УСПЕХИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Институт автоматики и процессов управления

УСПЕХИ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

К 70-летию академика
ВЛАДИМИРА АЛЕКСЕЕВИЧА ЛЕВИНА

Сборник научных трудов

Владивосток
Дальнаука
2009

УДК 533/539.3
ББК 22.25

Успехи механики сплошных сред : к 70-летию академика В.А. Левина : сб. науч. тр. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 822 с. : ил., табл.

ISBN 978-5-8044-1023-1

В сборнике представлены оригинальные научные статьи, посвященные различным фундаментальным задачам современной механики сплошных сред и ее приложений: гидроаэромеханики, теории упругости, реологии, теории пластичности, механики разрушений и прочности конструкций, теории горения и детонации, теории фильтрации, наномеханики и дискретной механики.

Публикации подготовлены известными специалистами в соответствующих направлениях механики, отражают современное ее состояние и перспективы развития.

Для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов, специализирующихся в области механики сплошных сред.

Редакционная коллегия:
В.А. Акуличев, Г.В. Алексеев, Б.Д. Аннин, А.А. Бармин,
А.А. Буренин (отв. редактор), А.Б. Ватажин, И.Г. Горячева, Д.Д. Ивлев,
А.Н. Крайко, А.Г. Куликовский, В.Ф. Куропатенко, А.М. Липанов,
И.И. Липатов, Е.В. Ломакин, В.П. Матвеенко, Н.Ф. Морозов,
В.В. Пухначев, А.К. Ребров, В.М. Фомин

Рецензенты: д.т.н. Г.А. Лаврушин, д.ф.-м.н. И.О. Ярощук

Утверждено к печати Ученым советом Института автоматики
и процессов управления ДВО РАН

Рекомендовано к изданию Объединенным ученым советом по
физико-математическим и техническим наукам ДВО РАН

ISBN 978-5-8044-1023-1

© ИАПУ ДВО РАН, 2009

КОНВОЛЮТИВНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

А.В. Манжиров[1], С.А. Лычев[1], Н.К. Гупта[2]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[2] *Индийский институт технологии, Дели, Индия*

Излагается общая методология построения вариационных принципов на основе функционала свертки (конволюции) и других билинейных симметричных форм. Предлагаются новые вариационные принципы для упругих, термоупругих и вязкоупругих сред. Рассматриваются постановки как в линейном приближении, так и в конечных деформациях.

Введение. Большая часть вариационных принципов, соответствующих краевым задачам механики сплошных сред, могут быть сформулированы в рамках следующих рассуждений. Известно, что с линейным оператором A, который определен на гильбертовом пространстве $H(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} u\, v\, d\mu \quad (u, v \in H(\Omega)), \tag{1}$$

связан квадратичный функционал

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\,(\vartheta, A[\vartheta]) \quad (\vartheta \in H(\Omega)), \tag{2}$$

причем, если оператор A является **самосопряженным**

$$(Au, v) = (u, Av),$$

этот функционал достигает своих экстремальных значений на функциях, принадлежащих ядру оператора A:

$$A[\vartheta] = 0, \tag{3}$$

и только на них [1]. Таким образом, задача (3) эквивалентна вариационному принципу

$$\delta I[\vartheta] = 0.$$

Утверждение остается верным, если оператор A определен в $H(\Omega)$, но его область определения D_A плотна в пространстве $H(\Omega)$ [1].

Аналогичным образом формулируются вариационные принципы для нелинейных операторов, которые в линейном приближении оказываются самосопряженными. Согласно теореме Вайнберга [2] функционал, достигающий экстремальных значений на решениях нелинейной задачи

$$\mathfrak{A}[\vartheta] = 0, \tag{4}$$

имеет вид

$$I[\vartheta] = \left(\vartheta, \int\limits_0^1 \mathfrak{A}[\lambda\vartheta]\, d\lambda\right), \tag{5}$$

Здесь $\mathfrak{A}$ — нелинейный дифференцируемый оператор, такой, что его производная Гато

$$\mathfrak{A}'[x,h] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathfrak{A}(x+\varepsilon h)-\mathfrak{A}(x)}{\varepsilon}$$

является самосопряженным оператором

$$(\mathfrak{A}'[x,u],v) = (u,\mathfrak{A}'[x,v])$$

с плотной в $H(\Omega)$ областью определения. Такие операторы называются потенциальными [2].

Замечание 1. Если в задаче (4) явно выделены неоднородные члены и она формулируется в виде

$$\mathfrak{A}[\vartheta] = f, \quad \vartheta\in D_{\mathfrak{A}},$$

то функционал (5) может быть записан следующим образом [2]:

$$I(\vartheta) = \left(\vartheta-\vartheta_0,\ \int\limits_0^1 \mathfrak{A}\left[\vartheta_0+\lambda(\vartheta-\vartheta_0)\right]d\lambda\right) - (\vartheta,f)\,,\quad \vartheta_0\in D_{\mathfrak{A}}.$$

Данная методология, основанная на использовании классического (евклидова) скалярного произведения, имеет следующие ограничения.

Во-первых, вариационная формулировка для начальных и начально-краевых задач не может быть получена, поскольку начальные условия формулируются на одном конце рассматриваемого интервала времени, а при использовании функционала, построенного на основе скалярного произведения (1), подразумевается, что заданы условия в начальной и конечной точках (как, например, в принципе Остроградского–Гамильтона). Это приводит к известным неопределенностям и затруднениям в динамических задачах механики сплошных сред [3].

Во-вторых, операторы, возникающие в задачах механики сплошных сред, часто оказываются непотенциальными (т.е. несамосопряженными в линейном приближении по отношению к скалярному произведению соответствующего гильбертова пространства). Таковыми, например, являются операторы, порождаемые уравнениями связанной термоупругости, вязкоупругости, ползучести. Как правило, для подобных задач предлагались не вариационные принципы, а вариационные уравнения (например, вариационное уравнение Био для термоупругих сред [4]).

Если наряду с евклидовым скалярным произведением (1) использовать функционал свертки (конволюцию) [5]

$$\langle\vartheta,\omega\rangle = \int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\omega(\tau)\,d\tau, \tag{6}$$

то область применения изложенного выше вариационного формализма может быть расширена [6–8].

Известно, что свертка обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности:

$$\langle\vartheta,\omega\rangle = \langle\omega,\vartheta\rangle, \tag{7}$$

$$\langle\vartheta,\langle\omega,\varphi\rangle\rangle = \langle\langle\vartheta,\omega\rangle,\varphi\rangle, \tag{8}$$

$$\langle\vartheta,(\omega+\varphi)\rangle = \langle\vartheta,\omega\rangle + \langle\vartheta,\varphi\rangle. \tag{9}$$

Соотношения (7)–(9) проверяются непосредственным вычислением соответствующих интегралов. В силу теоремы Титчмарша [5] имеет место импликация

$$\vartheta \not\equiv 0 \wedge \omega \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \vartheta, \omega \rangle \not\equiv 0,$$

а так называемое свойство отделимости [5]

$$\forall \vartheta \quad \langle \vartheta, \omega \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \equiv 0 \tag{10}$$

представляет собой аналог основной леммы классического операционного исчисления. Вариационные принципы, построенные на основе функционала свертки, называются **конволютивными** [6].

Впервые свертка была использована для формулировки вариационного принципа, порождаемого начально–краевой задачей, М. Гертиным в 1964 г. [6]. В работе [9] М. Гертин предложил конволютивный вариационный принцип, порождаемый начально–краевой задачей динамической теории упругости (напомним, что хорошо известный вариационный принцип Остроградского–Гамильтона определяет не начально–краевую, а краевую задачу, что, в частности, приводит к необходимости указывать значения варьируемых функций в начальный и конечный моменты времени). Позже, в развитие принципа Гертина, были предложены конволютивные принципы для термоупругости [10], пьезоупругости [11] и ряда других задач континуальной механики [12].

Идея, высказанная М. Гертиным, была развита Э. Тонти (1969 г.). В работе [7] Тонти показал, что в функционалах (2) или (5) может быть использована любая билинейная форма[1]

$$B(\vartheta, \omega), \tag{11}$$

если она удовлетворяет условиям симметричности

$$B(\vartheta, \omega) = B(\omega, \vartheta)$$

и отделимости

$$\forall \vartheta \quad B(\vartheta, \omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \equiv 0.$$

Таким образом, если линейный оператор A (с плотной в $H(\Omega)$ областью определения D_A) оказывается самосопряженным относительно билинейной формы (11), т.е.

$$\forall \vartheta, \omega \in D_A \quad B(A[\vartheta], \omega) = B(\omega, A[\vartheta]),$$

то порождаемый этим оператором вариационный принцип может быть сформулирован следующим образом:

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2} B(A[\vartheta], \vartheta), \quad \delta I[\vartheta] = 0.$$

Соответственно, вариационный принцип для нелинейного оператора $\mathfrak{A}$, производная которого является самосопряженной по отношению к билинейной форме (11), имеет вид

$$I[\vartheta] = B\left(\vartheta, \int_0^1 \mathfrak{A}[\lambda \vartheta]\, d\lambda\right).$$

[1]Билинейная форма может быть определена не во всем пространстве $H(\Omega)$, а лишь в некоторой плотно вложенной в $H(\Omega)$ области, которая содержит область определения рассматриваемого оператора.

В настоящей работе в рамках единой методологии построены новые конволютивные вариационные принципы для упругих, термоупругих и вязкоупругих сред.

1. Вариационные принципы для элементарных операторов. Представляется целесообразным вначале подробно рассмотреть вариационные принципы, порождаемые элементарными дифференциальными и интегральными операторами, которые служат "образующими элементами" более сложных операторов механики сплошных сред.

Пример 1. Пусть оператор A определен дифференциальной операцией первого порядка, а его область определения D_A – однородным начальным условием

$$A = \frac{d}{dt}, \quad D_A = \{\vartheta : \vartheta(0) = 0\}. \tag{12}$$

Очевидно, оператор A не является самосопряженным относительно евклидова скалярного произведения (1). Однако относительно конволютивной билинейной формы (6) оператор A самосопряжен. Действительно, в результате интегрирования по частям, учитывая, что функции ϑ и ω в точке $t = 0$ обращаются в ноль, приходим к соотношению

$$\langle A\vartheta, \omega\rangle = -\int\limits_0^t \frac{d\vartheta(t-\tau)}{d\tau}\omega(\tau)\,d\tau = -\vartheta(t-\tau)\omega(\tau)\Big|_0^t + \int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\,d\tau = \langle \vartheta, A\omega\rangle\,.$$

Теперь, согласно общей теории, может быть построен функционал, определяющий соответствующий вариационный принцип:

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\langle \vartheta, A\vartheta\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \vartheta, \frac{d\vartheta}{dt}\right\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\,d\tau, \quad \delta I[\vartheta] = 0. \tag{13}$$

Конечно, обоснование вариационного принципа (13) может быть произведено путем непосредственного вычисления вариации функционала I с помощью формальной "δ" процедуры:

$$\delta I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left\{ \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} + \vartheta(t-\tau)\delta\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} \right\} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\vartheta(t-\tau)\delta\vartheta(\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left\{ \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} - \frac{d}{d\tau}\left[\vartheta(t-\tau)\right]\delta\vartheta(\tau) \right\} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\vartheta(t-\tau)\delta\vartheta(\tau)\Big|_0^t + \int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\,d\tau.$$

В силу произвольности функции $\delta\vartheta(t)$ приходим к условиям стационарности в форме уравнения Эйлера–Лагранжа и однородного начального условия

$$\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} = 0, \quad \vartheta(0) = 0,$$

которые полностью определяют исходный оператор (12).

Пример 2. Пусть теперь оператор $\mathfrak{A}$ задан в области $D_{\mathfrak{A}}$, определяемой неоднородными начальными условиями

$$\mathfrak{A} = \frac{d}{dt}, \quad D_{\mathfrak{A}} = \{\vartheta : \vartheta(0) = \vartheta_0\}. \tag{14}$$

В силу неоднородности оператор $\mathfrak{A}$ нелинеен, но его производная Гато совпадает с рассмотренным выше однородным оператором A (12). Таким образом, вариационный принцип порождается функционалом

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\,d\tau - \frac{1}{2}\vartheta_0\vartheta(t). \tag{15}$$

Для его обоснования вновь воспользуемся формальной "δ" процедурой и вычислим вариацию δI:

$$\delta I[\vartheta] = \frac{1}{2}\vartheta(t-\tau)\delta\vartheta(\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{2}\vartheta_0\delta\vartheta(t) + \int_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\,d\tau.$$

Так как при $t = 0$ устанавливается начальное условие, и, следовательно, $\delta\vartheta(0) = 0$, внеинтегральные члены принимают вид

$$\frac{1}{2}\delta\vartheta(t)\left(\vartheta_0 - \vartheta(0)\right).$$

В силу произвольности $\delta\vartheta(t)$ приходим к условиям стационарности функционала в виде дифференциального уравнения Эйлера–Лагранжа и неоднородного начального условия

$$\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} = 0, \quad \vartheta_0 = \vartheta(0),$$

которые полностью определяют исходный оператор $\mathfrak{A}$ (14).

Пример 3. Рассмотрим дифференциальный оператор, порождаемый дифференциальным выражением второго порядка и однородными начальными данными

$$A = \frac{d^2}{dt^2}, \quad D_A = \{\vartheta : \vartheta(0) = 0 \wedge \frac{d}{dt}\vartheta(0) = 0\}. \tag{16}$$

Оператор A самосопряжен относительно конволютивной билинейной формы. Действительно, выполняя интегрирования по частям и учитывая однородные начальные условия, приходим к соотношению

$$\langle A\vartheta, \omega\rangle = \int_0^t \frac{d^2\vartheta(t-\tau)}{d\tau^2}\omega(\tau)\,d\tau =$$

$$= \left[\frac{d\vartheta(t-\tau)}{d\tau}\omega(\tau) - \vartheta(t-\tau)\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\right]\Big|_0^t + \int_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d^2\omega(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau = \langle\vartheta, A\omega\rangle. \tag{17}$$

Установленная самосопряженность оператора A относительно конволютивной билинейной формы позволяет сформулировать вариационный принцип

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\left\langle \vartheta, \frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right\rangle = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau, \delta I[\vartheta] = 0.$$

Вариация построенного функционала может быть вычислена следующим образом:

$$\delta I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left\{\delta\vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} + \vartheta(t-\tau)\delta\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2}\right\}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\vartheta(t-\tau)\delta\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} - \frac{d\vartheta(t-\tau)}{d\tau}\delta\vartheta(\tau)\right]\Bigg|_0^t + \int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau,$$

что приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа и двум однородным начальным условиям

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} = 0, \quad \vartheta(0) = 0, \quad \frac{d}{dt}\vartheta\Big|_{t=0} = 0,$$

полностью определяющими рассматриваемый оператор (16).

Замечание 2. Интегрируя по частям, можно преобразовать функционал $I(\vartheta)$ к виду

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\vartheta(t-\tau)\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}\Bigg|_0^t - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(\frac{d}{d\tau}\vartheta(t-\tau)\right)\frac{d}{d\tau}\vartheta(\tau)\,d\tau,$$

причем внеинтегральные слагаемые в силу однородных начальных условий обращаются в нуль. Таким образом, имеем:

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(\frac{d}{d\varsigma}\vartheta(\varsigma)\right)\Bigg|_{\varsigma=t-\tau}\frac{d}{d\tau}\vartheta(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

или, вводя обозначение для "скорости" $\eta(\tau) = \frac{d}{d\tau}\vartheta(\tau)$,

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \eta(t-\tau)\eta(\tau)\,d\tau,$$

в котором несложно угадать аналог выражения для "кинетической энергии".

Далее для краткости будем использовать следующее обозначение для неполной производной сложной функции:

$$\dot{\vartheta}(a(\tau)) = \frac{d\vartheta(\varsigma)}{d\varsigma}\Big|_{\varsigma=a(\tau)},$$

где $a(\tau)$ — некоторая "внутренняя" функция переменной t. Очевидно

$$\dot{\vartheta}(t-\tau) = -\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau}.$$

В этих обозначениях функционал (18) может быть записан в виде

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \dot{\vartheta}(t-\tau)\dot{\vartheta}(\tau)\,d\tau.$$

Пример 4. Рассмотрим теперь оператор с неоднородными краевыми условиями:

$$A = \frac{d^2}{dt^2}, \quad D_A = \{\vartheta : \vartheta(0) = \vartheta_0 \wedge \frac{d}{dt}\vartheta(0) = \eta_0\}. \tag{19}$$

Соответствующий функционал имеет вид

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau - \frac{1}{2}\vartheta_0\frac{d\vartheta(t)}{dt} - \frac{1}{2}\eta_0\vartheta(t). \tag{20}$$

Здесь, в отличие от (??), присутствуют два дополнительных слагаемых, которые определяются неоднородными начальными условиями. Для обоснования вариационного принципа вычислим вариацию функционала I

$$\delta I[\vartheta] = \frac{1}{2}\left[\vartheta(t-\tau)\delta\frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} - \frac{d\vartheta(t-\tau)}{d\tau}\delta\vartheta(\tau)\right]\Bigg|_0^t -$$

$$\frac{1}{2}\vartheta_0\delta\frac{d\vartheta(t)}{dt} - \frac{1}{2}\eta_0\delta\vartheta(t) + \int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\vartheta_0 - \vartheta(0)\Big]\delta\frac{d\vartheta(t)}{dt} + \frac{1}{2}\left[\eta_0 - \frac{d\vartheta(t)}{dt}\bigg|_{t=0}\right]\delta\vartheta(t) + \int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\frac{d^2\vartheta(\tau)}{d\tau^2}\,d\tau.$$

Отсюда получим уравнения Эйлера–Лагранжа и неоднородные начальные условия

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} = 0, \quad \vartheta(0) = \vartheta_0, \quad \frac{d}{dt}\vartheta\bigg|_{t=0} = \eta_0.$$

Замечание 3. В "симметризованном" варианте функционал (20) преобразуется путем интегрирования по частям:

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \dot{\vartheta}(t-\tau)\dot{\vartheta}(\tau)\,d\tau - \eta_0\vartheta(t).$$

Нет ничего удивительного в том, что из формулировки "исчезло" начальное значение функции ϑ. Достаточно лишь того, что оно фиксировано. Ведь функционал теперь зависит только от производной $\dot{\vartheta}$ и инвариантен относительно сдвига $\vartheta(t) \mapsto \vartheta(t) + \vartheta_0$.

Пример 5. Очевидно обобщение на операторы высших порядков:

$$A = \frac{d^n}{dt^n}, \quad D_A = \{\vartheta : \vartheta(0) = \vartheta_0 \wedge \frac{d}{dt}\vartheta(0) = \vartheta_1 \wedge \ldots \wedge \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\vartheta(0) = \vartheta_{n-1}\}.$$

Соответствующий функционал имеет вид

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\frac{d^n\vartheta(\tau)}{d\tau^n}\,d\tau - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\vartheta_k\frac{d^k\vartheta(t)}{dt^k} \tag{21}$$

Пример 6. Наконец, рассмотрим интегральный оператор Фредгольма с разностным ядром $K(t,\tau) = K(t-\tau)$ следующего вида:

$$A[\vartheta] = \int\limits_0^t K(t-\tau)\vartheta(\tau)\,d\tau = \langle K, \vartheta\rangle, \quad D_A = H. \tag{22}$$

Самосопряженность оператора (22) относительно конволютивной билинейной формы может быть доказана непосредственным вычислением

$$\langle A\vartheta, \omega\rangle = \int\limits_0^t\int\limits_0^{t-\tau} K(t-\tau-\varsigma)\vartheta(\varsigma)\,d\varsigma\,\omega(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t \vartheta(\tau)\int\limits_0^{t-\tau} K(t-\varsigma-\tau)\omega(\varsigma)\,d\varsigma\,d\tau = \langle\vartheta, A\omega\rangle.$$

С другой стороны, самосопряженность оператора A является следствием ассоциативности свертки

$$\langle A[\vartheta], \omega\rangle = \langle\langle K, \vartheta\rangle, \omega\rangle = \langle\vartheta, \langle K, \omega\rangle\rangle.$$

Теперь не составляет труда построить функционал, определяющий вариационный принцип. Согласно общей теории он имеет вид

$$I[\vartheta] = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\int\limits_0^\tau K(\tau-\varsigma)\vartheta(\varsigma)\,d\varsigma\,d\tau. \tag{23}$$

Вычисление вариации

$$\delta I(\vartheta) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\int\limits_0^\tau K(\tau-\varsigma)\vartheta(\varsigma)\,d\varsigma\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \vartheta(t-\tau)\int\limits_0^\tau K(\tau-\varsigma)\delta\vartheta(\varsigma)\,d\varsigma\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \delta\vartheta(t-\tau)\int\limits_0^\tau K(\tau-\varsigma)\vartheta(\varsigma)\,d\varsigma\,d\tau$$

приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\int\limits_0^\tau K(\tau-\varsigma)\vartheta(\varsigma)\,d\varsigma = 0,$$

которые полностью определяют оператор A (22).

2. Вариационный принцип в теории упругости. Приступим к формулировке вариационных принципов для начально-краевых задач механики сплошных сред.

Пусть $\mathcal{B}$ – область евклидова пространства, занимаемого упругим телом в отсчетной конфигурации. Будем полагать, что область $\mathcal{B}$ ограничена и имеет регулярную границу $\partial\mathcal{B}$.

Рассмотрим следующую билинейную форму:

$$\langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\rangle = \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau\,dV. \tag{24}$$

Эта форма по пространственным переменным $\boldsymbol{x}$ евклидова, а по времени t – конволютивна. Таким образом, симметричность и отделимость вытекают из соответствующих свойств евклидова скалярного произведения и свойств (7), (10) свертки.

Линейные уравнения движения сплошной упругой анизотропной среды могут быть записаны в виде [4]:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}\colon\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{K} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}. \tag{25}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ — перемещения, $\boldsymbol{K}$ – массовые силы, $\boldsymbol{\nabla}$ – пространственный оператор Гамильтона, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\boldsymbol{x})$ – тензор упругих модулей, которые удовлетворяют соотношению симметрии (условию существования упругого потенциала)

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{(3412)}. \tag{26}$$

Замечание 4. Классическое определение тензора упругих модулей несколько иное: вводится тензор $\boldsymbol{E}$, который связан с $\mathfrak{C}$ соотношением

$$\mathfrak{C} = \boldsymbol{E}\colon\mathbf{1}^s.$$

Здесь $\mathbf{1}^s$ – симметрирующая тензорная единица, преобразующая любой тензор второго ранга $\boldsymbol{A}$ в его симметричную часть, т.е.

$$\mathbf{1}^s\colon\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*\right).$$

Использование тензора $\mathfrak{C}$ вместо $\boldsymbol{E}$ в контексте настоящей работы позволяет уменьшить громоздкость выкладок.

Для постановки начально–краевой задачи кроме дифференциальных уравнений требуется указать начальные данные, определяющие начальные перемещения $\boldsymbol{u}_0$ и начальные скорости $\boldsymbol{v}_0$:

$$\boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0, \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0, \tag{27}$$

а также краевые условия, которые могут быть сформулированы следующим образом:

$$\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \hat{\boldsymbol{u}}, \quad \boldsymbol{n}\cdot\mathfrak{C}\colon\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \hat{\boldsymbol{f}}, \quad \partial B_1 \cup \partial B_2 = \partial B. \tag{28}$$

Здесь ∂B_1 – часть границы, на которой заданы перемещения $\hat{\boldsymbol{u}}$, ∂B_2 – часть границы, на которой задано поле поверхностных сил плотностью $\hat{\boldsymbol{f}}$.

Дифференциальные уравнения (25), начальные (27) и краевые условия (28) определяют начально-краевую задачу, которая порождает дифференциальный оператор

$$\mathfrak{A}[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}\colon\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{K} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}},$$

определенный в области $D_{\mathfrak{A}}$:

$$D_{\mathfrak{A}} = \left\{ \boldsymbol{u} : \boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{u}_0 \wedge \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0 \wedge \boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \hat{\boldsymbol{u}} \wedge \boldsymbol{n}\cdot\mathfrak{C}:\nabla\otimes\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \hat{\boldsymbol{f}} \right\}.$$

Оператор $\mathfrak{A}$, в силу неоднородности, нелинейный. Его производная $\mathfrak{A}' = A$ имеет вид

$$A[\boldsymbol{u}] = \nabla\cdot\mathfrak{C}:\nabla\otimes\boldsymbol{u} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}},$$

$$D_A = \left\{ \boldsymbol{u} : \boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{0} \wedge \boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \boldsymbol{0} \wedge \boldsymbol{n}\cdot\mathfrak{C}:\nabla\otimes\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \boldsymbol{0} \right\}.$$

В силу симметрии тензора упругих модулей (26) оператор A самосопряжен в конволютивной билинейной форме (24), в чем легко убедиться, если воспользоваться теоремой о дивергенции, интегрированием по частям относительно переменной t (аналогично преобразованию (17)) и учесть однородность начальных и краевых условий:

$$\begin{aligned}
\langle A[\boldsymbol{u}], \boldsymbol{v}\rangle &= \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \{\nabla\cdot\mathfrak{C}:\nabla\otimes\boldsymbol{u}(t-\tau) - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}(t-\tau)\}\cdot\boldsymbol{v}(\tau)\,d\tau\,dV = \\
&= \int\limits_{\partial\mathcal{B}}\int\limits_0^t \boldsymbol{n}\cdot\{\mathfrak{C}:\nabla\otimes\boldsymbol{u}(t-\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\tau) - \nabla\otimes\boldsymbol{v}(\tau):\mathfrak{C}\cdot\boldsymbol{u}(t-\tau)\}\,d\tau\,dA - \\
&\quad - \int\limits_{\mathcal{B}} \rho\left[\frac{d\boldsymbol{u}(t-\tau)}{d\tau}\boldsymbol{v}(\tau) - \boldsymbol{u}(t-\tau)\frac{d\boldsymbol{v}(\tau)}{d\tau}\right]\Bigg|_0^t dV + \\
&\quad + \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \boldsymbol{u}(t-\tau)\cdot\{\nabla\cdot[\nabla\otimes\boldsymbol{v}(\tau):\mathfrak{C}] - \rho\ddot{\boldsymbol{v}}(\tau)\}\,d\tau\,dV = \langle\boldsymbol{u}, A[\boldsymbol{v}]\rangle.
\end{aligned} \tag{29}$$

Теперь может быть сформулирован вариационный принцип, порождаемый оператором $\mathfrak{A}$ и однородными начальными и краевыми условиями

$$\begin{aligned}
I[\boldsymbol{u}] &= \frac{1}{2}\langle\boldsymbol{u}, A[\boldsymbol{u}]\rangle + \langle\boldsymbol{u}, \rho\boldsymbol{K}\rangle = \\
&= \int\limits_{\mathcal{B}}\left\{\int\limits_0^t \boldsymbol{u}(t-\tau)\left[\frac{1}{2}\nabla\cdot\mathfrak{C}:\nabla\otimes\boldsymbol{u}(\tau) + \rho\boldsymbol{K}(\tau) - \frac{1}{2}\rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau)\right]d\tau\right\}dV, \quad \delta I[\boldsymbol{u}] = 0.
\end{aligned}$$

Для неоднородных начальных и краевых условий функционал $I[\boldsymbol{u}]$ формулируется следующим образом:

$$I[\boldsymbol{u}] = \int\limits_{\mathcal{B}} \left\{ \int\limits_0^t \boldsymbol{u}(t-\tau)\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathfrak{C}\colon\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(\tau) + \rho\boldsymbol{K}(\tau) - \frac{1}{2}\rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau)\right] d\tau \right\} dV -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_1}\int\limits_0^t \boldsymbol{n}\cdot\mathfrak{C}\colon\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(t-\tau)\cdot\hat{\boldsymbol{u}}(\tau)d\tau\, dA + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_2}\int\limits_0^t \hat{\boldsymbol{f}}(t-\tau)\cdot\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\, dA +$$

$$+\frac{\rho}{2}\int\limits_{\mathcal{B}} \{\boldsymbol{u}_0\cdot\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{u}(t)\}\, dV. \tag{30}$$

В результате применения теоремы о дивергенции и интегрирования по частям по переменной t (аналогично преобразованию (18)), функционал $I[\boldsymbol{u}]$ может быть приведен к виду

$$I[\boldsymbol{u}] = -\int\limits_{\mathcal{B}} \left\{ \int\limits_0^t \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(t-\tau)\colon\mathfrak{C}\colon\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}(\tau) - \rho\boldsymbol{u}(t-\tau)\cdot\boldsymbol{K}(\tau) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{u}}(t-\tau)\dot{\boldsymbol{u}}(\tau)\Big]\, d\tau \right\} dV + \int\limits_{\partial\mathcal{B}_2}\int\limits_0^t \hat{\boldsymbol{f}}(t-\tau)\cdot\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\, dA + \rho\int\limits_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{u}(t)\, dV. \tag{31}$$

Следует отметить, что в функционале (31), в отличие от (30), отсутствуют слагаемые, которые содержат перемещения $\hat{\boldsymbol{u}}$, заданные на границе, и начальные смещения $\boldsymbol{u}_0$. Причина этого уже обсуждалась в разделе 2. Функционал (31) существенно отличается от функционала, определяемого в вариационном принципе Остроградского-Гамильтона [3], по структуре близок к функционалу, определяемому в вариационном принципе Гертина [9], но не совпадает с ним. Если предположить, что все поля не зависят от времени (т.е. рассматривается статическое состояние), то из вариационного принципа, постулирующего стационарность функционала (31), вытекает известный принцип виртуальной работы в приближении малых деформаций [13].

Перейдем теперь к нелинейным уравнениям движения сплошной упругой среды, которые в отсчетной конфигурации могут быть записаны следующим образом [13]:

$$\nabla_R\cdot\frac{\partial\psi(\nabla_R\otimes\boldsymbol{\chi})}{\partial\nabla_R\otimes\boldsymbol{\chi}} + \rho_0\boldsymbol{K} - \rho_0\ddot{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{0}.$$

Здесь $\boldsymbol{\nabla}_R$ – отсчетный оператор Гамильтона, $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}, t)$ – место частицы X в момент t, ψ – функция запасенной энергии (упругий потенциал), $\boldsymbol{K}$ – массовые силы.

Оператор $\mathfrak{A}$ задается дифференциальным выражением

$$\mathfrak{A}[\boldsymbol{\chi}] = \nabla_R\cdot\frac{\partial\psi(\nabla_R\otimes\boldsymbol{\chi})}{\partial\nabla_R\otimes\boldsymbol{\chi}} + \rho_0\boldsymbol{K} - \rho_0\ddot{\boldsymbol{\chi}},$$

начальными данными

$$\boldsymbol{\chi}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{\chi}_0, \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{\chi}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0$$

и краевыми условиями

$$\chi\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \hat{\chi}, \quad \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\psi(\nabla_R\otimes\chi)}{\partial\nabla_R\otimes\chi}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \hat{\boldsymbol{f}},$$

где $\boldsymbol{n}$ – вектор внешней единичной нормали к границе тела в отсчетной конфигурации, $\hat{\boldsymbol{f}}$ – плотность приложенной поверхностной силы на единицу площади в отсчетной конфигурации.

Область определения оператора $\mathfrak{A}$ может быть задана следующим образом:

$$D_{\mathfrak{A}} = \left\{\chi : \chi\Big|_{t=0} = \chi_0 \wedge \frac{d}{dt}\chi\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0 \wedge \chi\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \hat{\chi} \wedge \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial\psi(\nabla_R\otimes\chi)}{\partial\nabla_R\otimes\chi}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \hat{\boldsymbol{f}}\right\}.$$

Производная $\mathfrak{A}' = A$ имеет вид

$$A_{\chi}[\chi^{\star}] = \nabla_R\cdot\left(\frac{\partial^2\psi(\nabla_R\otimes\chi)}{(\partial\nabla_R\otimes\chi)(\partial\nabla_R\otimes\chi)}\right):\nabla_R\otimes\chi^{\star} - \rho_0\ddot{\chi}^{\star},$$

$$D_A = \left\{\chi^{\star} : \chi^{\star}(0) = \frac{d}{dt}\chi^{\star}(0) = \boldsymbol{0} \wedge \chi^{\star}_{\partial\mathcal{B}_1} = \boldsymbol{0} \wedge \boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{\partial^2\psi(\nabla_R\otimes\chi)}{(\partial\nabla_R\otimes\chi)(\partial\nabla_R\otimes\chi)}\right):\nabla_R\otimes\chi^{\star} = \boldsymbol{0}\right\}$$

и является самосопряженным оператором относительно конволютивной билинейной формы. Действительно, вводя обозначение для тензора упругости

$$\mathfrak{M} = \frac{\partial^2\psi}{(\partial\nabla_R\otimes\chi)(\partial\nabla_R\otimes\chi)},$$

фактически повторяем вычисления (29). При условии $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(3412)}$, которое обеспечивается двукратной дифференцируемостью функции запасенной энергии, имеем

$$\langle A_{\chi}[u], v\rangle = \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \{\nabla_R(\mathfrak{M}:\nabla_R\otimes\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t-\tau)) - \rho_0\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{X}, t-\tau)\}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},\tau)\, d\tau\, dV =$$

$$= \int\limits_{\partial\mathcal{B}}\int\limits_0^t \boldsymbol{n}\cdot[(\mathfrak{M}:\nabla_R\otimes\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t-\tau))\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},\tau) - \nabla_R\otimes\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X},\tau):\mathfrak{M}\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t-\tau)]\, d\tau\, dA +$$

$$+ \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t-\tau)\cdot\{\nabla_R\cdot(\nabla_R\otimes\boldsymbol{v}(\tau):\mathfrak{M}) - \rho_0\ddot{\boldsymbol{v}}(\tau)\}\, d\tau\, dV = \langle \boldsymbol{u}, A_{\chi}[v]\rangle.$$

Таким образом, функционал, определяющий вариационный принцип, имеет вид

$$I(\chi) = \left\langle \chi, \int\limits_0^1 \mathfrak{A}[\lambda\chi]\, d\lambda \right\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_0^t \chi(t-\tau)\cdot \left\{ \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{\lambda} \nabla_R \cdot \frac{\partial\psi(\lambda\nabla_R\otimes\chi(\tau))}{\partial\nabla_R\otimes\chi(\tau)} \right] d\lambda + \rho_0 \boldsymbol{K}(\tau) - \frac{1}{2}\rho_0\ddot{\chi}(\tau) \right\} d\tau\, dV -$$

$$- \int\limits_{\partial\mathcal{B}_1} \int\limits_0^t \boldsymbol{n}\cdot \int\limits_0^1 \frac{1}{\lambda} \frac{\partial\psi(\lambda\nabla_R\otimes\chi(t-\tau))}{\partial\nabla_R\otimes\chi(t-\tau)}\, d\lambda \cdot \hat{\chi}(\tau) d\tau\, dA +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\mathcal{B}_2} \int\limits_0^t \hat{\boldsymbol{f}}(t-\tau)\cdot\chi(\tau) d\tau\, dA + \frac{\rho_0}{2} \int\limits_{\mathcal{B}} \{\chi_0\cdot\dot{\chi}(t) + \boldsymbol{v}_0\cdot\chi(t)\}\, dV.$$

Осуществляя преобразования, основанные на дивергентной теореме и интегрировании по частям по переменной t, приходим к следующему выражению для функционала $I(\chi)$:

$$I(\chi) = \int\limits_{\mathcal{B}} \left\{ \int\limits_0^t \nabla_R\otimes\chi(t-\tau) : \int\limits_0^1 \frac{1}{\lambda} \frac{\partial\psi(\lambda\nabla_R\otimes\chi(\tau))}{\partial\nabla_R\otimes\chi(\tau)}\, d\lambda + \rho_0\chi(t-\tau)\cdot\boldsymbol{K}(\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\rho_0\dot{\chi}(t-\tau)\dot{\chi}(\tau)\, d\tau \right\} dV + \int\limits_{\partial\mathcal{B}_2} \int\limits_0^t \hat{\boldsymbol{f}}(t-\tau)\cdot\chi(\tau) d\tau\, dA + \rho_0 \int\limits_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v}_0\cdot\chi(t)\, dV. \quad (32)$$

Отметим, что в случае статического деформирования из вариационного принципа, постулирующего стационарность функционала (32), вытекает известный принцип виртуальной работы в отсчетной конфигурации [13].

3. Вариационный принцип в теории связной термоупругости. Предварительно введем следующую билинейную форму:

$$\langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) \rangle_1 = \int\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_0^t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)\, d\tau\, dV. \quad (33)$$

В симметричности формы (33) легко убедиться непосредственным вычислением. Действительно, интегрируя по частям, приходим к соотношению

$$\int\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_0^t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau)\cdot\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)\, d\tau\, dV = \int\limits_{\mathcal{B}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)\, dV \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} -$$

$$- \int\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-\tau))\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau)\, d\tau\, dV.$$

Поскольку симметричность должна выполняться на функциях, которые обращаются в нуль в концевых точках интервала времени, внеинтегральные слагаемые исчезают, т.е.

$$\langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\rangle_1 = \langle \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\rangle_1 .$$

Рассмотрим линейные уравнения движения и теплопроводности термоупругой среды [4]:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}+\rho\boldsymbol{K}-\rho\ddot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{\mathfrak{B}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta=\boldsymbol{0},\\
\frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\theta-\frac{c}{T_0}\dot{\theta}-\boldsymbol{\mathfrak{B}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\dot{\boldsymbol{u}}+\frac{1}{T_0}\varpi=0.
\end{gathered}$$

Здесь $\boldsymbol{u}$ – перемещения, θ – избыточная температура, $\boldsymbol{\mathfrak{C}}=\boldsymbol{\mathfrak{C}}^{(3412)}$ – тензор упругих модулей, $\boldsymbol{\mathfrak{B}}=\boldsymbol{\mathfrak{B}}^*$ – тензор термомеханических модулей (определяющих температурное расширение), $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}^*$ – тензор теплопроводности, c – теплоемкость при постоянной деформации, $\boldsymbol{K}$ – плотность массовых сил, ϖ – мощность источников тепла, T_0 – отсчетная температура.

Для постановки начально-краевой задачи кроме дифференциальных уравнений требуется указать начальные распределения перемещений, скоростей и температуры:

$$\boldsymbol{u}\Big|_{t=0}=\boldsymbol{u}_0,\quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\Big|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0,\quad \theta\Big|_{t=0}=\theta_0$$

и краевые условия, которые в наиболее общем виде могут быть сформулированы следующим образом:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1}=\hat{\boldsymbol{u}},\quad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}-\boldsymbol{\mathfrak{B}}\theta)\Big|_{\partial\mathcal{B}_2}=\hat{\boldsymbol{f}},\\
\theta\Big|_{\partial\mathcal{B}_3}=\hat{\theta},\quad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta)\Big|_{\partial\mathcal{B}_4}=\hat{q},\\
\partial B_1\cup\partial B_2=\partial B,\quad \partial B_3\cup\partial B_4=\partial B.
\end{gathered}$$

Здесь ∂B_1 – часть границы ∂B, на которой заданы перемещения $\hat{\boldsymbol{u}}$, ∂B_2 – часть границы, на которой задано векторное поле поверхностных сил плотностью $\hat{\boldsymbol{f}}$, ∂B_3 – часть границы, на которой задана избыточная температура $\hat{\theta}$, ∂B_4 – часть границы, на которой задан тепловой поток $\hat{q}$.

Оператор $\mathfrak{A}$ может быть представлен в следующей матричной форме

$$\mathfrak{A}[(\boldsymbol{u},\theta)]=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} & -\boldsymbol{\mathfrak{B}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\\ -\boldsymbol{\mathfrak{B}}:\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\otimes & \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}-\frac{c}{T_0}\frac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\rho\boldsymbol{K}\\ \varpi\end{pmatrix}.$$

Область определния оператора $\mathfrak{A}$ определяется начальными и краевыми условиями

$$\begin{aligned}
D_{\mathfrak{A}}=\Big\{\boldsymbol{u}:\boldsymbol{u}\Big|_{t=0}=\boldsymbol{u}_0\wedge\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\Big|_{t=0}=\boldsymbol{v}_0\wedge\theta\Big|_{t=0}=\theta_0\wedge\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1}=\hat{\boldsymbol{u}}\wedge\\
\wedge\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2}=\hat{\boldsymbol{f}}\wedge\theta\Big|_{\partial\mathcal{B}_3}=\hat{\theta}\wedge\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta)\Big|_{\partial\mathcal{B}_4}=\hat{q}\Big\}.
\end{aligned}$$

Производная $\mathfrak{A}' = A$ задается однородным дифференциальным выражением

$$A[(\boldsymbol{u},\theta)] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes -\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} & -\boldsymbol{\mathfrak{B}}\cdot\boldsymbol{\nabla} \\ -\boldsymbol{\mathfrak{B}}:\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\otimes & \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla} - \frac{c}{T_0}\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \theta \end{pmatrix} \tag{34}$$

и однородными начально-краевыми условиями, т.е.

$$D_A = \left\{ \boldsymbol{u} : \boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{0} \wedge \theta\Big|_{t=0} = 0 \wedge \right.$$

$$\left. \wedge\, \boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_1} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}\Big|_{\partial\mathcal{B}_2} = \boldsymbol{0}\wedge\theta\Big|_{\partial\mathcal{B}_3} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta)\Big|_{\partial\mathcal{B}_4} = 0 \right\}.$$

Рассмотрим следующую билинейную форму[2]:

$$\langle(\boldsymbol{u}_1,\theta_1),(\boldsymbol{u}_2,\theta_2)\rangle_2 = \langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\rangle_1 - \langle\theta_1,\theta_2\rangle = \langle\boldsymbol{u}_1,\dot{\boldsymbol{u}}_2\rangle - \langle\theta_1,\theta_2\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_{0}^{t} \{\boldsymbol{u}_1(t-\tau)\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_2(\tau) - \theta_1(t-\tau)\theta_2(\tau)\}\,d\tau\,dV. \tag{35}$$

Докажем, что оператор (34) самосопряжен относительно билинейной формы (35):

$$\langle A[(\boldsymbol{u}_1,\theta_1)],(\boldsymbol{u}_2,\theta_2)\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes -\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} & -\boldsymbol{\mathfrak{B}}\cdot\boldsymbol{\nabla} \\ -\boldsymbol{\mathfrak{B}}:\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\otimes & \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla} - \frac{c}{T_0}\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \langle\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}_1 - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_1,\dot{\boldsymbol{u}}_2\rangle + \langle-\boldsymbol{\mathfrak{B}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta_1,\dot{\boldsymbol{u}}_2\rangle -$$

$$- \langle-\boldsymbol{\mathfrak{B}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\dot{\boldsymbol{u}}_1,\theta_2\rangle - \left\langle \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{\nabla}\theta_1 - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}_1,\theta_2 \right\rangle.$$

Первое слагаемое (подобное преобразование уже было рассмотрено в упругом случае) преобразуется следующим образом:

$$\langle\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}_1 - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_1,\dot{\boldsymbol{u}}_2\rangle = \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_{0}^{t} \{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\mathfrak{C}}:\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}_1(t-\tau) - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_1(t-\tau)\}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_2(\tau)\,d\tau\,dV =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_{0}^{t} \dot{\boldsymbol{u}}_1(t-\tau)\cdot\{\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}_2(\tau):\boldsymbol{\mathfrak{C}}] - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_2(\tau)\}\cdot d\tau\,dV = \langle\dot{\boldsymbol{u}}_1\,\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u}_2:\boldsymbol{\mathfrak{C}}] - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}_2\rangle.$$

Второе слагаемое преобразуется аналогично сделанному выше:

$$\langle-\boldsymbol{\mathfrak{B}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta_1,\dot{\boldsymbol{u}}_2\rangle = -\int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_{0}^{t} \boldsymbol{\mathfrak{B}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\theta_1(t-\tau)\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_2(\tau)\,d\tau\,dV =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_{0}^{t} \theta_1(t-\tau)\boldsymbol{\mathfrak{B}}^*:\boldsymbol{\nabla}\otimes\dot{\boldsymbol{u}}_2(\tau)\,d\tau\,dV = \langle\theta_1,\boldsymbol{\mathfrak{B}}^*:\boldsymbol{\nabla}\dot{\boldsymbol{u}}_2\rangle.$$

[2]В вариационном принципе Белли использована классическая конволютивная форма, а соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа – интегродифференциальные. В этом состоит главное отличие предлагаемого вариационного принципа от принципа Белли [10].

Наконец, для третьего и четвертого слагаемых справедливы соотношения

$$\langle -\mathfrak{B}:\nabla\otimes\dot{\boldsymbol{u}}_1,\theta_2\rangle =$$

$$= -\int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \mathfrak{B}:\nabla\otimes\dot{\boldsymbol{u}}_1(t-\tau)\,\theta_2(\tau)\,d\tau\,dV = \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \dot{\boldsymbol{u}}_1(t-\tau)\cdot\mathfrak{B}^*\cdot\nabla\theta_2(\tau)\,d\tau\,dV =$$

$$= \langle \dot{\boldsymbol{u}}_1, \mathfrak{B}\cdot\nabla\theta_2\rangle,$$

$$\left\langle \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}:\nabla\otimes\nabla\theta_1 - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}_1,\theta_2\right\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \left\{\frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}:\nabla\otimes\nabla\theta_1(t-\tau) - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}_1(t-\tau)\right\}\theta_2(\tau)\,d\tau\,dV =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \theta_1(t-\tau)\left\{\frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}^*:\nabla\otimes\nabla\theta_2(\tau) - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}_1(\tau)\right\}d\tau\,dV =$$

$$= \left\langle \theta_1, \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}^*:\nabla\otimes\nabla\theta_2 - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}_2\right\rangle.$$

Таким образом,

$$\langle A[(\boldsymbol{u}_1,\theta_1)],(\boldsymbol{u}_2,\theta_2)\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \theta_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nabla\cdot\mathfrak{C}^{(3412)}:\nabla\otimes - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} & -\mathfrak{B}^*\cdot\nabla \\ -\mathfrak{B}^*:\frac{\partial}{\partial t}\nabla\otimes & \frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}^*:\nabla\otimes\nabla - \frac{c}{T_0}\frac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_2\\ \theta_2\end{pmatrix}\right\rangle$$

и при условиях

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{(3412)},\quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*,\quad \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^*$$

оператор A самосопряжен относительно билинейной формы (35):

$$\langle A[(\boldsymbol{u}_1,\theta_1)],(\boldsymbol{u}_2,\theta_2)\rangle_2 = \langle(\boldsymbol{u}_1,\theta_1),A[(\boldsymbol{u}_2,\theta_2)]\rangle_2.$$

Это позволяет сформулировать вариационный принцип следующим образом:

$$I[(\boldsymbol{u},\theta)] = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t\Big\{\dot{\boldsymbol{u}}(t-\tau)\cdot\Big[\nabla\cdot\mathfrak{C}:\nabla\otimes\boldsymbol{u}(\tau) + 2\rho\boldsymbol{K} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau) - \mathfrak{B}\cdot\nabla\theta(\tau)\Big] -$$

$$-\theta(t-\tau)\Big[\frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}:\nabla\otimes\nabla\theta(\tau) - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}(\tau) - \mathfrak{B}:\nabla\otimes\dot{\boldsymbol{u}}(\tau) + \frac{2}{T_0}\varpi\Big]\Big\}\,d\tau\,dV -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_1}\int\limits_0^t \boldsymbol{n}\cdot(\mathfrak{C}:\nabla\otimes\boldsymbol{u}(t-\tau) - \mathfrak{B}\theta(t-\tau))\cdot\hat{\boldsymbol{u}}(\tau)\,d\tau\,dA +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_2}\int\limits_0^t \hat{\boldsymbol{f}}(t-\tau)\cdot\boldsymbol{u}(\tau)\,d\tau\,dA + \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_3}\int\limits_0^t \boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}\cdot\nabla\theta(t-\tau)\right)\hat{\theta}(\tau)\,d\tau\,dA -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\mathcal{B}_4}\int\limits_0^t \hat{q}(t-\tau)\theta(\tau)\,d\tau\,dA + \int\limits_{\mathcal{B}}\left\{\frac{\rho}{2}(\boldsymbol{u}_0\cdot\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{u}(t)) - \frac{c}{2T_0}\theta_0\theta(t)\right\}dV.$$

Наличие антисимметричных относительно дивергентного преобразования членов

$$\int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \dot{\boldsymbol{u}}(t-\tau)\cdot\mathfrak{B}\cdot\nabla\theta(\tau)\,d\tau\,dV = -\int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \theta(t-\tau)\mathfrak{B}:\nabla\otimes\dot{\boldsymbol{u}}(\tau)\,d\tau\,dV$$

позволяет упростить вид функционала (слагаемые, определяемые неоднородными краевыми и начальными условиями, не выписаны)

$$I[(\boldsymbol{u},\theta)] = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{B}}\int\limits_0^t \Big\{\dot{\boldsymbol{u}}(t-\tau)\cdot\Big[\nabla\cdot\mathfrak{C}:\nabla\otimes\boldsymbol{u}(\tau) + 2\rho\boldsymbol{K} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau) - 2\mathfrak{B}\cdot\nabla\theta(\tau)\Big] -$$

$$-\theta(t-\tau)\Big[\frac{1}{T_0}\boldsymbol{\Lambda}:\nabla\otimes\nabla\theta(\tau) - \frac{c}{T_0}\dot{\theta}(\tau) + \frac{2}{T_0}\varpi\Big]\Big\}\,d\tau\,dV.$$

4. Вариационный принцип в теории вязкоупругости. Обсуждаемая методология позволяет построить вариационные принципы и для существенно диссипативных процессов, таких как движение вязкоупругой и наследственно-упругой среды [14]. Ниже приведем краткую схему построения подобных вариационных принципов.

Линейные уравнения движения сплошной вязкоупругой анизотропной среды дифференциального типа могут быть сформулированы следующим образом:

$$\nabla\cdot\sum_{k=0}^{n}\mathfrak{C}_k:\nabla\otimes\frac{d^k\boldsymbol{u}}{dt^k} + \rho\boldsymbol{K} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}.$$

Здесь $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{C}_k^{(3412)}$ – тензоры вязкоупругих модулей среды.

Из обобщения соотношения (21) вытекает самосопряженность однородных операторов, порождаемых этими уравнениями. Соответствующий вариационный принцип имеет вид (слагаемые, определяемые неоднородными краевыми и начальными условиями, не выписаны):

$$I[\boldsymbol{u}] = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{B}}\Big\{\int\limits_0^t \boldsymbol{u}(t-\tau)\Big[\sum_{k=0}^{n}\nabla\cdot\mathfrak{C}_k:\nabla\otimes\frac{d^k}{d\tau^k}\boldsymbol{u}(\tau) + 2\rho\boldsymbol{K} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau)\Big]\,d\tau\Big\}\,dV,\ \delta I[\boldsymbol{u}] = 0.$$

Линейные уравнения движения сплошной наследственной анизотропной среды могут быть записаны в следующей форме:

$$\nabla\cdot\int\limits_0^t \mathfrak{C}(t-\tau):\nabla\otimes\boldsymbol{u}(\tau)\,d\tau + \rho\boldsymbol{K} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}.$$

Здесь $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(t-\tau)$ – тензорное разностное ядро, определяющее закон состояния наследственно-упругих сред. Из обобщения (23) следует самосопряженность однородных операторов, порождаемых этими уравнениями. Соответствующий вариационный принцип имеет вид (слагаемые, определяемые неоднородными краевыми и начальными условиями, не выписаны):

$$I[\boldsymbol{u}] = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{B}}\Big\{\int\limits_0^t \boldsymbol{u}(t-\tau)\Big[\int\limits_0^\tau \nabla\cdot\mathfrak{C}(\tau-\varsigma):\nabla\otimes\boldsymbol{u}(\varsigma)\,d\varsigma + 2\rho\boldsymbol{K} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}(\tau)\Big]\,d\tau\Big\}\,dV,\ \delta I[\boldsymbol{u}] = 0.$$

Заключение. Авторам работы представляется целесообразным применение изложенного общего подхода к построению новых вариационных принципов и новых моделей сплошных сред, в частности, моделей непрерывно растущих тел [15]. Следует также отметить, что формулировка задачи в форме вариационного принципа позволяет использовать прямые вариационные методы для построения замкнутых решений краевых задач [16], получать с помощью формальных алгоритмов новые уравнения и краевые условия с усложненной кинематикой, возникающие, например, в теории пластин и оболочек [17], осуществлять контроль сходимости решений, получаемых методами спектральных разложений [18] и т.д. и потому является весьма ценной формой представления задачи как для теории, так и для приложений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-91302-ИНД-а, 08-01-00553-а, 09-08-01194-а).

Литература

1. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

2. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. - М.: ГИТТЛ, 1956. – 344 с.

3. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 447 с.

4. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

5. *Микусинский Я.* Операторное исчисление. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956. - 366 с.

6. *Gurtin M.E.* Variational principles for linear initial-value problems // Quart. Appl. Math. 1964. № 22. P. 252–256.

7. *Tonti E.* On the variational formulation for linear initial value problems // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1973. Vol. 95. № 1. P. 231–259.

8. *Reddy J.N.* A note on mixed variational principles for initial-value problems // Quart. J. Mech. Appl. 1975. № 28. P. 123–132.

9. *Gurtin M.E.* Variational principles for linear elastodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 16. № 1. P. 34–50.

10. *Belli G., Morosi C.* A variational principle for the dynamic problem of linear coupled thermoelasticity // Meccanica. 1974. Vol. 9. № 4. P. 239–243.

11. *Buchanan G.R.* A note on a variational principle for crystal physics // Computational Mechanics. 1987. № 2. P. 163–166.

12. *Boshi E.* A variational theorem in the theory of porous media // Il nuovo cimento. 1973. Vol. 16. № 2. P. 301–310.

13. *Съярле Ф.* Математическая теория упругости. – М.: Мир, 1992. – 471 с.

14. *Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В.* Контактные задачи теории ползучести. – Ереван: Изд-во РА, 1999. – 320 с.

15. *Manzhirov A.V., Lychev S.A.* Mathematical modeling og growth processes in nature and engineering: A variational approach // Journal of Physics: Conference Series. 2009. In press.

16. *Лычев С.А., Салеев С.В.* Замкнутое решение задач об изгибе жестко закрепленной прямоугольной пластины // Вестник Самарского гос. ун-та. Естественнонаучная серия. 2006. № 2. С. 62–73.

17. *Лычев С.А., Сайфутдинов Ю.Н.* Уравнения движения трехслойной вязкоупругой сферической оболочки // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. № 6. С. 70–88.

18. *Лычев С.А.* Связанная задача динамики для термовязкоупругого тела // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 5. С. 95–113.