfrak{X} определяется функцией

$$\psi = \varkappa - \varkappa(\mathfrak{X}),$$

удовлетворяющей условию $\psi(\mathfrak{X}) = 0$. Этой функции соответствует класс эквивалентности $\Phi(\varkappa, \mathfrak{X})$. Полученное отношение разбивает множество конфигураций $\mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ на классы эквивалентности. Получающееся при этом фактор-множество будем называть множеством локальных конфигураций и обозначать $\mathcal{C}_{\mathfrak{B}; \mathfrak{X}}^r$.

35°. Пусть теперь тело \mathfrak{B} не имеет глобальной единообразной формы в евклидовом пространстве, однако для каждой материальной точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ можно определить вложение $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$, такое, что некоторая окрестность $N(\mathfrak{X})$ точки \mathfrak{X} окажется в единообразном состоянии (состоянии, которое эквивалентно состоянию тестового образца перед началом испытания, см. **6°**). Совокупность всех таких вложений представляет аналог отсчетной конфигурации. Сказанное иллюстрируют рисунки 1.9, 1.10, где $\varkappa_{\mathfrak{X}_i}^R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$ — конфигурации, при которых окрестности точек \mathfrak{X}_i переходят в единообразное состояние. Для случая, изображенного

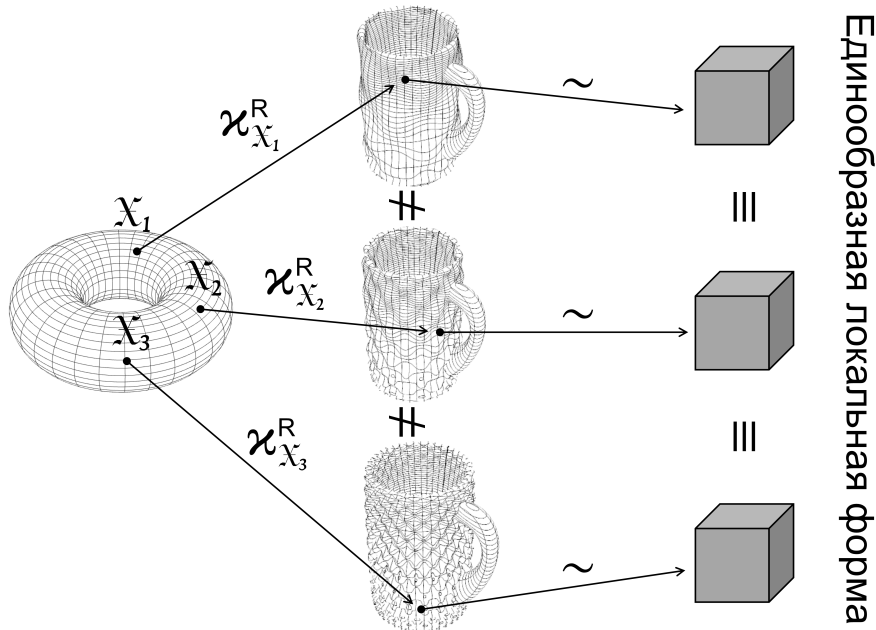


Рис. 1.9. Единообразная локальная форма. Случай $\chi_{x_i}^R \neq \chi_{x_j}^R$, $i, j \neq 1, 2, 3$

на рис. 1.9, такие конфигурации различны, в то время, как для случая, показанного на рис. 1.10, конфигурации совпадают. Последний случай соответствует наличию у тела глобального единообразного состояния.

36°. В рамках настоящей работы будем рассматривать частный случай принципа локализации **34°**, а именно, инфинитезимальную локализацию первого порядка. Но, в отличие от **34°**, определим это понятие для более общего класса пространств с евклидовыми и римановыми связностями.

Разбиение множества всех конфигураций на классы эквивалентности зависит от правил параллельного переноса, принятых в физическом пространстве. Свойство параллельности определяется аффинной связностью пространства: этому вопросу посвящена четвертая глава работы. Вместе с тем, обойтись без привлечения параллельного перенесения при определении классов эквивалентности нельзя — по этой причине ниже будет введен оператор I_{par} , характеризующий изменение длин и ориентации бесконечно малых векторов при их переносе в физическом пространстве. Формально евклидовы свойства параллельности нарушаются при введении в пространстве криволинейных координат и соответствующих им систем отнесения — семейства локальных базисов. Несмотря на то,

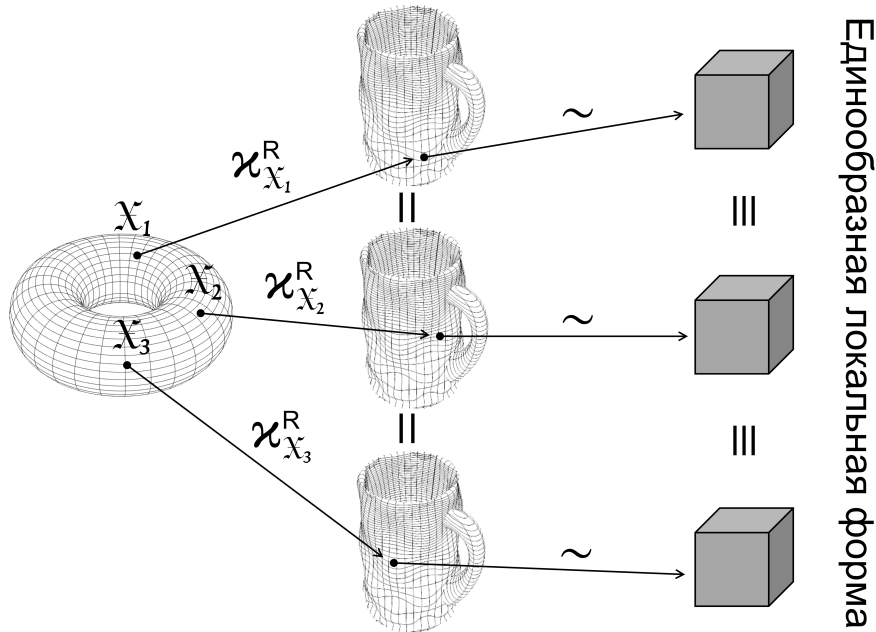


Рис. 1.10. Единообразная локальная форма. Случай $\kappa_{x_i}^R = \kappa_{x_j}^R$,
 $i, j \neq 1, 2, 3$

что это, в некотором смысле, «искусственная» непараллельность, порожденная заменой переменных, она позволяет детально пояснить структуру I_{par} , а затем перейти к общему случаю неевклидова физического пространства. Перед непосредственным определением эквивалентности конфигураций произведем вспомогательные построения.

Итак, предположим, что физическое пространство \mathfrak{B} имеет аффинно-евклидову структуру, \mathcal{E}^m [52, 97]. Картрирование \mathcal{E}^m будем осуществлять двумя способами — с помощью декартовых координат и некоторых криволинейных координат. Для этих картрирований используются две копии \mathbb{R}^m : пространство \mathbb{R}_d^m , содержащее декартовы координаты, и пространство \mathbb{R}_c^m , содержащее криволинейные координаты.

Для некоторой точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ выберем содержащую ее карту $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, то есть, $\mathfrak{X} \in U_\alpha \subset \mathfrak{B}$, $\varphi_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow U_\alpha$. Для конфигурации $\kappa \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ определим отображения

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_\alpha &= \kappa \circ \varphi_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{E}^m; \\ \overline{\bar{\kappa}}_\alpha &= \mathcal{X} \circ \bar{\kappa}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}^m; \\ \kappa_{d;\alpha} &= \mathcal{D} \circ \bar{\kappa}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_d^m, \end{aligned}$$

где отображения \mathcal{X} и \mathcal{D} определены в 24°.

Отображение $\bar{\kappa}_\alpha$ реализует координатное представление материальных точек: кортежам их координат в карте $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ставятся в соответствие их места в физическом пространстве, то есть элементы точечного множества \mathcal{E}^m .

Отображение $\bar{\bar{\kappa}}_\alpha$ осуществляет «векторизацию» конфигурации: каждой материальной точке, представленной координатами карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, ставится в соответствие вектор места, определяющий ее положение относительно фиксированного начала координат в \mathcal{E}^m .

Отображение $\kappa_{d;\alpha}$ осуществляет «арифметизацию» конфигурации, представляя векторы места в декартовом базисе кортежами соответствующих декартовых координат.

Помимо декартовых, в \mathcal{E}^m могут быть введены криволинейные координаты посредством задания некоторого атласа $A = \{(\psi_\beta, V_\beta)\}_{\beta \in J}$. Пусть (ψ_β, V_β) — карта на \mathcal{E}^m , для которой $\kappa(\mathfrak{X}) \in V_\beta$. Определим отображение

$$\kappa_{c;\alpha,\beta} = \psi_\beta^{-1} \circ \kappa \circ \varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \supset \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap \kappa^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \psi_\beta^{-1}(V_\beta \cap \kappa(U_\alpha)) \subset \mathbb{R}_c^m,$$

которое определяет для точек из U_α криволинейные координаты их мест в \mathcal{E}^m (в образе конфигурации κ). Отображение

$$f_{c;\beta} = (\mathcal{D} \circ \psi_\beta)^{-1} : \mathbb{R}_d^m \rightarrow \mathbb{R}_c^m$$

является преобразованием декартовых координат в криволинейные. Используя введенное отображение, можно записать:

$$\psi_\beta^{-1} = f_{c;\beta} \circ \mathcal{D}.$$

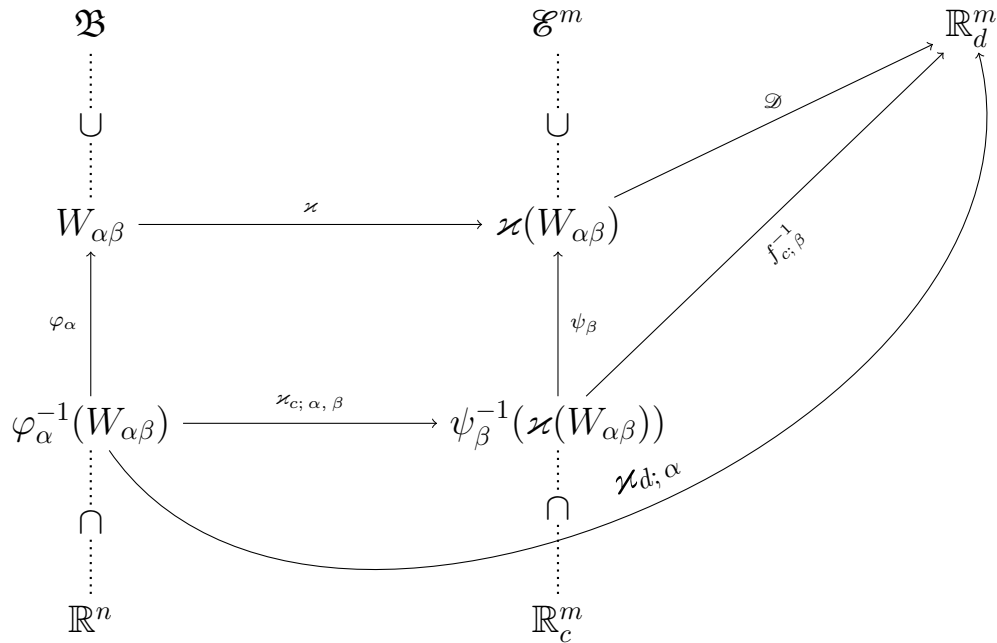
Из последнего соотношения вытекают выражение для $\kappa_{c;\alpha,\beta}$:

$$\kappa_{c;\alpha,\beta} = \psi_\beta^{-1} \circ \kappa \circ \varphi_\alpha = f_{c;\beta} \circ \mathcal{D} \circ \kappa \circ \varphi_\alpha,$$

и формула, связывающая $\kappa_{c;\alpha,\beta}$ и $\kappa_{d;\alpha}$:

$$\kappa_{d;\alpha} = f_{c;\beta}^{-1} \circ \kappa_{c;\alpha,\beta}.$$

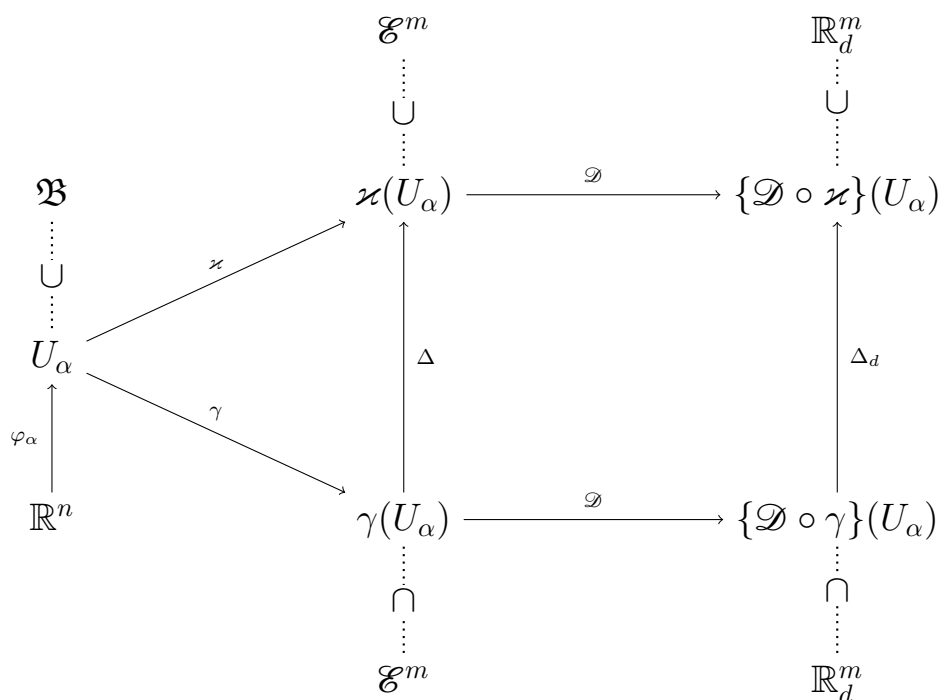
Этому выражению соответствует диаграмма ($W_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap \kappa^{-1}(V_\beta)$):



37°. Пусть $\kappa, \gamma \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ — две конфигурации, а $\Delta = \hat{\kappa} \circ \hat{\gamma}^{-1}$ — определяемая ими деформация. Представление Δ в декартовых координатах имеет вид:

$$\Delta_d = \hat{\kappa}_d \circ \hat{\gamma}_d^{-1} = \mathcal{D} \circ \hat{\kappa} \circ \hat{\gamma}^{-1} \circ \mathcal{D}^{-1} : \mathbb{R}_d^m \supset [\mathcal{D} \circ \gamma](\mathfrak{B}) \rightarrow [\mathcal{D} \circ \kappa](\mathfrak{B}) \subset \mathbb{R}_d^m,$$

Это — отображение между открытыми подмножествами \mathbb{R}^m , имеющее класс C^r . Связь между отображениями Δ и Δ_d иллюстрирует диаграмма

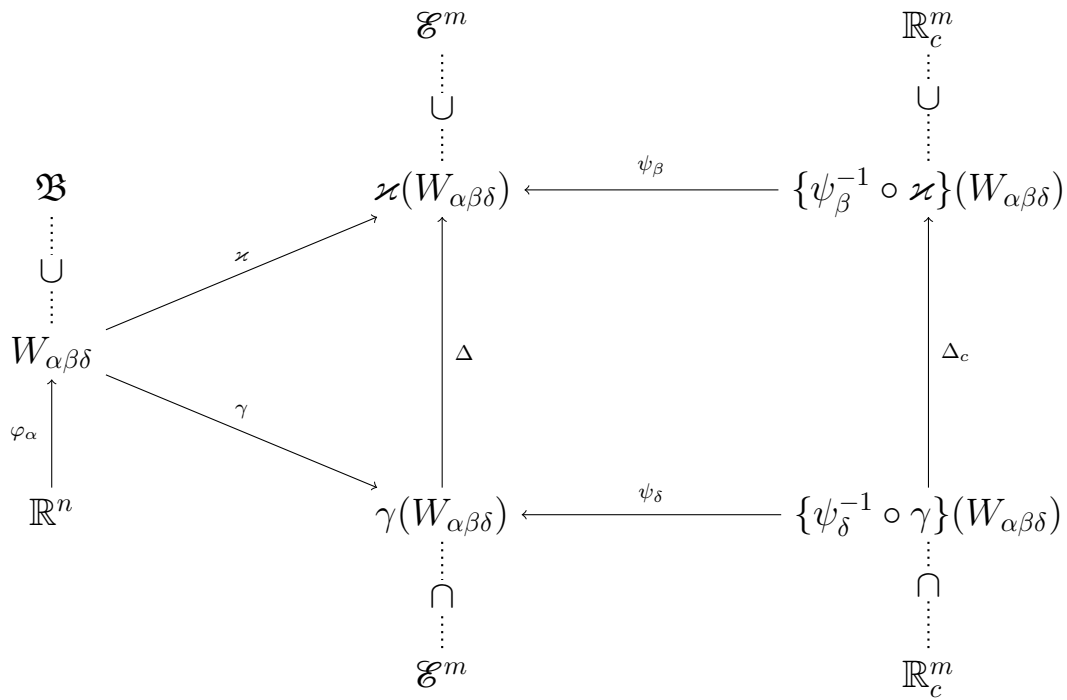


Если (V_δ, ψ_δ) — карта, содержащая $\gamma(\mathfrak{X})$, то та же самая деформация Δ может быть представлена в криволинейных координатах с помощью отображения $\Delta_c = \hat{\chi}_c \circ \hat{\gamma}_c^{-1} = \psi_\beta^{-1} \circ \hat{\chi} \circ \hat{\gamma}^{-1} \circ \psi_\delta$,

$$\Delta_c : \mathbb{R}_c^m \supset \psi_\delta^{-1}(\gamma(U_\alpha) \cap \gamma(\chi^{-1}(V_\beta)) \cap V_\delta) \rightarrow \psi_\beta^{-1}(\chi(U_\alpha) \cap V_\beta \cap \chi(\gamma^{-1}(V_\delta))),$$

Связь между Δ и Δ_c показана на следующей диаграмме¹⁶:

¹⁶Здесь $W_{\alpha\beta\delta} = U_\alpha \cap \chi^{-1}(V_\beta) \cap \gamma^{-1}(V_\delta)$.

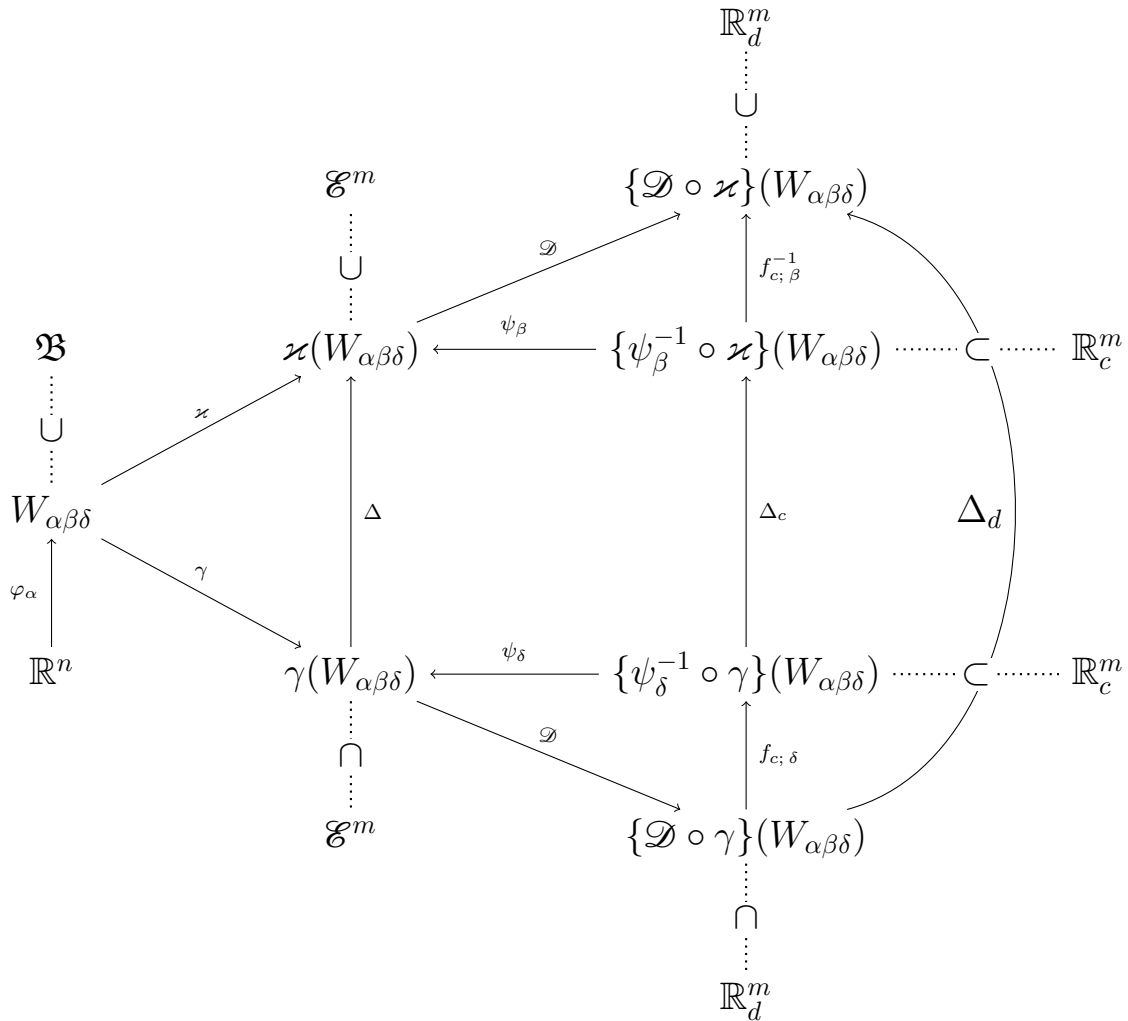


Поскольку $\varkappa_{d;\alpha} = f_{c;\beta}^{-1} \circ \varkappa_{c;\alpha,\beta}$, $\gamma_{d;\alpha} = f_{c;\delta}^{-1} \circ \gamma_{c;\alpha,\delta}$, то для Δ_d получаем следующее равенство:

$$\Delta_d = \widehat{\varkappa}_d \circ \widehat{\gamma}_d^{-1} = (f_{c;\beta}^{-1} \circ \widehat{\varkappa}_c) \circ (f_{c;\delta}^{-1} \circ \widehat{\gamma}_c)^{-1} = f_{c;\beta}^{-1} \circ \Delta_c \circ f_{c;\delta}. \quad (1.3.3)$$

Связь между отображениями Δ_c и Δ_d иллюстрирует диаграмма¹⁷:

¹⁷Здесь $W_{\alpha\beta\delta} = U_\alpha \cap \varkappa^{-1}(V_\beta) \cap \gamma^{-1}(V_\delta)$.



38°. По предположению, отображение Δ_d между открытыми подмножествами \mathbb{R}_d^m является достаточно гладким, и согласно известным теоремам анализа [86], оно может быть локально представлено формулой Тейлора:

$$\Delta_d([\mathcal{D} \circ \gamma](\mathfrak{x}) + h) = \Delta_d([\mathcal{D} \circ \gamma](\mathfrak{x})) + \mathcal{F}_{[\mathcal{D} \circ \gamma](\mathfrak{x}); \Delta_d}[h] + o(\|h\|), \quad \text{при } h \rightarrow 0,$$

где $\mathcal{F}_{[\mathcal{D} \circ \gamma](\mathfrak{x}); \Delta_d} \in \text{Lin}(\mathbb{R}_d^m; \mathbb{R}_d^m)$ – производное отображение, которое в естественном базисе \mathbb{R}^m может быть представлено $m \times m$ матрицей частных производных:

$$[\mathcal{F}_{[\mathcal{D} \circ \gamma](\mathfrak{x}); \Delta_d}]_{ij} = \left. \frac{\partial[\pi_m^i \circ \Delta_d(z^1, \dots, z^m)]}{\partial z^j} \right|_{[\mathcal{D} \circ \gamma](\mathfrak{x})}.$$

В силу регулярности \varkappa , при $n = m$,

$$\mathcal{J}_{[\mathcal{D} \circ \gamma](\mathfrak{X}); \Delta_d} = L_{\mathfrak{X}} \in \text{Invlin}(\mathbb{R}_d^m; \mathbb{R}_d^m).$$

Отметим, что множество $\text{Invlin}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ есть реализация общей линейной группы (другая изоморфная реализация общей линейной группы есть множество всех невырожденных $m \times m$ матриц $\text{GL}(m, \mathbb{R})$).

Теперь все подготовлено для определения эквивалентных конфигураций.

(i) *Декартовы координаты*, $\dim \mathfrak{B} = \dim \mathcal{E}^m = m$. Полагаем, что две конфигурации $\varkappa, \gamma \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ эквивалентны в точке \mathfrak{X} , т.е. $\varkappa \sim_{\mathfrak{X}} \gamma$, если

$$\mathcal{J}_{[\mathcal{D} \circ \gamma](\mathfrak{X}); \Delta_d} = \text{Id}, \quad \Delta_d = \widehat{\varkappa}_d \circ \widehat{\gamma}_d^{-1},$$

где Id — единица $\text{Invlin}(\mathbb{R}_d^m; \mathbb{R}_d^m)$. Из правил дифференцирования сложной функции следует, что отношение $\sim_{\mathfrak{X}}$ является отношением эквивалентности на множестве всех конфигураций $\mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ в строгом смысле. Разбиение $\mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ на классы эквивалентности обозначим через $\mathcal{C}_{\mathfrak{B}; \mathfrak{X}}^r$, а сами классы эквивалентности — через $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$. Геометрический смысл введенного отношения заключается в следующем. Если $\varkappa \sim_{\mathfrak{X}} \gamma$, то деформация $\Delta = \widehat{\varkappa} \circ \widehat{\gamma}^{-1}$ переводит без искажений (с точностью первого порядка) малый объем, окружающий точку $\gamma(\mathfrak{X})$, в малый объем, окружающий точку $\varkappa(\mathfrak{X})$.

Повторяя рассуждения для отображения $\varkappa_{d; \alpha}$, получаем:

$$\mathcal{J}_{\varphi_{\alpha}^{-1}(\mathfrak{X}); \varkappa_{d; \alpha}} = K_{\mathfrak{X}} \in \text{Invlin}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}_d^m).$$

Из правил цепного дифференцирования и дифференцирования обратной функции следует, что если $\varkappa, \gamma \in \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$, конфигурации \varkappa в точке \mathfrak{X} соответствует $K_{\mathfrak{X}} \in \text{Invlin}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}_d^m)$, а конфигурации γ в той же точке — $G_{\mathfrak{X}} \in \text{Invlin}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}_d^m)$, то $K_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$. Справедливо и обратное утверждение.

Таким образом каждому классу эквивалентности единственным образом может быть поставлен в соответствие элемент $K_{\mathfrak{X}} \in \text{Invlin}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}_d^m)$. В соответствии с [97], будем называть его *локальной конфигурацией*, а $L_{\mathfrak{X}}$ — *локальной деформацией*. При этом отметим, что $K_{\mathfrak{X}}$ несет в себе субъективную информацию о карттировании тела, в то время, как в $L_{\mathfrak{X}}$ информация о карттировании исключена. Однако, $L_{\mathfrak{X}}$ несет в себе информацию сразу о двух конфигурациях.

При смене карт в пределах одной C^r -структуры, разбиение конфигураций на классы эквивалентности, ассоциированное с фиксированной точкой \mathfrak{X} , не меняется. То есть, $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$ не зависит от картрирования. Это обосновывается определением Δ_d и возможным сужением карты.

Таким образом, разбиение на классы не зависит от картрирования, а «идентификаторы» классов $K_{\mathfrak{X}} \in \text{Invlin}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}_d^m)$ — зависят.

Из того, что $\text{Invlin}(\mathbb{R}_d^m; \mathbb{R}_d^m)$ — группа, и теоремы Коши–Ковалевской [98] вытекает следующее утверждение. Если $L \in \text{Invlin}(\mathbb{R}_d^m; \mathbb{R}_d^m)$, $K_{\mathfrak{X}}$ — локальная конфигурация, представляющая класс $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$, то существует класс $\mathcal{K}'_{\mathfrak{X}}$, который представляется локальной конфигурацией $L \circ K_{\mathfrak{X}}$.

(ii) Криволинейные координаты, $\dim \mathfrak{B} = \dim \mathcal{E}^m = m$. Пусть $\varkappa, \gamma \in \mathfrak{C}^r(\mathfrak{B}; \mathcal{E}^m)$ — другая конфигурация. В силу регулярности соответствующих конфигураций,

$$\mathcal{F}_{[\psi_{\delta}^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x}); \Delta_c} = Lx \in \text{Invlin}(\mathbb{R}_c^m; \mathbb{R}_c^m).$$

Поле $(e_k)_{k=1}^m$, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m) \mapsto (e_i|_{\xi})_{i=1}^m$, локальных координатных реперов криволинейной системы координат в карте $(V_{\beta}, \psi_{\beta})$ определяется соотношением

$$e_k = \frac{\partial(\mathcal{X} \circ \psi_{\beta})}{\partial \xi^k}, \quad \mathcal{X} \circ \psi_{\beta} : \mathbb{R}_c^m \rightarrow \mathcal{V}^m, \quad k = 1, \dots, m.$$

Отметим, что отображения $e_k \circ \psi_{\beta}^{-1}$ в совокупности образуют поле локальных координатных реперов, определенное в точках $V_{\beta} \subset \mathcal{E}^m$. Если $e_k = u_k^j i_j$, то по определению, $u_k^j = \frac{\partial[\pi_m^j \circ \mathcal{D} \circ \psi_{\beta}]}{\partial \xi^k} = \frac{\partial[\pi_m^j \circ f_{c;\beta}^{-1}]}{\partial \xi^k}$. Поэтому, матрица Якоби отображения $f_{c;\beta}^{-1}$ есть матрица перехода от репера декартовой системы координат к координатному реперу криволинейной.

Из определения эквивалентности конфигураций \varkappa и γ в точке \mathfrak{X} , сформулированного относительно $\Delta_d = \widehat{\varkappa}_d \circ \widehat{\gamma}_d^{-1}$, получим его формулировку относительно $\Delta_c = \widehat{\varkappa}_c \circ \widehat{\gamma}_c^{-1}$. Пусть $\varkappa \sim_{\mathfrak{X}} \gamma$, тогда $\mathcal{F}_{[\mathcal{D} \circ \gamma](\mathfrak{x}); \Delta_d} = \text{Id}$.

Согласно правилу дифференцирования произведения сложной функции и теоремы о производной обратного отображения [86], приходим к равенству

$$\mathcal{F}_{[\psi_{\delta}^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x}); \Delta_c} = \mathcal{F}_{[\mathcal{D} \circ \varkappa](\mathfrak{x}); f_{c;\beta}} \circ \mathcal{F}_{[\psi_{\delta}^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x}); f_{c;\delta}^{-1}}.$$

Пусть $h = h^k \mathbf{1}_k \in \mathbb{R}_c^m$. Тогда $\mathcal{F}_{[\psi_{\delta}^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x}); f_{c;\delta}^{-1}}[h] = \left. \frac{\partial[\pi_m^j \circ f_{c;\delta}^{-1}]}{\partial \xi^k} \right|_{[\psi_{\delta}^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x})} h^k \mathbf{1}_j$, откуда

$$\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{F}_{[\psi_{\delta}^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x}); f_{c;\delta}^{-1}}[h] = h^k e_k|_{[\psi_{\delta}^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{x})}.$$

Положим $\mathcal{R}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})} := \mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{J}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X}); f_{c; \delta}^{-1}}$. Тогда¹⁸

$$\mathcal{R}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})}[h] = h^k e_k|_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})}.$$

Следовательно, соотношение для Δ_c примет вид:

$$\mathcal{J}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X}); \Delta_c} = \mathcal{R}_{[\psi_\beta^{-1} \circ \varkappa](\mathfrak{X})}^{-1} \circ \mathcal{R}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})}. \quad (1.3.4)$$

Последнее соотношение определяет правило параллельного переноса I_{par} . Вектор из \mathbb{R}_c^m , ассоциированный с точкой $[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})$, переводится оператором $\mathcal{R}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})}$ в трансляционное пространство. Оттуда, оператором $\mathcal{R}_{[\psi_\beta^{-1} \circ \varkappa](\mathfrak{X})}^{-1}$ полученный вектор отображается в пространство \mathbb{R}_c^m и ассоциируется с точкой $[\psi_\beta^{-1} \circ \varkappa](\mathfrak{X})$. Это соображение иллюстрирует диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_c^m \dots \cong \dots & T_{[\psi_\beta^{-1} \circ \varkappa](\mathfrak{X})} \mathcal{E}^m & \\ & \uparrow I_{\text{par}} & \\ & T_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})} \mathcal{E}^m & \\ \mathbb{R}_c^m \dots \cong \dots & & \end{array} \begin{array}{c} \searrow \mathcal{R}_{[\psi_\beta^{-1} \circ \varkappa](\mathfrak{X})} \\ \nearrow \mathcal{R}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X})} \\ \rightarrow \mathcal{V}^m \end{array}$$

(iii) $\dim \mathfrak{B} = n < \dim \mathcal{E}^m$. Любая конфигурация \varkappa имеет ранг n , поэтому непосредственно свести этот случай к предыдущему не удастся. Однако, из рассуждений в 29° следует, что $\varkappa(\mathfrak{B})$ можно покрыть картами из максимального атласа \mathcal{E}^m , такими, что в точках $\varkappa(\mathfrak{B})$ отличны от нуля только первые n локальных координат. Соответствующее отображение \varkappa_c можно рассматривать как отображение между открытыми подмножествами \mathbb{R}^n и к нему применить определения из предыдущей части.

(iv) *Неевклидово физическое пространство* \mathfrak{P} . Обобщая (1.3.4), скажем, что две конфигурации $\varkappa, \gamma \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$ эквивалентны в точке \mathfrak{X} , т.е. $\varkappa \sim_{\mathfrak{X}} \gamma$, если

$$\mathcal{J}_{[\psi_\delta^{-1} \circ \gamma](\mathfrak{X}); \Delta_c} = \widehat{I}_{\text{par}}^{\gamma(\mathfrak{X}) \rightarrow \varkappa(\mathfrak{X})},$$

¹⁸В диадном разложении, $\mathcal{R}_\delta = e_k \otimes \pi_m^k$.

где $\widehat{\Gamma}_{\text{par}}^{\gamma(\mathfrak{X}) \rightarrow \varkappa(\mathfrak{X})}$ — заранее заданный оператор параллельного переноса.

39°. Таким образом, при инфинитиземальной локализации конфигураций для простых материалов классы эквивалентности однозначно определяются линейными преобразованиями $\mathcal{F}_{\varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{X}); \varkappa_{d; \alpha}}$, которые, следуя Ноллу, будем называть локальными конфигурациями. Каждому такому классу принадлежит некоторая однородная конфигурация K_R , которая осуществляет трансформацию всех элементарных объемов одинаково — посредством линейного преобразования $\mathcal{F}_{\varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{X}); \varkappa_{d; \alpha}}$.

Среди всех классов $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$ (локальных конфигураций), ассоциированных с точкой \mathfrak{X} , особую роль играет класс $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}^R$, которому принадлежит тестовая отсчетная (единообразная) конфигурация, т.е. та, которая воспроизводится в эксперименте при идентификации функционала отклика. Совокупность таких классов образует непрерывное семейство, параметризованное точками тела \mathfrak{B} :

$$\text{Ref}_{\mathfrak{B}} = \{\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}. \quad (1.3.5)$$

Выбирая из классов семейства (1.3.5) любые конфигурации $\varkappa_{\mathfrak{X}}^R$ (по одной из каждого класса), получим семейство конфигураций, каждая из которых трансформирует элементарный объем с отвечающей ему точкой \mathfrak{X} в единообразную форму:

$$\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}} = \{\varkappa_{\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}. \quad (1.3.6)$$

Полезным для интерпретации единообразной отсчетной конфигурации является семейство (1.3.6), в котором выбираются однородные конфигурации $K_{\mathfrak{X}}^R \in \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}^R$, т.е.

$$\overline{\overline{\text{Ref}}}_{\mathfrak{B}} = \{K_{\mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}. \quad (1.3.7)$$

Образно говоря, семейству (1.3.6) соответствует континуальное множество значений этих конфигураций, вычисленных в инфинитезимальных окрестностях точек — «осколков» тела \mathfrak{B} , геометрически несовместных (мозаика осколков не складывается в связанную форму), но находящихся в физическом состоянии, эквивалентном тестовому образцу.

С другой стороны, каждому «осколку» соответствует некоторая линейная трансформация из стандартного инфинитезимального куба — следствие того, что локализация инфинитиземальна и имеет первый порядок — и множеству $\{\varkappa_R(\mathfrak{X})\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$ может быть поставлено в соответствие

континуальное семейство линейных трансформаций. Если тело подвергать однородному деформированию, поочередно перебирая элементы семейства (1.3.7), то все его элементарные объемы в той же очереди окажутся в единообразном состоянии.

Очевидно, что если возможно отыскать семейство (1.3.6), в котором все элементы совпадают с некоторой конфигурацией \mathcal{K}_0 , то такое тело обладает натуральными конфигурациями (одной или несколькими), и \mathcal{K}_0 — одна из них.

В качестве гипотезы полагаем, что это семейство линейных трансформаций может быть представлено как сечение касательного расслоения. Эта гипотеза формализует идею о том, что несовместность деформации порождается гладкими физическими полями (дефектов, усадки и т.п.).

Гладкое поле линейных трансформаций, применяемых к координатным реперам, формализует процедуру подвижного репера Дарбу – Картана и «геометризует» многообразие \mathfrak{B} . Такая «геометризация» позволяет описать физические эффекты, вызванные несовместными деформациями, на языке дифференциальной геометрии, что систематически развивается в настоящей работе.

40°. Для количественного описания отклика материала на (локальные) трансформации используется функционал отклика, представленный отображениями типа $\mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^k$ (см. **18°**). Поясним это подробнее. Нет нужды ограничиваться только механическими свойствами тел, как это принято в классической нелинейной упругости. Функционал отклика может быть определен для тел, состояние которых определяется также температурными, оптическими, электрическими, магнитными и т.д. полями. В этих случаях следует полагать, что отклик тела определяется по упорядоченному набору полей, в котором деформация представлена только полем локальных деформаций.

Для математического описания отклика тела следует оснастить множество \mathfrak{B} дополнительными структурами, представляющими физические свойства и соответствующие им поля. Некоторые из этих свойств, такие, как упругость, вязкость, теплопроводность, электропроводность, магнитная проницаемость, являются локальными, т.е. они ассоциированы с индивидуальной материальной точкой $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$, а не со всем телом в целом. Другие свойства, например, гравитационное взаимодействие, определяются по двум и более различным точкам. Такие взаимодействия определяют нелокальные свойства тела. В рамках концепции простого

тела рассматриваются только его локальные свойства.

Приведем определение *простого тела* (по Ноллу). Пусть R — множество, элементы которого называются дескрипторами отклика (поле напряжений представляет пример такого дескриптора). Непрерывное тело \mathfrak{B} будем называть простым телом по отношению к R , если оно наделено структурой посредством функции \mathcal{R} , которая присваивает каждой точке \mathfrak{X} отображение

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}; \mathfrak{X}}^r \rightarrow R, \quad \mathcal{R}_{\mathfrak{X}} : \mathcal{K}_{\mathfrak{X}} \mapsto r \in R,$$

то есть, при всех регулярных конфигурациях $\kappa \in \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$ отклик тела в окрестности точки \mathfrak{X} — значение $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}}$ — один и тот же.

41°. До этого момента мы использовали понятия физически эквивалентных состояний, опираясь на интуицию. Теперь, используя определенное выше отображение отклика тела, мы можем дать точное определение этого понятия.

Чтобы придать математический смысл высказыванию о том, что физическое состояние окрестности $V_{\mathfrak{X}} \subset \mathfrak{P}$ образа материальной точки \mathfrak{X} в конфигурации κ неотлично от физического состояния окрестности $V_{\mathfrak{Y}} \subset \mathfrak{P}$ образа другой материальной точки \mathfrak{Y} в конфигурации ω , введем понятие *материального изоморфизма*.

В начале отметим, что эквивалентность физических состояний двух частей образов тела в физическом пространстве определяется относительно принятого для этого тела функционала отклика: если его значения для любых точек из $V_{\mathfrak{X}}$ и $V_{\mathfrak{Y}}$, вычисляемые на любых допустимых деформациях, совпадают, то $V_{\mathfrak{X}}$ и $V_{\mathfrak{Y}}$ считаются материально изоморфными. Образно говоря, показания прибора, датчики которого закреплены в произвольных точках из $V_{\mathfrak{X}}$ и $V_{\mathfrak{Y}}$, совпадают для любых допустимых деформаций, совершаемых над телом. Количественно, это условие выражается следующим равенством:

$$\forall \kappa_1, \kappa_2 \in \mathfrak{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P}) \quad \forall \mathfrak{X}' \in \kappa_1^{-1}(V_{\mathfrak{X}}) \quad \forall \mathfrak{Y}' \in \omega^{-1}(V_{\mathfrak{Y}}) : \\ \mathcal{R}(\mathfrak{X}', \gamma \circ \kappa_1) = \mathcal{R}(\mathfrak{Y}', \gamma \circ \omega), \quad (1.3.8)$$

где $\gamma = \widehat{\kappa}_1 \circ \widehat{\kappa}_2^{-1}$. Если полагать окрестности $V_{\mathfrak{X}}$ и $V_{\mathfrak{Y}}$ инфинитезимальными, то соотношение (1.3.8) запишется в виде

$$\forall \kappa_1, \kappa_2 \in \mathfrak{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P}) : \quad \mathcal{R}(\mathfrak{X}, \gamma \circ \kappa_1) = \mathcal{R}(\mathfrak{Y}, \gamma \circ \omega), \quad \gamma = \widehat{\kappa}_1 \circ \widehat{\kappa}_2^{-1}. \quad (1.3.9)$$

По аналогии с терминологией, принятой в определении локализации, условие (1.3.9) будем называть инфинитезимальным материальным изоморфизмом.

Отображение, устанавливающее изоморфизм, определяет деформацию из формы $\varkappa(\mathfrak{B})$ в форму $\omega(\mathfrak{B})$, то есть,

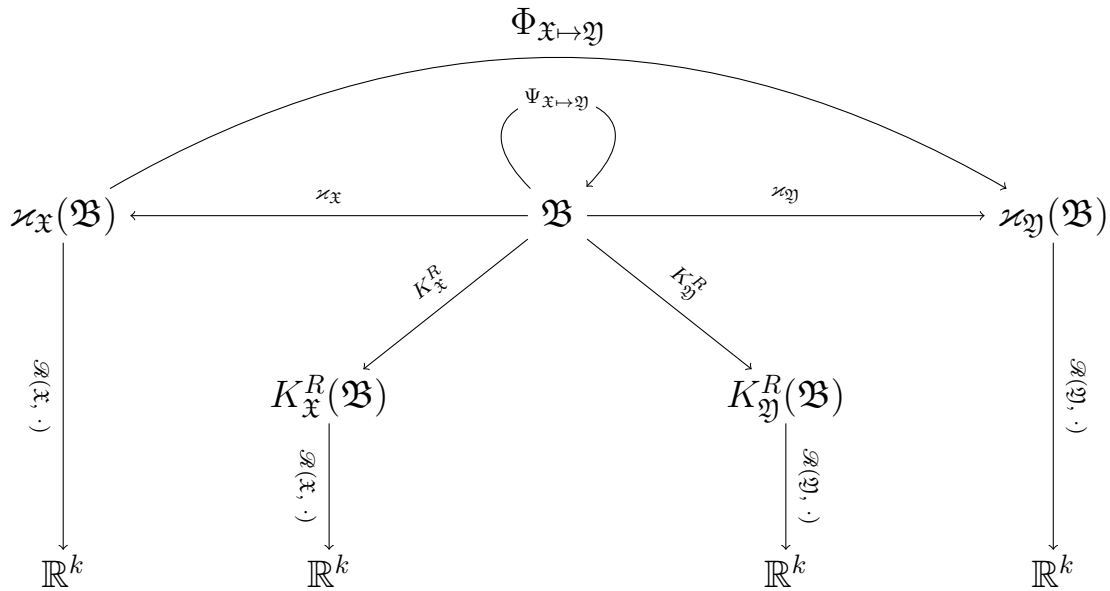
$$\Phi_{\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}} = \widehat{\omega} \circ \widehat{\varkappa}^{-1}.$$

Если ввести обозначение $\varkappa_0 = \gamma \circ \varkappa$, то соотношение (1.3.9) примет вид:

$$\forall \varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P}) : \mathcal{R}(\mathfrak{x}, \varkappa_0) = \mathcal{R}(\mathfrak{y}, \varkappa_0 \circ \Psi_{\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}}), \quad \gamma = \widehat{\varkappa}_1 \circ \widehat{\varkappa}_2^{-1},$$

где $\Psi_{\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}} = \widehat{\varkappa}^{-1} \circ \widehat{\omega} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ — автоморфизм материального многообразия (отображение тела \mathfrak{B} на себя). Это отображение представляет элемент группы автоморфизмов $\text{Aut } \mathfrak{B}$. По терминологии Нолла [97], такое отображение — материальный изоморфизм.

Следующая диаграмма показывает отношения отображений, используемых при определении $\Psi_{\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}}$:



На этой диаграмме используются следующие обозначения: $\varkappa_{\mathfrak{x}}, \varkappa_{\mathfrak{y}}$ — конфигурации, трансформирующие окрестности точек $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ в единообразное состояние; $K_{\mathfrak{x}}^R, K_{\mathfrak{y}}^R$ — однородные конфигурации, трансформирующие эти окрестности в то же состояние. Эквивалентность всех этих

состояний определяется откликом \mathcal{R} , значения «прибора», символически указанного на диаграмме стрелкой, направленной на его «шкалу» \mathbb{R}^k , одни и те же. Деформация, при которой тело из формы, в которой окрестность точки \mathcal{X} находится в единообразном состоянии, трансформируется в форму, в которой окрестность точки \mathcal{Y} оказывается в единообразном состоянии, обозначена дуговой стрелкой $\Phi_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}$. Материальные изоморфизмы обозначены циклической стрелкой.

Все функционалы отклика, указанные на диаграмме, принимают одни и те же значения в \mathbb{R}^k ,

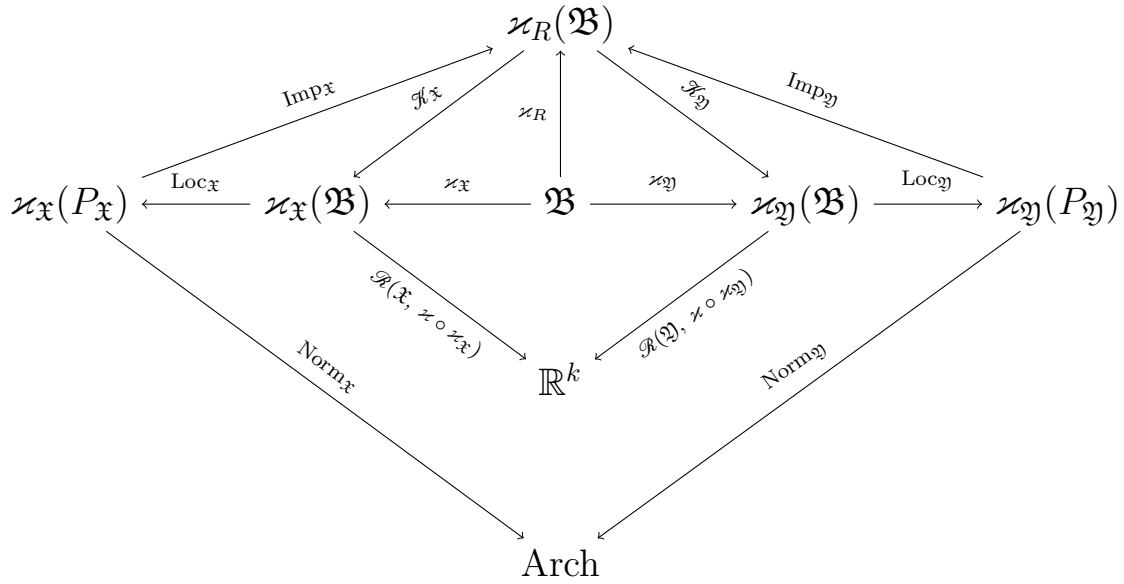
$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathcal{X}, \kappa_{\mathcal{X}}) &= \mathcal{R}(\mathcal{X}, K_{\mathcal{X}}^R), \\ \mathcal{R}(\mathcal{Y}, \kappa_{\mathcal{Y}}) &= \mathcal{R}(\mathcal{Y}, K_{\mathcal{Y}}^R),\end{aligned}$$

поскольку $\kappa_{\mathcal{X}}$, $K_{\mathcal{X}}^R$ и $\kappa_{\mathcal{Y}}$, $K_{\mathcal{Y}}^R$ попарно принадлежат одним и тем же классам, и, по условию,

$$\forall \gamma: \quad \mathcal{R}(\mathcal{X}, \gamma \circ \kappa_{\mathcal{X}}) = \mathcal{R}(\mathcal{Y}, \gamma \circ \kappa_{\mathcal{Y}}).$$

Заметим, что группа материальных изоморфизмов $\text{Aut}\mathfrak{B}$ содержит подгруппы трансляций, поворотов и изменения масштаба, которые используются для формулировки вариационных симметрий и законов сохранения [99].

Локальные единообразные конфигурации $\kappa_{\mathcal{X}}$ или $K_{\mathcal{X}}^R$ характеризуют способ трансформации тела, при котором элементарный объем, содержащий точку \mathcal{X} , перейдет в единообразное физическое состояние. Двойственное к ним преобразование элементарного объема из единообразного отсчетного состояния в напряженное, реализуемое в некоторой конфигурации κ_R , будем, следуя терминологии [4], называть имплантом $\text{Imp}_{\mathcal{X}}$. При этом, аргумент импланта — элементарный объем в единообразном состоянии — является «универсальным строительным блоком», из которого может быть построено все тело \mathfrak{B} . Этот «строительный блок» — архетип [3] — можно представить как достаточно малую часть тела (настолько малую, что ее целиком можно преобразовать в единообразное состояние), которая была использована для идентификации материала, т.е. построения функционала отклика (см. диаграмму).



На диаграмме используются следующие обозначения: $\mathcal{K}_x, \mathcal{K}_y$ — однородные деформации, переводящие точку \mathfrak{X} (соответственно, \mathfrak{Y}) в единообразное состояние; $\text{Imp}_x, \text{Imp}_y$ — соответствующие импланты, Arch — архетип. Отображения κ_x, κ_y — единообразные отсчетные конфигурации, то есть,

$$\forall \kappa \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P}) : \mathcal{R}(\mathfrak{X}, \kappa \circ \kappa_x) = \mathcal{R}(\mathfrak{Y}, \kappa \circ \kappa_y).$$

$\mathcal{K}_x, \mathcal{K}_y$ — однородные отсчетные деформации, которые трансформируют малые окрестности точек $\kappa_R(\mathfrak{X})$, указанных в индексах, в единообразное состояние. Если тело испытывает движение, при котором поочередно реализуются все \mathcal{K}_x , то наблюдатель будет видеть поочередное релаксирование частей тела в единообразное состояние. Loc_x и Loc_y — операторы локализации, которые ставят в соответствие образу тела $\kappa_x(\mathfrak{B})$ (или $\kappa_y(\mathfrak{B})$) образ его части, содержащий точку \mathfrak{X} . Именно,

$$\text{Loc}_x : \kappa_x(\mathfrak{B}) \mapsto \kappa_x(P_x), \quad \text{Loc}_y : \kappa_y(\mathfrak{B}) \mapsto \kappa_y(P_y),$$

где P_x, P_y — прообразы элементов разбиения множества $\kappa_R(\mathfrak{B})$:

$$P_x = \kappa_R^{-1}(\text{Part}(\kappa_R(\mathfrak{B}), \kappa_R(\mathfrak{X}))), \quad P_y = \kappa_R^{-1}(\text{Part}(\kappa_R(\mathfrak{B}), \kappa_R(\mathfrak{Y})));$$

$\text{Part}(A, X)$ — элемент разбиения множества A , содержащего точку X . Обратим внимание на то, что разбиение производится над множеством

$\varkappa(\mathfrak{B}) \subset P$, то есть формой тела, поскольку форма наблюдаема, а само тело — нет. $\text{Norm}_{\mathfrak{X}}$ и $\text{Norm}_{\mathfrak{Y}}$ — операторы нормализации; отображения, сужающие части тела до геометрически эквивалентного точечного множества, общего для всех. Таким точечным множеством может быть, например, шар, т.е.

$$\text{Norm}_{\mathfrak{X}} : \varkappa_{\mathfrak{X}}(P_{\mathfrak{X}}) \mapsto \varkappa_{\mathfrak{X}}(\overline{P}_{\mathfrak{X}}), \quad \text{Norm}_{\mathfrak{Y}} : \varkappa_{\mathfrak{Y}}(P_{\mathfrak{Y}}) \mapsto \varkappa_{\mathfrak{Y}}(\overline{P}_{\mathfrak{Y}}),$$

где $\overline{P}_{\mathfrak{X}}$ — шар с центром в центроиде формы $\varkappa_{\mathfrak{X}}(P_{\mathfrak{X}})$, фиксированного для всех \mathfrak{X} радиуса. Этот радиус достаточно мал, настолько, что этот шар можно вписать во все формы $\varkappa_{\mathfrak{X}}(P_{\mathfrak{X}})$ и $\varkappa_{\mathfrak{Y}}(P_{\mathfrak{Y}})$.

В общем случае, эволюция тела предполагает изменение во времени многообразия \mathfrak{B} , семейства отсчетных форм $\text{Ref}_{\mathfrak{B}}$ и актуальной конфигурации \varkappa_t , осуществляющей вложение \mathfrak{B} в \mathfrak{P} .

Случай, когда \mathfrak{B} и $\text{Ref}_{\mathfrak{B}}$ не изменяются, а меняется лишь \varkappa_t , соответствует деформированию (движению) тела в классическом смысле. Случай, когда \mathfrak{B} не изменяется, а $\text{Ref}_{\mathfrak{B}}$ и \varkappa_t различны в разные моменты времени, соответствует деформированию и одновременно происходящей перестройке внутренней структуры, например, усадке, пластическим эффектам и т.п. В общем случае многообразие \mathfrak{B} так же меняется во времени, что может быть связано с притоком или оттоком материальных точек. При этом, в общем случае изменяется топология \mathfrak{B} , в частности, изменяются топологические инварианты \mathfrak{B} (например, Эйлерова характеристика χ [19]). Визуализация одного из примеров приведена на рис. 1.11. На нем показана эволюция тела, топологически эквивалентного n -полноторию, в ходе которой, за счет присоединения экстраматериала, последовательно изменяется Эйлерова характеристика χ .

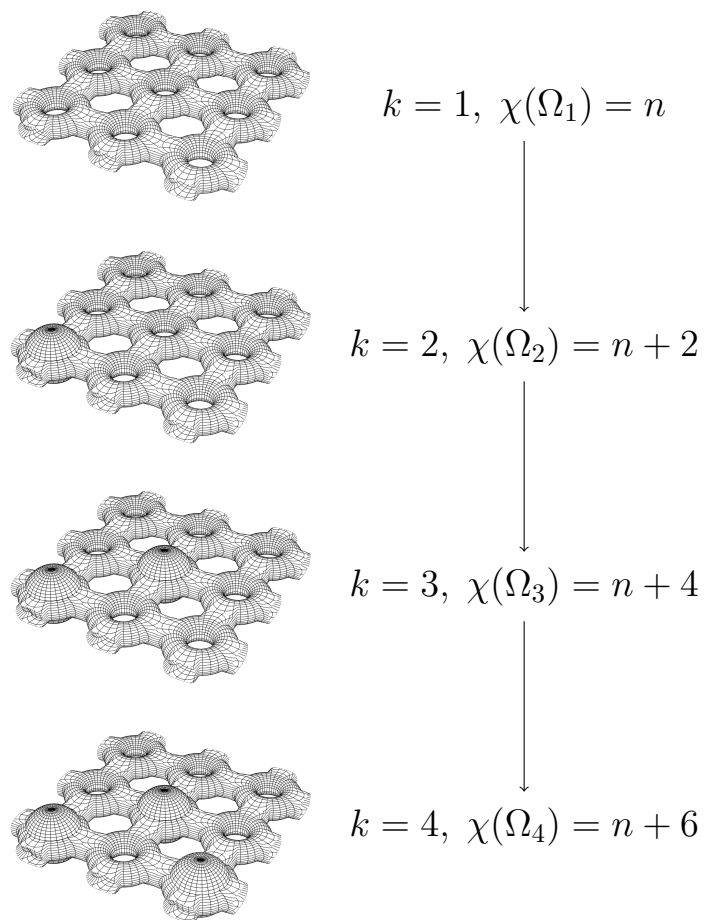


Рис. 1.11. Изменение топологической структуры тела в процессе его эволюции

1. Введение

42°. Неевклидова геометрия, сформировавшись в работах чистых математиков XIX века, многократно демонстрировала свою пользу в задачах теоретической физики и механики континуума [2, 19, 20, 100, 101]. Последняя, как известно, оперирует с фундаментальным понятием — телом — которое в ряде задач удобно представить как часть неевклидова пространства (обзор работ по этой тематике приведен в Главе 1). Известно, что неевклидовость пространства, моделирующего тело, и несовместность деформаций, возникающая в нем, либо в силу дефектной структуры, либо по причине последовательного создания в ходе технологического процесса, тесно связаны между собой. Тела подобного рода будем называть *структурно неоднородными* (structurally inhomogeneous). Меры отличия их внутренней геометрии от евклидовой, такие, как кручение, кривизна и неметричность определенной на них материальной связности, оказываются удобными величинами для формулировки нелинейных краевых задач, характеризующих отклик структурно неоднородных тел на внешние воздействия и их собственное неоднородное напряженное состояние. Естественным языком для постановки и исследования таких задач является язык современной дифференциальной геометрии и теории гладких многообразий. Именно он позволяет сформулировать уравнения

и краевые условия в форме, не ограниченной рамками евклидовой геометрии, которые традиционно подразумеваются в основах классической механики деформируемого твердого тела. Несмотря на то, что современному дифференциально – геометрическому подходу в физике и механике континуума посвящен ряд монографий [2, 4, 20, 102] и постоянно увеличивается число статей [14, 67, 103–106], основные его положения пока нельзя считать устоявшимися, особенно в приложениях к технологическим задачам.

Настоящая глава имеет своей целью логически строгое построение мер деформаций для структурно неоднородных тел, материал которых прост (т.е. локально отклик зависит только от первого градиента деформаций [107, с. 60]), в предположении, что деформации являются вложениями тела в физическое пространство, которое в общем случае неевклидово (о прикладных аспектах задач для материальных поверхностей в неевклидовом физическом пространстве см. Главу 1). Общие построения иллюстрируются примерами, а именно, задачами дискретного и непрерывного роста конечного цилиндра, структурная неоднородность в котором обусловлена послойной усадкой материала в процессе его создания.

43°. Геометрический подход, развиваемый в настоящей работе, так же, как и нелинейные краевые задачи для цилиндрических структурно неоднородных тел, актуальны для развития методов расчета остаточных напряжений и искажений формы послойно создаваемых микроструктур в ходе процессов литографии полупроводниковых структур [108], LbL процессинга [28], самоорганизующейся сборки (self-assembling) [109]. Во всех этих процессах характерный размер элементов достаточно мал — порядка долей микрона — что делает всю структуру в целом чувствительной к полям собственных напряжений, вызванных структурной неоднородностью. В этой связи обсуждаемые в работе модели актуальны в механике микроструктур. Возможность математического моделирования эволюции собственных напряжений в таких телах позволяет выбрать оптимальные режимы их создания, что является важным для улучшения «качества структуры», характеризуемой такими технологическими понятиями, как *mechanical proximity* и *optical proximity* [108].

44°. Предваряя детальные построения, поясним в общих чертах, что дает неевклидова геометрия для моделирования напряженно-деформированного состояния структурно неоднородных тел. Как уже отмечалось, такое тело не может быть целиком вложено в евклидово простран-

ство в ненапряженном состоянии (более точно — в глобально единообразном состоянии, см. Главу 1). Вместе с тем, в виду того, что материал тела прост, для каждой материальной точки можно подобрать особое вложение тела, в образе которого бесконечно малая окрестность этой точки окажется ненапряженной (единообразной). В общем случае каждой материальной точке будет соответствовать некоторое особое вложение и совокупность таких вложений определит континуальное семейство их образов — семейство отсчетных конфигураций, которое в Главе 1 обозначалось символом $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}}$. Ясно, что в классической теории совместных деформаций все элементы этого семейства совпадут друг с другом и определят единую отсчетную ненапряженную форму (единообразную, натуральную, естественную). В общем случае, однако, все элементы семейства различны. Это не позволяет воспользоваться классической «отсчетной» методологией постановки краевой задачи, принятой в нелинейной механике деформируемого твердого тела, в рамках которой отсчетная форма используется как единая область определения кинематических и энергетических полей. Выйти из затруднительного положения здесь можно, как минимум, двумя способами. Первый из них предполагает использование промежуточной напряженной конфигурации в качестве отсчетной. В этом случае тело, будучи изначально однородным, становится неоднородным (это и является причиной выбора термина «структурная неоднородность»). Дальнейшее исследование такого тела следует проводить как тела неоднородного, со всеми вытекающими в этой связи осложнениями. Второй способ сохраняет однородность тела, но при этом отсчетная форма, полностью свободная от напряжений, определяется в неевклидовом пространстве с особой — материальной связностью. Формально классическая методология «отсчетного» описания сохраняется, однако поля, для которых формулируются краевые задачи, как и дифференциальные операции, определены на гладких многообразиях с неевклидовой связностью, и их определения требуют уточнений. Для римановых многообразий (со связностью Леви–Чивиты, определяемой по заданной метрике) определения кинематических полей и соответствующих дифференциальных операций формулируются в настоящей работе.

45°. Используются обозначения, согласованные с принятыми в Главе 1. Так, символ \mathfrak{B} всюду обозначает тело, представленное C^r -многообразием размерности n . Физическое пространство обозначается символом \mathfrak{P} и с общих позиций рассматривается как C^r -многообразие размер-

ности m , имеющее дополнительную структуру риманова пространства. Предполагается, что $n \leq m \leq 3$ и $r \geq 1$.

Знакосочетание $\mathfrak{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$ обозначает множество всех C^r -вложений гладкого многообразия \mathfrak{B} в гладкое многообразие \mathfrak{P} . Любое такое вложение называется конфигурацией.

Символ \mathcal{E}^m обозначает m -мерное евклидово аффинное пространство с ассоциированным векторным пространством \mathcal{V}^m . В \mathcal{E}^m выбран ортонормированный репер $(O, (\mathbf{i}_s)_{s=1}^m)$, где $\mathbf{i}_p \cdot \mathbf{i}_s = \delta_{ps}$, с началом в точке O .

Знакосочетание $\text{Lin}(\mathcal{V}; \mathcal{W})$ обозначает пространство всех линейных отображений векторного пространства \mathcal{V} в векторное пространство \mathcal{W} .

2. Конфигурации и деформации

46°. Геометрические идеи об описании малого изменения форм и объемов тел под действием приложенных к ним внешних полей восходят к работам Бернулли и Эйлера, однако геометрические соотношения теории конечных деформаций были получены О.Л. Коши и без существенных изменений приводятся в большинстве современных монографий по механике континуума [110]. Несмотря на то, что рассуждения Коши неразрывно связаны с постулатами евклидова пространства, метод Коши легко переносится на пространства более общей структуры, в частности, римановы. В этой связи, представляется уместным дать комментарии к принимаемым им положениям (авторами использовались работы [111–113]).

i) *Существование естественной формы.* Понятие тела не используется Коши, для описания деформаций достаточно рассматривать формы тела, среди которых, как предполагается, существует особая, естественная — свободная от напряжений. Именно в этой форме существует тело в отсутствии внешних полей, а их приложение приводит к искажению формы — деформации.

ii) *Евклидовость физического пространства, вмещающего формы.* Апеллируя к аналитической геометрии Декарта, Коши идентифицирует точки в искаженной форме их декартовыми координатами x, y, z . Заметим, что для идентификации точек Коши использует искаженную форму, ведь именно она является наблюдаемой.

iii) *Существование перемещений.* Деформацию Коши рассматривает как процесс «возвращения» формы в неискаженное состояние (в современной терминологии это — обратная деформация [114]), которое реализуется для всей формы в целом и характеризуется непрерывным полем перемещений с компонентами

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} &: (x, y, z) \rightarrow \tilde{\xi}(x, y, z), \\ \tilde{\eta} &: (x, y, z) \rightarrow \tilde{\eta}(x, y, z), \\ \tilde{\zeta} &: (x, y, z) \rightarrow \tilde{\zeta}(x, y, z),\end{aligned}$$

в декартовом базисе [112]. Таким образом, «несовместные деформации» исключаются.

iv) *Физическое состояние тела зависит от искажений элементарных материальных волокон.* Коши постулирует это неявно, рассматривая в качестве аргументов всех полевых величин отношения длин бесконечно малых материальных отрезков при их искажении в составе формы тела. Для вычисления длин используется декартова метрика, порождаемая соотношениями $\mathbf{i}_p \cdot \mathbf{i}_s = \delta_{ps}$, где $(\mathbf{i}_s)_{s=1}^3$ — декартов базис.

Замечание 12. Бесконечно малый материальный отрезок определялся координатами частиц (молекул, в интерпретации физики XIX века), находящихся в его концах. В актуальной форме этим материальным частицам соответствуют декартовы координаты x, y, z и $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$. Координаты частиц в отсчетной форме представлялись выражениями [112]

$$x - \xi, y - \eta, z - \zeta, \quad \text{и} \quad x + \Delta x - \xi - \Delta\xi, y + \Delta y - \eta - \Delta\eta, z + \Delta z - \zeta - \Delta\zeta,$$

где $\xi = \tilde{\xi}(x, y, z)$, $\eta = \tilde{\eta}(x, y, z)$, $\zeta = \tilde{\zeta}(x, y, z)$.

Для количественной оценки искажений материальных волокон Коши вычисляет их длины r и $r/(1 + \varepsilon)$ в искаженной и неискаженной формах:

$$r^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \quad \left(\frac{r}{1 + \varepsilon}\right)^2 = (\Delta x - \Delta\xi)^2 + (\Delta y - \Delta\eta)^2 + (\Delta z - \Delta\zeta)^2,$$

и, принимая во внимание их инфинитезимальность, раскладывает последнее соотношение по формуле Тейлора первого порядка [112]:

$$\begin{aligned}\left(\frac{r}{1 + \varepsilon}\right)^2 &= \left(\Delta x - \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial \xi}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial \xi}{\partial z} \Delta z - \dots\right)^2 + \\ &+ \left(\Delta y - \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial \eta}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial \eta}{\partial z} \Delta z - \dots\right)^2 + \\ &+ \left(\Delta z - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \Delta z - \dots\right)^2. \quad (2.2.1)\end{aligned}$$

В рамках современной терминологии это означает, что исследуемый материал *прост* [107, с. 60]. Выражение (2.2.1) характеризуется квадратичной формой, которой соответствует эллипсоид — тройка взаимно ортогональных осей и три числа, соответствующие главным полуосям. Этот эллипсоид Коши полагает основной характеристикой деформируемого состояния в точке. Поскольку при таких построениях неявно были исключены повороты, сопровождающие деформации, в них можно увидеть принцип, который в рамках современной терминологии называется принципом объективности или принципом материальной индифферентности¹.

Справедливости ради следует отметить, что Коши не довел до конца построения теории конечных деформаций и знаменитое полярное разложение Коши, явно выделяющее вращения, сопутствующие деформации, им не было доказано строго [110], несмотря на то, что исследованию этого вопроса он посвятил около десяти лет. Здесь, однако, следует учесть, что Коши не располагал современной теорией операторов в конечномерных пространствах и все построения осуществлял в терминах полуосей эллипсоидов. ♠

v) *Двойственность искаженной и неискаженной форм.* В работе [113], в отличие от [112], Коши использует для идентификации точек их координаты в составе неискаженной формы, подчеркивая тем самым двойственность искаженной и неискаженной форм. Исторически более ранние указания на эту двойственность имеются в работах Ж. Лагранжа [116].

В действительности, нет никаких причин предпочитать одну из форм другой, и уравнения, характеризующие деформацию, могут быть записаны как относительно отсчетной, так и относительно актуальных форм. Математически переход от одного описания к другому осуществляется на основе формул преобразования площадей и объемов в евклидовом пространстве (формула Нансона [107, с. 124]) и приводит к известным соотношениям Пиолы [107, с. 124]. Двойственность получаемых при этом соотношений показана в [114].

47°. Обобщение положений i)–v) на структурно неоднородные тела, т.е. на многообразия с неевклидовой геометрией, сводятся к модификации процедуры сопоставления инфинитезимальных материальных волокон, ассоциированных с различными точками тела. Геометрически

¹Отметим, что на необходимость использовать принцип материальной индифферентности указывал еще Пуассон, впервые обративший внимание на то, что от жестких поворотов тела напряжения в нем не должны изменяться [115]. С точки зрения общей теории относительности, принцип материальной индифферентности является частным случаем принципа общей ковариантности [102].

это означает установление особых правил *параллельного переноса*, или, определения *неевклидовой материальной связности* на теле [4, 117]. Для простых материалов эта связность аффинная, и основные соотношения, необходимые для такого обобщения, по форме подобны соотношениям, возникающим при использовании общих криволинейных координат², хотя, конечно, их геометрический смысл приобретает новое наполнение.

Наиболее важные аспекты, которые следует изменить или уточнить при переходе от классической теории деформаций Коши (евклидовы деформации) к обобщению на многообразия с неевклидовой связностью, приведены в Табл. 2.1.

Краткое пояснение формальной математической стороны используемых понятий дано в Главе³ 3 работы [1]. Физические и геометрические пояснения приведены ниже.

(i) Аффинная структура физического пространства \mathcal{E}^m позволяла определять позиции точек посредством поля вектора мест $P \mapsto \mathbf{r} = P - O$. В случае произвольных гладких многообразий понятие вектора места теряет смысл: позиции точек определяются локальными координатами (аналогичная ситуация возникает в теоретической физике при переходе от специальной теории относительности к общей теории относительности [101]).

(ii) В евклидовой механике континуума инфинитезимальное материальное волокно представлено разностью векторов мест его начала и конца. В неевклидовом случае, инфинитезимальное материальное волокно, ассоциированное с точкой $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$, представляется классом эквивалентных в этой точке кривых, т.е. касательным вектором к гладкому многообразию \mathfrak{B} в точке \mathfrak{X} (см. [1], Глава 3, п. 64°, 65°). Множество векторов, касательных к гладкому многообразию \mathfrak{B} в точке \mathfrak{X} , наделяется структурой векторного пространства размерности $n = \dim \mathfrak{B}$ (см. [1], Глава 3, п. 66°) и обозначается как $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$. Это — касательное пространство к многообразию \mathfrak{B} в точке \mathfrak{X} .

Замечание 13. Касательный вектор к гладкому многообразию \mathfrak{M}^n в точке

²По-видимому, систематически криволинейные координаты в теории упругости впервые стали использовать братья Коссера [118].

³Систематическое изложение анализа на гладких многообразиях дано в [119, 120], а основные положения геометрической механики континуума — в [2, 20]. Приведенные в Главе 3 математические конструкции специализированы для развиваемой в работе теории и имеют некоторые отличия с [2, 20].

Таблица 2.1

	Понятия	Евклидова механика континуума	Неевклидова механика континуума
(i)	Место	Векторное поле мест \mathbf{r} (в евклидовом смысле)	Локальные координаты (x^k)
(ii)	Инфинитезимальные материальные волокна	$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — векторы места	Класс эквивалентных кривых
(iii)	Деформация	$\gamma : \mathcal{E}^m \supset S_R \rightarrow S_t \subset \mathcal{E}^m$, или, $\mathcal{U}^m \supset U_R \rightarrow U_t \subset \mathcal{U}^m$	$\mathfrak{P} \supset \mathcal{r}_R(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathcal{r}_t(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{P}$
(iv)	Конфигурация	Не используется	$\mathcal{r} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$
(v)	Вектор перемещений	$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$	Не используется
(vi)	Градиент деформаций	$\mathbf{F} = \mathbf{1} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T$, где $\nabla = \mathbf{e}^k \partial_k$	$\mathcal{F} = T\mathcal{r}$
(vii)	Силы	Векторы	Ковекторы
(viii)	Тензоры	$\mathcal{V}^m \otimes \mathcal{V}^m, \mathcal{V}^m \otimes \mathcal{V}^m \otimes \mathcal{V}^m, \dots$	$T_x \mathfrak{B} \otimes T_x \mathfrak{B}, T_x \mathfrak{B} \otimes T_x^* \mathfrak{B}, \dots$
(ix)	Поля	$\mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{V}^m \otimes \mathcal{V}^m$	Сечения

$p \in \mathfrak{M}^n$ есть упорядоченная пара⁴ $u = (p, [\chi]_p)$, где $[\chi]_p$ — класс эквивалентности кривой $\chi :] - a, a[\rightarrow \mathfrak{M}^n$ по отношению эквивалентности \sim_p , определенному в [1], п. 64°.

Чтобы отличать касательные векторы к многообразию от векторов из трансляционного пространства \mathcal{V}^m , последние обозначаются строчными полужирными латинскими символами $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$, а касательные векторы — строчными латинскими символами u, v, \dots ♠

(iii) В евклидовой механике континуума предполагается наличие глобальной естественной (натуральной, свободной от напряжений) *отсчетной формы* $S_R \subset \mathcal{E}^m$, а понятие тела не используется. Деформации представляются отображениями вида $\mathcal{E}^m \supset S_R \rightarrow S_t \subset \mathcal{E}^m$, где S_t — актуальная форма. В силу изоморфизма $\mathcal{E}^m \cong \mathcal{V}^m$, деформации можно представить эквивалентным образом как отображения подмножеств \mathcal{V}^m , т.е. как отображения $\mathcal{V}^m \supset U_R \rightarrow U_t \subset \mathcal{V}^m$. В неевклидовом случае под деформацией понимается отображение $\mathfrak{P} \supset \kappa_R(\mathfrak{B}) \rightarrow \kappa_t(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{P}$. Здесь $\kappa_R(\mathfrak{B})$, в отличие от классического случая, может быть напряженной формой.

(iv) Понятие конфигурации отсутствует в евклидовой теории, так как тело отождествляется с натуральной отсчетной формой. Вместе с тем, в развиваемом подходе, конфигурации отводится роль «деформации» из воображаемого пространства аффинной связности — надстройки над телом, в котором рассматривается ненапряженная (или, более общо, единообразная) форма, в актуальную форму физического пространства.

(v) Аффинная структура пространства в евклидовой теории позволяет ввести векторное поле смещений $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$, значение которого представляет разность мест частицы, занимаемой в актуальной и отсчетной формах. В случае, когда физическое пространство представлено римановым многообразием, такое представление не имеет места.

(vi) В евклидовой теории градиент деформации определяется полем линейных преобразований (производных отображений [86]) $\mathbf{F} = D\gamma$, каждое из которых линеаризует деформацию γ в соответствующей точке. Эквивалентно, градиент деформации представляется в виде: $\mathbf{F} = \mathbf{1} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T$, где $\nabla \otimes \mathbf{u}$ обозначает градиент векторного поля (в нотации Гиббса). В развиваемом подходе градиент деформации опреде-

⁴Отметим, что существует изоморфное представление касательного вектора как дифференциального оператора первого порядка (см. [1], Глава 3, п. 67°). Это представление интенсивно используется в настоящей работе.

ляется по конфигурации $\mathfrak{X} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$ и представляется касательным отображением $\mathcal{F} = T\mathfrak{X} : T\mathfrak{B} \rightarrow T\mathfrak{P}$ (см. [1], Глава 3, п. 83°).

(vii) В отличие от классических представлений, на гладком многообразии представляется целесообразным различать векторы и ковекторы. Через $T_p^*\mathfrak{M}$ обозначается кокасательное пространство (см. [1], Глава 3, п. 69°) к гладкому многообразию \mathfrak{M} (представляющему тело или физическое пространство), т.е. сопряженное к $T_p\mathfrak{M}$ пространство линейных функционалов. С физической точки зрения, элементами сопряженного пространства являются силы.

Замечание 14. В классических курсах механики мощность определяется как скалярное произведение вектора силы на вектор скорости. Использование скалярного произведения предполагает, что оба этих вектора принадлежат одному и тому же векторному пространству, что дает возможность, например, их сложить. Однако последнее противоречит физическому смыслу. Возникшую коллизию можно исправить, если считать, что скорость является элементом касательного пространства, а сила — кокасательного⁵. Тогда мощность определяется как каноническое спаривание силы f и скорости v : $\langle f, v \rangle$.

Отметим, что различие вектороподобных величин, таких, как сила и перемещение, обсуждалось еще в пионерских работах по векторному и тензорному исчислению, в частности, «Силы — ковариантные векторы», «скорость (или перемещения) — контравариантные векторы» [89, с.38], [121, с.268]. ♠

(viii) В классической механике тензоры и тензорные поля определяются с использованием аксиоматики евклидова пространства. Для работы с полями в неевклидовом пространстве требуется обобщение: с использованием определений тензорного произведения векторных пространств, касательного и кокасательного пространств, над каждой точкой гладкого многообразия строится «башня» тензорных пространств (см. [1], Глава 3, п. 70°–73°).

(ix) Из элементов «башен» тензорных пространств с использованием теории векторных расслоений (см. [1], Глава 3, п. 76°) формируются тензорные расслоения. К ним относятся, например, касательное и кокасательное расслоения. Это — векторные расслоения со слоями $T_p\mathfrak{M}$ ($T_p^*\mathfrak{M}$, для кокасательного расслоения) и базой \mathfrak{M} . Тензорное поле на \mathfrak{M} (в т.ч. векторное и ковекторное) рассматривается как *сечение* тензорного

⁵Укажем на дуализм, возникающий в определениях силы и скорости. В отличие от принятого в настоящей работе подхода, можно считать силу элементом касательного пространства, а скорость — кокасательного. Оба подхода представляются авторам равноправными.

расслоения, построенного над \mathfrak{M} (см. [1], Глава 3, п. 77°). Координатный репер на \mathfrak{M} при $\dim \mathfrak{M} = n$ обозначается символом $(\partial_i)_{i=1}^n$, а корепер — символом $(dx^i)_{i=1}^n$. Таким образом, для произвольных гладких векторного $u : \mathfrak{M} \rightarrow T\mathfrak{M}$ и ковекторного $\nu : \mathfrak{M} \rightarrow T^*\mathfrak{M}$ полей имеют место разложения: $u = u^i \partial_i$, $\nu = \nu_i dx^i$.

Замечание 15. Использование векторных расслоений позволяет рассматривать сечения как отображения одного гладкого многообразия в другое, что позволяет определять их гладкость стандартным образом (см. Глава 1, п. 18°, или [120, с. 34]).



Далее в работе используются билинейные операции свертки \lrcorner и \llcorner , действующие на диадах по правилу

$$\lrcorner: (u \otimes \vartheta, v) \mapsto u \otimes \vartheta \lrcorner v = \langle \vartheta, v \rangle u, \quad \llcorner: (v, \vartheta \otimes u) \mapsto v \llcorner \vartheta \otimes u = \langle \vartheta, v \rangle u.$$

Здесь u — гладкое сечение некоторого расслоения, а v, ϑ — векторное и ковекторное поля.

Замечание 16. Тензоры и тензорные поля в евклидовом пространстве обозначаются полужирными прописными латинскими символами: $\mathbf{T}, \mathbf{F}, \dots$, а тензорные поля на гладких многообразиях — рукописными латинскими символами: $\mathcal{T}, \mathcal{F}, \dots$. Исключение составляют символы $\mathcal{E}^m, \mathcal{V}^m$, которые зарезервированы для обозначения аффинного евклидова пространства и ассоциированного векторного пространства. ♠

(x) Евклидова структура пространства обеспечивала наблюдателя абстрактным «прибором», позволявшим измерять длины векторов (инфинитезимальных волокон) и углы между ними. Наличие такого «прибора» необходимо для построения теории деформаций. В случае гладких многообразий роль «прибора» играет риманова метрика. Последняя существует на любом C^r -многообразии ($r \geq 1$) [120]. С помощью римановой метрики вводятся музыкальные изоморфизмы (см. [1], Глава 3, п. 79°), позволяющие ставить в соответствие вектору ковектор (операция $(\cdot)^b$) и наоборот (операция $(\cdot)^\sharp$). Заметим, что с физической точки зрения, музыкальные изоморфизмы позволяют измерять физические величины в несвойственных для них единицах измерения, например, силу (ковектор) в метрах, а перемещение (вектор) в Ньютонах. В индексной нотации этим операциям соответствуют опускание и подъем индексов.

(xi) Часто возникает необходимость в выражении тензорных полей, заданных в точках актуальной формы, через точки отсчетной формы, и наоборот. В классической механике этим операциям соответствует пре-

образование Пиолы. В случае гладких многообразий аналогом преобразований Пиолы являются операции «pullback» и «pushforward». Если \mathcal{T} — тензорное поле на \mathfrak{P} , а \mathcal{Q} — тензорное поле на \mathfrak{B} , то через $\mathcal{I}^*\mathcal{T}$ обозначается «pullback» \mathcal{T} а через $\mathcal{I}_*\mathcal{Q}$ — «pushforward» \mathcal{Q} . Здесь $\mathcal{I} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$ — гладкое отображение. В случае скалярной функции ее «pullback» и «pushforward» сводятся к соответствующей замене областей определения и прибытия. Для произвольного тензорного поля это не так: кроме соответствующих замен областей определения и прибытия, необходимо заменить касательные и кокасательные расслоения по особым формулам пересчета (см. [1], Глава 3, п. 84°–86°).

48°. Перейдем к систематическому построению теории деформаций на гладких многообразиях. Будем, в основном, следовать идеологии [20]. Пусть тело \mathfrak{B} и физическое пространство \mathfrak{P} формализуются как C^r -многообразия (с фиксированными C^r -структурами), размерности которых, в общем случае, различны⁶; $\dim \mathfrak{B} = n$, $\dim \mathfrak{P} = m$. В рамках настоящей работы полагаем, что значение $r \geq 1$ таково, что все соотношения, используемые далее, имеют смысл.

Напомним (Глава 1), что утверждение о том, что тело \mathfrak{B} является C^r -многообразием означает, что в нем выбрана некоторая C^r -структура. Она представляет класс эквивалентных C^r -атласов. Каждый такой атлас обладает тем свойством, что все его карты попарно C^r -согласованы (см. Глава 1, п. 15°). Любой атлас $A_{\mathfrak{B}}$ выбранной C^r -структуры на теле представлен некоторым семейством карт, т.е. $A_{\mathfrak{B}} = \{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in I}$. Здесь $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ — открытое покрытие \mathfrak{B} , а φ_{α} — картирующие отображения, являющиеся гомеоморфизмами \mathbb{R}^n на U_{α} (см. Глава 1, п. 14°), т.е. $\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha \in I} U_{\alpha}$, а $\varphi_{\alpha} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_{\alpha}$. Локальные координаты, порождаемые картами из $A_{\mathfrak{B}}$, будем обозначать⁷ символами \mathfrak{X}^{α} , $\alpha = 1, \dots, n$.

Аналогично, любой атлас $A_{\mathfrak{P}}$ выбранной C^r -структуры на \mathfrak{P} представлен семейством C^r -согласованных карт; $A_{\mathfrak{P}} = \{(V_{\beta}, \psi_{\beta})\}_{\beta \in J}$, где $\{V_{\beta}\}_{\beta \in J}$ — открытое покрытие \mathfrak{P} , а ψ_{β} — картирующие отображения,

⁶Далее греческие индексы во всех выражениях пробегают значения от 1 до n , а латинские — от 1 до m .

⁷Локальные координаты в карте $(U_{\beta}, \varphi_{\beta})$, вообще говоря, следует обозначать символами с двумя индексами, определяющими номер карты и номер координаты, $\mathfrak{X}^{\beta; \alpha}$, $\beta \in J$, $\alpha = 1, \dots, n$, однако далее индекс β будет опущен в предположении, что номер карты ясен из контекста.

являющиеся гомеоморфизмами \mathbb{R}^n на V_β , т.е. $\mathfrak{P} = \bigcup_{\beta \in J} V_\beta$, а $\psi_\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow V_\beta$.

Локальные координаты, порождаемые картами из $A_{\mathfrak{P}}$, обозначаются символами X^i , $i = 1, \dots, m$.

Если физическое пространство обладает аффинно-евклидовой структурой $(\mathcal{E}^m, \mathcal{V}^m)$, то минимальный атлас $A_{\mathfrak{P}}^{\min}$ гладкого многообразия \mathfrak{P} состоит из одной карты $(\mathfrak{P}, \mathcal{D}^{-1})$, где \mathcal{D} — декартово картирование, представляющее векторизацию и арифметизацию аффинно-евклидова пространства (см. Глава 1, п. 24°):

$$\forall A \in \mathfrak{P} : \quad \mathcal{D}(A) := ((A - O) \cdot \mathbf{i}_k)_{k=1}^m. \quad (2.2.2)$$

Здесь $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^m$ — базис \mathcal{V}^m , (\cdot) — скалярное произведение на \mathcal{V}^m , задаваемое соотношением $\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_s = \delta_{ks}$, $k, s = 1, \dots, m$, O — начало декартовой системы координат. Заметим, что использование криволинейных координат в $(\mathcal{E}^m, \mathcal{V}^m)$, технически удобное во многих случаях, сводится к расширению $(\mathfrak{P}, \mathcal{D}^{-1})$, т.е. добавлению новых карт (V_β, ψ_β) , картирующие отображения которых, ψ_β , определяют т.н. криволинейные координаты. Разумеется, при их добавлении должна соблюдаться C^r -согласованность.

49°. Наблюдаемый образ тела в физическом пространстве — его форма — определяется конфигурацией $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}$, которую будем полагать C^r -вложением (см. Глава 1, п. 27°). Вместе с \varkappa будем использовать отображение $\widehat{\varkappa}$, которое получается из \varkappa сужением области прибытия до области значений⁸ [87]:

$$\widehat{\varkappa} : \mathfrak{B} \rightarrow \varkappa(\mathfrak{B}), \quad \mathfrak{X} \mapsto \varkappa(\mathfrak{X}).$$

Так как \varkappa — гладкое вложение, то $\widehat{\varkappa}$ — гомеоморфизм. Это позволяет вести речь об обратном отображении $\widehat{\varkappa}^{-1}$.

Замечание 17. Образ C^r -вложения \varkappa наделяется структурой n -мерного C^r -многообразия, которая порождается C^r -атласом $A_{\varkappa} = \{(\varkappa(U_\alpha), \widehat{\varkappa} \circ \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, где $A_{\mathfrak{B}} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ — атлас на теле \mathfrak{B} . Пространство $\varkappa(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{P}$, при этом, рассматривается как подпространство⁹ \mathfrak{P} . Тогда C^r -структуры на $\varkappa(\mathfrak{B})$ и \mathfrak{P} связаны между собой следующим образом [120]: каноническая инъекция

$$j_{\varkappa(\mathfrak{B})} : \varkappa(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{P}, \quad X \mapsto X,$$

⁸Напомним, что отображения \varkappa и $\widehat{\varkappa}$ являются различными, так как имеют различные области прибытия.

⁹Индукцированная топология $\varkappa(\mathfrak{B})$ определяется как совокупность всевозможных пересечений вида $\mathcal{O} \cap \varkappa(\mathfrak{B})$, где \mathcal{O} — открытые подмножества \mathfrak{P} [122].

является C^r -вложением. Таким образом, пространство $\varkappa(\mathfrak{B})$ является n -мерным C^r -подмногообразием \mathfrak{P} [120]. ♠

Евклидовы представления континуальной механики, набросок которых приведен выше, как правило, используют две конфигурации, отсчетную, \varkappa_R , и актуальную, \varkappa_t . Им соответствуют две формы, отсчетная, $\varkappa_R(\mathfrak{B})$, и актуальная, $\varkappa_t(\mathfrak{B})$. Эти рассуждения легко переносятся на используемый в настоящей работе язык гладких многообразий. Рассматриваются четыре отображения

$$\varkappa_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{P}, \quad \varkappa_t : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{P},$$

$$\widehat{\varkappa}_R : \mathfrak{B} \rightarrow \varkappa_R(\mathfrak{B}), \quad \widehat{\varkappa}_t : \mathfrak{B} \rightarrow \varkappa_t(\mathfrak{B}).$$

Если физическое пространство \mathfrak{B} обладает аффинно-евклидовой структурой, то в этих соотношениях \mathfrak{B} следует заменить на \mathcal{E}^m , а преобразования, соответствующие векторизации и арифметизации \mathcal{E}^m (см. Глава 1, п. 24°), позволяют определить соответствующие отображения со значениями в \mathcal{V}^m или \mathbb{R}^m . Следуя традиционным обозначениям, будем использовать для значений отображения \varkappa_R символ X , а для значения \varkappa_t — символ x . В случае аффинно-евклидова пространства им будут соответствовать трансляционные векторы $\mathbf{X}, \mathbf{x} \in \mathcal{V}^m$.

Далее используются обозначения $\mathcal{S}_R = \varkappa_R(\mathfrak{B})$ и $\mathcal{S}_t = \varkappa_t(\mathfrak{B})$. Композиции сужений конфигураций

$$\gamma = \widehat{\varkappa}_t \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_t, \quad \gamma^{-1} = \widehat{\varkappa}_R \circ \widehat{\varkappa}_t^{-1} : \mathcal{S}_t \rightarrow \mathcal{S}_R,$$

определяют прямую и обратную деформацию формы \mathcal{S}_R в \mathcal{S}_t [114, 123].

Координатные представления конфигураций определяются с точностью до выбранных карт в $A_{\mathfrak{B}}$ и $A_{\mathfrak{P}}$. Для некоторой окрестности точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ они задаются соотношениями (подробнее, см. Глава 1, п. 18°)

$$\widetilde{\varkappa}_R = \psi_{\beta}^{-1} \circ \varkappa_R \circ \varphi_{\alpha}, \quad \widetilde{\varkappa}_t = \psi_{\beta'}^{-1} \circ \varkappa_t \circ \varphi_{\alpha},$$

где предполагается, что β и β' выбраны с условиями $\varkappa_R(\mathfrak{X}) \in V_{\beta}$, $\varkappa_t(\mathfrak{X}) \in V_{\beta'}$ (условия согласованного картрирования). Аналогично, прямая и обратная деформации имеют следующие координатных представления:

$$\widetilde{\gamma} = (\sigma_{\lambda}^t)^{-1} \circ \gamma \circ \sigma_{\beta}^R, \quad \widetilde{\gamma}^{-1} = (\sigma_{\beta}^R)^{-1} \circ \gamma^{-1} \circ \sigma_{\lambda}^t,$$

в картах $(W_\beta^R, \sigma_\beta^R)$, $(W_\lambda^t, \sigma_\lambda^t)$ отсчетной и актуальной форм¹⁰. Здесь β и λ выбраны с условиями $\varkappa_R(\mathfrak{X}) \in W_\beta^R$, $\varkappa_t(\mathfrak{X}) \in W_\lambda^t$.

Следует отметить, что в рамках евклидовых представлений конфигурациям, как отображениям, почти не уделяется внимание, а деформации γ , γ^{-1} рассматриваются как автоморфизмы \mathcal{E}^m (или, более деликатно, как отображения между подмножествами \mathcal{E}^m , регулярными в смысле Келлога [124]). В координатной форме им соответствуют отображения

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &: (X^1, \dots, X^m) \mapsto x^i(X^1, \dots, X^m), \quad i = 1, \dots, m, \\ \tilde{\gamma}^{-1} &: (x^1, \dots, x^m) \mapsto X^i(x^1, \dots, x^m), \quad i = 1, \dots, m,\end{aligned}$$

причем, поскольку \mathcal{E}^m покрывается одной декартовой картой, то нет необходимости в условиях согласованного картрирования.

50°. Конфигурациям \varkappa_R , \varkappa_t и деформациям γ , γ^{-1} соответствуют касательные отображения (см. [1], Глава 3, п. **83°**)

$$\begin{aligned}T\varkappa_R &: T\mathfrak{B} \rightarrow T\mathfrak{P}, & T\varkappa_t &: T\mathfrak{B} \rightarrow T\mathfrak{P}, \\ T\gamma &: T\mathcal{S}_R \rightarrow T\mathcal{S}_t, & T\gamma^{-1} &: T\mathcal{S}_t \rightarrow T\mathcal{S}_R.\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

Все эти отображения действуют между $2n$ и $2m$ -мерными многообразиями — касательными расслоениями: $T\mathfrak{B}$, $T\mathfrak{P}$, $T\mathcal{S}_R$, $T\mathcal{S}_t$. Их сужения на соответствующие слои — касательные пространства — определяют линейные операторы:

$$\begin{aligned}T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R &:= T\varkappa_R|_{T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}} : T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \rightarrow T_X\mathfrak{P}, & T_{\mathfrak{X}}\varkappa_t &:= T\varkappa_t|_{T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}} : T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \rightarrow T_x\mathfrak{P}, \\ T_X\gamma &:= T\gamma|_{T_X\mathcal{S}_R} : T_X\mathcal{S}_R \rightarrow T_x\mathcal{S}_t, & T_x\gamma^{-1} &:= T\gamma^{-1}|_{T_x\mathcal{S}_t} : T_x\mathcal{S}_t \rightarrow T_X\mathcal{S}_R,\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

где $X = \varkappa_R(\mathfrak{X})$, $x = \varkappa_t(\mathfrak{X})$.

Замечание 18. Здесь и далее предполагается, что γ и γ^{-1} — C^r -вложения. ♠

Операторам (2.2.4) соответствуют изоморфные представления в виде

¹⁰В качестве таких карт могут выступать, например, карты атласов A_{\varkappa_R} , A_{\varkappa_t} , либо сужения карт объемлющего физического пространства на формы \mathcal{S}_R , \mathcal{S}_t .

следующих билинейных форм:

$$\begin{aligned}
T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R &= \left. \frac{\partial X^i}{\partial \mathfrak{X}^\nu} \right|_{\varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{x})} \partial_{X^i}|_{\varkappa_R(\mathfrak{x})} \otimes d\mathfrak{X}^\nu|_{\mathfrak{x}}, \\
T_{\mathfrak{X}}\varkappa_t &= \left. \frac{\partial x^i}{\partial \mathfrak{X}^\nu} \right|_{\varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{x})} \partial_{X^i}|_{\varkappa_t(\mathfrak{x})} \otimes d\mathfrak{X}^\nu|_{\mathfrak{x}}, \\
T_X\gamma &= \left. \frac{\partial z^\mu}{\partial Z^\nu} \right|_{(\sigma_\beta^R)^{-1}(\varkappa_R(\mathfrak{x}))} \partial_{z^\mu}|_{\varkappa_t(\mathfrak{x})} \otimes dZ^\nu|_{\varkappa_R(\mathfrak{x})}, \\
T_x\gamma^{-1} &= \left. \frac{\partial Z^\nu}{\partial z^\mu} \right|_{(\sigma_\beta^t)^{-1}(\varkappa_t(\mathfrak{x}))} \partial_{Z^\nu}|_{\varkappa_R(\mathfrak{x})} \otimes dz^\mu|_{\varkappa_t(\mathfrak{x})},
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

где $(\mathfrak{X}^\alpha)_{\alpha=1}^n$ — локальные координаты на \mathfrak{B} , $(X^i)_{i=1}^m$ — локальные координаты на \mathfrak{P} , $(Z^\nu)_{\nu=1}^n$ — локальные координаты на \mathcal{S}_R , $(z^\mu)_{\mu=1}^n$ — локальные координаты на \mathcal{S}_t ; $(\partial_{\mathfrak{X}^\alpha})_{\alpha=1}^n$ — поле координатных реперов¹¹ на \mathfrak{B} , $(\partial_{X^i})_{i=1}^m$ — поле координатных реперов на \mathfrak{P} , $(\partial_{Z^\nu})_{\nu=1}^n$ — поле координатных реперов на \mathcal{S}_R , $(\partial_{z^\mu})_{\mu=1}^n$ — поле координатных реперов на \mathcal{S}_t , а $(d\mathfrak{X}^\alpha)_{\alpha=1}^n$, $(dX^i)_{i=1}^m$, $(dZ^\nu)_{\nu=1}^n$, $(dz^\mu)_{\mu=1}^n$ — соответствующие поля дуальных реперов (корреперов); отображения

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{x}^1, \dots, \mathfrak{x}^n) &\mapsto X^i(\mathfrak{x}^1, \dots, \mathfrak{x}^n), & (X^1, \dots, X^m) &\mapsto \mathfrak{X}^\alpha(X^1, \dots, X^m), \\
(Z^1, \dots, Z^n) &\mapsto z^\mu(Z^1, \dots, Z^n), & (z^1, \dots, z^n) &\mapsto Z^\nu(z^1, \dots, z^n),
\end{aligned}$$

где $\alpha, \mu, \nu = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, являются координатными отображениями, соответствующими $\varkappa_R, \varkappa_t, \gamma, \gamma^{-1}$.

Заметим, что, хотя отображения (2.2.3) непосредственно не определяют тензорные поля, они, в силу (2.2.4), индуцируют отображения

$$\mathfrak{X} \rightarrow T_{\mathfrak{X}}\varkappa_R, \quad \mathfrak{X} \rightarrow T_{\mathfrak{X}}\varkappa_t, \quad X \mapsto T_X\gamma, \quad x \mapsto T_x\gamma^{-1},$$

которые представляют собой поля тензоров второго ранга (операторов или билинейных форм).

Следует отметить, что все полученные соотношения (2.2.3)–(2.2.5), в общем случае, не несут никакой метрической информации и содержат произвол, связанный с выбором картирующих отображений. Исключение составляет случай евклидова физического пространства, в котором

¹¹Значения полей реперов и корреперов в точках многообразий будут обозначаться вертикальной чертой с указанием значения аргумента: $\mathfrak{X} \mapsto \partial_{\mathfrak{X}^\alpha}|_{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{X} \mapsto d\mathfrak{X}^\alpha|_{\mathfrak{x}}$ и т.д.

имеется выделенная декартова карта, по определению связанная с выделенной декартовой метрикой соотношениями $\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_s = \delta_{ks}$.

51°. Форма $\mathcal{S} = \varkappa(\mathfrak{B})$ тела \mathfrak{B} рассматривается как отдельное n -мерное C^r -многообразие, связанное с \mathfrak{P} посредством канонической инъекции $j_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{P}$, действующей по правилу: $X \mapsto X$ и являющейся C^r -вложением. При этом, между касательными пространствами $T_X \mathcal{S}$ и $T_X \mathfrak{P}$ в точке $X \in \mathcal{S}$ имеется связь, которая обеспечивается касательным отображением $T_X j_{\mathcal{S}}$. Оно инъективно, так как $j_{\mathcal{S}}$ является C^r -вложением и размерность его образа, $T_X j_{\mathcal{S}}(T_X \mathcal{S})$, равна n . Отображение

$$\text{In}_{\mathcal{S}; X} := T_X j_{\mathcal{S}} : T_X \mathcal{S} \rightarrow T_X \mathfrak{P} \quad (2.2.6)$$

называется далее *оператором вложения* в точке $X \in \mathcal{S}$. Семейство $\{\text{In}_{\mathcal{S}; X}\}_{X \in \mathcal{S}}$ порождает отображение $\text{In}_{\mathcal{S}} := T j_{\mathcal{S}} : T \mathcal{S} \rightarrow T \mathfrak{P}$ между касательными расслоениями.

Замечание 19. При рассмотрении вложенных подмногообразий [120], часто отождествляют по изоморфизму касательное пространство к подмногообразию с его образом при касательном отображении к канонической инъекции. Согласно этой методологии, необходимо отождествить $T_X \mathcal{S}$ с $T_X j_{\mathcal{S}}(T_X \mathcal{S})$ и считать, что $T_X \mathcal{S}$ является подпространством $T_X \mathfrak{P}$. Мы не следуем этому подходу по следующей причине. Кривые на \mathcal{S} есть отображения вида $\chi : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{S}$, а кривые на \mathfrak{P} — отображения вида $\chi' : \mathbb{I}' \rightarrow \mathfrak{P}$. Это — разные отображения, так как они имеют разные области прибытия [87]. Поэтому ни одно из отображений вида χ' не содержится в классе эквивалентности, определяющем касательный вектор к \mathcal{S} . Аналогичные рассуждения справедливы для χ . ♠

В случае $\mathfrak{P} = \mathcal{E}^m$, с точностью до изоморфизма $T_X \mathcal{E}^m \cong \mathcal{V}^m$ можно записать, что

$$\text{In}_{\mathcal{S}; X} = T_X j_{\mathcal{S}} : T_X \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}^m.$$

Если на \mathcal{E}^m выбрано декартово картирование $(X^i)_{i=1}^m$, то оператор вложения (2.2.6) в точке $X \in \mathcal{S}$ представляется следующим диадным разложением¹²:

$$\text{In}_{\mathcal{S}; X} = \left. \frac{\partial X^k}{\partial Z^\alpha} \right|_{\sigma^{-1}(X)} \mathbf{i}_k \otimes dZ^\alpha \Big|_X, \quad (2.2.7)$$

¹²Кортежи (Z^α) — локальные координаты на \mathcal{S} , соответствующие картирующему отображению σ . В частности, это могут быть кортежи (\mathbf{x}^α) — локальные координаты на теле. Тогда $\sigma = \varkappa_R \circ \varphi$, где φ — картирующее отображение на теле \mathfrak{B} .

где $(X^1, \dots, X^m) = \mathcal{D} \circ j_{\mathcal{S}} \circ \sigma(Z^1, \dots, Z^n)$ — координатное представление $j_{\mathcal{S}}$, в котором σ — картрирующее отображение на \mathcal{S} . Тогда можно определить векторное поле

$$\mathbf{E}_{\alpha} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}^m, \quad X \mapsto \mathbf{E}_{\alpha}|_X := \text{In}_{\mathcal{S}; X} \lrcorner \partial_{Z^{\alpha}}|_X = \left. \frac{\partial X^k}{\partial Z^{\alpha}} \right|_{\sigma^{-1}(X)} \mathbf{i}_k. \quad (2.2.8)$$

Символически, $\mathbf{E}_{\alpha} = \text{In}_{\mathcal{S}} \lrcorner \partial_{Z^{\alpha}}$. Но поле $(\mathbf{E}_{\alpha})_{\alpha=1}^n$, в рамках классической интерпретации, есть ни что иное, как поле реперов локальной криволинейной системы координат $(Z^{\alpha})_{\alpha=1}^n$ поверхности или в пространстве. Таким образом, действие оператора вложения на элемент координатного репера дает *евклидов* вектор локального базиса криволинейной системы координат (Z^{α}) , заданной на множестве \mathcal{S} . Таким образом, абстрактный вектор $\partial_{Z^{\alpha}}|_X$ становится наблюдаемым вектором $\mathbf{E}_{\alpha}|_X$.

52°. Соображения предыдущего пункта позволяют установить связь между градиентом деформации, определенным в п. **50°**, и его классическим аналогом. Пусть $m = n$, а

$$\gamma = \widehat{\mathbf{x}}_t \circ \widehat{\mathbf{x}}_R^{-1} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_t$$

представляет деформацию тела \mathfrak{B} в физическом пространстве \mathcal{E}^m . Согласно классической теории упругости, градиент деформации есть производное отображение γ [86], т.е. поле линейных отображений $X \mapsto \mathbf{F}_X \in \text{Lin}(\mathcal{V}^m; \mathcal{V}^m)$, линеаризующих деформацию в окрестности каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$. Именно, для всякой точки $X \in \mathcal{S}_R$ и $\mathbf{h} \in \mathcal{V}^m$, такого, что¹³ $X + \mathbf{h} \in \mathcal{S}_R$, имеем:

$$\gamma(X + \mathbf{h}) = \gamma(X) + \mathbf{F}_X[\mathbf{h}] + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|), \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

В репере $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^m$ оператор \mathbf{F}_X имеет следующее диадное представление:

$$\mathbf{F}_X = \left. \frac{\partial x^k}{\partial X^j} \right|_{(X^1, \dots, X^m)} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}^j, \quad (2.2.9)$$

где $(X^i)_{i=1}^m, (x^i)_{i=1}^m$ — декартовы координат точек отсчетной и актуальной форм, $(x^1, \dots, x^m) = \mathcal{D} \circ \gamma \circ \mathcal{D}^{-1}(X^1, \dots, X^m)$ — координатное представление γ , а векторы \mathbf{i}^k определяются из условий $\mathbf{i}^k \cdot \mathbf{i}_s = \delta_s^k$.

¹³Для каждой из форм \mathcal{S} тела \mathfrak{B} ее коразмерность $\dim \mathcal{E}^m - \dim \mathcal{S}$ равна нулю, поэтому согласно Предложению 5.1 [120], \mathcal{S} — открытое множество.

Замечание 20. Для диадного представления в евклидовом пространстве в пределах настоящего пункта используется символ \odot , чтобы подчеркнуть отличие от общей конструкции тензорного произведения \otimes . В классической механике диада $\mathbf{u} \odot \mathbf{v} \in \text{Lin}(\mathcal{V}^m; \mathcal{V}^m)$ определяется по действию [92]:

$$(\mathbf{u} \odot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} := (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}.$$



На каждую из форм $\mathcal{S}_R, \mathcal{S}_t$ можно сузить декартову арифметизацию \mathcal{D} и получить атласы, состоящие из одной карты. Согласно (2.2.5), в котором нужно положить $Z^i = X^i, z^i = x^i$, получаем диадное представление

$$T_X \gamma = \left. \frac{\partial x^k}{\partial X^j} \right|_{(X^1, \dots, X^m)} \partial_{X^k}|_x \otimes dX^j|_X.$$

Замечание 21. Высказывание «сузить декартову арифметизацию \mathcal{D} на форму $\mathcal{S} = \varkappa(\mathcal{B})$ тела \mathcal{B} » требует уточнения. Подразумевается, что размерность тела совпадает с размерностью пространства и что декартовы координаты, заданные на всем пространстве, индуцируются на \mathcal{S} . Для этого определяется отображение

$$\tilde{\mathcal{D}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{S}), \quad X \mapsto \mathcal{D}(X),$$

являющееся гомеоморфизмом \mathcal{S} на $\mathcal{D}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^n$. Следовательно, $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{D}}^{-1})$ — карта на \mathcal{S} . Таким образом, точки \mathcal{S} можно описать в рамках одной карты. Покажем, что карта $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{D}}^{-1})$ C^r -согласована с любой картой атласа $A_\varkappa = \{(\varkappa(U_\alpha), \hat{\varkappa} \circ \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$. Для этого достаточно показать, что отображение перехода

$$\hat{\varkappa}_c = \tilde{\mathcal{D}} \circ \hat{\varkappa} \circ \varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{D}(\varkappa(U_\alpha))$$

является C^r -диффеоморфизмом. Поскольку $\hat{\varkappa}_c$ с точностью до области прибытия совпадает с координатным представлением C^r -вложения \varkappa в паре карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и $(\mathcal{E}^m, \mathcal{D}^{-1})$, то C^r -отображение $\hat{\varkappa}_c$ в каждой точке $p \in \mathbb{R}^n$ имеет ранг $\text{rank}_p \hat{\varkappa}_c = n$. Тогда согласно Теореме об обратном отображении [120, с.34], отображение $\hat{\varkappa}_c$ является локальным C^r -диффеоморфизмом. Вместе с тем, как композиция инъективных отображений, $\hat{\varkappa}_c$ — инъективно. Из Следствия [120, с.36] тогда вытекает, что $\hat{\varkappa}_c$ — C^r -диффеоморфизм. Таким образом, карта $(\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{D}}^{-1})$ C^r -согласована с любой картой из A_\varkappa . ♠

Замечание 22. Отметим, что в силу (2.2.8) справедливы равенства

$$\text{In}_{\mathcal{S}_R} \lrcorner \partial_{X^k} = \frac{\partial X^s}{\partial X^k} \mathbf{i}_s = \mathbf{i}_k \quad \text{и} \quad \text{In}_{\mathcal{S}_t} \lrcorner \partial_{x^k} = \mathbf{i}_k.$$



Согласно (2.2.7), в котором для рассматриваемого случая

$$\text{In}_{\mathcal{S}; X} = \mathbf{i}_k \otimes dX^k|_X,$$

имеем¹⁴

$$\begin{aligned} \text{In}_{\mathcal{S}_t; x} \circ T_X \gamma \circ \text{In}_{\mathcal{S}_R; X}^{-1} &= \frac{\partial x^k}{\partial X^j} \Big|_{(X^1, \dots, X^m)} \mathbf{i}_k \otimes i^j \approx \\ &\approx \frac{\partial x^k}{\partial X^j} \Big|_{(X^1, \dots, X^m)} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}^j = \mathbf{F}_X. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Слева от знака \approx в диадном разложении присутствует элемент корепера $(i^k)_{k=1}^m$ к $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^m$, а справа — элемент дуального векторного репера $(\mathbf{i}^k)_{k=1}^m$. Такое различие обусловлено евклидовой структурой объемлющего пространства. Именно, когда рассматривается действие билинейной формы $T_X \gamma$ на вектор, то это действие осуществляется с помощью операции \lrcorner : $T_X \gamma \lrcorner u$, что приводит к каноническому спариванию этого вектора с соответствующим *ковектором* в диадном произведении. Здесь евклидова структура не используется. Однако билинейная форма \mathbf{F}_X , согласно классической механике континуума, действует на вектор с помощью (\cdot) : $\mathbf{F}_X \cdot u$, что приводит к скалярному произведению этого вектора с соответствующим *вектором* в диадном произведении.

Выберем в \mathcal{S}_R локальные координаты $(Z^i)_{i=1}^m$ и «вморозим» их в форму. Математически это означает, что между картирующими отображениями на \mathcal{S}_R и \mathcal{S}_t выполнено соотношение $\sigma_t = \gamma \circ \sigma_R$. Операторы вложения в таком случае будут представлены следующими разложениями:

$$\text{In}_{\mathcal{S}_R; X} = \frac{\partial X^k}{\partial Z^j} \Big|_{(Z^1, \dots, Z^m)} \mathbf{i}_k \otimes dZ^j|_X, \quad \text{In}_{\mathcal{S}_t; x} = \frac{\partial x^k}{\partial Z^j} \Big|_{(Z^1, \dots, Z^m)} \mathbf{i}_k \otimes dZ^j|_x.$$

Векторы локального базиса на \mathcal{S}_R и \mathcal{S}_t обозначим через \mathbf{E}_k и \mathbf{e}_k :

$$\mathbf{E}_k = \frac{\partial X^j}{\partial Z^k} \mathbf{i}_j, \quad \mathbf{E}^k = \frac{\partial Z^k}{\partial X^j} \mathbf{i}^j, \quad \mathbf{e}_k = \frac{\partial x^j}{\partial Z^k} \mathbf{i}_j, \quad \mathbf{e}^k = \frac{\partial Z^k}{\partial x^j} \mathbf{i}^j.$$

Тогда из формулы (2.2.9) и цепного правила дифференцирования получаем классическую формулу для \mathbf{F}_X [92]: $\mathbf{F}_X = \mathbf{e}_k|_x \otimes \mathbf{E}^k|_X$. Выражение для $T_X \gamma$ принимает вид: $T_X \gamma = \partial_{Z^k}|_x \otimes dZ^k|_X$, так как координатное

¹⁴Множество значений $\text{In}_{\mathcal{S}_R}$ есть n -мерное подпространство \mathcal{V}^m , а потому совпадает с областью прибытия.

представление $\tilde{\gamma} = \sigma_t^{-1} \circ \gamma \circ \sigma_R$ является тождественным отображением. В таком случае получаем:

$$\begin{aligned} \text{In}_{\mathcal{S}_t; x} \circ T_X \gamma \circ \text{In}_{\mathcal{S}_R; X}^{-1} &= \frac{\partial Z^k}{\partial X^j} \Big|_{(X^1, \dots, X^m)} \mathbf{e}_k|_x \otimes i^j = \mathbf{e}_k|_x \otimes E^k|_X \approx \\ &\approx \mathbf{e}_k|_x \otimes \mathbf{E}^k|_X = \mathbf{F}_X. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Здесь $i^j \in (\mathcal{V}^m)^*$ — элемент дуального к (\mathbf{i}_k) репера.

Замечание 23. В терминах одной операции \otimes взаимосвязь отображений $T_X \gamma$ и \mathbf{F}_X обеспечивается формулой

$$\mathbf{F}_X = \text{In}_{\mathcal{S}_t; x} \circ T_X \gamma \circ \text{In}_{\mathcal{S}_R; X}^{-1}. \quad (2.2.12)$$



53°. Метрическая информация — результат измерения — требует для своего определения **i)** объект измерения; **ii)** средство измерения; **iii)** калибровку. Находясь в рамках классических идей континуальной механики (см. начало раздела), определим в качестве объекта измерения — физические образы материальных волокон, в качестве средства измерения — сравнение инфинитезимальных элементов образов материальных волокон как элементов касательного расслоения физического пространства \mathfrak{P} , используя для калибровки метрику, заданную на \mathfrak{P} . Поясним это подробнее.

Под материальным волокном — основным «структурным элементом» тела будем понимать образ гладкой кривой на \mathfrak{B} , т.е. множество материальных точек $\chi(\mathbb{I})$, где $\mathbb{I} =] - a, a[\subset \mathbb{R}$, а $\chi : \mathbb{I} \rightarrow \mathfrak{B}$ — гладкая кривая (для единообразия полагаем, что ее порядок гладкости равен r). Так как тело \mathfrak{B} не наблюдаемо, то материальные волокна так же не являются наблюдаемыми. Однако образы их конфигураций — наблюдаемые в \mathfrak{P} одномерные многообразия $\chi_R(\mathbb{I})$ и $\chi_t(\mathbb{I})$, где

$$\chi_R = \hat{\mathcal{I}}_R \circ \chi : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{I}_R(\mathfrak{B}), \quad \chi_t = \hat{\mathcal{I}}_t \circ \chi : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{I}_t(\mathfrak{B}).$$

Именно они являются объектами измерений. Поскольку $\chi_t = \gamma \circ \chi_R$ и $\chi_R = \gamma^{-1} \circ \chi_t$, то можно говорить о деформации волокна $\chi_R(\mathbb{I})$ в волокно $\chi_t(\mathbb{I})$ и обратно. Инфинитезимальный анализ этих отображений приводит к касательным отображениям

$$T(\gamma \circ \chi_R) = (T\gamma) \circ (T\chi_R), \quad \text{или} \quad T(\gamma^{-1} \circ \chi_t) = (T\gamma^{-1}) \circ (T\chi_t),$$

где $T\gamma$, $T\gamma^{-1}$ — касательные отображения к прямой и обратной деформациям. Таким образом, в рамках принятых гипотез и приближений, средство измерения — «прибор» — различает $T\gamma$ (или $T\gamma^{-1}$), а для его калибровки следует задать метрику на $\chi_R(\mathbb{I})$ (или на $\chi_t(\mathbb{I})$).

Здесь требуется привлечение дополнительной гипотезы: метрика на измеряемых волокнах индуцируется метрикой объемлющего физическое пространства¹⁵ \mathfrak{P} , которая задается независимо от состояния тела. Если эта метрика определяется полем симметричных билинейных форм $\mathcal{g} : X \rightarrow T_X^* \mathfrak{P} \otimes T_X^* \mathfrak{P}$, удовлетворяющих условиям дефинитности (см. [1], Глава 3, п. 78°), то многообразию \mathfrak{P} приобретает статус риманова пространства со связностью ∇ Леви–Чивиты: $\forall u, v \in \mathcal{V}^r(\mathfrak{P})$, $u = u^i \partial_i$, $v = v^i \partial_i$,

$$\nabla_u v = u^i (\partial_i v^k + v^j \gamma_{\cdot ij}^{k\cdot\cdot}) \partial_k, \quad \gamma_{\cdot ij}^{k\cdot\cdot} = \frac{g^{kl}}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

В этом случае в качестве образов волокон $\chi_R(\mathbb{I})$ (или, если речь идет об обратной деформации, $\chi_t(\mathbb{I})$) удобно использовать координатные кривые, а билинейные формы \mathcal{g}_X представлять в виде тензорного разложения в базисе натуральных кореперов, $\mathcal{g}_X = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Если предположить, что физическое пространство \mathfrak{P} имеет аффинно–евклидову структуру, то такая конструкция приводит к хорошо известной классической интерпретации: координатные линии некоторой (выбранной из соображения удобства исследования) системы координат «замораживаются» в теле и искажаются вместе с ним в ходе деформации. При этом, следуя принятой терминологии, сеть координатных линий можно интерпретировать как лагранжеву сеть, а сеть их образов относительно γ — как эйлерову сеть. Таким образом, в контексте настоящей работы, фундаментальным измеряемым объектом является упорядоченная пара $(T\gamma, \mathcal{g})$.

54°. Перейдем теперь к построению материальной метрики. В отличие от метрики физического пространства, которая задавалась независимо от тела, материальная метрика определяется структурой тела: в рамках настоящей работы она определяется его материальной неоднородностью. Образно говоря (следуя И. Кунину [47]), можно сказать, что материальная метрика определяет «внутреннюю геометрию» тела.

¹⁵То есть, метрика на форме \mathcal{S} есть «pullback» (см. [1], Глава 3, п. 86°) $i_{\mathcal{S}}^* \mathcal{g}$ пространственной метрики \mathcal{g} .

Отправной точкой для определения такой метрики является понятие *материального единообразия* (см. Глава 1, п. 35°), которое должно локально достигаться в каждой точке тела при задании на нем материальной метрики. Количественные соотношения, определяющие материальную метрику, могут быть получены по заданному функционалу отклика и дополнительной информации об условиях реализации локально единообразного состояния в каждой точке тела. Напомним, что отклик характеризуется множеством \mathcal{R} упорядоченных наборов полей, называемых дескрипторами отклика. В частности, \mathcal{R} может состоять из вещественнозначных функций класса $\mathcal{C}^r(\mathfrak{B}; \mathbb{R})$, представляющих плотность упругой энергии, т.е. $\mathcal{R} = (W)$. Предположим, что математически отклик характеризуется зависимостью $W = \mathcal{W}(\mathfrak{X}, T\mathfrak{X}, \mathfrak{g})$, т.е. материал тела *прост* [107, с. 60].

Следуя Главе 1, будем полагать, что локально единообразное состояние в окрестности произвольной точки \mathfrak{X} тела \mathfrak{B} может быть достигнуто посредством некоторой специальной деформации из актуального состояния, что означает существование конфигурации \mathfrak{X}^R , определяющей соответствующую форму $\mathfrak{X}^R(\mathfrak{B})$. Таким образом, телу \mathfrak{B} из простого материала соответствует семейство $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}} = \{\mathfrak{X}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$ глобальных конфигураций

$$\mathfrak{X}^R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{X}^R : \mathfrak{Y} \mapsto \mathfrak{X}^R(\mathfrak{Y}),$$

каждая из которых преобразует элементарный объем, окружающий частицу \mathfrak{X} тела, в единообразную форму.

Каждый элемент семейства $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}}$ индуцирует на \mathfrak{B} метрику из физического пространства \mathfrak{P} — это соответствует измерению, произведенному абстрактным «прибором», длин и углов инфинитезимальных волокон в окрестности образа точки $\mathfrak{X}^R(\mathfrak{X})$ в составе формы $\mathfrak{X}^R(\mathfrak{B})$, а именно, определяет «pullback» $\mathcal{G}^{(\mathfrak{X})} := (\mathfrak{X}^R)^* \mathfrak{g}$ пространственной метрики:

$$\forall \mathfrak{Y} \in \mathfrak{B} \quad \forall u, v \in T_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{B} : \quad \mathcal{G}^{(\mathfrak{X})}|_{\mathfrak{Y}}(u, v) = \mathfrak{g}(T_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{X}^R(u), T_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{X}^R(v)).$$

Несмотря на апелляцию к измерению абстрактным «прибором» в инфинитезимальной окрестности, метрика $\mathcal{G}^{(\mathfrak{X})}$ определена на всем \mathfrak{B} , превращая многообразие \mathfrak{B} в риманово пространство $(\mathfrak{B}, \mathcal{G}^{(\mathfrak{X})})$. Однако, поскольку метрика $\mathcal{G}^{(\mathfrak{X})}$ определена на \mathfrak{B} , свойства порождаемой ею связности Леви–Чивиты не отличаются от свойств связности на \mathfrak{P} . В частности, если \mathfrak{P} — евклидово пространство, то $(\mathfrak{B}, \mathcal{G}^{(\mathfrak{X})})$ — многообразие с евклидовой связностью. Этот факт интуитивно очевиден: ведь

$\kappa_{\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{B})$ — форма тела \mathfrak{B} , получаемая некоторой (специальной) деформацией из актуальной формы в евклидовом пространстве. Таким образом, на \mathfrak{B} устанавливается континуальное семейство $\{\mathcal{G}^{(\mathfrak{X})}\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}}$ метрик, определяющих связность одного и того же тела. Из элементов этого семейства синтезируется *материальная метрика*, вообще говоря, нового типа, следующим образом. Определим поле $\mathcal{G} : \mathfrak{X} \mapsto \mathcal{G}^{(\mathfrak{X})}|_{\mathfrak{X}}$ билинейных положительно определенных дефинитных форм. Предположим, что это поле класса C^{r-1} на \mathfrak{B} , тогда оно определяет риманову метрику, которую будем называть *материальной*. Отметим, что

$$\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{B} \quad \forall u, v \in T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} : \quad \mathcal{G}_{\mathfrak{X}}(u, v) = \mathcal{g}(T_{\mathfrak{X}}\kappa_{\mathfrak{X}}^R(u), T_{\mathfrak{X}}\kappa_{\mathfrak{X}}^R(v)). \quad (2.2.13)$$

Глобальным конфигурациям можно поставить в соответствие локальные конфигурации, трансформирующие инфинитезимальные части тела — «осколки» — в единообразную локальную форму. В Главе 1 локальные конфигурации были определены с использованием координатного представления конфигураций и производного отображения. Вместе с тем, локальные конфигурации можно построить без апелляции к координатному представлению. Для этого необходимо использовать обобщение производного отображения — касательное отображение. Определим на множестве $\mathfrak{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P})$ всех регулярных конфигураций отношение эквивалентности:

$$\forall \kappa_1, \kappa_2 \in \mathfrak{C}^r(\mathfrak{B}; \mathfrak{P}) : \quad (\kappa_1 \sim_{\mathfrak{X}} \kappa_2) \Leftrightarrow ((\kappa_1(\mathfrak{X}) = \kappa_2(\mathfrak{X})) \wedge (T_{\mathfrak{X}}\kappa_1 = T_{\mathfrak{X}}\kappa_2)).$$

Замечание 24. Отношение $\sim_{\mathfrak{X}}$ рефлексивно, т.к. $T_{\mathfrak{X}}\kappa = T_{\mathfrak{X}}\kappa$, симметрично, т.к. из $T_{\mathfrak{X}}\kappa_1 = T_{\mathfrak{X}}\kappa_2$ следует $T_{\mathfrak{X}}\kappa_2 = T_{\mathfrak{X}}\kappa_1$ и транзитивно, т.к. из $T_{\mathfrak{X}}\kappa_1 = T_{\mathfrak{X}}\kappa_2$ и $T_{\mathfrak{X}}\kappa_2 = T_{\mathfrak{X}}\kappa_3$ следует $T_{\mathfrak{X}}\kappa_1 = T_{\mathfrak{X}}\kappa_3$. ♠

Классы эквивалентности по заданному отношению $\sim_{\mathfrak{X}}$ будем обозначать через $[\kappa]_{\mathfrak{X}}$ и называть *локальными конфигурациями в точке \mathfrak{X}* . Каждому классу эквивалентности $[\kappa]_{\mathfrak{X}}$ однозначно соответствует касательное отображение $T_{\mathfrak{X}}\chi$, которое не зависит от представителя $\chi \in [\kappa]_{\mathfrak{X}}$. В этой связи, локальную конфигурацию можно отождествить с соответствующим ей линейным отображением.

Среди локальных конфигураций есть классы, определяемые элементами семейства $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}}$, т.е. $[\kappa_{\mathfrak{X}}^R]_{\mathfrak{X}}$. Выбирая в каждом классе $[\kappa_{\mathfrak{X}}^R]_{\mathfrak{X}}$ по представителю, получаем поле $\mathcal{K} : \mathfrak{X} \mapsto T_{\mathfrak{X}}\kappa$, определенное на \mathfrak{B} , где $\kappa \in [\kappa_{\mathfrak{X}}^R]_{\mathfrak{X}}$. С физической точки зрения, отображение $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$ переводит ин-

финитезимальные материальные волокна, исходящие из точки \mathfrak{X} (математически, касательные векторы), в единообразную окрестность точки $\kappa_{\mathfrak{X}}^R(\mathfrak{X})$. Предположим, что поле \mathcal{K} является полем класса C^{r-1} . Тогда формула (2.2.13) примет вид:

$$\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{B} \quad \forall u, v \in T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} : \quad \mathcal{G}_{\mathfrak{X}}(u, v) = \mathcal{g}(\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(u), \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}(v)). \quad (2.2.14)$$

Отметим, что поле¹⁶ \mathcal{K} — двухточечное тензорное поле, диадное представление которого имеет вид $\mathcal{K} = K_{\cdot\alpha}^i e_i \otimes E^\alpha$, где (e_i) — поле реперов в физическом пространстве, (E^α) — поле кореперов на теле \mathfrak{B} . Метрика \mathcal{G} порождает материальную связность Леви–Чивиты с коэффициентами $\Gamma_{\cdot ij}^{k\cdot\cdot}$:

$$\Gamma_{\cdot ij}^{k\cdot\cdot} = \frac{G^{kl}}{2} (\partial_i G_{jl} + \partial_j G_{il} - \partial_l G_{ij}), \quad \text{где} \quad G_{ij} = g_{sp} K_{\cdot i}^s K_{\cdot j}^p.$$

Замечание 25. При переходе от точки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ к точке $\mathfrak{Y} \in \mathfrak{B}$ конфигурация $\kappa_{\mathfrak{X}}^R$ меняется на конфигурацию $\kappa_{\mathfrak{Y}}^R$, поэтому в общем случае поле \mathcal{K} не является касательным отображением к некоторой регулярной конфигурации тела. ♠

Значение \mathcal{K} в точке \mathfrak{X} тела определяется классом эквивалентности $[\kappa_{\mathfrak{X}}^R]_{\mathfrak{X}}$, что позволяет сформулировать принцип инфинитезимальной локализации: отклик тела в произвольной точке $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ зависит от класса эквивалентности по отношению $\sim_{\mathfrak{X}}$, т.е. $W = \mathcal{W}(\mathfrak{X}, \mathcal{K}_{\mathfrak{X}}, \mathcal{g})$.

55°. Классические, евклидовы представления мер деформаций использовали тензор \mathbf{F}^T , получаемый транспонированием градиента векторного поля мест \mathbf{F} . Для определения аналогичного объекта в неевклидовом случае требуются особые рассуждения, поскольку места определяются не векторным полем, а упорядоченной n -кой координат. Следовательно, $T\gamma$ не является тензорным полем второго ранга, хотя его значения можно интерпретировать как тензоры в алгебраическом смысле, т.е. как линейные операторы (см. также Michal [125, с. 76], Можен [4, с. 46], Марсден [20, с. 48]). Фиксируем точку $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ и соответствующую ей точку $X = \kappa(\mathfrak{X})$. Отображение $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ есть линейное отображение $T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$ в $T_X\mathfrak{P}$. Транспонированным к $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ называется отображение $\mathcal{F}_X^T : T_X\mathfrak{P} \rightarrow T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$, такое, что

$$\forall u \in T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \quad \forall v \in T_X\mathfrak{P} : \quad \mathcal{g}_X(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}u, v) = \mathcal{G}_{\mathfrak{X}}(u, \mathcal{F}_X^T v). \quad (2.2.15)$$

¹⁶По терминологии Нолла [51], поле \mathcal{K} — единообразная отсчетная (uniform reference).

Замечание 26. Отображения $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}$ и \mathcal{F}_X^T , где $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ и $X = \varkappa(\mathfrak{X})$ представляются в виде билинейных форм

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{X}} = (\mathcal{F}_{\mathfrak{X}})_{\cdot\alpha}^i \partial_{X^i}|_X \otimes d\mathfrak{X}^\alpha|_{\mathfrak{X}}, \quad \mathcal{F}_X^T = (\mathcal{F}_X^T)_{\cdot i}^\alpha \partial_{\mathfrak{X}^\alpha}|_{\mathfrak{X}} \otimes dX^i|_X,$$

где $(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}})_{\cdot\alpha}^i = \mathcal{F}_{\mathfrak{X}}(dX^i|_X, \partial_{\mathfrak{X}^\alpha}|_{\mathfrak{X}})$, $(\mathcal{F}_X^T)_{\cdot i}^\alpha = \mathcal{F}_X^T(d\mathfrak{X}^\alpha|_{\mathfrak{X}}, \partial_{X^i}|_X)$.

Получим соотношение для компонент $(\mathcal{F}_X^T)_{\cdot i}^\alpha$. Используя равенство (2.2.15), в котором $u = \partial_{\mathfrak{X}^\alpha}|_{\mathfrak{X}}$, $v = \partial_{X^i}|_X$, получаем

$$(\mathcal{G}_{\mathfrak{X}})_{\alpha\beta} (\mathcal{F}_X^T)_{\cdot i}^\beta = (\mathcal{G}_X)_{ki} (\mathcal{F}_{\mathfrak{X}})_{\cdot\alpha}^k,$$

откуда $(\mathcal{F}_X^T)_{\cdot i}^\alpha = (\mathcal{G}_{\mathfrak{X}})^{\alpha\beta} (\mathcal{G}_X)_{ij} (\mathcal{F}_{\mathfrak{X}})_{\cdot\beta}^j$, где $(\mathcal{G}_X)_{ij} = (g_{ij} \circ \varkappa)(\mathfrak{X})$. \spadesuit

Теперь, по построенным поточечным отображениям определим \mathcal{F}^T как отображение одного векторного расслоения в другое. Для этого обозначим через $\mathcal{V}_{\varkappa} := \bigcup_{X \in \varkappa(\mathfrak{B})} T_X \mathfrak{P}$ тотальное пространство ограничения расслоения [120, с. 255] $T\mathfrak{P}$ на $\varkappa(\mathfrak{B})$ с проекцией $\mathfrak{s} : \mathcal{V}_{\varkappa} \rightarrow \varkappa(\mathfrak{B})$, являющейся ограничением исходной проекции $T\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}$.

Определим отображение $\mathcal{F}^T : \mathcal{V}_{\varkappa} \rightarrow T\mathfrak{B}$ равенством

$$\forall u \in \mathcal{V}_{\varkappa} : \quad \mathcal{F}^T(u) := \mathcal{F}_{\mathfrak{s}(u)}^T(u).$$

56°. Наряду с транспонированным отображением \mathcal{F}^T , в определении которого явно используется метрика, может быть использовано сопряженное отображение \mathcal{F}^* , определяемое следующим образом. Снова фиксируем точку $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ и соответствующую ей точку $X = \varkappa(\mathfrak{X})$. Определим отображение [20] $\mathcal{F}_X^* : T_X^* \mathfrak{P} \rightarrow T_X^* \mathfrak{B}$ правилом

$$\forall \nu \in T_X^* \mathfrak{P} \quad \forall u \in T_X \mathfrak{B} : \quad (\mathcal{F}_X^* \nu)u = \nu(\mathcal{F}_X u).$$

Обозначим через $\mathcal{V}_{\varkappa}^* := \bigcup_{X \in \varkappa(\mathfrak{B})} T_X^* \mathfrak{P}$ тотальное пространство ограничения расслоения $T^* \mathfrak{P}$ на $\varkappa(\mathfrak{B})$ с проекцией $\mathfrak{q} : \mathcal{V}_{\varkappa}^* \rightarrow \varkappa(\mathfrak{B})$, являющейся ограничением исходной проекции $T^* \mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}$.

Аналогично \mathcal{F}^T определим отображение $\mathcal{F}^* : \mathcal{V}_{\varkappa}^* \rightarrow T^* \mathfrak{B}$ равенством

$$\forall \nu \in \mathcal{V}_{\varkappa}^* : \quad \mathcal{F}^*(\nu) := \mathcal{F}_{\mathfrak{q}(\nu)}^*(\nu).$$

Введем обозначение $w = v^{\flat p}$. По определению \mathcal{F}^* имеем $\langle \mathcal{F}^* w, u \rangle = w(\mathcal{F} u)$. Поэтому, справедливо равенство

$$\langle w, \mathcal{F} u \rangle = \langle \mathcal{F}^* w, u \rangle. \quad (2.2.16)$$

С физической точки зрения соотношение (2.2.16) определяет энергетическую сопряженность: удельная мощность, развиваемая пространственной плотностью сил w на физическом поле скорости $\mathcal{F}u$ равна удельной мощности, развиваемой материальной плотностью сил \mathcal{F}^*w на материальной скорости u .

57°. Отображения \mathcal{F}^T и \mathcal{F}^* взаимосвязаны посредством метрики. Пусть метрикам \mathcal{G} , \mathcal{g} соответствуют операции бемоль $(\cdot)^{b_b}$ и $(\cdot)^{b_p}$ (см. работу [1], Глава 3, п. **79°**). Тогда

$$\langle v^{b_p}, \mathcal{F}u \rangle = \mathcal{g}(\mathcal{F}u, v), \quad \langle (\mathcal{F}^T v)^{b_b}, u \rangle = \mathcal{G}(u, \mathcal{F}^T v).$$

Поэтому, соотношение (2.2.15) может быть записано как равенство канонических спариваний соответствующих пар вектор-ковектор:

$$\langle v^{b_p}, \mathcal{F}u \rangle = \langle (\mathcal{F}^T v)^{b_b}, u \rangle.$$

58°. Градиент деформации содержит в себе информацию о, собственно, деформации материальных волокон, и субъективную информацию о поворотах координатной системы, которую требуется исключить, в соответствии с принципом материальной индифферентности [107]. Теоретическую возможность такого действия дает теорема Коши о полярном разложении [20]. В соответствии с ней, для каждого $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$, существуют ортогональные тензоры $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}} : T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \rightarrow T_{\varkappa(\mathfrak{X})}\mathfrak{P}$, такие, что справедливы разложения

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \circ \mathcal{U}, \quad \mathcal{F}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{R}_{\mathfrak{X}} \circ \mathcal{U}_{\mathfrak{X}}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{V} \circ \mathcal{R}, \quad \mathcal{F}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{V}_{\varkappa(\mathfrak{X})} \circ \mathcal{R}_{\mathfrak{X}},$$

где симметричные¹⁷ положительно определенные тензоры $\mathcal{U}_{\mathfrak{X}} : T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \rightarrow T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$ и $\mathcal{V}_{\mathfrak{X}} : T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{P} \rightarrow T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{P}$ есть, соответственно, правый и левый тензоры искажений.

Замечание 27. Отображение $\mathcal{R}_{\mathfrak{X}} : T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} \rightarrow T_{\varkappa(\mathfrak{X})}\mathfrak{P}$ определяется следующими двумя условиями:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}^T \circ \mathcal{R}_{\mathfrak{X}} &= \text{тождественный оператор на } T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}, \\ \mathcal{R}_{\mathfrak{X}} \circ \mathcal{R}_{\mathfrak{X}}^T &= \text{тождественный оператор на } T_{\varkappa(\mathfrak{X})}\mathfrak{P}. \end{aligned}$$



59°. Для простых материалов применяются следующие комбинации элементов пары $(\mathcal{F}, \mathcal{F}^T)$ — правый \mathcal{C} и левый \mathcal{B} тензоры Коши–Грина:

¹⁷Т.е. $\mathcal{U}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{U}_{\mathfrak{X}}^T$ и $\mathcal{V}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{V}_{\mathfrak{X}}^T$.

$\mathcal{C} = \mathcal{F}^T \circ \mathcal{F}$, $\mathcal{B} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^T$. В соответствующих касательных слоях имеют место представления:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathfrak{X}} : T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B} &\rightarrow T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}, & \mathcal{C}_{\mathfrak{X}} &= \mathcal{F}_X^T \circ \mathcal{F}_{\mathfrak{X}}; \\ \mathcal{B}_X : T_X\mathfrak{P} &\rightarrow T_X\mathfrak{P}, & \mathcal{B}_X &= \mathcal{F}_X \circ \mathcal{F}_X^T, & X &= \varkappa(\mathfrak{X}). \end{aligned}$$

Замечание 28. Пусть $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$, $X = \varkappa(\mathfrak{X})$. Для любого вектора $u \in T_{\mathfrak{X}}\mathfrak{B}$, справедливо равенство

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{X}}(u) = \mathcal{F}_X^T(\mathcal{F}_{\mathfrak{X}}u) = (\mathcal{F}_X^T)_{\cdot i}^{\alpha} (\mathcal{F}_{\mathfrak{X}})_{\cdot \beta}^i \partial_{\mathfrak{X}^{\alpha}}|_{\mathfrak{X}} \otimes d\mathfrak{X}^{\beta}|_{\mathfrak{X}} u,$$

откуда $\mathcal{C}_{\mathfrak{X}} = (\mathcal{G}_{\mathfrak{X}})^{\alpha\gamma} (g_X)_{ij} (\mathcal{F}_{\mathfrak{X}})_{\cdot \gamma}^i (\mathcal{F}_{\mathfrak{X}})_{\cdot \beta}^j \partial_{\mathfrak{X}^{\alpha}}|_{\mathfrak{X}} \otimes d\mathfrak{X}^{\beta}|_{\mathfrak{X}}$. Окончательно, опуская значения аргументов, приходим к равенству

$$\mathcal{C} = G^{\alpha\gamma} g_{ij} \frac{\partial \varkappa^i}{\partial \mathfrak{X}^{\gamma}} \frac{\partial \varkappa^j}{\partial \mathfrak{X}^{\beta}} \partial_{\mathfrak{X}^{\alpha}} \otimes d\mathfrak{X}^{\beta}. \quad (2.2.17)$$

Аналогично, для любого вектора $u \in T_X\mathfrak{P}$, справедливо равенство

$$\mathcal{B}_X(u) = \mathcal{F}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{F}_X^T u) = (\mathcal{F}_{\mathfrak{X}})_{\cdot \alpha}^i (\mathcal{F}_X^T)_{\cdot j}^{\alpha} \partial_{X^i}|_X \otimes dX^j|_X u,$$

откуда, используя аналогичные рассуждения, можно прийти к следующему выражению:

$$\mathcal{B} = G^{\alpha\beta} g_{lj} \frac{\partial \varkappa^l}{\partial \mathfrak{X}^{\beta}} \frac{\partial \varkappa^k}{\partial \mathfrak{X}^{\alpha}} \partial_{X^k} \otimes dX^j. \quad (2.2.18)$$



Левый и правый тензоры искажений выражаются через тензоры Коши–Грина следующим образом:

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{X}} = (\mathcal{F}_{\varkappa(\mathfrak{X})}^T \mathcal{F}_{\mathfrak{X}})^{1/2} = (\mathcal{C}_{\mathfrak{X}})^{1/2}, \quad \mathcal{V}_{\varkappa(\mathfrak{X})} = (\mathcal{F}_{\mathfrak{X}} \mathcal{F}_{\varkappa(\mathfrak{X})}^T)^{1/2} = (\mathcal{B}_{\varkappa(\mathfrak{X})})^{1/2}.$$

60°. Положим $\mathcal{C}^{bb} := \mathcal{C}^{1bb}$. По определению операции $(\cdot)^b$, это тензор

$$\mathcal{C}^{bb} = g_{ij} \frac{\partial \varkappa^i}{\partial \mathfrak{X}^{\alpha}} \frac{\partial \varkappa^j}{\partial \mathfrak{X}^{\beta}} d\mathfrak{X}^{\alpha} \otimes d\mathfrak{X}^{\beta}.$$

Из последней формулы и выражения (3.3.1) (см. Главу 3, п. **86°** работы [1]), в котором надо заменить y на \varkappa , вытекает соотношение [20]

$$\mathcal{C}^{bb} = \varkappa^* g.$$

Можно установить аналогичную формулу, записанную в терминах «pushforward» материальной метрики. Для этого используется отображение $\widehat{\varkappa} : \mathfrak{B} \rightarrow \varkappa(\mathfrak{B})$, определяемое условием: $\widehat{\varkappa} : \mathfrak{X} \mapsto \varkappa(\mathfrak{X})$. Касательное отображение $\widehat{\mathcal{F}} = T\widehat{\varkappa} : T\mathfrak{B} \rightarrow T\varkappa(\mathfrak{B})$ служит «внутренней» мерой

деформации и связано с градиентом деформации $\mathcal{F} = T\kappa$ равенством $\widehat{\mathcal{F}} = \text{In}_{\kappa(\mathfrak{B})} \circ \widehat{\mathcal{F}}$. Использованием сечения $i_{\kappa(\mathfrak{B})}^* \mathcal{G}$ в качестве метрики на $\kappa(\mathfrak{B})$ и соотношения (2.2.15), в котором вместо \mathcal{G} подставляется $i_{\kappa(\mathfrak{B})}^* \mathcal{G}$, определяется $\widehat{\mathcal{F}}^T : T\kappa(\mathfrak{B}) \rightarrow T\mathfrak{B}$. Таким образом, можно определить «внутренний» левый тензор Коши–Грина $\widehat{\mathcal{B}} = \widehat{\mathcal{F}} \circ \widehat{\mathcal{F}}^T$. При этом имеет место формула, аналогичная (2.2.18).

Положим $\widehat{\mathcal{B}}^{\sharp p} := \widehat{\mathcal{B}}^{2\sharp p}$. По определению операции $(\cdot)^{\sharp}$,

$$\widehat{\mathcal{B}}^{\sharp p} = G^{\alpha\beta} \frac{\partial \widehat{\chi}^k}{\partial \widehat{x}^\alpha} \frac{\partial \widehat{\chi}^l}{\partial \widehat{x}^\beta} \partial_{X^k} \otimes \partial_{X^l}.$$

Из последней формулы и выражения (3.3.2) из [1], Глава 3, п. 86°, в котором надо заменить y на $\widehat{\chi}$ и \mathcal{G} на \mathcal{G} , вытекает равенство [20]

$$\widehat{\mathcal{B}}^{\sharp p} = \widehat{\chi}_*(\mathcal{G}^{\sharp b}),$$

в котором $\mathcal{G}^{\sharp b} := \mathcal{G}^{1\sharp b 2\sharp b}$.

Таким образом, правый тензор Коши–Грина определяет «pullback»-отображение пространственной метрики, а левый — «pushforward»-отображение материальной метрики.

3. Структурно неоднородные тела

61°. В настоящей работе структурно неоднородные тела представляются семейством \mathfrak{G} гладких тел [15, 126], т.е. $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$, где \mathbb{I} — линейно упорядоченное множество индексов. Без потери общности можно полагать, что $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. Каждый элемент семейства \mathfrak{G} , т.е. множество \mathfrak{B}_α , характеризует мгновенный материальный состав тела. При рассмотрении процессов роста мощность множества \mathbb{I} определяет их характер: при $\text{Card } \mathbb{I} = N < \infty$ рост дискретен, а при $\text{Card } \mathbb{I} = \aleph_1$ рост непрерывен (более детальная классификация приведена в [15]). Дискретный рост приводит к *дискретной структурной неоднородности*, а непрерывный рост — к *непрерывной структурной неоднородности*. Далее будем полагать, что \mathfrak{G} упорядочено по вложению, т.е.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{I} : (\alpha < \beta) \Rightarrow (\mathfrak{B}_\alpha \subsetneq \mathfrak{B}_\beta).$$

Этому условию соответствует «чистый рост» [126].

В общем случае различным α, β соответствуют различные многообразия $\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\beta$, топологические структуры которых независимы [117]. Однако в настоящей работе будем полагать, что при $\alpha < \beta$, \mathfrak{B}_α — часть \mathfrak{B}_β и, следовательно, \mathfrak{B}_α должно обладать топологией, индуцированной из \mathfrak{B}_β . В этой связи предлагается рассматривать тела из \mathfrak{G} как C^r -подмногообразия¹⁸ некоторого объемлющего гладкого n -мерного многообразия \mathcal{M} , называемого далее *материальным многообразием*. С топологической точки зрения, элементы семейства \mathfrak{G} будут непустыми открытыми множествами¹⁹ в \mathcal{M} .

62°. Остановимся подробнее на структурно неоднородных телах с дискретной неоднородностью, так как они, во-первых, представляют широкий класс продуктов аддитивных технологий, а во-вторых, являются «опорой мысли» для понимания процессов непрерывного роста. Без ограничения общности можно считать, что \mathbb{I} — последовательность первых N натуральных чисел, т.е. $\mathbb{I} = \{1, \dots, N\}$, где $N \geq 1$.

Для дальнейших рассуждений удобно представить элементы семейства \mathfrak{G} как соединения непересекающихся тел–слоев. Результаты таких соединений будем называть сборками (аллюзия к технологическому процессу). Так, к телу \mathfrak{B}_1 присоединяется тело–слой, что в результате дает тело \mathfrak{B}_2 (первая сборка); к телу \mathfrak{B}_2 присоединяется тело–слой и тем самым получается тело \mathfrak{B}_3 (вторая сборка), и т.д.

Несмотря на то, что разделение тела на слои и его сборка из слоев кажутся естественными операциями над множествами материальных точек, составляющих тело, их реализация имеет технические сложности. В частности, теоретико-множественная разность тела и его собственной части дает множество, которое не является открытым и, следовательно, не является телом. С другой стороны, в результате объединения двух тел, имеющих общую границу, последняя не окажется в составе тела, а замыкание такого множества телом уже не будет. Решение этих и подобных проблем может быть осуществлено следующим образом.

Множество \mathfrak{B}_s открыто в топологическом пространстве \mathfrak{B}_{s+1} , тополо-

¹⁸Термин " C^r -подмногообразие" означает, что тело $\mathfrak{B} \subset \mathcal{M}$, является C^r -многообразием, с топологией подпространства, индуцированной из \mathcal{M} . При этом, C^r -структуры на \mathfrak{B} и \mathcal{M} связаны между собой следующим требованием [120]: каноническая инъекция $j_{\mathfrak{B}} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{M}$, действующая по правилу: $j_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$, является C^r -вложением.

¹⁹Так как для любого тела $\mathfrak{B} \subset \mathcal{M}$ его коразмерность $\dim \mathcal{M} - \dim \mathfrak{B}$ равна нулю, то мы находимся в условиях Предложения 5.1 в [120].

гия которого индуцирована из \mathcal{M} . Поэтому разность $\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s$ замкнута в топологии \mathfrak{B}_{s+1} , что влечет равенство $\overline{\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s} = \mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s$, и следующее представление [122]:

$$\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s = \text{Int}_{\mathfrak{B}_{s+1}}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s) \cup \partial_{\mathfrak{B}_{s+1}}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s),$$

где топологические операции взятия замыкания, внутренности ($\text{Int}_{\mathfrak{B}_{s+1}}$) и границы ($\partial_{\mathfrak{B}_{s+1}}$) берутся в индуцированной топологии \mathfrak{B}_{s+1} . При этом, каждое из множеств $\text{Int}_{\mathfrak{B}_{s+1}}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s)$ открыто и в \mathcal{M} . Согласно определению внутренности как объединения всевозможных открытых множеств, содержащихся в данном множестве, имеем $\text{Int}_{\mathfrak{B}_{s+1}}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s) = \text{Int}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s)$, где Int — операция взятия внутренности в топологии \mathcal{M} . Используются следующие обозначения: $\mathfrak{I}_{s+1} = \text{Int}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s)$, для $s = 1, \dots, N-1$. Положим $\mathfrak{I}_1 := \mathfrak{B}_1$. Каждое из множеств \mathfrak{I}_s является открытым в \mathcal{M} и в дальнейшем называется телом–слоем.

Определим операцию соединения \vee тел–слоев следующим образом²⁰:

$$\mathfrak{B}_{s+1} = \mathfrak{B}_s \vee \mathfrak{I}_{s+1} := \mathfrak{B}_s \cup \text{Int}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s) \cup \partial_{\mathfrak{B}_{s+1}}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s).$$

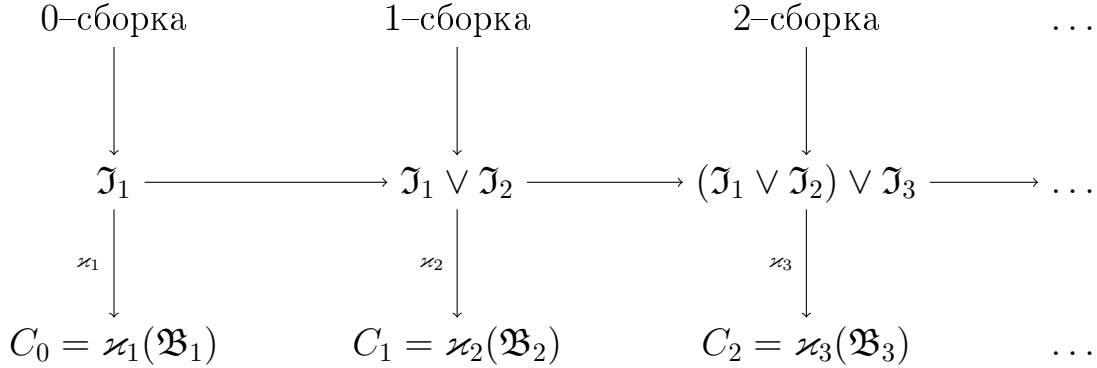
Замечание 29. Рассматриваемая операция является аналогом операции *соединения*, определенной в [54]. При этом \vee не совпадает с теоретико-множественной операцией объединения и имеет физический смысл, выражающийся в формализации понятия склейки сборки с новым телом–слоем. Именно, действие этой операции на два тела \mathfrak{B}_s и \mathfrak{I}_{s+1} дает тело \mathfrak{B}_{s+1} , состоящее из исходной сборки, тела–слоя \mathfrak{I}_{s+1} и множества $\partial_{\mathfrak{B}_{s+1}}(\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s)$. Последнему множеству можно придать смысл тонкого слоя между исходными телами. За счет этого слоя склеиваемые тела могут взаимодействовать. При этом отметим, что именно благодаря использованию топологии \mathfrak{B}_{s+1} , удается корректно выделить границу между сборкой и присоединяемым телом–слоем. ♠

²⁰Возникает соблазн вместо предложенного варианта операции \vee использовать следующее определение, в котором будем использовать $\tilde{\vee}$:

$$\mathfrak{B}_s \tilde{\vee} \text{Int}[\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s] := \text{Int}(\overline{\mathfrak{B}_s \cup \text{Int}[\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s]}),$$

где операции взятия замыкания и внутренности (Int) берутся в топологии \mathcal{M} . В простых случаях эта операция может подойти, однако в общем случае такое определение может привести к ошибочному результату. Например, пусть \mathcal{M} — евклидова плоскость, \mathfrak{B}_{s+1} — открытый диск единичного радиуса с выколотым центром в нуле, а \mathfrak{B}_s — открытый диск радиуса 1/2 с выколотым центром в нуле. В этом случае, $\mathfrak{B}_{s+1} \neq \mathfrak{B}_s \tilde{\vee} \text{Int}[\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s]$, в то время как $\mathfrak{B}_{s+1} = \mathfrak{B}_s \vee \text{Int}[\mathfrak{B}_{s+1} \setminus \mathfrak{B}_s]$.

Процесс создания сборок иллюстрирует следующая диаграмма:



Здесь $\varkappa_s : \mathfrak{B}_s \rightarrow \mathcal{E}^m$, $s = 1, \dots, N$, — актуальные конфигурации сборок, $C_s = \varkappa_{s+1}(\mathfrak{B}_{s+1})$ — актуальные формы сборок.

63°. Рассмотрим пример структурно неоднородного тела — растущий цилиндр. Пусть процесс роста является дискретным и состоит в последовательном нанесении цилиндрических слоев, которые испытывают усадку сразу после их присоединения. Формализация рассматриваемого процесса основана на следующих допущениях:

(DG0) Физическое пространство — трехмерное аффинное евклидово пространство \mathcal{E} .

(DG1) Тела-слои \mathfrak{I}_k имеют натуральную (т.е. свободную от напряжений) отсчетную конфигурацию в пространстве \mathcal{E}^m . Соответствующие отсчетные конфигурации обозначим как

$$\varkappa_R^k : \mathfrak{I}_k \rightarrow \mathcal{E}, \quad k = 1, \dots, N.$$

(DG2) Каждая из форм $\varkappa_R^k(\mathfrak{I}_k)$, соответствующих отсчетным конфигурациям, представлена полым круговым цилиндром конечной высоты h (одной и той же для всех таких форм), внутренним радиусом R_i^k и внешним радиусом R_e^k .

(DG3) В актуальной конфигурации каждое из тел \mathfrak{B}_s , $s = 2, \dots, N$, получается последовательным соединением и склейкой тел-слоев \mathfrak{I}_k к \mathfrak{B}_1 так, что после каждого соединения образуется полый круговой цилиндр; цилиндры, представляющие актуальные формы тел-слоев, коаксиальны. Далее $r_{i,s-1}^k$ — внутренний радиус k -го слоя в актуальной форме, а $r_{e,s-1}^k$ — внешний радиус k -го слоя в актуальной форме; индекс $s - 1$ после запятой указывает на номер сборки.

(DG4) Сборки производятся без самопересечений таким образом, что высота цилиндров не меняется и по-прежнему равна h , а смещения симметричны относительно общей оси цилиндров и направлены перпендикулярно к ней²¹. В терминологии [127] такой процесс классифицируется как *дискретное наращивание*.

(DG5) Заранее размеры тел-слоев в отсчетной форме не известны и определяются из следующего рекуррентного соотношения: внутренний радиус отсчетной формы тела-слоя \mathfrak{I}_{s+1} равен $R_i^{s+1} = S^{s+1} r_{e,s-1}^s$, где $0 < S^{s+1} < 1$ — коэффициенты усадки, а $r_{e,s-1}^s$ — внешний актуальный радиус тела-слоя \mathfrak{I}_s . Кроме того, заданы радиус $R_i^1 = \rho$ и толщины тел-слоев в отсчетной форме, т.е. разности $\Delta^k = R_e^k - R_i^k$, $k = 1, \dots, N$.

64°. Согласно (DG0) физическое пространство является трехмерным евклидовым аффинным пространством \mathcal{E} с ассоциированным векторным пространством \mathcal{V} . Риманова метрика \mathbf{g} представлена евклидовым метрическим тензором; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$. В \mathcal{E} фиксирован декартов репер $(O, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^3)$, где $\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l = \delta_{kl}$, $k, l = 1, 2, 3$. Относительно базиса $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^3$ метрический тензор представлен разложением $\mathbf{g} = \delta^{ij} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{j}_j$.

Сборка \mathfrak{B}_s , $s \in \{1, \dots, N\}$, представлена актуальной формой $C_{s-1} = \kappa_s(\mathfrak{B}_s)$ в физическом пространстве. Каждой материальной точке $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_s$ соответствует место в \mathcal{E} ; совокупность таких мест — форма C_{s-1} . Поскольку по предположению физическое пространство евклидово, то каждой материальной точке из \mathfrak{B}_s можно сопоставить тройку декартовых координат по правилу:

$$\mathfrak{B}_s \ni \mathfrak{X} \mapsto \tilde{\mathcal{D}} \circ \hat{\kappa}_s(\mathfrak{X}) = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь \mathcal{D} — декартово картрирование, определенное формулой (2.2.2), гомеоморфизм $\tilde{\mathcal{D}} : C_{s-1} \rightarrow \mathcal{D}(C_{s-1})$ определен в Замечании 21, а $\hat{\kappa}_s : \mathfrak{X} \mapsto \kappa_s(\mathfrak{X})$. Таким образом, тело \mathfrak{B}_s снабжается картой $(\mathfrak{B}_s, \hat{\kappa}_s^{-1} \circ \tilde{\mathcal{D}}^{-1})$, которая покрывает его целиком. Следовательно, трехмерное тело \mathfrak{B}_s обладает тривиальным атласом $A = \{(\mathfrak{B}_s, \hat{\kappa}_s^{-1} \circ \tilde{\mathcal{D}}^{-1})\}$ (в этой связи, см. также [51, 52]). Рассуждениями, аналогичными тем, что приводятся в Замечании 21, устанавливается, что атлас A принадлежит C^r -структуре \mathfrak{B}_s .

Использование одной лишь карты $(\mathfrak{B}_s, \hat{\kappa}_s^{-1} \circ \tilde{\mathcal{D}}^{-1})$ приводит к громоздким формулам. Поэтому представляется целесообразным, исполь-

²¹Такое предположение позволяет использовать полуобратный метод, когда деформация определена заранее, с точностью до набора параметров.

зую симметрию формы, добавить в атлас A еще одну карту, соответствующую цилиндрическим координатам (r, θ, ξ) . Эти координаты связаны с декартовыми формулой пересчета:

$$h : (r, \theta, \xi) \mapsto (x^1, x^2, x^3), \quad x^1 = r \cos \theta, \quad x^2 = r \sin \theta, \quad x^3 = \xi.$$

Рассмотрим координатное представление $\widehat{\mathcal{X}}_s$. В паре карт

$$(\mathfrak{B}_s, \widehat{\mathcal{X}}_s^{-1} \circ \widetilde{\mathcal{D}}^{-1}) \quad \text{и} \quad (\mathcal{E}, \mathcal{D}^{-1})$$

оно имеет вид:

$$\widetilde{\mathcal{X}}_s = \mathcal{D} \circ \widehat{\mathcal{X}}_s \circ (\widehat{\mathcal{X}}_s^{-1} \circ \widetilde{\mathcal{D}}^{-1}) = \mathcal{D} \circ \widetilde{\mathcal{D}}^{-1} = j_{\mathcal{D}(C_{s-1})} : \mathcal{D}(C_{s-1}) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

т.е. с точностью до области прибытия является тождественным отображением. Однако если рассмотреть на \mathfrak{B}_s карту, соответствующую цилиндрическим координатам, то $\widetilde{\mathcal{X}}_s$ представляется более сложным выражением. Таким образом, из того, что координатное представление является тождественным отображением, не следует тождественность $\widehat{\mathcal{X}}_s$. Вместе с тем, если тело \mathfrak{B}_s отождествить с C_{s-1} , как поступают в евклидовой механике, то $\widehat{\mathcal{X}}_s$ — тождественное отображение.

Отображение $\widehat{\mathcal{X}}_s$ позволяет перенести координаты (x^1, x^2, x^3) и (r, θ, ξ) с тела \mathfrak{B}_s на его форму C_{s-1} . При этом, координатам (r, θ, ξ) соответствует поле натуральных реперов $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_\xi)$ на C_{s-1} . Через $(dr, d\theta, d\xi)$ обозначим поле кореперов, дуальное к $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_\xi)$. Согласно п. 51°, «абстрактному» реперу $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_\xi)$ можно сопоставить «классический» локальный репер $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\xi)$ на C_{s-1} по формуле

$$\mathbf{e}_c = \text{In}_{C_{s-1}} \lrcorner \partial_c = \frac{\partial x^k}{\partial c} \mathbf{i}_k, \quad c \in \{r, \theta, \xi\}.$$

Построенное поле реперов $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\xi)$ из C_{s-1} в \mathcal{V} представляет поле локальных реперов цилиндрической системы координат.

Векторы дуального к $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\xi)$ поля реперов $(\mathbf{e}^r, \mathbf{e}^\theta, \mathbf{e}^\xi)$ определяется соотношениями: $\mathbf{e}^p \cdot \mathbf{e}_c = \delta_c^p$, где $p, c \in \{r, \theta, \xi\}$. Вместе с тем, их можно получить естественным образом, используя оператор вложения $\text{In}_{C_{s-1}}$ и музыкальный изоморфизм $(\cdot)^\sharp$, задаваемый по отношению к метрике $i_{C_{n-1}}^* \mathbf{g}$. То есть,

$$\mathbf{e}^c = \text{In}_{C_{s-1}} \lrcorner (dc)^\sharp = g^{ck} \mathbf{e}_k, \quad c \in \{r, \theta, \xi\},$$

где (g^{ij}) — матрица, обратная к матрице (g_{ij}) , в которой $g_{ij} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

65°. Пусть $s \in \{1, \dots, N\}$. Согласно предположениям п. **63°**, деформация d_k каждого слоя \mathcal{I}_k , $k = 1, \dots, s$, из отсчетной формы $\mathcal{I}_R^k(\mathcal{I}_k)$ в актуальную, $\mathcal{I}_s(\mathcal{I}_k)$, сводится к его «раздуванию» и тем самым определяет цилиндрические координаты (R^k, Θ^k, Ξ^k) на множестве $\mathcal{I}_R^k(\mathcal{I}_k)$. Координатное представление деформации d_k , при этом, имеет вид:

$$\tilde{d}_k : (R^k, \Theta^k, \Xi^k) \mapsto (r, \theta, \xi) = \left(\sqrt{(R^k)^2 + a_{s-1}^k}, \Theta^k, \Xi^k \right),$$

где a_{s-1}^k — параметр деформации тела-слоя с номером k в сборке с номером $s - 1$. Эквивалентно, деформация d_k определяет на множестве $\mathcal{I}_R^k(\mathcal{I}_k)$ декартовы координаты (X_k^1, X_k^2, X_k^3) формулами

$$X_k^1 = \sqrt{r^2 - a_{s-1}^k} \cos \theta, \quad X_k^2 = \sqrt{r^2 - a_{s-1}^k} \sin \theta, \quad X_k^3 = \xi.$$

Замечание 30. Деформации тел-слоев являются классическими неоднородными деформациями полого цилиндра и могут быть представлены в виде [107, 127]:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}_k) = \mathbf{e}_{R^k} \sqrt{(\mathbf{e}^{R^k} \cdot \mathbf{X}_k)^2 + a_{s-1}^k} + \mathbf{e}_{\Xi^k} \otimes \mathbf{e}^{\Xi^k} \cdot \mathbf{X}_k.$$

♠

Градиент деформации $\mathcal{F}_k = Td_k$ в паре цилиндрических координат (R^k, Θ^k, Ξ^k) и (r, θ, ξ) представляется разложением

$$\mathcal{F}_k = \frac{R^k}{\sqrt{(R^k)^2 + a_{s-1}^k}} \partial_r^k \otimes dR^k + \partial_\theta^k \otimes d\Theta^k + \partial_\xi^k \otimes d\Xi^k. \quad (2.3.1)$$

Замечание 31. Поле координатных реперов $(\partial_r^k, \partial_\theta^k, \partial_\xi^k)$ является сечением расслоения $T\mathcal{I}_s(\mathcal{I}_k)$. Чтобы подчеркнуть отличие от поля реперов $(\partial_r, \partial_\theta, \partial_\xi)$ — сечения расслоения TC_{s-1} , был использован индекс k . Далее, чтобы не загромождать запись, в подобных случаях этот индекс будем опускать. ♠

Используя соображения п. **52°**, приходим к следующему выражению для евклидова градиента деформаций:

$$\mathbf{F}_k = \frac{R^k}{\sqrt{(R^k)^2 + a_{s-1}^k}} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}^{R^k} + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}^{\Theta^k} + \mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}^{\Xi^k}. \quad (2.3.2)$$

Подчеркнем, что полученные разложения для \mathcal{F}_k и \mathbf{F}_k справедливы в пределах $\mathcal{K}_R^k(\mathcal{J}_k)$.

Замечание 32. «Вморозим» (R^k, Θ^k, Ξ^k) в форму $\mathcal{K}_R^k(\mathcal{J}_k)$. Посредством деформации d_k они переносятся на форму $\mathcal{K}_s(\mathcal{J}_k)$. В совокупности, форма C_{s-1} покрывается s координатными системами (R^k, Θ^k, Ξ^k) , $k = 1, \dots, s$. В таком случае, \mathcal{F}_k имеет вид:

$$\mathcal{F}_k = \tilde{\partial}_{R^k} \otimes dR^k + \tilde{\partial}_{\Theta^k} \otimes d\Theta^k + \tilde{\partial}_{\Xi^k} \otimes d\Xi^k,$$

где через $(\tilde{\partial}_{R^k}, \tilde{\partial}_{\Theta^k}, \tilde{\partial}_{\Xi^k})$ и $(dR^k, d\Theta^k, d\Xi^k)$ обозначены, соответственно, координатный репер на $\mathcal{K}_R^k(\mathcal{J}_k)$ и корепер на $\mathcal{K}_s(\mathcal{J}_k)$. Соответствующий евклидов градиент деформации \mathbf{F}_k представлен разложением (см. (2.2.11)):

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{e}_{R^k} \otimes \mathbf{E}^{R^k} + \mathbf{e}_{\Theta^k} \otimes \mathbf{E}^{\Theta^k} + \mathbf{e}_{\Xi^k} \otimes \mathbf{E}^{\Xi^k},$$

где $\mathbf{e}_c = (\partial x^p)/(\partial c)\mathbf{i}_p$, $\mathbf{E}_c = (\partial X_k^p)/(\partial c)\mathbf{i}_p$, $c \in \{R^k, \Theta^k, \Xi^k\}$. Такое представление используется, например, в [92]. ♠

Обозначим через $\mathcal{G}_k = i_{\mathcal{K}_R^k(\mathcal{J}_k)}^* \mathbf{g}$ сужение исходной евклидовой метрики на форму $\mathcal{K}_R^k(\mathcal{J}_k)$. Тогда получим семейство $\{\mathcal{G}_k\}_{k=1}^s$ римановых метрик, определенных равенством

$$\mathcal{G}_k = dR^k \otimes dR^k + (R^k)^2 d\Theta^k \otimes d\Theta^k + d\Xi^k \otimes d\Xi^k.$$

Использование актуальной формы, C_{s-1} , и замены переменных, определяемой \tilde{d}_k , позволяет определить метрики \mathcal{G}_k как поля над связным множеством. Эти поля задаются формулой

$$\tilde{\mathcal{G}}_k = \tilde{dR}^k \otimes \tilde{dR}^k + (r^2 - a_{s-1}^k) \tilde{d\Theta}^k \otimes \tilde{d\Theta}^k + \tilde{d\Xi}^k \otimes \tilde{d\Xi}^k,$$

где $\tilde{dC}^k = dC^k \circ d_k^{-1}$, $C \in \{R, \Theta, \Xi\}$.

Правый тензор Коши–Грина \mathcal{C}_k и левый тензор Коши–Грина \mathcal{B}_k для тела–слоя \mathcal{J}_k определяются формулами (2.2.17) и (2.2.18). В частности,

$$\mathcal{C}_k = \frac{(R^k)^2}{(R^k)^2 + a_{s-1}^k} \partial_{R^k} \otimes dR^k + \frac{(R^k)^2 + a_{s-1}^k}{(R^k)^2} \partial_{\Theta^k} \otimes d\Theta^k + \partial_{\Xi^k} \otimes d\Xi^k. \quad (2.3.3)$$

Тензорам \mathcal{C}_k и \mathcal{B}_k соответствуют евклидовы тензоры \mathbf{C}_k и \mathbf{B}_k :

$$\mathbf{C}_k = \frac{(R^k)^2}{(R^k)^2 + a_{s-1}^k} \mathbf{e}_{R^k} \otimes \mathbf{e}^{R^k} + \frac{(R^k)^2 + a_{s-1}^k}{(R^k)^2} \mathbf{e}_{\Theta^k} \otimes \mathbf{e}^{\Theta^k} + \mathbf{e}_{\Xi^k} \otimes \mathbf{e}^{\Xi^k}. \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{B}_k = \frac{r^2 - a_{s-1}^k}{r^2} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}^r + \frac{r^2}{r^2 - a_{s-1}^k} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}^\theta + \mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}^\xi. \quad (2.3.5)$$

Инварианты \mathbf{B}_k представлены выражениями:

$$I_1(\mathbf{B}_k) = I_2(\mathbf{B}_k) = \frac{r^2 - a_{s-1}^k}{r^2} + \frac{r^2}{r^2 - a_{s-1}^k} + 1, \quad I_3(\mathbf{B}_k) = 1.$$

66°. Предположим, что тела-слои сделаны из гиперупругого несжимаемого материала. Определяющее соотношение для каждого из тел-слоев имеет вид:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + J_1\mathbf{B} + J_{-1}\mathbf{B}^{-1},$$

где \mathbf{I} — единичный тензор, p — гидростатическая компонента, а $J_1 = (1 + \beta)\mu/2$, $J_{-1} = (\beta - 1)\mu/2$; здесь β и μ — материальные постоянные. В этом случае, выражение для тензора напряжений Коши в k -м теле-слое примет вид [127]:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k &= T_k^{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + T_k^{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + T_k^{\xi\xi} \mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi, \\ T_k^{rr} &= \frac{\mu}{2} \left(\ln \frac{r^2 - a_{s-1}^k}{r^2} - \frac{a_{s-1}^k}{r^2} \right) + p_{0,s-1}^k, \\ T_k^{\theta\theta} &= \frac{T_k^{rr}}{r^2} + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{r^2}{r^2 - a_{s-1}^k} - \frac{r^2 - a_{s-1}^k}{r^2} \right), \\ T_k^{\xi\xi} &= T_k^{rr} + \mu a_{s-1}^k \frac{r^2 - (1 + \beta)a_{s-1}^k/2}{r^2(r^2 - a_{s-1}^k)}. \end{aligned}$$

Тензор напряжений Коши \mathbf{T}_k в каждом теле-слое определен с точностью до параметров a_{s-1}^k и $p_{0,s-1}^k$. Распоряжаясь этими параметрами, можно удовлетворить некоторому классу краевых условий. Будем полагать, что на внутренней, $r = r_{i,s-1}^1$, и внешней, $r = r_{e,s-1}^s$, границах многослойного тела заданы равномерно распределенные давления $p_{i,s-1}$ и $p_{e,s-1}$:

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{e}^r \Big|_{r=r_{i,s-1}^1} = p_{i,s-1} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{e}^r \Big|_{r=r_{e,s-1}^s} = p_{e,s-1} \mathbf{e}_r, \quad (2.3.6)$$

и предположим, что тела-слои в сборке, т.е. в актуальной форме, находятся в идеальном контакте:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k \cdot \mathbf{e}^r \Big|_{r=r_{e,s-1}^k} &= \mathbf{T}_{k+1} \cdot \mathbf{e}^r \Big|_{r=r_{i,s-1}^{k+1}}, \quad k = 1, \dots, s-1, \\ r_{e,s-1}^k &= r_{i,s-1}^{k+1}, \quad k = 1, \dots, s-1. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Условия (2.3.6) и (2.3.7) могут быть удовлетворены, если a_{s-1}^k и $p_{0,s-1}^k$, $k = 1, \dots, s$, являются решениями системы нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \left[\ln \frac{(R_i^1)^2}{(R_i^1)^2 + a_{s-1}^1} - \frac{a_{s-1}^1}{(R_i^1)^2 + a_{s-1}^1} \right] + p_{0,s-1}^1 &= p_{i,s-1}, \\ \frac{\mu}{2} \left[\ln \frac{(R_e^s)^2}{(R_e^s)^2 + a_{s-1}^s} - \frac{a_{s-1}^s}{(R_e^s)^2 + a_{s-1}^s} \right] + p_{0,s-1}^s &= p_{e,s-1}, \\ \frac{\mu}{2} \left[\ln \frac{(R_e^k)^2}{(R_e^k)^2 + a_{s-1}^k} - \frac{a_{s-1}^k}{(R_e^k)^2 + a_{s-1}^k} \right] + p_{0,s-1}^k &= \\ &= \frac{\mu}{2} \left[\ln \frac{(R_i^{k+1})^2}{(R_i^{k+1})^2 + a_{s-1}^{k+1}} - \frac{a_{s-1}^{k+1}}{(R_i^{k+1})^2 + a_{s-1}^{k+1}} \right] + p_{0,s-1}^{k+1}, \\ (R_e^k)^2 + a_{s-1}^k &= (R_i^{k+1})^2 + a_{s-1}^{k+1}, \quad k = 1, \dots, s-1. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Из системы (2.3.8) можно последовательно исключить неизвестные $p_{0,s-1}^k$ и прийти к системе s уравнений относительно параметров a_{s-1}^k , имеющей вид [127]:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^s \gamma_k \frac{\alpha_k + \nu_k x_s}{\beta_k + \nu_k x_s} &= W_s \exp \left[\sum_{k=1}^s (1 - \gamma_k) \frac{\alpha_k + \nu_k x_s - 1}{(\alpha_k + \nu_k x_s)(\beta_k + \nu_k x_s)} \right], \\ a_{s-1}^k &= a_{s-1}^1 + A_k, \quad k = 2, \dots, s, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

где $A_1 = 0$, $A_k = \sum_{p=2}^k ((R_e^{p-1})^2 - (R_i^p)^2)$, при $k = 2, \dots, s$, $\gamma_k = (R_i^k/R_e^k)^2$, $\alpha_k = 1 + A_k/(R_e^k)^2$, $\beta_k = \gamma_k + A_k/(R_e^k)^2$, $\nu_k = (R_e^1/R_e^k)^2$, $x_s = a_{s-1}^1/(R_e^1)^2$, $W_s = \exp \left[2 \frac{p_{i,s-1} - p_{e,s-1}}{\mu} \right]$.

Из системы (2.3.9) при заданных отсчетных радиусах, внешних и внутренних давлениях, однозначно определяются параметры a_{s-1}^k . После этого из соответствующей подсистемы (2.3.8) определяются неизвестные параметры $p_{0,s-1}^k$. Относительно них эта подсистема является линейной.

В совокупности с системой (2.3.9), условия п. (DG5) позволяют найти параметры a_{s-1}^k , а по ним — $p_{0,s-1}^k$. Выражения для α_s , β_s , γ_s , ν_s могут быть представлены следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} \alpha_{s+1} &= 1 + \frac{\alpha_s - (S^{s+1})^2(\alpha_s + \nu_s x_s)}{\zeta_s}, \quad \gamma_{s+1} = \frac{(S^{s+1})^2(\alpha_s + \nu_s x_s)}{\zeta_s}, \\ \beta_{s+1} &= \gamma_{s+1} + \frac{\alpha_s - (S^{s+1})^2(\alpha_s + \nu_s x_s)}{\zeta_s}, \quad \nu_{s+1} = \frac{\nu_s}{\zeta_s}, \\ \zeta_s &= \left(S^{s+1} \sqrt{\alpha_s + \nu_s x_s} + \sqrt{\nu_s \xi_s} \right)^2, \quad \xi_s = \left(\frac{\Delta^{s+1}}{\rho + \Delta^1} \right)^2, \end{aligned}$$

где $s \geq 1$. При этом, $\alpha_1 = \nu_1 = 1$, $\beta_1 = \gamma_1 = (\rho/(\rho + \Delta^1))^2$.

На рис. 2.1, 2.2 и 2.3 представлены результаты вычислений для четырех сборок из, соответственно, 10, 30, 200, 1000 слоев. Полагалось, что $\beta = 0.24$. Внутренний отсчетный радиус ρ первого тела и отсчетная толщина Δ^1 для каждой из сборок полагались равными $\rho = \Delta^1 = 2$ мкм. Отсчетные толщины Δ^k при $k \geq 2$ для каждой из сборок полагались равными²² $\Delta^k = 22/(N - 1)$ мкм, где N — число слоев. Коэффициенты усадки выбирались одинаковыми и равными $S^k = 0.9$. Внутренние и внешние давления $p_{i, s-1}$ и $p_{e, s-1}$ полагались равными нулю.

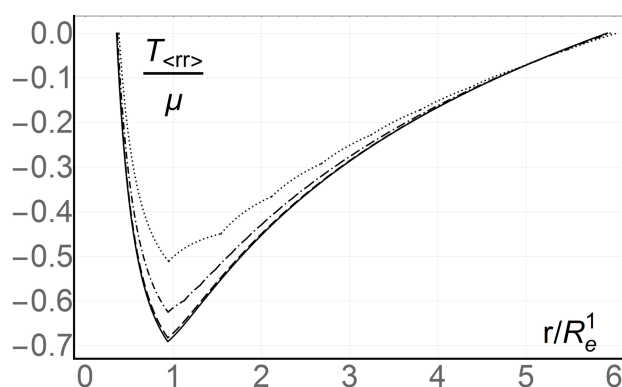


Рис. 2.1. Относительные радиальные напряжения

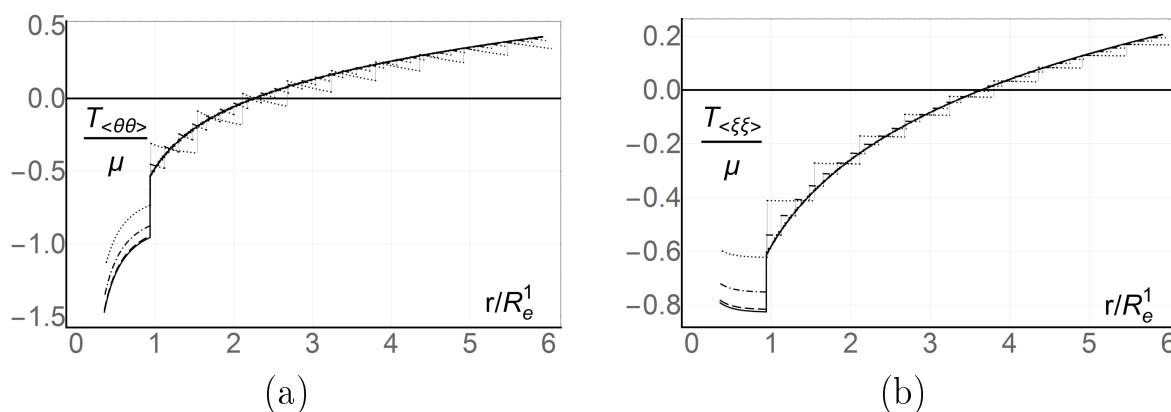


Рис. 2.2. Относительные окружные (а) и осевые (б) напряжения

На графиках: пунктирным линиям соответствует 10 слоев, штрихпунктирным линиям — 30 слоев, штриховым линиям — 200 слоев, а сплошным линиям соответствует 1000 слоев.

²²Порядок размеров выбирался в соответствии с [28].

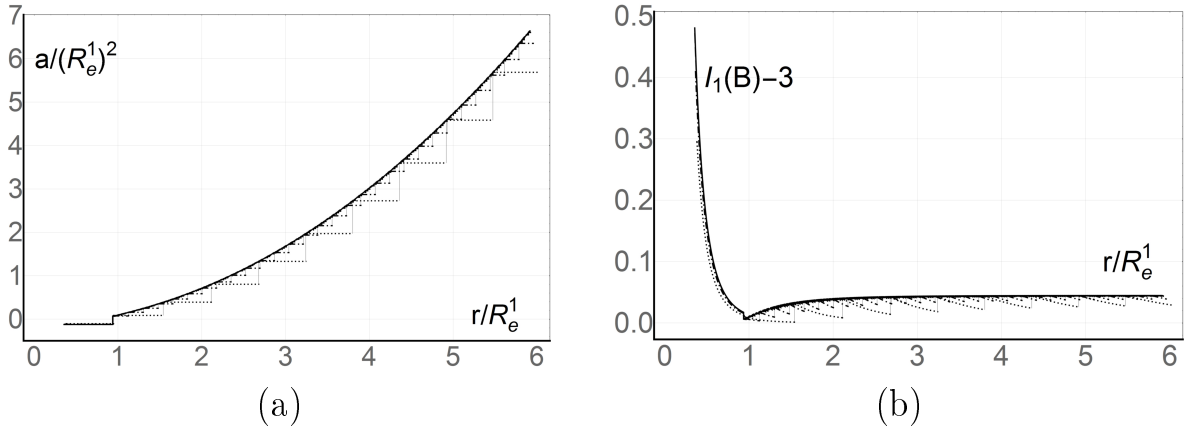


Рис. 2.3. Параметр раздувания a_{s-1}^k (a) и первый инвариант тензора \mathbf{B} (b)

4. Риманова материальная структура

67°. Теперь рассмотрим пример структурно неоднородного тела с непрерывной неоднородностью. Согласно п. **61°**, в материальном многообразии \mathcal{M} имеется семейство тел $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$, где $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ и $\text{Card } \mathbb{I} = \aleph_1$. Предположим, что семейство \mathfrak{B} удовлетворяет следующим условиям:

(CG0) Физическое пространство — трехмерное аффинное евклидово пространство \mathcal{E} .

(CG1) Для любого $\alpha \in \mathbb{I}$ образ актуальной (наблюдаемой) конфигурации $\varkappa_\alpha \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}_\alpha; \mathcal{E})$ представляет собой полый цилиндр конечной высоты h (одной и той же для всех тел).

(CG2) Все \mathfrak{B}_α топологически эквивалентны.

(CG3) Каждое тело \mathfrak{B}_α можно представить в виде расслоения (см. [1], п. **75°**) $\pi_\alpha : \mathfrak{B}_\alpha \rightarrow \mathbb{J}_\alpha$ на континуальное семейство непересекающихся двумерных подмногообразий (поверхностей) $\{\mathfrak{S}_{\alpha,i}\}_{i \in \mathbb{J}_\alpha}$ с одномерной базой $\mathbb{J}_\alpha \subset \mathbb{R}$ [15]: $\mathfrak{B}_\alpha = \bigcup_{i \in \mathbb{J}_\alpha} \mathfrak{S}_{\alpha,i}$, где $\mathfrak{S}_{\alpha,i} = \pi_\alpha^{-1}(\{i\})$, $i \in \mathbb{J}_\alpha$.

При этом, для каждой из поверхностей $\mathfrak{S}_{\alpha,i}$ существует конфигурация $\varkappa_{\alpha,i}^R \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}_\alpha; \mathcal{E})$, отображающая тело \mathfrak{B}_α в евклидово пространство таким образом, что $\varkappa_{\alpha,i}^R(\mathfrak{B}_\alpha)$ — полый круговой цилиндр высоты h , а поверхность $\varkappa_{\alpha,i}^R(\mathfrak{S}_{\alpha,i})$ — цилиндрическая поверхность, инфинитезимальные окрестности точек которой (в \mathcal{E}) свободны от напряжений [15].

68°. В общем случае для определения семейства $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}_\alpha}$, и, соответственно, материальной метрики, необходимо решать эволюционную за-

дачу [15,127,128]. В настоящей работе воспользуемся несколько упрощенным подходом — зададим семейство $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}_\alpha}$ как «аппроксимацию» конечного семейства отсчетных форм, определенного выше для дискретной структурной неоднородности при большом (1000) количестве слоев. В качестве базовой аппроксимирующей функции возьмем следующую зависимость для $a : [1.4234, 23.666] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$a(r) = \begin{cases} -1.9738, & r < 3.7452, \\ -3.4948 + 7.1796 \cdot 10^{-1}r + 1.2406 \cdot 10^{-1}r^2 + 2.828 \cdot 10^3 r^3 - 4.5369 \cdot 10^{-5}r^4, & r > 3.7452. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Эта функция имеет разрыв только в одной точке, которая соответствует поверхности присоединения первого слоя к начальному телу, а во всех других токах - непрерывна. Зафиксируем параметр $\alpha \in \mathbb{I}$ и рассуждения, связанные с построением материальной метрики, будем проводить для тела \mathfrak{B}_α . Поскольку материал тела прост, то существует семейство $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}_\alpha} = \{\kappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_\alpha}$ глобальных конфигураций

$$\kappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R : \mathfrak{B}_\alpha \rightarrow \mathcal{E}, \quad \kappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R : \mathfrak{Y} \mapsto \kappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R(\mathfrak{Y}),$$

каждая из которых преобразует элементарный объем, окружающий частицу \mathfrak{X} тела, в единообразную форму [117]. Под единообразной формой здесь и далее понимается форма, свободная от напряжений.

Семейство $\overline{\text{Ref}}_{\mathfrak{B}_\alpha}$ может быть построено с использованием условия (CG3). Каждая точка $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_\alpha$ принадлежит одной и только одной поверхности $\mathfrak{S}_{\alpha, i}$, поэтому корректно определено отображение $\kappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R \in \mathcal{C}^r(\mathfrak{B}_\alpha; \mathcal{E})$, удовлетворяющее условию

$$\forall \mathfrak{Y} \in \mathfrak{B}_\alpha : (\kappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R(\mathfrak{Y}) := \kappa_{\alpha, i}^R(\mathfrak{Y})),$$

где $i \in \mathbb{J}_\alpha$ таков, что $\mathfrak{X} \in \mathfrak{S}_{\alpha, i}$. По построению, для точек $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{S}_{\alpha, i}$ отображения $\kappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R$ и $\kappa_{\alpha; \mathfrak{Y}}^R$ совпадают.

Гипотеза (CG1) позволяет выбрать на форме $\kappa_\alpha(\mathfrak{B}_\alpha)$ тривиальный атлас, картирующее отображение карты которого соответствует цилиндрическим координатам цилиндрическими координатами $(r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha)$. Посредством конфигурации κ_α , они переносятся на тело²³ \mathfrak{B}_α . Деформация: $\kappa_\alpha(\mathfrak{B}_\alpha) \rightarrow \kappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R(\mathfrak{B}_\alpha)$ индуцирует цилиндрические координаты $(R_{\alpha, \mathfrak{X}}, \Theta_{\alpha, \mathfrak{X}}, \Xi_{\alpha, \mathfrak{X}})$ на $\kappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R(\mathfrak{B}_\alpha)$, которые включим в состав декартова

²³Это равносильно тому, что $\kappa_\alpha(\mathfrak{B}_\alpha)$ рассматривается как модель тела \mathfrak{B}_α .

атласа \mathcal{G} (см. п. 48°). В координатах $(r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha)$ и $(R_{\alpha, \mathfrak{X}}, \Theta_{\alpha, \mathfrak{X}}, \Xi_{\alpha, \mathfrak{X}})$, конфигурация $\varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R$ имеет представление

$$\tilde{\varkappa}_{\alpha; \mathfrak{X}}^R : (r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha) \mapsto (R_{\alpha, \mathfrak{X}}, \Theta_{\alpha, \mathfrak{X}}, \Xi_{\alpha, \mathfrak{X}}),$$

в котором

$$R_{\alpha, \mathfrak{X}} = \sqrt{r_\alpha^2 - \rho_{\alpha, \mathfrak{X}}}, \quad \Theta_{\alpha, \mathfrak{X}} = \theta_\alpha, \quad \Xi_{\alpha, \mathfrak{X}} = \xi_\alpha, \quad (2.4.2)$$

где $\rho_{\alpha, \mathfrak{X}} \in \mathbb{R}$. Следовательно, для $\mathfrak{X} \in \mathfrak{S}_{\alpha, i}$ касательное отображение к $\varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R$ в точке $\mathfrak{Y} \in \mathfrak{B}_\alpha$ имеет вид:

$$\begin{aligned} T\mathfrak{Y}\varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R = T\mathfrak{Y}\varkappa_{\alpha, i}^R &= \frac{r_\alpha}{\sqrt{r_\alpha^2 - \rho_{\alpha, \mathfrak{X}}}} \Big|_{\mathfrak{Y}} e_{R_{\alpha, \mathfrak{X}}}|_Y \otimes dr_\alpha|_{\mathfrak{Y}} + \\ &+ e_{\Theta_{\alpha, \mathfrak{X}}}|_Y \otimes d\theta_\alpha|_{\mathfrak{Y}} + e_{\Xi_{\alpha, \mathfrak{X}}}|_Y \otimes d\xi_\alpha|_{\mathfrak{Y}}, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

где $Y = \varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R(\mathfrak{Y})$. Единообразная отсчетная (см. п. 54°) $\mathcal{K}_\alpha : \mathfrak{X} \mapsto T\mathfrak{X}\varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R$, определяется в точках $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_\alpha$ выражением:

$$\mathcal{K}_\alpha|_{\mathfrak{X}} = \frac{r_\alpha}{\sqrt{r_\alpha^2 - \rho_{\alpha, \mathfrak{X}}}} \Big|_{\mathfrak{X}} e_{R_{\alpha, \mathfrak{X}}}|_X \otimes dr_\alpha|_{\mathfrak{X}} + e_{\Theta_{\alpha, \mathfrak{X}}}|_X \otimes d\theta_\alpha|_{\mathfrak{X}} + e_{\Xi_{\alpha, \mathfrak{X}}}|_X \otimes d\xi_\alpha|_{\mathfrak{X}}, \quad (2.4.4)$$

в котором $X = \varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R(\mathfrak{X})$. Отметим, что поле \mathcal{K}_α является *композиционным*, т.е. его значения определяются значениями полей $\{T\mathfrak{X}\varkappa_{\alpha; \mathfrak{X}}^R\}_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_\alpha}$.

Если $h : \mathfrak{X} \mapsto (r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha)$ — картирующее отображение, то можно записать равенство $\rho_{\alpha, \mathfrak{X}} = \rho_{\alpha, h^{-1}(r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha)}$. Таким образом, определяется функция $\tilde{\rho}_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Именно, $\tilde{\rho}_\alpha(r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha) = \rho_{\alpha, h^{-1}(r_\alpha, \theta_\alpha, \xi_\alpha)}$. Далее будем рассматривать частный случай, когда функция $\tilde{\rho}_\alpha$ постоянна по θ_α и ξ_α и определяется аппроксимацией (2.4.1). Тогда $\tilde{\rho}_\alpha : r_\alpha \mapsto \tilde{\rho}_\alpha(r_\alpha) := \rho_{\alpha, \mathfrak{X}}$, где $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}_\alpha$ — любая точка, имеющая радиальную координату, равную²⁴ r_α . Во всех последующих соотношениях тильду будем опускать.

69°. В соответствии с (2.2.14), определим семейство $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ римановых метрик:

$$\mathcal{G}_\alpha : \mathfrak{B}_\alpha \rightarrow T^*\mathfrak{B}_\alpha \otimes T^*\mathfrak{B}_\alpha, \quad \mathcal{G}_\alpha(u, v) = \mathbf{g}(\mathcal{K}_\alpha u, \mathcal{K}_\alpha v),$$

²⁴Иначе говоря, предполагается, что число $\rho_{\alpha, \mathfrak{X}}$ зависит только от радиальной координаты точки \mathfrak{X} . Отображение $\tilde{\rho}_\alpha$ устанавливает структуру расслоения многообразия \mathfrak{B}_α над одномерной базой $]r_\alpha^1, r_\alpha^2[\subset \mathbb{R}$ с типовым слоем, гомеоморфным цилиндрической поверхности [15, 127, 128].

где \mathbf{g} — евклидов метрический тензор. Выражение для метрики $\mathcal{G}_\alpha|_{\mathfrak{X}}$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{G}_\alpha|_{\mathfrak{X}} = \frac{r_\alpha^2}{r_\alpha^2 - \rho_\alpha(r_\alpha)} \Big|_{\mathfrak{X}} dr_\alpha|_{\mathfrak{X}} \otimes dr_\alpha|_{\mathfrak{X}} + (r_\alpha^2 - \rho_\alpha(r_\alpha)) \Big|_{\mathfrak{X}} d\theta_\alpha|_{\mathfrak{X}} \otimes d\theta_\alpha|_{\mathfrak{X}} + d\xi_\alpha|_{\mathfrak{X}} \otimes d\xi_\alpha|_{\mathfrak{X}}. \quad (2.4.5)$$

Метрика \mathcal{G}_α , так же как и поле \mathcal{K}_α является *композиционной*.

Таким образом, имеем семейство $\{(\mathfrak{B}_\alpha, \mathcal{G}_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ римановых пространств. Ненулевые коэффициенты связности ∇_α Леви-Чивиты имеют вид (в целях экономии места, индекс α далее опускается):

$$\begin{aligned} \Gamma^{1..}{}_{\cdot 11} &= \frac{-2\rho(r) + r\rho'(r)}{2(r^3 - r\rho(r))}, \\ \Gamma^{1..}{}_{\cdot 22} &= \frac{(r^2 - \rho(r))(-2r + \rho'(r))}{2r^2}, \\ \Gamma^{2..}{}_{\cdot 12} = \Gamma^{2..}{}_{\cdot 21} &= \frac{2r - \rho'(r)}{2r^2 - 2\rho(r)}. \end{aligned}$$

В общем случае кривизна полученной связности нетривиальна: ее инвариант Риччи имеет вид:

$$S_\alpha = \frac{r_\alpha \rho_\alpha''(r_\alpha) - \rho_\alpha'(r_\alpha)}{r_\alpha^3}$$

и обращается в нуль только при $\rho_\alpha(r_\alpha) = C_1 r_\alpha^2 + C_2$. Этот математический факт отражает характерные особенности таких тел: несовместность деформаций, наличие собственных напряжений.

70°. Семейство материальных метрик $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ и метрика физического пространства \mathbf{g} определяют семейства левых и правых тензоров Коши–Грина $\{\mathfrak{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ и $\{\mathfrak{C}_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{I}}$ по формулам (2.2.17), (2.2.18). Приведенные в работе построения позволяют: определить тело переменного состава как семейство соединений; определить эквивалент понятию отсчетной формы в виде дискретного или континуального семейства форм; найти материальную метрику на них; определить меры деформаций как «pushforward» и «pullback» материальной и пространственной метрик.

Литература

1. Лычев С.А., Койфман К.Г. Геометрические аспекты теории несовместных деформаций. Напряжения. Материальные связности: Препринт — 1157. Институт проблем механики РАН, 2018. — 126 с.
2. Epstein M. *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*. — Cambridge University Press, 2010. — 312 p.
3. Epstein M., Elzanowski M. *Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach*. — Springer Science & Business Media, 2007. — 274 p.
4. Maugin G.A. *Material inhomogeneities in elasticity*. — CRC Press, 1993. — Vol. 3. — 276 p.
5. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987. — 487 с.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: Методы и приложения*. — М.: Наука, 1986. — 760 с.
7. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*. Т. 1. — М.: Наука, 1981. — 344 с.
8. Lutzen J. Interactions between mechanics and differential geometry in the 19th century // *Arch. Hist. Exact Sci.* — 1995. — Vol. 49, no. 1. — P. 1–72. DOI: 10.1007/BF00374699

9. Nye J. Some geometrical relations in dislocated crystals // *Acta metallurgica*. — 1953. — Vol. 1, no. 2. — P. 153–162.
10. Де Вит Р. Континуальная теория дисклинаций. Новое в зарубежной науке № 9. — М.: Мир, 1977. — 208 с.
11. Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. — М.: Мир, 1965. — 104 с.
12. Кадич А., Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. — М.: Мир, 1987. — 168 с.
13. Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. — М.: Наука, 1987. — 471 с.
14. Yavari A. A geometric theory of growth mechanics // *Journal of Nonlinear Science*. — 2010. — Vol. 20, no. 6. — P. 781–830. DOI: 10.1007/s00332-010-9073-y
15. Лычев С.А., Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // *ПММ*. — 2013. Т. 77. — С. 585–604.
16. Манжиров А.В., Лычев С.А. Математическая теория растущих тел при конечных деформациях // *Доклады Академии Наук*. — 2012. — Т. 443, № 9. — С. 438–441.
17. Лычев С.А., Манжиров А.В. Отсчетные конфигурации растущих тел // *Изв. РАН. МТТ*. — 2013. — Т. 5. — С. 86–95.
18. Manzhirou A.V., Lychev S.A., Gupta N.K. Nonlinear models of growing solids // *Proceedings of the Indian National Science Academy*. — 2013. — Vol. 79, no. 4. — P. 529.
19. Frankel T. *The geometry of physics: an introduction*. — Cambridge University Press, 2003. — 694 p.
20. Marsden J.E., Hughes T.J. *Mathematical foundations of elasticity*. — Dover Publications, 1994. — 556 p.
21. Choy K. Chemical vapour deposition of coatings // *Progress in materials science*. — 2003. — Vol. 48, no. 2. — P. 57–170. DOI: 10.1016/S0079-6425(01)00009-3

22. Nastasi M.A., Mayer J.W. Ion implantation and synthesis of materials. — Springer, 2006. — 263 p. DOI: 10.1007/978-3-540-45298-0
23. Ian Gibson, David Rosen, Brent Stucker et al. Additive manufacturing technologies. — Springer, 2015. — 498 p. DOI: 10.1007/978-1-4939-2113-3
24. Rémi Ponche, Olivier Kerbrat, Pascal Mognol, Jean-Yves Hascoët. A novel methodology of design for additive manufacturing applied to additive laser manufacturing process // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. — 2014. — Vol. 30, no. 4. — P. 389–398. DOI: 10.1016/j.rcim.2013.12.001
25. Thomas Campbell, Christopher Williams, Olga Ivanova, Banning Garrett. Could 3d printing change the world? // Technologies, Potential, and Implications of Additive Manufacturing, Atlantic Council, Washington, DC. — 2011.
26. Qiang Huang, Jizhe Zhang, Arman Sabbaghi, Tirthankar Dasgupta. Optimal offline compensation of shape shrinkage for three-dimensional printing processes // IIE Transactions. — 2015. — Vol. 47, no. 5. — P. 431–441. DOI: 10.1080/0740817X.2014.955599
27. Lu L., Zheng J., Mishra S. A layer-to-layer model and feedback control of ink-jet 3-d printing // Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on. — 2015. — Vol. 20, no. 3. — P. 1056–1068. DOI: 10.1109/TMECH.2014.2366123
28. Multilayer Thin Films: Sequential Assembly of Nanocomposite Materials. Editors: Gero Decher, Joseph B. Schlenoff. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2003. DOI: 10.1002/3527600574
29. Cadelano, E.; Palla, P.L.; Giordano, S.; Colombo, L. Nonlinear elasticity of monolayer graphene. Phys. Rev. Lett. 2009. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.235502
30. Zubov L.M. Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies. — Springer Science & Business Media, 1997. — 205 p.

31. Ozakin A., Yavari A. A geometric theory of thermal stresses // Journal of Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 51, no. 3. — P. 032902. DOI: 10.1063/1.3313537
32. Катанаев М.О. Геометрическая теория дефектов // УФН. — 2005. — Т. 175. — С. 705–733.
33. Acharya A. A model of crystal plasticity based on the theory of continuously distributed dislocations // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2001. — Vol. 49, no. 4. — P. 761–784. DOI: 10.1016/S0022-5096(00)00060-0
34. Berger M. A panoramic view of Riemannian geometry. — Springer Science & Business Media, 2003. — 824 p. DOI: 10.1007/978-3-642-18245-7
35. Eisenhart L.P. Riemannian geometry. — Princeton university press, 1997. — 272 p.
36. Eisenhart L.P. Non-Riemannian geometry. — Dover Publications, 2005. — 192 p.
37. Petersen P. Riemannian geometry. — Springer Science & Business Media, 2006. — Vol. 171. — 405 p. DOI: 10.1007/978-0-387-29403-2
38. Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. — Изд-во Казанского университета, 1962. — 210 с.
39. Картан Э. Геометрия римановых пространств. — М.: Книжный дом «Либроком», 2010. — 250 с.
40. Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. iv. the theory of elasticity and anelasticity // Physical Review. — 1948. — Vol. 73, no. 4. — P. 373–382. doi: 10.1103/PhysRev.73.373
41. Kondo K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint // Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering science by means of geometry. — 1955. — Vol. 1. — P. 6–17.

42. Kondo K. Geometry of elastic deformation and incompatibility // *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*. — Vol. 1. — Tokyo: Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai, 1955. — P. 5–17.
43. Kondo K. Non-Riemannian and Finslerian approaches to the theory of yielding // *International Journal of Engineering Science*. — 1963. — Vol. 1, no. 1. — P. 71–88.
44. Kondo K. On the analytical and physical foundations of the theory of dislocations and yielding by the differential geometry of continua // *International Journal of Engineering Science*. — 1964. — Vol. 2, no. 3. — P. 219–251.
45. Weingarten J. Sulle superficie di discontinuita nella teoria della elasticita dei corpi solidi // *Rend. Reale Accad. dei Lincei, classe di sci., fis., mat. e nat.* — 1901. — Vol. 10.1. of 5. — P. 57–60.
46. Volterra V., Volterra E. Sur les distorsions des corps élastiques (théorie et applications) // *Memorial des sciences mathematiques*, 147. — Gauthier-Villars, 1960. — P. 3–117.
47. Кунин И.А. Теория дислокаций. В кн. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. — М.: Наука, 1965. С. 373–443.
48. Bilby B., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-riemannian geometry // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* / *The Royal Society*. — Vol. 231. — 1955. — P. 263–273. doi: 10.1098/rspa.1955.0171
49. Seeger A. Recent advances in the theory of defects in crystals // *physica status solidi (b)*. — 1961. — Vol. 1, no. 7. — P. 669–698. doi: 10.1002/pssb.19610010702
50. Kröner E. Dislocation theory as a physical field theory // *Meccanica*, Springer Science & Business Media. — 1996. — Vol. 31. — P. 577–587. doi: 10.1007/BF00420827

51. Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Science & Business Media. — 1967. — Vol. 27, no. 1. — P. 1–32. doi: 10.1007/BF00276433
52. Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Science & Business Media. — 1967. — Vol. 27, no. 1. — P. 33–94. doi: 10.1007/BF00276434
53. Мясликов В.П., Гузев М.А. Неевклидова модель деформирования материалов на различных структурных уровнях // Физ. мезомех. — 2000. — Т. 3, № 1.— С. 5–16.
54. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошной среды. — М.: Мир, 1975. — 592 с.
55. Truesdell C.A. A first course in rational continuum mechanics. Volume 1—General concepts. — Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, San Francisco, London — 1977. — Vol. 1. — 280 p.
56. Dehlinger U. Zur Rekristallisation reiner Metalle, Annalen der Physik V. Folge, 2, 1929. 749–793.
57. Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part I. Theoretical Proc. R. Soc. Lond. A 1934, 145, 362–387; doi: 10.1098/rspa.1934.0106
58. Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part II. Comparison with Observations. Proc. R. Soc. Lond. A 1934, 145, 388–404. doi: 10.1098/rspa.1934.0107
59. Orowan E. Zur Kristallplastizitat, Z. Phys., 89, 1934. 605–659. doi:10.1007/BF01341478
60. Polanyi M. Uber eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen konnte, Z. Phys., 89, 1934. 660–664. doi:10.1007/BF01341481

61. Frenkel J. Zur Theorie der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit Kristallinischer Körper. *Z. Phys.*, 37, 1926. 572-609. doi:10.1007/BF01397292
62. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: Hermann, 1909. 226 p.
63. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Ration. Mech. and Analysis*. 1964. V. 16. № 1. P. 51–78.
64. Friedel M.G. Les États Mésomorphes de la matière. *Annales de Physique* 18, 1922. 273–474.
65. Oseen C.W. The theory of liquid crystals. *Trans. Faraday Soc.*, 1933, 29, 883-899. doi: 10.1039/TF9332900883
66. Frank F.C.I. Liquid crystals. On the theory of liquid crystals. *Discuss. Faraday Soc.*, 1958, 25, 19-28. doi: 10.1039/DF9582500019
67. Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan geometry of nonlinear disclination mechanics // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Springer Science & Business Media. — 2012. — Volume 205, Issue 1, — P. 59–118. doi: 10.1007/s00205-012-0500-0
68. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. General theory of defects in continuous media. *International Journal of Solids and Structures*. Volume 43, Issue 1. January 2006, Pages 91–111. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2005.05.011
69. Белов П.А., Лурье С.А. К общей теории дефектных сред // *Физ. Мезомеханика*. 2007. Т. 10. № 6. С. 49–61.
70. Белов П.А., Лурье С.А. Континуальная модель микрогетерогенных сред // *ПММ*. 2009. Т. 73. Вып. 5. С. 833-848.
71. Edelen D.G. *Applied exterior calculus*. — John Wiley & Sons, 1985. — 471 p.
72. Фридман Я.Б. *Механические свойства металлов*. Оборонгиз, 1952. 556 с.

73. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория. — М.: Высш. шк., 1983. — 399 с.
74. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. — М.: Мир, 1992. — 472 с.
75. Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М., Пономарев И.И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. — М.: Физматлит, 1996. — 240 с.
76. Эбботт Э., Бюргер Д. Флатландия и Сферландия. — М.: Мир, 1976. — 360 с.
77. Пшеничнов Г.И. Теория тонких упругих сетчатых цилиндрических оболочек и пластинок. — М.: Наука, 1982. — 352 с.
78. Куратовский К. Топология. Том 1. — М.: Мир, 1966. — 594 с.
79. Armstrong M.A. Basic topology. — Springer Science & Business Media, 1983. — 251 p. doi: 10.1007/978-1-4757-1793-8
80. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970. — 413 с.
81. Хирш М. Дифференциальная топология. — М.: ИО НФМИ, 1999. — 280 с.
82. Adachi M. Embeddings and immersions. — American Mathematical Soc., 2012. — 183 p.
83. Nakahara M. Geometry, topology and physics. — IOP Publishing, 2003. — 596 p.
84. Введение в топологию. 2-е изд., доп. / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко. — М.: Наука. Физматлит, 1995. — 416 с.
85. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A continuum theory of elastic material surfaces // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Science & Business Media. — 1975. — Vol. 57, no. 4. — P. 291–323. doi: 10.1007/BF00261375

86. Шварц Л. Анализ. Том 1. — М.: Мир, 1972. — 824 с.
87. Бурбаки Н. Теория множеств. — М. : Мир, 1965.
88. Cartan E.J. Sur les variétés á connexion affine et la théorie de la relativité généralisée // Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. — 1923. — Vol. 40. — P. 325—412.
89. Вейль Г. Пространство, время, материя. — М.: Янус, 1996. — 480 с.
90. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Том второй. Геометрия. — М.: Наука, 1987. — 432 с.
91. Franzoni G. The Klein bottle: Variations on a theme // Notices of the AMS. — 2012. — Vol. 59, no. 8. — P. 1094–1099.
92. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
93. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды. — М.: Наука, 2000. — 214 с.
94. Дмитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учебное пособие для вузов. — М.: Высш. шк., 2001. — 575 с.
95. Love A.E.H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. — Cambridge University Press, 2013. — Vol. 1. — p. 661.
96. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975. — 256 с.
97. Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Archive for rational Mechanics and Analysis. — 1958. — Vol. 2, no. 1. — P. 197–226. doi: 10.1007/BF00277929
98. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. — М. : Мир, 1977. — 504 с.
99. Лычев С.А. Законы сохранения недиссипативной микроморфной термоупругости // Вестник Самарского государственного университета. — 2007. — № 4. — С. 225–262.

100. Кадомцев С.Б. Геометрия Лобачевского и физика. Изд.стереотип. — URSS, 2015.
101. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация, Т.1–3. — М. : Мир, 1977.
102. Choquet-Bruhat Y. General relativity and the Einstein equations. — Oxford University Press (OUP), 2008. — dec. — DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199230723.001.0001
103. Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan geometry of nonlinear disclination mechanics // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2012. — P. 1081286511436137.
104. Yavari A., Marsden J.E., Ortiz M. On spatial and material covariant balance laws in elasticity // Journal of Mathematical Physics. — 2006. — Vol. 47, no. 4. — P. 042903.
105. Yavari A., Ozakin A. Covariance in linearized elasticity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. — 2008. — Vol. 59, no. 6. — P. 1081–1110.
106. Youssef N.L., Sid-Ahmed A.M. Linear connections and curvature tensors in the geometry of parallelizable manifolds // Reports on mathematical physics. — 2007. — Vol. 60, no. 1. — P. 39–53.
107. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics / Ed. by Stuart S. Antman. — Springer Berlin Heidelberg, 2004. — DOI: 10.1007/978-3-662-10388-3
108. Xu Ma, Gonzalo R. Arce. Computational lithography. — Wiley VCH Verlag GmbH, 2010.
109. Mechanical self-assembly / Ed. by Xi Chen. — Springer Nature, 2013. DOI: 10.1007/978-1-4614-4562-3
110. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories. — Springer, 1960.
111. Cauchy A.-L. Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques // Bulletin de la Société philomatique. — 1823. — P. 9–13.

112. Cauchy A.-L. Sur la condensation et la dilatation des corps solides // Ex. de Math. — 1827. — P. 60–69.
113. Cauchy A.-L. Mémoire sur les dilatations, les condensations et les rotations produits par un changement de forme dans un système de points matériels // Oeuvres (2) Gauthier–Villars. — 1841. — Vol. 12. — P. 343–377.
114. Schield R.T. Inverse deformation results in finite elasticity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. — 1967. — Vol. 18, no. 4. — P. 490–500. — DOI: 10.1007/bf01601719
115. Poisson S.-D. Memoire sur les equations generates de l'équilibre et du mouvement des corps elastiques et des fluids // J. Ecole Poly. — 1831.
116. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Том 1. — М. : ГИТТЛ, 1950.
117. Lychev S., Koifman K. Geometric aspects of the theory of incompatible deformations. Part I. uniform configurations // Nanomechanics Science and Technology: An International Journal. — 2016. — Vol. 7, no. 3. — P. 177–233. DOI: 10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i3.10
118. Cosserat E., Cosserat F. Sur la théorie de l'élasticite // Ann. Toulouse. — 1896. — Vol. 10. — P. 1–116.
119. Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T. Manifolds, tensor analysis, and applications. — Springer Science & Business Media, 1988. — Vol. 75. DOI: 10.1007/978-1-4612-1029-0
120. Lee J.M. Introduction to smooth manifolds. — Springer New York, 2012. DOI: 10.1007/978-1-4419-9982-5
121. Лагалли М. Векторное исчисление. — Москва – Ленинград : ОНТИ НКПТ, 1936. — 343 с.
122. Lee J.M. Introduction to topological manifolds. — Springer New York, 2011. DOI: 10.1007/978-1-4419-7940-7
123. Chadwick P. Applications of an energy-momentum tensor in non-linear elastostatics // Journal of Elasticity. — 1975. — Vol. 5, no. 3-4. — P. 249–258. DOI: 10.1007/bf00126989

-
124. Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. — Springer Nature, 1967. — DOI: 10.1007/978-3-642-86748-4
125. Michal A.D. Matrix and tensor calculus with applications to mechanics, elasticity and aeronautics. — New York: John Wiley & Sons; London: Chapman-Hall, Ltd., 1947.
126. Lychev S.A. Geometric aspects of the theory of incompatible deformations in growing solids // Advanced Structured Materials. — Springer International Publishing, 2017. — P. 327–347. DOI: 10.1007/978-3-319-56050-2_19
127. Лычев С.А., Марк А.В. Осесимметричное наращивание полого гиперупругого цилиндра // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2014. — Т. 14. — С. 209–226.
128. Манжиров А.В., Лычев С.А. Математическая теория растущих тел. В книге “Актуальные проблемы механики. 50 лет Институту проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН”. — М. : Наука, 2015. С. 426–455.

Лычев Сергей Александрович

Койфман Константин Георгиевич

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ
ТЕОРИИ НЕСОВМЕСТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ**

Единообразные конфигурации

ISBN 978-5-91741-198-9



Подписано к печати 28.12.2017. Заказ № 10 — 2017. Тираж 50 экз.

Отпечатано на ризографе Института проблем механики РАН

119526, Москва, пр-т Вернадского, 101-1