С. Лычев

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КЛАССИЧЕСКАЯ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

25 декабря 2023 г.

Обо всех найденных опечатках и ошибках просьба сообщать Константину Койфману на почту koifman.bmstu@yandex.ru

Файл периодически обновляется, следите за обновлениями!

Оглавление

Глава 1.

Континуум в пространстве-времени

1.1. Плоское пространство-время

1°. Структура пространства-времени Минковского. Начнем с построения алгебраической структуры, которая характеризует плоское пространство-время. На уровне аффинной структуры, единственное отличие заключается в размерности трансляционного пространства: $m = 4$. В этом случае мы одновременно используем два сорта индексов. Латинские индексы i, j, меняются в пределах $(1, 3)$, в то время как греческие индексы, α, β, меняются в пределах $(0, 3)$. Таким образом, в частности, выделенный базис обозначается как $(\boldsymbol{c}_\alpha)_{\alpha=0}^{3}$.

Фундаментальное различие возникает при задании метрики на $\mathscr{C}^4$ (последняя структура определена формулой (1.1.62)). В силу причин, обсуждаемых детально в рамках специальной теории относительности (в частности, для инвариантности уравнений Максвелла при изометричных преобразованиях) [1, p. 21], следует использовать псевдоевклидову метрику с сигнатурой $(-, +, +, +)$. Таким образом, мы полагаем

$$\mathscr{M}^4 = \left(\mathscr{C}^4, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{\omega}, \nabla_m\right), \tag{1.1.11}$$

где второй элемент

$$\boldsymbol{g} = -\mathfrak{c}^0 \otimes \mathfrak{c}^0 + \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{c}^i \otimes \mathfrak{c}^i \tag{1.1.12}$$

$$= m_{\alpha\beta}\, \mathfrak{c}^\alpha \otimes \mathfrak{c}^\beta, \quad \text{где} \quad m_{\alpha\beta} := \begin{cases} -1, & \text{если } \alpha = \beta = 0, \\ 1, & \text{если } \alpha = \beta \neq 0, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

определяет псевдоевклидову метрику, инвариантную относительно преобразований Лоренца. Метрика $\boldsymbol{g}$ соответствует выбранному базису $(\boldsymbol{c}_\alpha)_{\alpha=0}^{3}$ так, что элементы последнего $\boldsymbol{g}$-ортонормальны. Соотношения ортонормальности несколько отличны от привычных евклидовых:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{c}_\alpha,\, \boldsymbol{c}_\beta) = 0,\ \text{если}\ \alpha \neq \beta, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{c}_0,\, \boldsymbol{c}_0) = -1, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{c}_k,\, \boldsymbol{c}_k) = 1,\ k = 1,\, 2,\, 3. \tag{1.1.13}$$

Если $\boldsymbol{v} = v^\alpha \boldsymbol{c}_\alpha$, $v^\alpha = \langle \mathfrak{c}^\alpha,\, \boldsymbol{v}\rangle$, есть некоторый вектор, то приходим к знакомой формуле:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{v}) = -(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2. \tag{1.1.14}$$

Музыкальные изоморфизмы $(\cdot)^\flat : \mathscr{V}^4 \to (\mathscr{V}^4)^*$ и $(\cdot)^\sharp : (\mathscr{V}^4)^* \to \mathscr{V}^4$, а также соответствующее внутреннее произведение $\boldsymbol{g}^{(k)}$ на $\bigwedge^k\big((\mathscr{V}^4)^*\big)$ порождаются метрикой (1.1.12) способом, аналогичным (1.1.73) и (1.1.74) (с заменой размерности 3 на 4 и метрики $\boldsymbol{h}$ на $\boldsymbol{g}$). Однако, базисы $(\boldsymbol{c}^\alpha)_{\alpha=0}^{3} \subset \mathscr{V}^4$ и $(\mathfrak{c}_\alpha)_{\alpha=0}^{3} \subset (\mathscr{V}^4)^*$, биортогональные к выбранным базисам, определяются слегка иным образом (в сравнении с (1.1.75)):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c}^0 = -\boldsymbol{c}_0, \quad \text{и} \quad \boldsymbol{c}^k = \boldsymbol{c}_k,\ k = 1,\, 2,\, 3,\\ &\mathfrak{c}_0 = -\mathfrak{c}^0, \quad \text{и} \quad \mathfrak{c}_k = \mathfrak{c}^k,\ k = 1,\, 2,\, 3. \end{aligned}$$

Поскольку метрический тензор $\boldsymbol{g}$ (1.1.12) индефинитен, декомпозиции тождественных отображений $\mathsf{I} = \boldsymbol{c}_\alpha \otimes \mathfrak{c}^\alpha : \mathscr{V}^4 \to \mathscr{V}^4$ и $\mathfrak{I} = \mathfrak{c}^\alpha \otimes \boldsymbol{c}_\alpha : (\mathscr{V}^4)^* \to (\mathscr{V}^4)^*$ относительно диад, состоящих только, соответственно, из векторов и ковекторов, модифицируются следующим образом. Введем обозначения $\boldsymbol{u} \odot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}^\flat$ и $\mathfrak{h} \odot \mathfrak{t} = \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{t}^\sharp$. Тогда с использованием этих обозначений тождественные отображения могут быть записаны как:

$$\mathsf{I} = -\boldsymbol{c}_0 \odot \boldsymbol{c}_0 + \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{c}_k \odot \boldsymbol{c}_k, \quad \mathfrak{I} = -\mathfrak{c}^0 \odot \mathfrak{c}^0 + \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{c}^k \odot \mathfrak{c}^k.$$

Заметим, что первые элементы в обоих диадных разложениях имеют знак минус, что кажется непривычным с точки зрения евклидовой геометрии.

Третий элемент структуры (1.1.11) есть 4-форма $\boldsymbol{\omega} = \mathfrak{c}^0 \wedge \mathfrak{c}^1 \wedge \mathfrak{c}^2 \wedge \mathfrak{c}^3$, которая задает меру на A для 4-х мерных областей. Чтобы получить меры на множествах меньшей размерности, можно использовать звезду Ходжа $* : \bigwedge^k\big((\mathscr{V}^4)^*\big) \to \bigwedge^{4-k}\big((\mathscr{V}^4)^*\big)$, которая задается по аналогии с (1.1.77) (следует лишь заменить размерность 3 на 4, метрику $\boldsymbol{h}$ на $\boldsymbol{g}$, а $\boldsymbol{\epsilon}$

на $\boldsymbol{\omega}$). В частности, элементы гиперповерхности могут быть определены как

$$*\mathfrak{c}^0 = -\mathfrak{c}^1 \wedge \mathfrak{c}^2 \wedge \mathfrak{c}^3, \quad *\mathfrak{c}^1 = -\mathfrak{c}^0 \wedge \mathfrak{c}^2 \wedge \mathfrak{c}^3,$$
$$*\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}^0 \wedge \mathfrak{c}^1 \wedge \mathfrak{c}^3, \quad *\mathfrak{c}^3 = -\mathfrak{c}^0 \wedge \mathfrak{c}^1 \wedge \mathfrak{c}^2.$$

Четвертый элемент структуры (1.1.11) является аффинной связностью, порожденной метрикой $\boldsymbol{g}$. В явной форме, если $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} : A \to \mathscr{V}^4$ — векторные поля, то

$$(\nabla_m)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = u^0 \,\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^0}\, \boldsymbol{c}_\alpha + u^i \,\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i}\, \boldsymbol{c}_\alpha.$$

2°. Замечания о топологии пространства-времени Минковского. При построении пространства-времени Минковского мы начинаем с четырехмерного векторного пространства. $\mathscr{V}^4$, над которым затем собирается многообразие с тривиальным атласом, порожденным арифметизацией $\mathscr{V}^4$. Этот атлас, в свою очередь, определяет топологию открытых шаров, где неявно используется евклидова метрика. Затем мы меняем эту метрику на метрику Минковского с совершенно другой сигнатурой. Возникает следующий вопрос: соответствует ли новая метрика старой топологии? Чтобы ответить на него, мы предлагаем следующее рассуждение. Непосредственно ввести топологию открытых шаров в пространстве Минковского невозможно, так как там нет шаров (в обычном понимании). Это можно наглядно показать на примере плоскости, если одну координату сделать временной, а другую — пространственной: $-x^2+y^2$. Относительно евклидовой метрики, x^2+y^2, имеются открытые диски, составляющие базу евклидовой топологии. Если построить «шары», определяемые новой индефинитной метрикой, то получится нечто экзотическое, существующее не для всех радиусов, если выйти за пределы конуса событий. Поэтому непосредственно сделать копию открытых дисков на плоскости Минковского не представляется возможным. С другой стороны, можно ввести независимые топологии на осях пространства и времени. На пространственной вещественной оси вводится топология открытых интервалов, и тоже самое осуществляется на оси времени, рассматриваемой как мнимая ось. Эти топологии определяют топологию на плоскости как топологию произведения. Базой такой топологии будут произведения открытых интервалов, которые условно можно изобразить на плоскости в виде открытых прямоугольников.

Если эти рассуждения перенести на 4D, то необходимо ввести топологию на трехмерной пространственной части и на одномерной временной части, направленной вдоль вектора $\boldsymbol{c}_0$. Тогда топология во всем пространстве-времени будет произведением этих топологий, т.е. базой топологии является произведение открытых шаров на открытые интервалы. Каждое такое множество можно представить в виде кругового цилиндра, основанием которого является 3-шар. В то же время этот цилиндр можно непрерывно отобразить на 4-шар. Это приводит к двум топологиям, основаниями которых являются шары или цилиндры. Поскольку последние множества гомеоморфны, обе топологии эквивалентны друг другу. Таким образом, топология в пространстве Минковского по-прежнему является топологией открытых шаров, и поэтому при замене евклидовой метрики метрикой Минковского топология остается неизменной.

При этом сохраняется возможность построения топологий, отличных от топологий открытых шаров (т.е. не эквивалентных им), таких, которые согласуются с понятиями прошлого и будущего. В частности, это топология Зеемана [2]. Мотивом введения новых топологий является то, что евклидова топология полностью игнорирует анизотропию пространства-времени. Между тем, для приложений, в которых мы хотим использовать топологию пространства-времени (в частности, для дифференцирования полей), евклидовой топологии достаточно, и мы берем на себя контроль над тем, является ли кривая мировой линией или нет.

3°. Причинность. Используя терминологию, принятую в СТО, ненулевой вектор $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}^4$ называется, соответственно, времениподобным, если $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) < 0$, изотропным, в случае, когда, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$, и пространственноподобным, при $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$. Множество

$$\mathrm{C}_{\boldsymbol{g}} = \{\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}^4 \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0\}, \tag{1.1.15}$$

всех изотропных векторов называется изотропным конусом. В соответствии с формулой (1.1.14), изотропный конус разбивает $\mathscr{V}^4$ на три попарно непересекающихся множества: времениподобных векторов, лежащих внутри конуса, пространственноподобных векторов, лежащих вне конуса, и изотропных вектора, лежащих на самом конусе.

Первый вектор $\boldsymbol{c}_0$ разбивает изотропный конус $\mathrm{C}_{\boldsymbol{g}}$ на две непересекающиеся части [1, p. 33]:

$$\mathrm{C}_{\boldsymbol{g}}^{+} = \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{C}_{\boldsymbol{g}} \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{v}) < 0\} \quad \text{и} \quad \mathrm{C}_{\boldsymbol{g}}^{-} = \{\boldsymbol{v} \in \mathrm{C}_{\boldsymbol{g}} \mid \boldsymbol{g}(\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{v}) > 0\}.$$

Такое разбиение определяет поток времени от прошлого к будущему. Множество $\mathrm{C}_{\boldsymbol{g}}^{+}$ соответствует изотропному конусу будущего, а множество $\mathrm{C}_{\boldsymbol{g}}^{-}$ есть изотропный конус прошлого. Векторы, лежащие внутри

$\mathrm{C}_{\boldsymbol{g}}^{+}$, направлены в будущее, а векторы, лежащие внутри $\mathrm{C}_{\boldsymbol{g}}^{-}$, направлены в прошлое.

Хотя изотропный конус (1.1.15) определен для элементов трансляционного векторного пространства $\mathscr{V}^4$, можно ассоциировать его копию с каждой точкой A. Действительно, такая копия может быть получена сдвигами из любого начала a вдоль элементов $\mathrm{C}_{\boldsymbol{g}}$, т.е., $a + \mathrm{C}_{\boldsymbol{g}} = \{a + \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in \mathrm{C}_{\boldsymbol{g}}\}$. Полученное таким образом точечное множество $a + \mathrm{C}_{\boldsymbol{g}}$ называется световым конусом.

4°. Времениподобное подпространство и пространственная платформа. Базис $(\boldsymbol{c}_\alpha)_{\alpha=0}^{3}$, позволяет определить подпространства $\mathscr{V}_{\boldsymbol{c}_0}^{1} = \operatorname{Span}\boldsymbol{c}_0$ и $\mathscr{V}_{\boldsymbol{c}_0}^{3} = \operatorname{Span}\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$, которые дополнительны и порождают все $\mathscr{V}^4$, т.е., $\mathscr{V}^4 = \mathscr{V}_{\boldsymbol{c}_0}^{1} \oplus \mathscr{V}_{\boldsymbol{c}_0}^{3}$. Будем называть подпространство $\mathscr{V}_{\boldsymbol{c}_0}^{1}$ осью времени, а подпространство $\mathscr{V}_{\boldsymbol{c}_0}^{3}$ — пространственной платформой. Им соответствуют проекторы $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{c}_0} \in \operatorname{Hom}(\mathscr{V}^4;\ \mathscr{V}_{\boldsymbol{c}_0}^{1})$, и $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{c}_0}^{\perp} \in \operatorname{Hom}(\mathscr{V}^4;\ \mathscr{V}_{\boldsymbol{c}_0}^{3})$, определенные следующим образом [3, p. 70]:

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{c}_0} = \boldsymbol{c}_0 \otimes \mathfrak{c}^0 = -\boldsymbol{c}_0 \odot \boldsymbol{c}_0, \quad \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{c}_0}^{\perp} = \mathsf{I} - \boldsymbol{c}_0 \otimes \mathfrak{c}^0 = \mathsf{I} + \boldsymbol{c}_0 \odot \boldsymbol{c}_0.$$

5°. Мировые линии и наблюдатели. Кривые $\gamma : \mathbb{I} \to \mathscr{M}^4$ являются естественными обитателями пространства Минковского $\mathscr{M}^4$. Использование глобального координатного отображения $\mathrm{C}_{\{o,\,(\boldsymbol{c}_\alpha)_{\alpha=0}^{3}\}}$ позволяет определить следующее представление γ:

$$\widetilde{\gamma}_c = \mathrm{C}_{\{o,\,(\boldsymbol{c}_\alpha)_{\alpha=0}^{3}\}} \circ \gamma : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^4, \quad x^\alpha = x^\alpha(\lambda),\ \alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Будем иметь дело лишь с массивными частицами[1] (барионами). То есть, под мировой линией подразумевается гладкая кривая $\gamma : \mathbb{I} \to \mathscr{M}^4$, такая, что ее вектор скорости направлен в будущее во всех точках кривой: $\dot{\gamma}_\lambda \in \mathrm{C}_{\boldsymbol{g}}^{+}$ для любого $\lambda \in \mathbb{I}$. Можно выбрать такой параметр τ для мировой линии, что для него $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}) = -1$, где $\boldsymbol{u} = \frac{d\gamma}{d\tau}$. Будем называть параметр τ собственным временем, а векторное поле $\boldsymbol{u}$ — 4-скоростью [3, p. 32 and p. 35].

Поля, использующие структуру пространства-времени Минковского, являются абсолютными, в то время как расслоение пространства-времени на гиперповерхности одновременности зависит от наблюдателя. Последний определяется как упорядоченная пара $\mathscr{O} = (\gamma,\ (\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^{3})$,

[1] В рамках теории относительности наблюдатель должен быть массивной частицей с движущимся ортонормированным базисом. Имея дело с непрерывной материей, мы ограничиваемся только внутренним наблюдателем, т. е. каждая частица является наблюдателем сама по себе. По этой причине необходимо рассматривать вещество, состоящее только из массивных частиц. Общий случай выходит за рамки настоящей работы.

где γ — некоторая мировая линия с 4-скоростью $\boldsymbol{c}_0 := \boldsymbol{u}$, а $(\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^3 : \tau \mapsto (\boldsymbol{c}_i(\tau))_{i=1}^3$ — гладкое поле из трех векторов, заданное на образе мировой линии γ, такое, что при любом значении собственного времени τ семейство $(\boldsymbol{c}_\alpha(\tau))_{\alpha=0}^3$ является положительно ориентированным $\boldsymbol{g}$-ортонормированным базисом $\mathscr{V}^4$. Заметим, что тройка $(\boldsymbol{c}_i(\tau))_{i=1}^3$ является ортонормированным базисом пространственной платформы $\mathscr{V}^3_{\boldsymbol{c}_0(\tau)}$, поэтому выбор наблюдателя означает выбор мировой линии и ортонормированного базиса для каждой пространственной платформы, пересекающей эту мировую линию.

Можно показать, что в некоторой окрестности $U_{\mathscr{O}}$ мировой линии[2] γ можно ввести специальные координаты [3, p. 78]. Действительно, для значения τ собственного времени имеется гиперплоскость $\mathscr{M}_\gamma(\tau)$, пространство локального покоя, являющееся трехмерным евклидовым точечным пространством[3], ортогональным γ в событии $\gamma(\tau)$. Явно, для любого события $a \in \mathscr{M}_\gamma(\tau)$ мы имеем, что $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}(\tau), \operatorname{vec}(\gamma(\tau), a)) = 0$. Все события из $\mathscr{M}_\gamma(\tau)$, содержащиеся в $U_{\mathscr{O}}$, являются одновременными: они происходят в момент времени τ относительно $\mathscr{O}$. Более того, в пределах упомянутой окрестности, пространства локального покоя при различных значениях собственного времени не пересекаются. Все это определяет разбиение окрестности $U_{\mathscr{O}}$ на попарно непересекающиеся части, состоящие из одновременных событий.

Всякое событие $a \in U_{\mathscr{O}}$ принадлежит одному и единственному пространству локального покоя $\mathscr{M}_\gamma(\tau)$. Таким образом, оно происходит в момент времени τ. Более того, поскольку $(\boldsymbol{c}_i(\tau))_{i=i}^3$ есть базис пространственной платформы, ассоциированной с $\mathscr{M}_\gamma(\tau)$, можно записать:

$$\operatorname{vec}(\gamma(\tau), a)) = x^i \boldsymbol{c}_i(\tau).$$

Это дает три пространственных координаты (x^1, x^2, x^3) события a относительно наблюдателя $\mathscr{O}$. Таким образом, в совокупности, точка a характеризуется четверкой (τ, x^1, x^2, x^3), состоящей из собственного времени и пространственных координат.

6°. Преобразования Лоренца. Используя структуры, введенные выше, можно определить разложения для изометричных (относительно

[2] Явно, если 4-ускорение $\boldsymbol{a}$ наблюдателя равно нулю (мировая линия является прямой), то эта окрестность совпадает со всем пространством-временем Минковского, а если это ускорение не равно нулю, то окрестность образована точками на расстояниях от мировой линии, меньших, чем $\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}}$ [3, p. 92].

[3] Трансляционное векторное пространство которого совпадает с пространственной платформой $\mathscr{V}^3_{\boldsymbol{c}_0}$, а метрика индуцирована $\boldsymbol{g}$.

$\boldsymbol{g}$) операторов $\boldsymbol{Q} : \mathscr{V}^4 \to \mathscr{V}^4$ определенных как:

$$\forall \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}^4 :\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}), \tag{1.1.16}$$

в форме $\boldsymbol{Q} = Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}\boldsymbol{c}_\alpha \otimes \mathfrak{c}^\beta$, где элементы матрицы $Q = [Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}]$ связаны выражением

$$Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}Q^{\gamma\,\cdot}_{\cdot\,\nu}m_{\alpha\gamma}m^{\nu\mu} = \delta^\mu_\beta, \quad \text{или} \quad Q^{\mathrm{T}}MQ = M, \text{ где } M = [m_{\alpha\beta}]. \tag{1.1.17}$$

Заметим, что $\det M = -1$ влечет $\det[Q^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}] = \pm 1$. Таким образом, $\boldsymbol{Q}$ является автоморфизмом $\mathscr{V}^4$.

Легко показать посредством соотношений

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q}_1 \circ \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{Q}_1 \circ \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}),$$

справедливых для произвольных $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}^4$, что композиция $\boldsymbol{Q}_1 \circ \boldsymbol{Q}_2 : \mathscr{V}^4 \to \mathscr{V}^4$ двух изометрических операторов $\boldsymbol{Q}_1,\ \boldsymbol{Q}_2 : \mathscr{V}^4 \to \mathscr{V}^4$ приводит к изометрическому оператору. Тождественный оператор I является тривиальной изометрией, а обратный оператор $\boldsymbol{Q}^{-1}$ также изометричен, поскольку

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}).$$

Помимо этого, операция композиции $\circ$ ассоциативна. Следовательно, совокупность всех изометрических операторов составляет группу, называемую группой Лоренца O(3; 1). Она может быть представлена в виде объединения четырех непересекающихся компонент:

$$\mathrm{O}(3;\ 1) = \mathrm{SO_o}(3;\ 1) \cup \mathrm{SO_a}(3;\ 1) \cup \mathrm{O_o^-}(3;\ 1) \cup \mathrm{O_a^-}(3;\ 1),$$

где первая — это ограниченная группа Лоренца $\mathrm{SO_o}(3;\ 1)$, содержащая направленные в будущее собственные изометрии, т.е. изометрические операторы с положительным определителем.

Уравнения (1.1.17) определяют 10 алгебраических ограничений для 16 компонент изометрического оператора $\boldsymbol{Q}$. В связи с этим общее представление $\boldsymbol{Q}$ дается шестью параметрами. В краткой форме такое параметрическое представление можно записать как полярное разложение.

$$\boldsymbol{Q}_{l,\,\boldsymbol{v},\,\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{C}_l \circ \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{v}} \circ \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{w}}, \tag{1.1.18}$$

где $\boldsymbol{C}_l,\ \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{v}},\ \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{w}} : \mathscr{V}^4 \to \mathscr{V}^4$ определены как

$$\boldsymbol{C}_l = -l_1\boldsymbol{c}_0 \odot \boldsymbol{c}_0 + l_2\left(\mathsf{I} + \boldsymbol{c}_0 \odot \boldsymbol{c}_0\right),$$

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{v}} = \mathsf{I} + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}} - 1\right)\left(\frac{1}{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}\odot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{c}_0 \odot \boldsymbol{c}_0\right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}}\left(\boldsymbol{c}_0 \odot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \odot \boldsymbol{c}_0\right),$$

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{w}} = -\left(1 - \sqrt{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}}\right)\boldsymbol{c}_0 \odot \boldsymbol{c}_0 + \frac{1 - \sqrt{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}}}{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}}\boldsymbol{w}\odot\boldsymbol{w} + \sqrt{\frac{1}{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}} - 1}\,\boldsymbol{w}_\times,$$

$l \in \{(1,\ 1),\ (1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -1)\}$, а $\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in \mathscr{V}^3_{\boldsymbol{c}_0} = \operatorname{Span}\{\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \boldsymbol{c}_3\}$, в то время как $\boldsymbol{w}_\times$ обозначает векторный крест для $\boldsymbol{u}$, т.е., для любого вектора $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}^3_{\boldsymbol{c}_0}$ имеем $\boldsymbol{w}_\times \cdot \boldsymbol{u} := \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}$. Первый множитель разложения (1.1.18) определяет компонент общей группы Лоренца. Второй множитель в (1.1.18) обозначает буст, связанный с пространственным вектором $\boldsymbol{v}$, а третий определяет пространственное вращение с осью $\boldsymbol{w}$ (величина $\boldsymbol{w}$ определяет косинус угла поворота).

Поскольку любое линейное невырожденное преобразование является преобразованием Лоренца в том и только в том случае, когда оно переводит любой $\boldsymbol{g}$-ортонормированный базис $\mathscr{V}^4$ в другой базис такого же типа, семейство всех собственных ортохронных ортонормированных базисов $\mathscr{O}$ может быть определено как множество образов заданного базиса под действием элементов $\mathrm{SO_o}(3;\ 1)$:

$$\mathscr{O}\!\mathscr{r}\mathscr{t}\mathscr{h} = \{(\boldsymbol{e}_\alpha)^3_{\alpha=0} \mid \exists \boldsymbol{Q} \in \mathrm{SO_o}(3;\ 1)\ \forall \alpha \in (0,\ 1,\ 2,\ 3):\ \boldsymbol{e}_\alpha = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{c}_\alpha\}.$$

Заметим, что множество $\mathscr{O}\!\mathscr{r}\mathscr{t}\mathscr{h}$ является подмножеством множества $\mathscr{B}(\mathscr{V}^4)$ общих базисов, порожденного действием группы $\mathrm{GL}(4;\ )$ на $(\boldsymbol{c}_\alpha)^3_{\alpha=0}$.

Замечание 1.1. *Любое преобразование $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{SO_o}(3;\ 1)$ можно разложить в изометрическое преобразование $\boldsymbol{Q}_1$, которое переводит $(\boldsymbol{c}_\alpha)^3_{\alpha=0}$ в некоторый промежуточный базис $(\boldsymbol{e}_\alpha)^3_{\alpha=0}$ и изометрию $\boldsymbol{Q}_2$, которая преобразует этот базис в тот, который получается непосредственно действием $\boldsymbol{Q}$ на $(\boldsymbol{c}_\alpha)^3_{\alpha=0}$. Таким образом, можно заменить $(\boldsymbol{c}_\alpha)^3_{\alpha=0}$ на $(\boldsymbol{e}_\alpha)^3_{\alpha=0}$ и $\boldsymbol{Q}$ на $\boldsymbol{Q}_2$ и получить тот же результат. По этой причине, предпочтительный базис $(\boldsymbol{c}_\alpha)^3_{\alpha=0}$ теряет свою исключительность и может быть заменен любым другим элементом из $\mathscr{O}\!\mathscr{r}\mathscr{t}\mathscr{h}$.*

1.2. Искривленное пространство-время

7°. Структура искривленного пространства-времени. Чтобы геометрически описать гравитацию, мы делаем следующий шаг и вводим искривленную метрику пространства-времени на многообразии, которое ранее носило метрику Минковского[4]. Таким образом, мы приходим к структуре 4-мерного искривленного пространства-времени.

$$\mathscr{L}^4 = (A,\ \mathscr{T}_A,\ \mathbb{A}_A,\ \mathsf{g},\ \mathsf{t},\ \mu,\ \nabla_l)\,. \tag{1.1.21}$$

[4]Векторная и аффинная структуры теперь находятся в тени, и мы не могут извлечь их явно. Обратите внимание, что основное многообразие может измениться только в частном случае, когда возникает сингулярность пространства-времени. Этот случай выходит за рамки настоящей работы.

Подлежащее множество A этой структуры, топология $\mathscr{T}_A$ и гладкий атлас $\mathbb{A}_A$ совпадают с соответствующими структурами в пространстве-времени Минковского $\mathscr{M}^4$. Будем обозначать подлежащее многообразие как $\mathscr{L}^4_{\text{man}}$. То есть, $\mathscr{L}^4_{\text{man}} = (A, \mathscr{T}_A, \mathbb{A}_A)$.

Четвертый элемент структуры (1.1.21) — лоренцева метрика. g, которое является симметричным $(0, 2)$-тензорным полем сигнатуры $(-, +, +, +)$. То есть для каждого события $x \in \mathscr{L}^4$ пара $(T_x\mathscr{L}^4, \mathsf{g}_x)$ является 4-мерным псевдоевклидовым пространством и в любом его g_x-ортонормированном базисе $(\boldsymbol{c}_\alpha)^3_{\alpha=0}$ метрика g_x имеет представление вида (1.1.12), где $(\mathfrak{c}^\alpha)^3_{\alpha=0}$ — ковекторный базис, двойственный к $(\boldsymbol{c}_\alpha)^3_{\alpha=0}$. Стоит отметить, что в отличие от римановой метрики не каждое многообразие допускает лоренцеву метрику [4, p. 39]. Достаточное условие состоит в том, что $\mathscr{L}^4_{\text{man}}$ некомпактно, что и имеет место, поскольку гладкая структура многообразия была получена из аффинной.

Для каждого отдельного касательного пространства $T_x\mathscr{L}^4$ можно определить изотропный конус $\mathrm{C}_{\mathsf{g}_x}$ и таким образом перенести понятия причинности в векторное пространство $T_x\mathscr{L}^4$. В целом получаем поле $x \mapsto \mathrm{C}_{\mathsf{g}_x}$ нулевых конусов на $\mathscr{L}^4$. Однако в отличие от пространства-времени Минковского, имеющего одно общее векторное пространство трансляции $\mathscr{V}^4$, нет внутренней возможности выбирать будущие направления для всех событий $\mathscr{L}^4$ таким образом, что они плавно меняются от события к событию. Пятый элемент (1.1.21), векторное поле t на $\mathscr{L}^4$, служит для этой цели. Оно гладко и удовлетворяет следующим свойствам: 1) $\mathsf{t}_x \neq \mathsf{0}$ и $\mathsf{g}_x(\mathsf{t}_x, \mathsf{t}_x) < 0$ на каждом событии $x \in \mathscr{L}^4$. Таким образом, значение t_x принадлежит одной из двух половин, составляющих конус $\mathrm{C}_{\mathsf{g}_x}$. Эта половина определяет будущее направление по отношению к событию x.

Многообразие $\mathscr{L}^4_{\text{man}}$ должно быть ориентируемым и μ, который является шестым элементом (1.1.21), является формой объема на нем. По лоренцевой метрике g определяется единственная форма объема dV_{g}, совместная с μ, такая, что в локальных координатах $(x^\alpha)^3_{\alpha=0}$ выполняется равенство $dV_{\mathsf{g}} = \sqrt{-g}\, d^4x$, где $g = \det[g_{\alpha\beta}]$, и $d^4x := dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

Последней составляющей (1.1.21) является связность Леви-Чивита ∇_l, порожденная метрическим тензором g. В координатном репере $(\partial_\alpha)^3_{\alpha=0}$ значение $(\nabla_l)_{\mathsf{u}}\mathsf{v}$ на векторных полях $\mathsf{u} = u^\alpha\partial_\alpha$ и $\mathsf{v} = v^\beta\partial_\beta$ может быть вычислено по формуле, аналогичной (1.1.714):

$$(\nabla_l)_{\mathsf{u}}\mathsf{v} = u^\beta \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + v^\gamma \Gamma^{\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\beta\gamma} \right) \partial_\alpha.$$

Коэффициенты связности $\Gamma^{\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\beta\gamma}$ определяются выражением, похожим на равенство (1.1.716) для символов Кристоффеля:

$$\Gamma^{\alpha\cdot\cdot}_{\cdot\beta\gamma} = \frac{g^{\alpha\delta}}{2}\left(\frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta}\right),$$

где $[g^{\alpha\beta}]$ есть поле матриц, обратное к $[g_{\alpha\beta}]$. Однако в отличие от случаев Евклида и Минковского тензор кривизны $\mathfrak{R}$ не исчезает. С физической точки зрения это характеризует наличие материи.

8°. Мировые линии и наблюдатели. Подобно случаю пространства-времени Минковского, рассматриваются только массивные частицы. Мировая линия массивной частицы в $\mathscr{L}^4$ есть гладкая кривая $\gamma : \mathbb{I} \to \mathscr{L}^4$, такая, что для любого $\lambda \in \mathbb{I}$ вектор $\dot\gamma(\lambda)$ времениподобен и направлен в будущее, т.е. $\mathsf{g}_{\gamma(\lambda)}(\dot\gamma(\lambda),\, \dot\gamma(\lambda)) < 0$ и $\mathsf{g}_{\gamma(\lambda)}(\mathsf{t}_{\gamma(\lambda)},\, \dot\gamma(\lambda)) < 0$. Если $(U,\, \varphi)$ — карта на $\mathscr{L}^4$, такая, что U содержит образ γ, то координатное представление γ определяется как

$$\widetilde{\gamma}_c = \varphi\circ\gamma : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^4, \quad x^\alpha = x^\alpha(\lambda),\ \alpha = 0,\, 1,\, 2,\, 3.$$

Значит, вектор скорости $\dot\gamma(\lambda)$ имеет разложение $\dot\gamma(\lambda) = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\partial_\alpha|_{\gamma(\lambda)}$.

Среди всевозможных параметризаций мировой линии γ можно выбрать особую, такую, что в ней $\mathsf{g}_{\gamma(\tau)}(\dot\gamma(\tau),\, \dot\gamma(\tau)) = -1$ тождественно. Тогда параметр τ отвечает собственному времени, а векторное поле $\mathsf{u} = \dot\gamma(\tau)$ соответствует 4-скорости частицы.

Наблюдатель $\mathscr{O}$ в случае искливленного пространства-времени определяется подобно пространству-времени Минковского. То есть, $\mathscr{O} = (\gamma,\, (\mathsf{e}_i)_{i=1}^3)$, где γ — мировая линия массивной частицы с 4-скоростью $\mathsf{e}_0 = \mathsf{u}$, а $(\mathsf{e}_i)_{i=1}^3 : \tau \mapsto (\mathsf{e}_i(\tau))_{i=1}^3$ — гладкое поле трех касательных векторов, исходящих из точек $\gamma(\mathbb{R})$, такое, что для любого значения τ собственного времени набор $(\mathsf{e}_\alpha(\tau))_{\alpha=0}^3$ является положительно определенным $\mathsf{g}_{\gamma(\tau)}$-ортонормированным базисом касательного пространства $T_{\gamma(\tau)}\mathscr{L}^4$. Аналогичным образом осуществляется разбиение на ось времени и пространственную платформу, однако это разбиение не глобально: лишь инфинитезимальная часть пространства-времени $\mathscr{L}^4$, а именно, касательное пространство $T_{\gamma(\tau)}\mathscr{L}^4$, подвергается такому разбиению. Набор $(\mathsf{e}_i(\tau))_{i=1}^3$ определяет ортонормированный базис пространственной платформы относительно евклидовой метрики, индуцированной на нее метрикой g.

Пусть $\mathscr{O} = (\gamma,\, (\mathsf{e}_i)_{i=1}^3)$ — наблюдатель с мировой линией $\gamma : \tau \mapsto \gamma(\tau)$, а $\chi : \widetilde{\tau} \mapsto \chi(\widetilde{\tau})$ — мировая линия массивной частицы, которая пересекает $\mathscr{O}$ в событии x: $\gamma(\tau_1) = \chi(\widetilde{\tau}_2) = x$. Тогда 3-скорость в x частицы с мировой линией χ определяется равенством

$$\mathsf{v} = e^k_{\tau_1}(\dot\chi(\widetilde{\tau}_2))\mathsf{e}_k(\tau_1),$$

где $(e^k_{\tau_1})^3_{k=1}$ — ковекторный базис, дуальный к $(\mathsf{e}_k(\tau_1))^3_{k=1}$. Таким образом, v принадлежит пространственной платформе. Заметим, что в отличие от пространства-времени Минковского, 3-скорость может быть определена только в точках пересечения данной мировой линии с наблюдателем.

1.3. Уравнения Эйнштейна

9°. Действие Эйнштейна – Гильберта. Перейдем теперь к обсуждению основного уравнения сегодняшней лекции — уравнения Эйнштейна. Несмотря на то, что это название относится к разным видам уравнений, все они объединены единой методикой, основанной на принципе наименьшего действия и вариационных симметриях:

$$\delta\mathfrak{A}_{\rm tot} = 0, \quad \mathfrak{A}_{\rm tot} = \int\limits_{\mathscr{G}} L_{\rm tot}, \tag{1.1.31}$$

где интеграл берется по области $\mathscr{G} \subset \mathscr{L}^4$, которая может как совпадать со всем пространством-временем, так и быть его частью.

Частный вид уравнения определяется формой лагранжиана и может быть представлен различными соотношениями. Выбор конкретного из них основан, во-первых, на задании совокупности физических явлений, которые предполагается учесть, и, во-вторых, на рассмотрениях, связанных с экспериментальной идентификацией этих явлений. Однако учет экспериментальных фактов достаточно сложен и потому со времени создания теории относительности он частично заменяется на так называемый принцип простоты. Таким образом, наиболее используемые уравнения А. Эйнштейна, полученные совместно с Д. Гильбертом, основаны на выборе простейшей зависимости лагранжиана от кривизны пространства-времени, а именно, от явной зависимости лишь от скалярной кривизны Scal. Конечно, можно предположить наличие более сложной зависимости от инвариантов тензора кривизны, наряду с зависимостью от инвариантов других полей, характеризующих аффинную связность (кручения и неметричности). Вместе с тем, это приведет к значительному усложнению итак сложных нелинейных уравнений Эйнштейна – Гильберта и к неочевидным методам их верификации. В этой связи, оставляя в стороне возможность рассмотрения сложных лагранжианов, ограничимся формой, предложенной Гильбертом:

$$L_{\rm tot} = L_{\rm HE} + L_{\rm field} + L_{\rm mat}, \tag{1.1.32}$$

где $L_{\mathrm{HE}} = \frac{1}{2\varkappa}\mathrm{Scal}\sqrt{-g}\,d^4x$ — лагранжиан Эйнштейна–Гильберта, в котором $\varkappa$ — физическая постоянная[5], в то время как L_{field} и L_{mat} есть лагранжианы других (негравитационных) полей и барионной материи (материи, имеющей массу).

10°. Представление лагранжиана через дифференциальные формы. В дальнейшем целесообразно использовать аппарат внешнего исчисления для вывода уравнений поля. Для этой цели предположим, что имеется репер $(\mathsf{e}_\alpha)_{\alpha=0}^3$ касательного расслоения $T\mathscr{L}^4 \to \mathscr{L}^4$, который в общем случае является неголономным. Ему соответствует дуальный корепер $(\vartheta^\alpha)_{\alpha=0}^3$, определенный соотношениями $\langle\vartheta^\alpha,\, \mathsf{e}_\beta\rangle = \delta^\alpha_\beta$, $\alpha,\, \beta = 0,\, \dots,\, 3$. Определим семейство 1-форм связности $\omega^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta}$ равенством $\omega^{\alpha\,\cdot}_{\cdot\,\beta} = \Gamma^{\alpha\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\gamma\beta}\vartheta^\gamma$, где $\Gamma^{\alpha\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\gamma\beta}$ — коэффициенты связности в исходном неголономном репере. Используя затем структурные уравнения Картана (1.1.836), определим форму неметричности $\mathfrak{Q}_{\mu\nu}$, форму кручения $\mathfrak{T}^\mu$ и форму кривизны $\mathfrak{R}^{\mu\,\cdot}_{\cdot\,\nu}$. С этого момента будем полагать, что $\mathfrak{Q}_{\mu\nu} = 0$ и $\mathfrak{T}^\mu = 0$, т.е., рассматривается связность Леви-Чивита.

Наряду с дуальным корепером $(\vartheta^\alpha)_{\alpha=0}^3$ также используется репер $(\vartheta_\alpha)_{\alpha=0}^3$ того же кокасательного расслоения $T^*\mathscr{L}^4 \to \mathscr{L}^4$, заданный соотношениями биортогональности:

$$\mathsf{g}^{(1)}(\vartheta^\alpha,\, \vartheta_\beta) = \delta^\alpha_\beta,\ \alpha,\, \beta = 0,\, \dots,\, 3.$$

Введем следующие сокращенные обозначения для реперов k-форм в $4D$-пространствн:

$$\begin{aligned}
&\vartheta^{\mu\nu} := \vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu, \quad \vartheta^{\mu\nu\lambda} := \vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu \wedge \vartheta^\lambda, \quad \vartheta^{\mu\nu\lambda\rho} := \vartheta^\mu \wedge \vartheta^\nu \wedge \vartheta^\lambda \wedge \vartheta^\rho,\\
&\vartheta_{\mu\nu} := \vartheta_\mu \wedge \vartheta_\nu, \quad \vartheta_{\mu\nu\lambda} := \vartheta_\mu \wedge \vartheta_\nu \wedge \vartheta_\lambda, \quad \vartheta_{\mu\nu\lambda\rho} := \vartheta_\mu \wedge \vartheta_\nu \wedge \vartheta_\lambda \wedge \vartheta_\rho.
\end{aligned}$$

В частности, лоренцева форма объема может быть записана как $\varepsilon := dV_{\mathsf{g}} = \frac{1}{4!}\sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\vartheta^{\mu\nu\lambda\rho}$, где $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ — символ Леви-Чивита. Следовательно, получаются формы более низких степеней:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\mu &:= \mathsf{e}_\mu \,\lrcorner\, \varepsilon = *\vartheta_\mu,\\
\varepsilon_{\mu\nu} &:= \mathsf{e}_\nu \,\lrcorner\, \varepsilon_\mu = *\vartheta_{\mu\nu},\\
\varepsilon_{\mu\nu\lambda} &:= \mathsf{e}_\lambda \,\lrcorner\, \varepsilon_{\mu\nu} = *\vartheta_{\mu\nu\lambda},\\
\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} &:= \mathsf{e}_\rho \,\lrcorner\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda} = *\vartheta_{\mu\nu\lambda\rho},
\end{aligned}$$

где $* :\ \Omega^k(\mathscr{L}^4) \to \Omega^{4-k}(\mathscr{L}^4)$ есть звезда Ходжа. Поскольку пространство псевдориманово (т.е., $\mathfrak{Q}_{\mu\nu} = 0$ и $\mathfrak{T}^\mu = 0$), приходим к тождествам (в них

[5] То есть, гравитационная постоянная Эйнштейна, связанная с гравитационной постоянной Ньютона G как $\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}$.

D — внешняя ковариантная производная, определенная как (1.1.835))

$$D\varepsilon = 0, \quad D\varepsilon_\mu = 0, \quad D\varepsilon_{\mu\nu} = 0, \quad D\varepsilon_{\mu\nu\lambda} = 0, \quad D\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} = 0. \tag{1.1.33}$$

Введенные обозначения позволяют записать L_{HE} посредством дифференциальных форм [5]:

$$L_{\mathrm{HE}} = -\frac{1}{2\varkappa} * (\vartheta_\mu \wedge \vartheta_\nu) \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2\varkappa}\varepsilon_{\mu\nu} \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu},$$

где $\mathfrak{R}^{\mu\nu}$ — форма кривизны, в которой все индексы подняты.

Замечание 1.2. *Чтобы установить эквивалентность новой формы лагранжиана старой, можно провести следующие вычисления:*

$$\begin{aligned} *(\vartheta_\mu \wedge \vartheta_\nu) \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\mathfrak{R}_{\alpha\beta\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\mu\nu}\frac{1}{2}\vartheta^\gamma_\mu\vartheta^\tau_\nu \sqrt{-g}\,\epsilon_{\gamma\tau\rho\xi}dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\rho \wedge dx^\xi \\ &= -\frac{1}{4}\mathfrak{R}_{\alpha\beta\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\mu\nu}\vartheta^\gamma_\mu\vartheta^\tau_\nu\epsilon_{\gamma\tau\rho\xi}\epsilon^{\alpha\beta\rho\xi}\sqrt{-g}\,d^4x \\ &= -\frac{1}{2}\mathfrak{R}_{\alpha\beta\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\mu\nu}\vartheta^\gamma_\mu\vartheta^\tau_\nu(\delta^\alpha_\gamma\delta^\beta_\tau - \delta^\beta_\gamma\delta^\alpha_\tau)\sqrt{-g}\,d^4x \\ &= -\mathrm{Scal}\sqrt{-g}\,d^4x. \end{aligned}$$

Рассматривая лишь электромагнитные поля в их классической формулировке Максвелла, определим L_{field} как

$$L_{\mathrm{field}} = -\frac{1}{2}\mathsf{F} \wedge *\mathsf{F} - A \wedge *\mathsf{J},$$

где $\mathsf{F} = dA = \mathsf{E}\wedge dt + \mathsf{B}$ — тензор Фарадея, A — электромагнитный потенциал, а 3-форма J есть плотность электрического тока. Тензор Фарадея, при этом, удовлетворяет полевым уравнениям Максвелла в вакууме:

$$d * \mathsf{F} = \mathsf{J}, \quad d\mathsf{F} = 0.$$

Вместе с тем, наиболее интересной для нас является форма третьего лагранжиана:

$$L_{\mathrm{mat}} = \mathscr{L}\left(\rho,\, \chi\right),$$

где ρ обозначает плотность, а χ есть деформация в наиболее общем смысле, который должен быть уточнен в каждом конкретном случае.

11°. Вывод уравнений Эйнштейна. Для получения дифференциальных уравнений Эйлера–Лагранжа на основе вариационного принципа, необходимо вычислить вариацию δL_{HE} лагранжиана L_{HE}. С целью упрощения выкладок предположим, что репер $(\mathsf{e}_\alpha)_{\alpha=0}^3$ является g-ортонормированным. Тогда, принимая во внимание тождество

$$\delta(\omega_1 \wedge \omega_2) = \delta\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \delta\omega_2,$$

справедливое для всех дифференциальных форм $\omega_1 \in \Omega^k(\mathscr{L}^4)$, $\omega_2 \in \Omega^l(\mathscr{L}^4)$, получаем

$$\delta L_{\mathrm{HE}} = -\frac{1}{2\varkappa}\delta\left(\varepsilon_{\mu\nu} \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu}\right) = -\frac{1}{2\varkappa}\left(\delta\varepsilon_{\mu\nu} \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} \wedge \delta\mathfrak{R}^{\mu\nu}\right). \quad (1.1.34)$$

Напомним, что $\delta\varepsilon_{\mu\nu} = \delta * \vartheta_{\mu\nu}$. Используя тождество (здесь принято во внимание, что репер ортонормирован)

$$(\delta * - * \delta)\omega = \delta\vartheta^\alpha \wedge (\mathsf{e}_\alpha \lrcorner *\omega) - *[\delta\vartheta^\alpha \wedge (\mathsf{e}_\alpha \lrcorner \omega)],$$

получаем

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{\mu\nu} &= *\delta\vartheta_{\mu\nu} + \delta\vartheta^\alpha \wedge (\mathsf{e}_\alpha \lrcorner \varepsilon_{\mu\nu}) - *[\delta\vartheta^\alpha \wedge (\mathsf{e}_\alpha \lrcorner \vartheta_{\mu\nu})] = \\ &= *(\delta\vartheta_\mu \wedge \vartheta_\nu + \vartheta_\mu \wedge \delta\vartheta_\nu) + \delta\vartheta^\alpha \wedge \varepsilon_{\mu\nu\alpha} - *[\delta\vartheta^\alpha \wedge (g_{\alpha\mu}\vartheta_\nu - g_{\alpha\nu}\vartheta_\mu)] = \\ &= \delta\vartheta^\alpha \wedge \varepsilon_{\mu\nu\alpha}. \quad (1.1.35)\end{aligned}$$

Для $\delta\mathfrak{R}^{\mu\nu}$ приходим к соотношению

$$\delta\mathfrak{R}^{\mu\nu} = d\delta\omega^{\mu\nu} + (\delta\omega^{\mu\alpha}) \wedge \omega_{\alpha\cdot}^{\cdot\nu} + \omega^{\mu\alpha} \wedge \delta\omega_{\alpha\cdot}^{\cdot\nu}. \quad (1.1.36)$$

Поскольку поле $\delta\omega^{\mu\nu}$ является тензорным объектом (в отличие от самого $\omega^{\mu\nu}$), тьо мы можем применить к нему оператор D:

$$D\delta\omega^{\mu\nu} = d\delta\omega^{\mu\nu} + \omega^{\mu\cdot}_{\cdot\alpha} \wedge \delta\omega^{\alpha\nu} + \omega^{\nu\cdot}_{\cdot\alpha} \wedge \delta\omega^{\mu\alpha},$$

и затем выразить $d\delta\omega^{\mu\nu}$ из полученного соотношения. Подставляя последнее в (1.1.36) и приводя подобные, приходим к формуле

$$\delta\mathfrak{R}^{\mu\nu} = D\delta\omega^{\mu\nu}. \quad (1.1.37)$$

Подстановка (1.1.35) и (1.1.37) в (1.1.34) дает

$$\delta L_{\mathrm{HE}} = -\frac{1}{2\varkappa}\left(\delta\vartheta^\alpha \wedge \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu} \wedge D\delta\omega^{\mu\nu}\right).$$

Принимая во внимание (1.1.33), можно представить последнее слагаемое в ином виде:

$$\delta L_{\mathrm{HE}} = -\frac{1}{2\varkappa}\left[\delta\vartheta^\alpha \wedge \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu} + D(\varepsilon_{\mu\nu} \wedge \delta\omega^{\mu\nu})\right]. \quad (1.1.38)$$

Это искомое выражение для вариации лагранжиана Эйнштейна–Гильберта.

Соответственно,

$$\delta L_{\text{tot}} = \delta L_{\text{HE}} + \delta L_{\text{mat}}. \quad \text{где} \quad \delta L_{\text{mat}} = \delta\vartheta^\alpha \wedge T_\alpha, \quad T_\alpha := \frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial \vartheta^\alpha}.$$

Здесь T_α — тензор энергии-импульса, который определяется исходя из специфических физических рассуждений. Например, электромагнитное поле может быть охарактеризовано следующим тензором энергии-импульса:

$$T_\alpha = \frac{1}{2}\left[\mathsf{F} \wedge (\mathsf{e}_\alpha \lrcorner {*\mathsf{F}}) - {*\mathsf{F}} \wedge (\mathsf{e}_\alpha \lrcorner \mathsf{F})\right].$$

Таким образом, с (1.1.38), мы имеем

$$0 = \delta\mathfrak{A}_{\text{tot}} = -\frac{1}{2\varkappa}\int\limits_{\mathscr{G}} \left[\delta\vartheta^\alpha \wedge (\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu} - 2\varkappa T_\alpha) + D(\varepsilon_{\mu\nu} \wedge \delta\omega^{\mu\nu})\right].$$

По теореме Стокса,

$$\int\limits_{\mathscr{G}} \delta\vartheta^\alpha \wedge (\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu} - 2\varkappa T_\alpha) + \int\limits_{\partial\mathscr{G}} (\varepsilon_{\mu\nu} \wedge \delta\omega^{\mu\nu}) = 0.$$

Поскольку граничные члены не вносят вклад в уравнение поля [6], приходим к соотношению

$$\int\limits_{\mathscr{G}} \delta\vartheta^\alpha \wedge (\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu} - 2\varkappa T_\alpha) = 0.$$

В силу произвольности вариаций $\delta\vartheta^\alpha$, из него получаем искомые уравнения Эйнштейна:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu} = \varkappa T_\alpha. \tag{1.1.39}$$

Определим 3-форму Эйнштейна $G_\alpha := \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu}$, и добавим космологический член $\Lambda\varepsilon_\alpha$ в правую часть (1.1.39):

$$G_\alpha = \varkappa T_\alpha + \Lambda\varepsilon_\alpha. \tag{1.1.310}$$

В тензорных обозначениях, $G_\alpha = G_{\alpha\beta}\varepsilon^\beta$, $T_\alpha = T_{\alpha\beta}\varepsilon^\beta$. Тогда уравнения Эйнштейна могут быть записаны как

$$G_{\alpha\beta} = \varkappa T_{\alpha\beta} - \Lambda \mathsf{g}_{\alpha\beta}.$$

Замечание 1.3. 3-*форму Эйнштейна можно привести к более привычному выражению, содержащему скалярную кривизну и тензор Риччи. Действительно, проделаем следующие выкладки:*

$$
\begin{aligned}
G_\alpha &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha} \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}\vartheta^\lambda \wedge \mathfrak{R}^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}\mathfrak{R}_{\sigma\tau\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\mu\nu}\vartheta^\lambda \wedge \vartheta^\sigma \wedge \vartheta^\tau \\
&= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\lambda}\epsilon^{\lambda\sigma\tau\kappa}\,\mathfrak{R}_{\sigma\tau\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\mu\nu}g_{\kappa\rho} * \vartheta^\rho.
\end{aligned}
$$

Используя тождество ε-δ в $4D$, получаем

$$
\begin{aligned}
G_\alpha &= \left(\mathfrak{R}_{\rho\alpha} - \frac{1}{2}\mathrm{Scal}g_{\rho\alpha}\right) * \vartheta^\rho \\
&= \frac{1}{3!}\left(\mathfrak{R}_{\rho\alpha} - \frac{1}{2}\mathrm{Scal}g_{\rho\alpha}\right)\sqrt{-g}\,\epsilon^{\rho\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\mu\nu\tau}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\tau,
\end{aligned}
$$

что есть искомая формула.

Замечание 1.4. *В рассуждениях выше вариации $\delta\omega^{\mu\nu}$ и $\delta\vartheta^\mu$ формы связности и ортонормированного корепера не являются независимыми в силу соотношения Леви-Чивита. Действительно, это соотношение эквивалентно условию $d\vartheta^\mu + \omega^{\mu\cdot}_{\cdot\nu} \wedge \vartheta^\nu = 0$, означающему равенство нулю кручения. Если же опустить последнее условие, то $\delta\omega^{\mu\nu}$ и $\delta\vartheta^\mu$ становятся полностью независимыми, и в уравнении* (1.1.310) *появится дополнительный спин-зависимый член $\delta\omega^{\mu\nu} \wedge \sigma_{\mu\nu}$, называемый полем кручения. В таком случае приходим к теории Эйнштейна – Картана [7–9].*

1.4. Решение уравнений Эйнштейна

12°. Модельные решения уравнений Эйнштейна. Несмотря на то, что уравнения Эйнштейна довольно сложны для изучения, в частных случаях можно найти их аналитическое решение [10]. Воспользуемся этим обстоятельством, чтобы продемонстрировать связь между геометрическими свойствами пространства-времени и компонентами тензора энергии-импульса, определяющего воздействие полей, барионной материи и ее деформации.Поскольку основные переменные в уравнениях Эйнштейна являются компонентами метрического тензора, определение частных случаев, допускающих аналитическое решение, следует начинать с выбора подходящей формы этого метрического тензора. В рамках настоящего раздела ограничимся случаем центральной симметрии в пространственных координатах. Заметим, что, поскольку метрика заранее неизвестна и должна определяться в ходе решения задачи, ее использование для определения понятия центральной симметрии логически не последовательно.Однако фактическое использование этой метрики не является необходимым. Поскольку метрика искривленного пространства-времени наделена многообразием, на котором метрика Минковского была определена на предыдущем итерации рассуждений, а арифметическая метрика была определена на начальном, возможно использовать последнее, чтобы определить, что подразумевается под пространственной центральной симметрией. Соответствующий шаблон для метрического поля можно представить как [11]

$$\mathsf{g} = e^{\nu}\, dt \otimes dt - e^{\lambda}\, dr \otimes dr - r^2\, d\theta \otimes d\theta - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi \otimes d\varphi,$$

где λ, ν функции, которые необходимо найти. При тех же условиях симметрии шаблон тензора энергии-импульса можно записать в виде

$$\mathsf{T} = \rho\, \partial_t \otimes dt - p\, (\partial_r \otimes dr + \partial_\theta \otimes d\theta + \partial\varphi \otimes d\varphi)$$

где ρ и p обозначают плотность и давление соответственно и также являются функциями, подлежащими определению. Относительно этих функций из уравнений Эйнштейна в общем виде можно вывести следующие уравнения (1.1.310):

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda = 8\pi p,\\
&e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r} - \frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)\right) + \Lambda = 8\pi p,\\
&e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = 8\pi\rho.
\end{aligned} \tag{1.1.41}$$

Устраняя $\frac{\partial\nu}{\partial r}$ и вводя новую переменную, $\omega = \ln\lambda$ можно преобразовать систему уравнений к более простому виду:

$$
\begin{aligned}
& r\frac{\partial\omega}{\partial r}\left(\omega\left(8\pi p r^2 - \Lambda r^2 + 1\right) - 1\right) + \\
& + \omega\left(16\pi r^3\omega\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\omega\left(-8\pi p r^2 + \Lambda r^2 - 1\right) + 1\right)^2\right) = 0 \\
& \omega^2\left(-\Lambda r^2 - 8\pi\rho r^2 + 1\right) + r\frac{\partial\omega}{\partial r} - \omega = 0
\end{aligned}
$$

Полная иллюстрация взаимного влияния кривизны пространства-времени, электромагнитных полей и барионной материи может быть получена уже при условиях принятой симметрии. Для этого рассматривается в изначально пустом плоском пространстве-времени шар конечного радиуса a, заполненный барионной и, возможно, заряженной материей, что позволяет центрально-симметричные деформации различных типов. Мы выбираем эти деформации в порядке сложности, начиная с вырожденного случая абсолютно жесткого (в смысле Борна [12, 13]) шара, а затем рассматриваем сжатие и сдвиговые деформации. В качестве граничных условий мы выбираем условия, при которых пространство-время становится плоским на бесконечности, калибровку, согласованную с Ньютоновской теорией гравитации, условия непрерывности метрики на границе шара и ее ограниченность в центре. Существуют хорошо известные решения, соответствующие этим условиям, а именно, внешнее решение Шварцшильда [14].

$$
p = \frac{\Lambda}{8\pi}, \quad \rho = \frac{\Lambda}{8\pi}, \quad \lambda = -\log\left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad \nu = \log\left(1 - \frac{2m}{r}\right), \tag{1.1.42}
$$

которое удовлетворяет уравнениям (1.1.41) и упомянутым выше условиям на бесконечности в области внешней части шара (где $p = \rho = 0$). Решение для постоянного ρ и переменного p, которое продолжает без скачков внешнее решение, может быть представлено в виде (внутреннее решение для жесткого шара) [15].

$$p = \frac{m\left(3\sqrt{1-\frac{2mr^2}{a^3}} - 3\sqrt{1-\frac{2m}{a}}\right)}{\pi a^3\left(12\sqrt{1-\frac{2m}{a}} - 4\sqrt{1-\frac{2mr^2}{a^3}}\right)} + \frac{\Lambda}{8\pi}, \quad \rho = -\frac{\Lambda}{8\pi} - \frac{6m}{8\pi a^3},$$
$$\lambda = -\log\left(1 - \frac{2mr^2}{a^3}\right), \quad \nu = 2\log\left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{2m}{a}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{2mr^2}{a^3}}\right). \tag{1.1.43}$$

В приведенных формулах m обозначает константу интегрирования, которая имеет четкий физический смысл: это полная масса шара в состоянии покоя.

Обобщение статического осесимметричного решения на случай переменного ρ и, следовательно, сжимаемого шара было получено Толманом [16]:

$$p = \frac{3m^2\left(a^2 - r^2\right)}{8\pi\left(a^6 - 3a^5 m + 2a^3 m r^2\right)} + \frac{\Lambda}{8\pi},$$
$$\rho = \frac{3m\left(a^4(a-3m)(2a-3m) + a^2 m r^2(3a-7m) + 2m^2 r^4\right)}{8\pi a^3\left(a^3 - 3a^2 m + 2mr^2\right)^2} - \frac{\Lambda}{8\pi}, \tag{1.1.44}$$
$$\lambda = \log\left(\frac{a^3\left(a^3 - 3a^2 m + 2mr^2\right)}{\left(a^3 - mr^2\right)\left(a^3 - 3a^2 m + mr^2\right)}\right), \quad \nu = \log\left(\frac{m\left(r^2 - 3a^2\right)}{a^3} + 1\right).$$

Это решение также может быть непрерывно продолжено с внешним решением Шварцшильда. Учет электромагнитного поля в самой простой версии может быть проиллюстрирован с помощью решения Райснера–Нордстрема для заряженного жесткого шара [17, 18]:

$$p = \frac{\Lambda}{8\pi}, \quad \rho = \frac{\Lambda}{8\pi},$$
$$\lambda = -\log\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right), \tag{1.1.45}$$
$$\nu = \log\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right),$$

где q обозначает общий заряд сферы, а его обобщение для заряженного сжимаемого шара дано в работе [19].

Модельные решения (1.1.42)–(1.1.45) являются "полигоном или площадкой, на которой можно попытаться понять взаимосвязь трех различных компонентов лагранжиана (1.1.32). Однако следует отметить, что в данном случае деформируемость понимается только в смысле центрально-симметрического сжатия, при котором понятие несовместимых деформаций теряет свой смысл. Чтобы учесть несовместимость деформаций, нам нужно пойти немного дальше, предполагая тензор энергии-импульса в виде

$$\mathsf{T} = \rho\,\partial_t \otimes dt - T^{r\cdot}_{\cdot r}\,\partial_r \otimes dr - T^{\theta\cdot}_{\cdot\theta}\,(\partial_\theta \otimes d\theta + \partial_\varphi \otimes d\varphi)\,,$$

где $T^{r\cdot}_{\cdot r}$, $T^{\theta\cdot}_{\cdot\theta}$ появляются вместо функции p, которая определяет давление, и обозначают радиальные и окружные компоненты напряжений. В этом случае управляющая система уравнений (1.1.41) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}
&e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda = 8\pi\,T^{r\cdot}_{\cdot r}\,,\\
&e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{\partial\nu}{\partial r} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r} - \frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)\right) + \Lambda = 8\pi\,T^{\theta\cdot}_{\cdot\theta}\,,\\
&e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = 8\pi\rho,
\end{aligned}$$

в то время как функции T^r_r, T^θ_θ могут быть выражены через некоторый вид деформации относительно определенного базового состояния. С учетом центральной симметрии это можно сделать с помощью одной функции u и последовательности предположений относительно материальных свойств шара. В качестве примера мы предполагаем, что шар подвергается упругой деформации в виде $\gamma:\ (\mathfrak{r},\ \mathfrak{t},\ \mathfrak{f}) \mapsto (r,\ \theta,\ \varphi) := (u(\mathfrak{r}),\ \mathfrak{t},\ \mathfrak{f})$, и его отклик можно вывести из упругого потенциала в трехпараметрической форме Муни – Ривлина [20]:

$$W = C_1\left(I_3^{-1/3} I_1 - 3\right) + C_2\left(I_3^{-2/3} I_2 - 3\right) + C_3\left(I_3^{1/2} - 1\right)^2,$$

где I_1, I_2, I_3, главные инварианты

$$I_1 = \operatorname{tr}\boldsymbol{B},\quad I_2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2\boldsymbol{B} - \operatorname{tr}\boldsymbol{B}^2\right),\quad I_3 = \det\boldsymbol{B},$$

левого тензора Коши – Грина $\boldsymbol{B}(u) = \gamma_*\mathsf{G}$ определяются как прямой образ материальной метрики G [21]. Константы C_1, C_2 и C_3 являются параметрами, характеризующими упругие свойства материала.

Можно получить следующую формулу для плотности: ρ:

$$\rho = \rho_0 \sqrt{I_3},$$

в которой ρ_0 - это плотность в отсчетном описании, и можно рассчитать напряжения $\boldsymbol{T}$ с помощью соотношения Дойла-Эриксена [22]:

$$\boldsymbol{T} = \frac{2}{J}\boldsymbol{B}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{B}} = \beth_0 \boldsymbol{I} + \beth_1 \boldsymbol{B} + \beth_{-1}\boldsymbol{B}^{-1},$$
$$\beth_0 = 2\frac{\partial W}{\partial I_2} I_2 I_3^{-1/2} + 2\frac{\partial W}{\partial I_3} I_3^{1/2}, \quad \beth_1 = 2\frac{\partial W}{\partial I_1} I_3^{-1/2}, \quad \beth_{-1} = -2\frac{\partial W}{\partial I_2} I_3^{1/2}.$$

Как следствие, можно выразить функции $T^{r\cdot}_{\cdot r}$, $T^{\theta\cdot}_{\cdot\theta}$ через одну неизвестную функцию u и материальную метрику G. Последняя может быть представлена своими инвариантами, как это было показано в работе [23]. При принятой центральной симметрии материальная метрика может быть полностью определена либо скалярной кривизной материальной связности, либо инвариантом её кручения, в зависимости от способа определения геометрии на материальном многообразии. Таким образом, мы приходим к системе уравнений, которая несколько сложнее, чем (1.1.41), но определяет аналогичную краевую задачу с сопряженными условиями с внешним решением Шварцшильда. Важно отметить, что решение этой краевой задачи определяет метрику на многообразии, порожденном топологическим 4D векторным пространством с заданной метрикой (или связностью) на материальном многообразии, которую можно интерпретировать как многообразие, порожденное тем же 4D топологическим пространством, но с определенной метрикой (или связностью). Мы можем считать эту метрику предопределенной или вывести её из решения специальной начально-краевой задачи, называемой эволюционной задачей [24]. К сожалению, более подробное обсуждение этих проблем выходит за рамки настоящей работы.

13°. Координаты. a. Координаты Шварцшильда. Координаты Шварцшильда являются одним из наиболее известных решений уравнений Эйнштейна в общей теории относительности. Они используются для описания гравитационного поля вокруг невращающегося и немагнитного сферически-симметричного объекта без электрического заряда (то есть, для описания вакуумного пространства вне такого объекта). Координаты Шварцшильда $(t,\ r,\ \theta,\ \varphi)$ задаются одноименной метрикой:

$$\boldsymbol{g} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \boldsymbol{g}_\Omega,$$

где

$$\boldsymbol{g}_\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2,$$

а $r_s = 2GM$ – гравитационный радиус, который зависит от массы.

Координаты Шварцшильда используются для описания пространства вокруг сферически симметричного объекта, такого как черная дыра или нейтронная звезда. Они позволяют описать гравитационное поле вне такого объекта.

b. Координаты Крускала-Шекереса. Координаты Крускала-Шекереса (T, X, θ, φ) представляют собой альтернативную систему координат, которая позволяет упростить анализ гравитационного поля вокруг черной дыры в общей теории относительности. Они охватывают всё пространство-время черной дыры, включая области внутри горизонта событий, которые в других координатах обычно оказываются недоступными.

Переход от координат Шварцшильда к координатам Крускала-Шекереса зависит от региона пространства. Во внешней области, когда $r > 2GM$, координаты T и X определяются следующим образом:

$$T = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} \exp\frac{r}{4GM} \sinh\frac{t}{4GM},$$
$$X = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} \exp\frac{r}{4GM} \cosh\frac{t}{4GM},$$

Во внутренней области, когда $0 < r < 2GM$, координаты T и X определяются так:

$$T = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} \exp\frac{r}{4GM} \cosh\frac{t}{4GM},$$
$$X = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} \exp\frac{r}{4GM} \sinh\frac{t}{4GM}.$$

Обратное преобразование координат зависит от значения переменных T и X. Координата r выражается через уравнение:

$$r = 2GM\left(1 + W_0\left(\frac{X^2 - T^2}{e}\right)\right),$$

где W_0 – функция Ламберта. Координата t зависит от области. Когда $T^2 - X^2 < 0$ и $X > 0$, то есть, вне массивного тела, то

$$t = 4GM \tanh^{-1}\frac{T}{X}.$$

Наконец, если $0 < T^2 - X^2 < 1$, $T > 0$, то есть внутри массивного тела, то

$$t = 4GM \tanh^{-1}\frac{X}{T}.$$

Метрика в координатах Крускала-Шекереса имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{g} = \frac{32G^3M^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{4GM}\right)(-dT^2 + dX^2) + r^2\boldsymbol{g}_\Omega.$$

c. Координаты Эддингтона–Финкельштейна. Координаты Эддингтона–Финкельштейна представляют собой систему координат, где радиальные лучи света, следующие нулевой геодезической при движении от центра или к нему, определяют поверхности с постоянным значением "времени". Радиальная координата в этой системе является обычной координатой пространства. Это означает, что поверхности, перпендикулярные радиальной координате, имеют сферическую симметрию с площадью, пропорциональной $4\pi r^2$.

Сжимающаяся координаты $(v,\ r,\ \theta,\ \varphi)$, где $v = t + r^*$. Здесь r^* черепашья координата, которая определяется как

$$r^* = r + 2GM \ln\left|\frac{r}{2GM} - 1\right|.$$

Метрика Шварцшильда в сжимающихся координатах записывается как:

$$\boldsymbol{g} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2\boldsymbol{g}_\Omega.$$

Разжимающаяся система координат: $(u,\ r,\ \theta,\ \varphi)$, где $v = t - r^*$. Метрика Шварцшильда:

$$\boldsymbol{g} = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dv^2 - 2dudr + r^2\boldsymbol{g}_\Omega.$$

d. Координаты Леметра. В координатах Леметра $(\tau,\ \rho,\ \theta,\ \varphi)$ была впервые устранена координатная сингулярность на гравитационном радиусе. Переход от координат Шварцшильда к координатам Леметра производится через выражения для элементов интервала:

$$d\tau = dt + \sqrt{\frac{r_s}{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}}dr,$$
$$d\rho = dt + \sqrt{\frac{r}{r_s}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}}dr.$$

Метрика в координатах Леметра имеет вид:

$$\boldsymbol{g} = d\tau^2 - \frac{r_s}{r}d\rho^2 - r^2\boldsymbol{g}_\Omega,$$

где

$$r = \left[\frac{3}{2}(\rho - \tau)\right]^{2/3} r_s^{1/3}.$$

e. Координаты Гуллстранда–Пенлеве. В координатах $(t_r, r, \theta, \varphi)$ временная координата t_r соответствует собственному времени свободно падающего наблюдателя, который начинает движение издалека от черной дыры со скоростью, равной нулю. Это означает, что для такого наблюдателя часы идут нормальным образом, и он свободно движется в направлении черной дыры, не испытывая при этом гравитационного ускорения.

Кроме того, в координатах Гуллстранда–Пенлеве сингулярности не возникают на радиусе Шварцшильда, который соответствует горизонту событий черной дыры. Получается путем преобразования: $t_r = t - a(r)$, где

$$a(r) = 2M\left(-2y + \ln\frac{y+1}{y-1}\right).$$

$$y = \sqrt{\frac{r}{2M}}.$$

В координатах Гуллстранда–Пенлеве метрика имеет вид:

$$\boldsymbol{g} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt_r^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt_r dr - dr^2 - r^2 \boldsymbol{g}_\Omega.$$

1.5. Релятивистская теория упругости

14°. Обратное движение в классической теории упругости. Представленный выше частный случай центрально симметричной деформации является опорой мысли для формулировки общего принципа выбора материальной части лагранжиана L_{mat}. Оставшаяся часть работы посвящена этому вопросу. Для его решения, в первую очередь, необходимо определить отображение, которое характеризует кинематику релятивистского тела. Предварим это определение вспомогательным рассмотрением в рамках классического случая. Пусть $\chi : \mathbb{T} \times \mathcal{S}_R \to \mathscr{E}^3$ — движение, т.е., семейство деформаций $\{\gamma_t\}_{t\in\mathbb{T}}$, $\gamma_t : \mathcal{S}_R \to \mathcal{S}_t$.

Если $t \in \mathbb{T}$ — фиксированный момент времени, то определено отображение

$$\chi(t, \cdot)^{-1} : \mathcal{S}_t \to \mathcal{S}_R, \quad X = \gamma_t^{-1}(x),\ x \in \mathcal{S}_t.$$

Вместе с тем, оно не может быть напрямую перенесено на всю совокупность $\{\mathscr{S}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ актуальных форм. Действительно, последние множества могут пересекаться, так, если $x \in \mathscr{S}_{t_1} \cap \mathscr{S}_{t_2}$, но $t_1 \neq t_2$, то значения $\gamma_{t_1}^{-1}(x)$ и $\gamma_{t_2}^{-1}(x)$ являются различными. Для преодоления этой трудности следует совместно учитывать как пространственные положения, так и моменты времени, в которые они заняты. Для этой цели можно осуществить следующую формальную процедуру. Определим множество [25, стр. 59]

$$\mathscr{T}[\mathscr{S}_R] := \coprod_{t\in\mathbb{T}} \mathscr{S}_t = \bigcup_{t\in\mathbb{T}} \{t\} \times \mathscr{S}_t.$$

Таким образом, $\mathscr{T}[\mathscr{S}_R]$ есть открытое подмножество тривиального пространства-времени $\mathbb{T} \times \mathscr{E}^3$, представляющее мировую трубку тела, содержащую траектории отдельных представительных объемов. Конструкция $\mathscr{T}[\mathscr{S}_R]$ гарактирует нам, что если $x \in \mathscr{S}_{t_1} \cap \mathscr{S}_{t_2}$, но $t_1 \neq t_2$, то (t_1, x) и (t_2, x) являются различными событиями $\mathscr{T}[\mathscr{S}_R]$ и им отвечают различные отсчетные метки из $\mathscr{S}_R$. Это позволяет определить новое отображение

$$\mathscr{P} : \mathscr{T}[\mathscr{S}_R] \to \mathscr{S}_R, \quad \mathscr{P}(t, x) := \gamma_t^{-1}(x). \tag{1.1.51}$$

По построению,

$$\chi(t, \mathscr{P}(t, x)) \equiv x \quad \text{и} \quad \mathscr{P}(t, \chi(t, X)) \equiv X, \tag{1.1.52}$$

так что $\mathscr{P}$ есть искомое отображение. Его градиент по пространственным переменным совпадает с обратным градиентом деформации, что и следовало ожидать:

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x} = \boldsymbol{F}^{-1}.$$

Поскольку отображение $\mathscr{P}$ сюръективно, будем называть его проекцией. Проекция (1.1.51) ассоциирует с каждой точкой $(t, x) \in \mathscr{T}[\mathscr{S}_R]$ точку $X \in \mathscr{S}_R$, соответствующую представительному объему, который был в месте x в момент времени t.

Рассмотрим градиент проекции $\mathscr{P}$ относительно временной переменной t. Для этой цели зафиксируем отсчетную метку $X \in \mathscr{S}_R$. Дифференцируя второе тождество в (1.1.52) по t, получаем

$$\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial t} + \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0},$$

где $\boldsymbol{V}$ — поле скорости в материальном описании, соответствующее частице X. Полученное соотношение влечет

$$\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{F}\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial t}. \tag{1.1.53}$$

Это формула, позволяющая определить скорость в материальном описании по обратному движению.

Для дальнейшего удобно выразить поле скорости относительно точек мировой трубки $\mathscr{T}[\mathscr{S}_R]$. Для этой цели определим векторное поле [25, стр. 60]

$$\boldsymbol{v} : \mathscr{T}[\mathscr{S}_R] \to \mathscr{V}^3, \quad \boldsymbol{v}(t, x) := \boldsymbol{V}(t, \mathscr{P}(t, x)), \tag{1.1.54}$$

которое является гладким и в рамках классической терминологии соответствует полю скорости в пространственном описании. Значение $\boldsymbol{v}(t, x)$ есть скорость частицы, которая в момент времени t была в месте x.

Хотя в рамках классической теории упругости настоящие рассмотрения не дают ничего нового[6], подход, связанный с использованием обратного движения, представляется полезным для релятивистского случая. Действительно, классическая теория упругости подразумевает вложимость тела в евклидово абсолютное физическое пространство $\mathscr{E}^3$, так что формы тела приобретают абсолютный смысл, наряду с отображениями между ними. Наличие отсчетной формы $\mathscr{S}_R$, свободной от напряжений, также подразумевается. Таким образом, прямое (лагранжево) и обратное (эйлерово) описания движения формально эквивалентны. Вместе с тем, в случае релятивистского тела такие понятия как «форма» и «деформация» теряют абсолютный смысл, будучи зависящими от наблюдателя. Тело проявляет себя в пространстве-времени посредством мировых трубок, состоящих из мировых линий представительных объемов. По этой причине, наиболее естественным представляется способ выразить кинематику тела в терминах отображений из мировой трубки в множество меток.

15°. Проекция и ее градиент: случай СТО. Определение проекции, сформулированное в рамках классической теории упругости, используется в качестве прототипа для кинематического описания движения релятивистского тела. Будем следовать работе Картера и Квинтаны [27]. Пусть $\mathscr{M}^4$ — пространство-время Минковского и пусть $\mathfrak{B}$ — гладкое трехмерное многообразие (материальное многообразие), образованное метками представительных объемов, составляющих тело. Под мировой трубкой $\mathscr{T}[\mathfrak{B}]$ тела $\mathfrak{B}$ будем понимать открытое подмножество $\mathscr{M}^4$, являющееся конгруэнцией мировых линий элементарных объемов, составляющих тело. Под проекцией $\mathscr{T}[\mathfrak{B}]$ на $\mathfrak{B}$ будем понимать гладкое сюръективное отображение

$$\mathscr{P} : \mathscr{T}[\mathfrak{B}] \to \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{X} = \mathscr{P}(x), \tag{1.1.55}$$

[6] Обратные деформации были рассмотрены Шилдтом в [26].

такое, что для любого $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ прообраз $\mathscr{P}^{-1}(\{\mathfrak{X}\})$ есть мировая линия массивной частицы.

Предположим, что на материальном многообразии $\mathfrak{B}$ можно выбрать глобальные координаты $(\mathfrak{X}^I)_{I=1}^3$ и для дальнейшего их зафиксируем. Если $\Psi : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^3$ — соответствующий координатный гомеоморфизм, то отображение (1.1.55) может быть эквивалентно представлено посредством трех скалярных отображений

$$\mathscr{P}^I : \mathscr{T}[\mathfrak{B}] \to \mathbb{R}, \ I = 1,\, 2,\, 3,$$
$$\forall x \in \mathscr{T}[\mathfrak{B}] : \ \Psi \circ \mathscr{P}(x) = (\mathscr{P}^1(x),\, \mathscr{P}^2(x),\, \mathscr{P}^3(x)).$$

Используя псевдо-декартовы координаты $(x^\alpha)_{\alpha=0}^3$ на $\mathscr{M}^4$, можно записать

$$\mathscr{P} : \ \mathfrak{X}^I = \mathfrak{X}^I(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3), \ I = 1,\, 2,\, 3, \tag{1.1.56}$$

для координатного представления отображения (1.1.55). Соответственно, градиент проекции может быть определен двумя эквивалентными способами, либо как касательное отображение

$$T\mathscr{P} : T\mathscr{T}[\mathfrak{B}] \to T\mathfrak{B}, \quad T_x\mathscr{P} = \left.\frac{\partial \mathfrak{X}^I}{\partial x^\alpha}\right|_x \partial_I|_{\mathscr{P}(x)} \otimes \mathfrak{c}^\alpha, \tag{1.1.57}$$

либо как тройка дифференциалов $(d\mathscr{P}^1_x,\, d\mathscr{P}^2_x,\, d\mathscr{P}^3_x)$:

$$d\mathscr{P}^I_x = \left.\frac{\partial \mathfrak{X}^I}{\partial x^\alpha}\right|_x \mathfrak{c}^\alpha, \ I = 1,\, 2,\, 3. \tag{1.1.58}$$

Здесь $(\partial_I)_{I=1}^3$ — координатный репер на $\mathfrak{B}$.

В дальнейшем будем предполагать, что для каждого события $x \in \mathscr{T}[\mathfrak{B}]$ касательное отображение $T_x\mathscr{P}$ имеет ранг 3 и что его ядро времениподобно. Тогда, в частности, 3×3-матрица $\left[\left.\frac{\partial \mathfrak{X}^I}{\partial x^j}\right|_x\right]$ обратима.

16°. Точка зрения внутреннего наблюдателя. Определения проекции и ее градиента, полученные в предыдущем разделе, являются абсолютными, поскольку они используют лишь такие понятия как пространство-время, координаты на нем и материальное многообразие. Вместе с тем, соотношения в терминах этих понятий непривычны с точки зрения классической теории упругости. Для того, чтобы придать им привычный смысл, необходимо использовать концепцию наблюдателя. Ограничим себя случаем внутреннего наблюдателя, который движется совместно с некоторым представительным объемом тела. То есть, $\mathscr{O} = (\gamma_{\mathfrak{X}_0},\, (\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^3)$, где $\mathfrak{X}_0 \in \mathfrak{B}$ есть метка, а $\gamma_{\mathfrak{X}_0}$ — мировая линия соответствующего представительного объема. Тогда в окрестности $U_{\mathscr{O}}$ мировой линии $\gamma_{\mathfrak{X}_0}$ определены псевдо-декартовы координаты $(\tau,\, x^1,\, x^2,\, x^3)$, в которых τ есть собственное время относительно наблюдателя, а x^1, x^2, x^3 — координаты в локальных пространствах покоя $\mathscr{M}_{\gamma_{\mathfrak{X}_0}}(\tau)$. В этом случае координатное представление (1.1.56) может быть записано как

$$\mathscr{P}:\ \mathfrak{X}^I = \mathfrak{X}^I(\tau,\, x^1,\, x^2,\, x^3),\ I = 1,\, 2,\, 3. \tag{1.1.59}$$

Далее, композиция с проектором $\boldsymbol{P}^{\perp}_{\boldsymbol{c}_0(\tau)}$ на пространственную платформу $\mathscr{V}^3_{\boldsymbol{c}_0(\tau)}$ определяет линейное отображение

$$\boldsymbol{D}_x = T_x\mathscr{P} \circ \boldsymbol{P}^{\perp}_{\boldsymbol{c}_0(\tau)},\ x \in \mathscr{M}_{\gamma_{\mathfrak{X}_0}}(\tau), \quad \text{или} \quad \boldsymbol{D}_x = \left.\frac{\partial \mathfrak{X}^I}{\partial x^j}\right|_x \partial_I|_{\mathscr{P}(x)} \otimes \mathfrak{c}^j. \tag{1.1.510}$$

Заметим, что элементы базиса с индексом 0 в этом разложении отсутствуют, так что $\boldsymbol{D}_x$ можно рассматривать как обратимое линейное отображение из $\mathrm{Hom}(\mathscr{V}^3_{\boldsymbol{c}_0(\tau)};\, T_{\mathscr{P}(x)}\mathfrak{B})$.

С точки зрения наблюдателя $\mathscr{O}$ можно рассматривать (1.1.59) как координатное представление обратного движения той части тела, которая доступна восприятию наблюдателя. То есть, (1.1.59) — это не более, чем (1.1.51). В таком случае (1.1.510) является обратным градиентом деформации, т.е., $\boldsymbol{D}_x = \boldsymbol{F}_x^{-1}$. Помимо этого, 3-скорости в материальном и пространственном описаниях $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{v}$ могут быть определены посредством аналогов (1.1.53) и (1.1.54) соответственно. Вместе с тем, следует иметь в виду, что эта интерпретация ассоциирована исключительно с наблюдателем, поскольку другой внутренний наблюдатель $\mathscr{O}'$ будет воспринимать иное обратное движение (даже если окрестности $U_{\mathscr{O}}$ и $U_{\mathscr{O}'}$ совпадут).

17°. Принцип наименьшего действия и материальная индифферентность. Принимая принцип наименьшего действия в качестве основы рассуждений, будем полагать, что физическое состояние тела полностью определяется действием[7] (1.1.31), в котором

$$L_{\mathrm{mat}} = \underset{y \in \mathscr{T}[\mathfrak{B}]}{L}\,(x,\, \mathscr{P}(y),\, \tau(y))\ \boldsymbol{\omega}(x), \tag{1.1.511}$$

где $\mathscr{P}: \mathscr{T}[\mathfrak{B}] \to \mathfrak{B}$ — проекция, а $\tau: \mathscr{T}[\mathfrak{B}] \to \mathbb{R}$ — функция собственного времени, значение которой $\tau(x)$ является собственным временем события x относительно единственной мировой линии, проходящей через x.

[7] Отправляясь от общего случая, мы рассматриваем среды с памятью, принимая во внимание историю событий для определения отклика материала в текущем событии. В таком случае учитывается лишь нижняя часть мировой линии, в то время как верхняя часть исключается из рассмотрения в соответствии с принципом причинности, принимаемым в классической механике [22].

Скалярнозначная функция L в (1.1.511) содержит историю движения, а интегрирование выполняется по мировой трубке $\mathscr{T}[\mathfrak{B}]$ относительно формы объема $\boldsymbol{\omega}$, принадлежащей структуре (1.1.11).

Отправляясь от принципа локализации первого порядка, заменим сложную функциональную зависимость от $\mathscr{P}$ и от τ на их разложения по формуле Тейлора первого порядка:

$$\mathscr{P}(y) \mapsto (\mathscr{P}(x),\, d\mathscr{P}^1_x,\, d\mathscr{P}^2_x,\, d\mathscr{P}^3_x), \quad \tau(y) \mapsto (\tau(x),\, d\tau_x).$$

Тогда, предполагая трансляционную инвариантность лагранжиана, запишем функцию (1.1.511) как[8]

$$L_{\mathrm{mat}} = L\left(d\mathscr{P}^1_x,\, d\mathscr{P}^2_x,\, d\mathscr{P}^3_x,\, d\tau_x\right)\, \boldsymbol{\omega}(x). \tag{1.1.512}$$

Соотношение (1.1.512) уже позволяет определить абсолютное движение релятивистского тела в пространстве-времени Минковского $\mathscr{M}^4$. Дальнейшее упрощение лагранжиана может быть достигнуто, если ввести внутреннего наблюдателя $\mathscr{O} = (\gamma_{\mathfrak{x}_0},\, (\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^3)$, движущегося совместно с некоторым представительным объемом. Примем следующие допущения:

1) мировая трубка $\mathscr{T}[\mathfrak{B}]$ бесконечно тонка во временном направлении и не сильно вытянута в пространственном направлении, так что локальные пространства покоя не пересекаются,

2) функция собственного времени τ известна и порождается мировой линией наблюдателя $\gamma_{\mathfrak{x}_0}$.

В соответствии с 1), можно отождествить $\mathscr{T}[\mathfrak{B}]$ с окрестностью $U_{\mathscr{O}}$, а в соответствии с 2), собственное время можно рассматривать как параметр процесса и тем самым исключить его из списка аргументов действия. Таким образом, в лаборатории наблюдателя, формула (1.1.512) заменяется на

$$L_{\mathrm{mat}} = L\left(\boldsymbol{v}_x,\, \boldsymbol{F}_x^{-1}\right)\, \boldsymbol{\omega}(x), \tag{1.1.513}$$

где $\boldsymbol{v}_x$ есть 3-скорость частиц в пространственном описании, а $\boldsymbol{F}_x$ — градиент деформации. Наконец, предположим классический вид лагранжиана:

$$L\left(\boldsymbol{v}_x,\, \boldsymbol{F}_x^{-1}\right) = T\left(\boldsymbol{v}_x\right) - \Pi\left(\boldsymbol{F}_x^{-1}\right), \tag{1.1.514}$$

[8]Формально, для упрощенного лагранжиана следует использовать другое обозначение, но для экономии символов здесь и далее применяется один и тот же символ L.

в котором T — положительно определенный квадратичный функционал от $\boldsymbol{v}_x$ (плотность кинетической энергии), а Π соответствует плотности упругой энергии. Формулы (1.1.513) и (1.1.514) составляют финальный шаг редукции лагранжиана и характеризуют движение релятивистского тела относительно наблюдателя $\mathscr{O}$.

С целью уточнить зависимость Π от $\boldsymbol{F}_x^{-1}$, примем релятивистский аналог принципа материальной индифферентности. Предварим его формулировку следующим замечанием. Концепция классического полярного разложения Коши корректно определена лишь для евклидова векторного пространства, поскольку она выделяет вращение, т.е., оператор, сохраняющий евклидову метрику. Значимость вращений обуславливается принципом материальной индифферентности: если вращать тело как целое, то расстояния между любыми двумя его точками не изменяются. Вместе с тем, уже в пространстве-времени Минковского возникает проблема с определением принципа материальной индифферентности, поскольку в нем нет абсолютного пространства мест, а метрика индефинитна. Работы Брессана, Брэгга и Содерхольма посвящены этому вопросу [28–30]. В действительности есть два решения. В рамках СТО глобальная векторная структура по-прежнему сохраняется и это позволяет рассматривать 4D-вращения (операции, сохраняющие метрику Минковского). В таком случае полярное разложение Коши может быть обобщено на пространство-время [3, стр. 191] и тогда можно предположить, что вращения и бусты не влияют на внутреннюю энергию механической системы. Можно также ограничить вращения на глобальную пространственную платформу наблюдателя и сформулировать аналог классического принципа материальной индифферентности относительно полученных трехмерных вращений. Далее, если пространство-время является многообразием, не допускающим глобальную векторную структуру, то в таком случае нельзя ничего сказать о вращениях. По этой причине, в ОТО принцип материальной индифферентности заменяется на принцип общей ковариантности [31].

Накладывая ограничение, согласно которому плотность упругой энергии не может измениться под действием пространственных вращений, отождествим материальное многообразие $\mathfrak{B}$ с некоторой областью $\mathscr{S}_R$ локального пространства покоя и рассмотрим два случая: 1) вращается актуальная форма и 2) вращается отсчетная форма. В первом случае математическое выражение принципа материальной индифферентности имеет вид:

$$\Pi\left(\boldsymbol{F}_x^{-1}\boldsymbol{O}\right) = \Pi\left(\boldsymbol{F}_x^{-1}\right), \tag{1.1.515}$$

для любого вращения $\boldsymbol{O} \in \mathrm{SO}(3)$, т.е., $\boldsymbol{O}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{O} = \mathsf{I}$ и $\det \boldsymbol{O} = 1$. Чтобы получить модификацию зависимости Π от обратного градиента деформации $\boldsymbol{F}_x^{-1}$, используем теорему Коши о полярном разложении [32]: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$, где $\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}}$ есть правый тензор искажений, а $\boldsymbol{R}$ есть тензор вращений. Затем, полагая $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{R}$ в (1.1.515), получим

$$\Pi\left(\boldsymbol{F}_x^{-1}\right) = \Pi\left(\boldsymbol{F}_x^{-1}\boldsymbol{R}\right) = \Pi\left(\boldsymbol{U}_x^{-1}\right).$$

Наконец, определяя правую меру Коши – Грина $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2$, приходим к искомой зависимости:

$$\Pi : \mathscr{V}_{\boldsymbol{c}_0}^3 \otimes \left(\mathscr{V}_{\boldsymbol{c}_0}^3\right)^* \ni \boldsymbol{C}_x^{-1} \mapsto \Pi\left(\boldsymbol{C}_x^{-1}\right) \in \mathbb{R}. \tag{1.1.516}$$

Аналогично, во втором случае можно потребовать, что

$$\Pi\left(\boldsymbol{O}\boldsymbol{F}_x^{-1}\right) = \Pi\left(\boldsymbol{F}_x^{-1}\right), \tag{1.1.517}$$

для любого вращения $\boldsymbol{O} \in \mathrm{SO}(3)$. Далее, в силу теоремы Коши о полярном разложении, имеем $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}$, где $\boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}}$ — левый тензор искажений, а $\boldsymbol{R}$ — вращение. Тогда, полагая $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{R}$ в (1.1.517), приходим к равенствам

$$\Pi\left(\boldsymbol{F}_x^{-1}\right) = \Pi\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{F}_x^{-1}\right) = \Pi\left(\boldsymbol{V}_x^{-1}\right).$$

Вводя левую меру Коши – Грина $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^2$, приходим к следующей зависимости для плотности упругой энергии:

$$\Pi : \mathscr{V}_{\boldsymbol{c}_0}^3 \otimes \left(\mathscr{V}_{\boldsymbol{c}_0}^3\right)^* \ni \boldsymbol{B}_x^{-1} \mapsto \Pi\left(\boldsymbol{B}_x^{-1}\right) \in \mathbb{R}.$$

18°. Проекция и ее градиент: случай ОТО. Финальная часть посвящена обобщению обратного движения на случай общей теории относительности. Подобно случаю пространства-времени Минковского будем полагать, что задано материальное многообразие $\mathfrak{B}$, — гладкое многообразие размерности 3, и задано открытое подмножество $\mathscr{T}[\mathfrak{B}] \subset \mathscr{L}^4$ искривленного пространства-времени $\mathscr{L}^4$, являющееся конгруэнцией мировых линий представительных объемов, составляющих тело. История движения формализуется посредством проекции [27], т.е., гладкого сюръективного отображения $\mathscr{P} : \mathscr{T}[\mathfrak{B}] \to \mathfrak{B}$, которое удовлетворяет требованиям:

a) для любой метки $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ прообраз $\mathscr{P}^{-1}(\{\mathfrak{X}\})$ является мировой линией массивной частицы;

b) для любого события $x \in \mathscr{T}[\mathfrak{B}]$ касательное отображение $T_x\mathscr{P}$ имеет ранг 3 и его ядро времениподобно относительно метрики Лоренца g.

Согласно свойству b), если u — произвольный времениподобный вектор из $T_x\mathscr{L}^4$, $x \in \mathscr{T}[\mathfrak{B}]$, то $T_x\mathscr{P}[\mathsf{u}] = \mathsf{0}$. Таким образом, если $\gamma_{\mathfrak{X}}$ — мировая линия в $\mathscr{T}[\mathfrak{B}]$ представительного объема с меткой $\mathfrak{X}$ (так что $\gamma_{\mathfrak{X}}(\mathbb{R}) = \mathscr{P}^{-1}(\{\mathfrak{X}\})$), то 4-скорость u этой мировой линии удовлетворяет координатному соотношению

$$u^\alpha \partial_\alpha \mathscr{P}^I = 0, \ I = 1, 2, 3.$$

Градиент проекции $\mathscr{P}$ в точке $x \in \mathscr{T}[\mathfrak{B}]$ есть либо касательное отображение $T_x\mathscr{P} : T_x\mathscr{T}[\mathfrak{B}] \to T_{\mathscr{P}(x)}\mathfrak{B}$, либо, эквивалентно, тройка дифференциалов $(d\mathscr{P}^1_x, d\mathscr{P}^2_x, d\mathscr{P}^3_x)$. Отметим, что в отличие от разложений (1.1.57) и (1.1.58), использующих глобальный корепер $(\mathfrak{c}^\alpha)_{\alpha=0}^3$ в $\mathscr{M}^4$, их аналоги используют локальный координатный репер $(dx^\alpha)_{\alpha=0}^3$:

$$T_x\mathscr{P} = \mathscr{P}^I_\alpha(x)\partial_I|_{\mathscr{P}(x)} \otimes dx^\alpha|_x \quad \text{и} \quad d\mathscr{P}^I_x = \mathscr{P}^I_\alpha(x)dx^\alpha|_x, \ I = 1, 2, 3.$$

Здесь и далее используется обозначение $\mathscr{P}^I_\alpha(x) := \left.\frac{\partial \mathfrak{X}^I}{\partial x^\alpha}\right|_x$.

19°. Расслоение мировой трубки. С заданной мировой трубкой $\mathscr{T}[\mathfrak{B}]$ можно ассоциировать ее расслоение на пространственноподобные гиперповерхности, т.е., трехмерные многообразия, g-ортогональные 4-скоростям мировых линий[9]. Это расслоение индуцирует пространственно-временные координаты в виде (τ, x^1, x^2, x^3), где τ соответствует собственному времени, а x^1, x^2, x^3 — координатам на трансверсальной поверхности. Тогда проекция $\mathscr{P}$ имеет представление, подобное (1.1.59), что позволяет определить два частных градиента:

$$d_\tau\mathscr{P}^I_x = \mathscr{P}^I_\tau(x)d\tau \quad \text{и} \quad d_s\mathscr{P}^I_x = \mathscr{P}^I_j(x)dx^j, \ I = 1, 2, 3,$$

со свойством

$$d\mathscr{P}^I_x = d_\tau\mathscr{P}^I_x + d_s\mathscr{P}^I_x, \ I = 1, 2, 3.$$

Заметим, что значения поля $[\mathscr{P}^I_j]$ являются обратимыми 3×3-матрицами. Используя частные градиенты, приходим к следующему аналогу классической формулы (1.1.53) [34]:

$$\mathscr{P}^I_\tau = -v^j\mathscr{P}^I_j,$$

где $(v^j)_{j=1}^3$ — компоненты 3-скорости.

20°. Принцип наименьшего действия и общая ковариантность. В рамках лагранжева формализма рассмотрим следующий лагранжиан материи:

$$L_{\text{mat}} = L\left(\mathsf{g}^{(1)}_x, T_x\mathscr{P}\right)\sqrt{-g_x}\, d^4x.$$

[9]Подробное изложение расслоений пространства-времени можно найти в [33].

Аргументами плотности L являются проекция $\mathscr{P} : \mathscr{T}[\mathfrak{B}] \to \mathfrak{B}$ и метрический тензор g.

Зависимость скалярной функции L от метрики g и проекции $\mathscr{P}$ может быть уточнена посредством принципа общей ковариантности, который сформулируем следующим образом. Предположим, что $\Phi : \mathscr{L}^4 \to \mathscr{L}^4$ — диффеоморфизм пространства-времени на себя; точка x с координатами $(x^\alpha)_{\alpha=0}^3$ переводится в точку x' с координатами $(x'^\alpha)_{\alpha=0}^3$. Тогда мировая трубка $\mathscr{T}[\mathfrak{B}]$ преобразуется в мировую трубку $\mathscr{T}[\mathfrak{B}]'$, а проекции $\mathscr{P} : \mathscr{T}[\mathfrak{B}] \to \mathfrak{B}$ отвечает проекция $\mathscr{P}' : \mathscr{T}[\mathfrak{B}]' \to \mathfrak{B}$, связанная с исходной как

$$\mathscr{P}' = \mathscr{P} \circ \Phi^{-1}.$$

Метрика g переходит в метрику

$$\mathsf{g}' = \Phi_* \mathsf{g},$$

где символ Φ_* обозначает прямой образ. Покомпонентно, имеем:

$$\mathscr{P}'^I_\alpha = \mathscr{P}^I_\beta \overset{-1}{\Phi}{}^\beta_\alpha \quad \text{и} \quad g'^{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} \Phi^\alpha_\gamma \Phi^\beta_\delta,$$

где $\Phi^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}$ и $\overset{-1}{\Phi}{}^\alpha_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}$, так что $\Phi^\alpha_\beta \overset{-1}{\Phi}{}^\beta_\gamma = \delta^\alpha_\gamma$. Принцип общей ковариантности утверждает, что равенство

$$L\left(g'^{\alpha\beta}, \mathscr{P}'^I_\alpha\right) = L\left(g^{\alpha\beta}, \mathscr{P}^I_\alpha\right),$$

должно выполняться тождественно по Φ. Хотя возможно провести формальный вывод [35], ограничимся следующим способом рассуждения. Достаточно предъявить такую комбинацию полей $g^{\alpha\beta}$ и $\mathscr{P}^I_\alpha$, которая инвариантна относительно Φ. Действительно, простейшей является [34, 36]

$$g^{IJ} := g^{\alpha\beta} \mathscr{P}^I_\alpha \mathscr{P}^J_\beta.$$

Тогда, поскольку

$$\begin{aligned} g'^{IJ} &= g'^{\alpha\beta} \mathscr{P}'^I_\alpha \mathscr{P}'^J_\beta \\ &= g^{\gamma\delta} \Phi^\alpha_\gamma \Phi^\beta_\delta \mathscr{P}^I_\sigma \overset{-1}{\Phi}{}^\sigma_\alpha \mathscr{P}^J_\rho \overset{-1}{\Phi}{}^\rho_\beta \\ &= g^{\gamma\delta} \mathscr{P}^I_\gamma \mathscr{P}^J_\delta \\ &= g^{IJ}, \end{aligned}$$

это искомая комбинация. Положим затем

$$L := \widetilde{L}\left(g^{IJ}\right).$$

Поля g^{IJ} являются компонентами тензорного поля на $\mathfrak{B}$, являющегося прямым образом метрики g относительно проекции $\mathscr{P}$. В рамках классической теории упругости аналогом полученного соотношения является обратная правая мера Коши−Грина $\boldsymbol{C}^{-1}$. Заметим, что подобный результат был получен на пространственной платформе в пространстве-времени Минковского (см. формулу (1.1.516)).

1.6. Приложение 1. Основные геометрические структуры

Несмотря на кажущееся различие, основы нелинейной теории упругости и общей теории относительности восходят к одной и той же формальной конструкции. Эта конструкция — математическая структура векторного пространства, над которым, если необходимо, выстраиваются более сложные структуры топологических пространств, гладких многообразий и т.д. Образно говоря, векторное пространство примеряет различные одежды, сопоставляя их с наблюдаемой физической реальностью. В рамках нелинейной теории упругости такая смена одежд возникает при формализации поля распределенных дефектов, поскольку исходной евклидовой метрики становится недостаточно для глобального описания несовместных деформаций. Как было показано в 50-х годах прошлого века, для этого достаточно заменить евклидову метрику и связность римановыми, или, более общо, аффинной связностью [37–39]. Неевклидова структура, конечно, задается на многообразии, порожденном трехмерным векторным пространством, предварительно оснащенным евклидовой структурой. Это то, что мы образно назвали сменой одежды. В конструкции общей теории относительности такая смена одежды встречается, как минимум, дважды. Четырехмерное векторное пространство, изначально лишенное каких-либо дополнительных геометрических структур, примеряет евклидову метрику галилеева пространства-времени, которая оказывается слишком узкой для реализации уравнений электродинамики Максвелла. Человеческий Гений выбирает другую надстройку, а именно — псевдоевклидову метрику Лоренца-Минковского. Но даже этого недостаточно для описания явления гравитации. Тогда Человеческий Гений идет дальше и предлагает новую надстройку — риманово пространство-время или, что более общо, — четырехмерное пространство-время с общей аффинной связностью. Эти надстройки определены на одном и том же четырехмерном векторном пространстве, которое было определено в самом начале. В этом можно увидеть глубокую аналогию между основами нелинейной упругости и общей теорией относительности. Такая аналогия, в частности, натолкнула на мысль представить вселенную, наполненную массивными объектами, в виде объемлющего четырехмерного кристалла, наполненного дефектами. [40, 41]. В этом случае массивные тела, создающие гравитационные поля, подобны дефектам, создающим несовместные деформации и собственные механические напряжения. С другой стороны, перевод положений нелинейной упругости на язык теории относительности требует с самого начала рассматривать их в четырехмерном векторном пространстве, изначально, возможно, снабженном геометрией пространства-времени Галилея, которая затем должна быть заменена геометрией пространства Минковского или более общей геометрией искривленного пространства-времени. [31, 42–44]. Вместе с тем, теория нелинейной релятивистской упругости тел с распределенными дефектами, актуальность которой для решения астрофизических задач была указана во введении, еще далека от завершения. Мы надеемся, что настоящая работа станет шагом в этом направлении. Поскольку необходимые для этого рассуждения содержатся в самых основах геометрии пространства-времени, то начнем с них.

21°. Аффинное пространство. Первым и основным элементом последовательности структур является m-мерное аффинное пространство $\mathscr{A}^m$, размерность которого далее предполагается равной 3 или 4. Его можно определить как упорядоченную тройку

$$\mathscr{A}^m = (A,\, \mathscr{V}^m,\, \mathrm{vec})\,, \tag{1.1.61}$$

где символ A обозначает подлежащее множество, элементы которого называются точками[10]; $\mathscr{V}^m = (V,\, \mathbb{R},\, +,\, \cdot)$ есть m-мерное вещественное векторное пространство, элементы которого определяют трансляции, переводящие одну точку в другую; а операция $\mathrm{vec} :\ A \times A \to V$ определяет отношение между точками и векторами, удовлетворяющее аксиомам Вейля [45–47]:

$$\begin{aligned}
&\forall a,\ b,\ c \in A:\ \mathrm{vec}(a,\, b) + \mathrm{vec}(b,\, c) = \mathrm{vec}(a,\, c),\\
&\forall a \in A\ \forall \mathsf{v} \in V\ \exists! b \in A:\ \mathrm{vec}(a,\, b) = \mathsf{v}.
\end{aligned}$$

Поскольку значение $\mathrm{vec}(a,\, b)$ можно интерпретировать как направленный отрезок прямой, соединяющий точки a и b, можно интерпретировать первую аксиому (аксиому Шаля) как правило параллелограмма. Вторая

[10] В рамках механики континуума эти точки определяют позиции материальных элементов.

аксиома (аксиома замыкания) утверждает, что для произвольной точки и произвольной трансляции существует единственная точка в аффинном пространстве, являющаяся результатом заданной трансляции из заданной точки.

22°. Предпочтительный репер. Структура $\mathscr{A}^m$ позволяет определить абсолютные геометрические объекты, такие как точки и векторы (в курсе аналитической геометрии последние определяются как классы эквивалентных направленных отрезков). Их принято представлять в координатном виде. Для этого достаточно дополнить структуру (1.1.61) двумя элементами: началом отсчета $o \in A$ и предпочтительным векторным базисом[11] $(\mathsf{c}_i)_{i \in I_m}$. Это приводит к новой структуре

$$\mathscr{C}^m = \left(\mathscr{A}^m, o, (\mathsf{c}_i)_{i \in I_m}\right). \tag{1.1.62}$$

Заметим, что выбор начала отсчета и предпочтительного базиса, на первый взгляд, противоречит идее релятивистского определения пространства и времени. Между тем этот выбор необходим для первичного выявления топологических и метрических свойств пространства, поскольку объекты, формализующие эти свойства, требуют для своего определения именно таких предпочтительных сущностей. Уже на этом уровне можно выделить один из элементов базиса, связанный со временем. Этот выбор, в частности, определяет направление течения времени из прошлого в будущее. Все возможные последующие определения метрики наследуют этот выбор, определяя тем самым взаимную ориентацию световых конусов в рамках специальной или общей теории относительности.

Замечание 1.5. *Чисто математически все базисы эквивалентны, что делает пространство Минковского $\mathscr{A}^4$ полностью изотропным. Однако физические рассуждения разрушают эту изотропию, поскольку они основаны на выборе вектора $\boldsymbol{c}_0$, связанного с так называемой стрелой времени (-световой конус, направление времени, и т.д.). Мы можем относиться к этому как к выбору, сделанному без нашего участия. Но если мы хотим воспроизвести это, мы неизбежно должны воспользоваться аксиомой выбора. Повторяя эту процедуру, можно выбрать некоторый набор линейно независимых векторов, в котором $\boldsymbol{c}_0$ стоит на первом месте. Следует отметить, что, как правило, количество элементов в кортеже строго не определено и может превышать* 4. *В таком случае пространство Минковского становится аффинным пространством размерности, также превышающей* 4, *что связано с теориями большой размерности, такими как* 5-*оптика и теория струн.*

[11] Здесь I_m обозначает линейно упорядоченное m-элементное множество индексов.

23°. Сопряженное пространство. Для формализации вычислений в координатах целесообразно использовать линейные функционалы, действующие на $\mathscr{V}^m$. Они образуют линейное пространство $(\mathscr{V}^m)^*$ той же размерности, что и исходное, однако это пространство не является полной копией $\mathscr{V}^m$. Вместе с тем, имея в виду канонический изоморфизм $\mathscr{V}^m$ с его вторым сопряженным, будем использовать симметричную запись посредством угловых скобок: $\langle \mathsf{v},\, \mathfrak{h}\rangle = \langle \mathfrak{h},\, \mathsf{v}\rangle = \mathfrak{h}(\mathsf{v})$, $\mathsf{v} \in \mathscr{V}^m$, $\mathfrak{h} \in (\mathscr{V}^m)^*$ для действия функционалов из $(\mathscr{V}^m)^*$ на векторы из $\mathscr{V}^m$, и, обратно, действия векторов на функционалы. Будем называть это действие каноническим спариванием [48], позволяющим определить взаимно сопряженные базисы: $(\mathsf{c}_i)_{i\in I_m}$ в $\mathscr{V}^m$ и $\left(\mathfrak{c}^i\right)_{i\in I_m}$ в $(\mathscr{V}^m)^*$, $\left\langle \mathfrak{c}^i,\, \mathsf{c}_j\right\rangle = \delta^i_j$. Дуальный базис позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между векторами, точками и упорядоченными наборами из m чисел:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{V}^m \ni \mathsf{v} = v^i \mathsf{c}_i \mapsto v^i = \left\langle \mathfrak{c}^i,\, \mathsf{v}\right\rangle \in \mathbb{R}, \\
A \ni a = o + x^i \mathsf{c}_i \mapsto x^i = \left\langle \mathfrak{c}^i,\, \operatorname{vec}(o,\, a)\right\rangle \in \mathbb{R}, \quad i \in I_m.
\end{aligned}
\tag{1.1.63}
$$

Заметим, что дуальное векторное пространство $(\mathscr{V}^m)^*$ позволяет определить понятие непрерывности (и, соответственно, топологии) в векторном пространстве $\mathscr{V}^m$ без прямого определения топологической структуры на нем. Действительно, координатное пространство $\mathbb{R}^m$ снабжено стандартной арифметической топологией. Поскольку действие ковектора на вектор дает число, то вопрос о сходимости в $\mathscr{V}^m$ может быть сведен к классической теории пределов в $\mathbb{R}^m$.

Замечание 1.6. *Детально, это можно осуществить посредством следующих шагов [49]:*

(1) *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — некоторое подмножество $\mathbb{R}^m$ с предельной точкой $x_0 \in \mathbb{R}^m$ и пусть v — отображение $X \ni x \mapsto \mathsf{v}(x) \in \mathscr{V}^m$. Тогда v называется бесконечно малым (стремится к $\mathsf{0}$) при $x \to x_0$, если для любого ковектора $\mathfrak{h} \in (\mathscr{V}^m)^*$ вещественнозначная функция $\mathfrak{h}\circ\mathsf{v} : X \to \mathbb{R}$ стремится к 0 при $x \mapsto x_0$. Заметим, что последний предел понимается в смысле классического анализа.*

(2) *Установим теперь соответствие между предельным значением векторного поля и пределами координатных функций, представляющих это поле в выбранном базисе $(\mathsf{c}_i)_{i\in I_m}$. Это соответствие может быть достигнуто посредством того свойства, что с каждым векторное полем $\mathsf{v} : X \to \mathscr{V}^m$ можно ассоциировать m скалярных отображений $v^i : X \to \mathbb{R}$, $i \in I_m$, определенных как*

$v^i = \mathfrak{c}^i \circ \mathsf{v}$. *Тогда* v *стремится к* $\mathsf{0}$ *при* $x \to x_0$, *в смысле п. (1) тогда и только тогда, когда все функции* v^i *стремятся к нулю при* $x \to x_0$.

(3) *Пункты (1) и (2) позволяют определить общее понятие предела следующим образом. Вектор* $\mathsf{v}_0 \in \mathscr{V}^m$ *называется пределом отображения* $\mathsf{v} : X \to \mathscr{V}^m$ *при* $x \to x_0$, *если разность* $\mathsf{v}(x) - \mathsf{v}_0$ *бесконечно мала при* $x \to x_0$.

На этом этапе мы получили топологическое векторное пространство, которое является отправной точкой для построения как нелинейной теории упругости, так и теории относительности. Следует лишь отметить, что в рамках классических рассуждений, принятых в теории упругости, векторное пространство предполагается трёхмерным, а для описания происходящих в нём динамических процессов в качестве дополнительного параметра вводится время. Геометризация времени приводит к так называемому галилееву пространству-времени, в котором время как дополнительная координата вводится абсолютно формально, без определения какой-либо алгебраической или топологической структуры. Грубо говоря, время добавляется на уровне дополнительной координаты в кортеже из $\mathbb{R}^4$. Эту ситуацию, конечно, можно легко исправить, если с самого начала ввести полноценное 4D-векторное пространство с выбранным базисным элементом, связанным со временем. Несмотря на то, что для самой теории упругости это может быть не столь важно (особенно если рассматривать только обратимые процессы и не учитывать направление течения времени), с точки зрения общего подхода и переноса рассуждений на язык теории относительности это обстоятельство представляется весьма существенным.

24°. Башня тензорных пространств. Теперь перейдем к надстройке над векторным пространством, которую можно назвать башней тензорных пространств. Подчеркнем, что пока речь идет исключительно об алгебраических структурах, а не о полях. В векторном пространстве $\mathscr{V}^m$ и его двойственность, $(\mathscr{V}^m)^*$, можно определить тензоры, которые имеют несколько эквивалентных представлений. Наиболее распространенный подход — определить тензор как k-линейный функционал со значениями в $\mathbb{R}$ [48]. Однако, как правило, такое определение требует определенного расположения векторных и ковекторных аргументов, что не всегда подходит для физических приложений. По этой причине, хотя мы сохраняем такую интерпретацию для тензоров из-за ее удобства, мы предпочитаем рассматривать их как элементы тензорного произведения векторных пространств [50, Chapter 10]. Примеры тензорных произведений: $\mathscr{V}^m \otimes \mathscr{V}^m$, $\mathscr{V}^m \otimes (\mathscr{V}^m)^*$, и так далее. Такие векторные пространства образуют тензорную башню с $\mathscr{V}^m$ и $(\mathscr{V}^m)^*$ на первом этаже; верхние этажи уходят в бесконечность.

Замечание 1.7. *Тензорное произведение векторных пространств $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{V}_2$ (которые есть либо $\mathscr{V}^m$, либо $(\mathscr{V}^m)^*$) определяется следующим образом. Синтезируется векторное пространство $\mathscr{M}(\mathscr{V}_1 \times \mathscr{V}_2)$ формальных линейных комбинаций, которые представлены отображениями $\mathscr{V}_1 \times \mathscr{V}_2 \to \mathbb{R}$, такими, что множество аргументов, в которых они принимают ненулевые значения, конечно. Далее, с использованием понятия факторпространства, тензорное произведение определяется как $\mathscr{V}_1 \otimes \mathscr{V}_2 := \mathscr{M}(\mathscr{V}_1 \times \mathscr{V}_2)/\mathscr{N}$, где $\mathscr{N}$ — векторное подпространство, образованное элементами вида (здесь v_i, v_i', $v_i'' \in \mathscr{V}_i$, $\lambda \in \mathbb{R}$)*

$$
\begin{gathered}
(v_1' + v_1'',\, v_2) - (v_1',\, v_2) - (v_1'',\, v_2), \quad (v_1,\, v_2' + v_2'') - (v_1,\, v_2') - (v_1,\, v_2''), \\
\lambda(v_1,\, v_2) - (\lambda v_1,\, v_2), \quad \lambda(v_1,\, v_2) - (v_1,\, \lambda v_2).
\end{gathered}
$$

Значительную роль в рассуждениях играют внешние k-формы, т.е., антисимметричные k-линейные отображения $\omega :\ \mathscr{V}^m \times \cdots \times \mathscr{V}^m \to \mathbb{R}$ прямого произведения k копий $\mathscr{V}^m$ в $\mathbb{R}$. Все такие отображения образуют векторное пространство $\bigwedge^k ((\mathscr{V}^m)^*)$. Частным и важным примером k-формы является k-ковектор

$$
\mathfrak{h}^1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{h}^k := \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_k} \varepsilon_\sigma \left(\mathfrak{h}^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{h}^{\sigma(k)} \right),
$$

образованный линейными функционалами $\mathfrak{h}^1, \ldots, \mathfrak{h}^k \in (\mathscr{V}^m)^*$. Здесь символ S_k обозначает группу перестановок над множеством $\{1, \ldots, k\}$ первых k натуральных чисел, а ε_σ — знак перестановки σ.

Семейство k-ковекторов $\mathfrak{c}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{c}^{j_k}$, $j_1, \ldots, j_k \in I_m$, $j_1 < \cdots < j_k$, образует базис пространства $\bigwedge^k ((\mathscr{V}^m)^*)$. Таким образом, любая k-форма $\omega \in \bigwedge^k ((\mathscr{V}^m)^*)$ имеет разложение по базисным k-ковекторам:

$$
\omega = \frac{1}{k!} \sum_{j_1, \ldots, j_k \in I_m} \omega_{j_1 \ldots j_k}\, \mathfrak{c}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{c}^{j_k},
$$

где $\omega_{j_1 \ldots j_k} = \omega(\mathsf{c}_{j_1}, \ldots, \mathsf{c}_{j_k})$.

Тензорное произведение двух внешних форм $\omega \in \bigwedge^p ((\mathscr{V}^m)^*)$ и $\eta \in \bigwedge^q ((\mathscr{V}^m)^*)$ может не приводить к внешней форме. Проблему можно решить, введя внешнее произведение $\omega \wedge \eta$ по правилу:

$$
\omega \wedge \eta(\mathsf{v}_1, \ldots, \mathsf{v}_{p+q}) := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}_{p,\,q}} \varepsilon_\sigma\, \omega(\mathsf{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathsf{v}_{\sigma(p)}) \eta(\mathsf{v}_{\sigma(p+1)}, \ldots, \mathsf{v}_{\sigma(p+q)}),
$$

где $\mathrm{Sh}_{p,\,q} \subset \mathrm{S}_{p+q}$ — множество всех $(p,\ q)$-перетасовок, т.е., перестановок вида $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ и $\sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q)$. В частности, каждый k-ковектор $\mathfrak{h}^1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{h}^k$ может быть разложен во внешние произведения составляющих k ковекторов $\mathfrak{h}^1,\ \ldots,\ \mathfrak{h}^k$.

25°. Производная структура гладкого многообразия. Структура (1.1.61) аффинного пространства достаточно богата для использования в классической нелинейной упругости [32] и специальной теории относительности [3]. Остается лишь добавить соответствующую метрику, — евклидову или лоренцеву. Вместе с тем, чтобы использовать неевклидову отсчетную форму для описания дефектов и обобщенных деформаций, или кривизну пространства-времени для объяснения гравитации, необходимо ввести более общую структуру гладкого многообразия [51]. Переход к нему позволяет сохранить аффинную структуру лишь локально, добавив к списку полей, характеризующих физические явления, функциональные структуры, такие как кривизна или кручение. Для этой цели используем глобальную карту, которая определяется по началу отсчета и выбранному базису следующим образом: $\left(A,\ \mathrm{C}_{\left\{o,\,(\mathsf{c}_i)_{i\in I_m}\right\}}\right)$, где отображение

$$\mathrm{C}_{\left\{o,\,(\mathsf{c}_i)_{i\in I_m}\right\}}:\ A \to \mathbb{R}^m, \quad \mathrm{C}_{\left\{o,\,(\mathsf{c}_i)_{i\in I_m}\right\}}(a) := \left(\mathfrak{c}^i \circ \mathrm{vec}(o,\ a)\right)_{i\in I_m}, \tag{1.1.64}$$

соответствует арифметизации [52], определенной по выбранному аффинному реперу $\left\{o,\ (\mathsf{c}_i)_{i\in I_m}\right\}$. Отображение (1.1.64) вводит топологию открытых шаров на A:

$$\mathscr{T}_A = \left\{O \subset A \;\middle|\; \mathrm{C}_{\left\{o,\,(\mathsf{c}_i)_{i\in I_m}\right\}}(O) \text{ открыто в } \mathbb{R}^m\right\}.$$

С ней можно определить структуру m-мерного гладкого многообразия $\mathscr{A}^m_{\mathrm{man}}$ по алгебраической структуре (1.1.62):

$$\mathscr{A}^m = (A,\ \mathscr{V}^m,\ \mathrm{vec}) \subset \mathscr{C}^m = \left(\mathscr{A}^m, o, (\mathsf{c}_i)_{i\in I_m}\right) \mapsto \mathscr{A}^m_{\mathrm{man}} = (A,\ \mathscr{T}_A,\ \mathbb{A}_A),$$

где $\mathbb{A}_A$ — гладкий атлас, порожденный картой $\left(A,\ \mathrm{C}_{\left\{o,\,(\mathsf{c}_i)_{i\in I_m}\right\}}\right)$. Такой атлас порождает единственный максимальный атлас [51], что неявно подразумевается в дальнейшем. На этом этапе мы построили основную структуру, на которой будут определены различные геометрические надстройки, характеризующиеся метрикой и связностями и представляющие собой либо деформированные тела, либо самогравитирующие системы. В рамках такого подхода топология всех этих объектов оказывается одинаковой, что в большинстве случаев не создает существенных ограничений для моделирования. При этом следует иметь в виду, что в особых случаях может потребоваться перестроение топологической структуры, вызванное особенностью метрики, определенной в ходе моделирования. Аналогичная ситуация возникает, например, при образовании разрывов в деформируемых телах или появлении сингулярных поверхностей (горизонта событий) в областях, в которых проводится моделирование. Однако анализ подобных случаев выходит за рамки настоящих рассуждений.

26°. От векторного пространства к векторному расслоению. В классической физике пространственные положения и векторы единообразно представлены в виде упорядоченных наборов координат, и поэтому различие между ними во многом стирается. Между тем с физической точки зрения часто желательно выделить отдельные «классы» векторных величин, например фиксированные или скользящие векторы. Необходимость в этом отпадает, как только мы переходим к языку векторных полей на многообразиях. Поскольку, как исходное аффинное пространство, так и его обобщение, полученное заменой аффинной структуры на структуру гладкого многообразия, уже подготовлены в едином аналитическом виде, нам остается лишь определить касательные векторы в $\mathscr{A}^m$. Обратим внимание на то, что трансляционные векторы из $\mathscr{V}^m$ не подходят для этой цели, так как являются скользящими векторами, т.е. не имеют фиксированной начальной точки. Эту проблему можно решить следующим образом [51, p. 51].

Пусть $x \in \mathscr{A}^m$ — некоторая точка. Под геометрическим касательным пространством к $\mathscr{A}^m$ в x будем подразумевать множество

$$\mathscr{V}^m_x := \{x\} \times \mathscr{V}^m = \{(x,\, \mathsf{v}) \mid \mathsf{v} \in \mathscr{V}^m\},$$

снабженное следующими операциями: $\mathsf{u}_x + \mathsf{v}_x := (\mathsf{u}+\mathsf{v})_x$, $\lambda(\mathsf{v}_x) := (\lambda\mathsf{v})_x$. Здесь $\mathsf{v}_x := (x,\, \mathsf{v})$ — обозначение для типового элемента $\mathscr{V}^m_x$, называемого геометрическим касательным вектором в x, а λ — скаляр из $\mathbb{R}$. Таким образом, $\mathscr{V}^m_x$ состоит из всех трансляционных векторов, начальные точки которых сведены в x. Это вещественное пространство размерности m, с базисом $(\mathsf{c}_i|_x)_{i\in I_m}$.

В рамках классического тензорного анализа векторное поле определяется как отображение $\mathsf{v} : \mathscr{A}^m \to \mathscr{V}^m$. В этом случае значение v_x отображения v в точке $x \in \mathscr{A}^m$ интерпретируется как стрелка, исходящая из x. Это означает, что, на самом деле, v_x следует рассматривать как элемент $\mathscr{V}^m_x$, хотя возможность игнорировать эту детализацию проистекает из того свойства, что имеется натуральный изоморфизм $\mathscr{V}^m_x \cong \mathscr{V}^m$. Имея в виду цель получить аналог векторного поля на многообразии в евклидовом случае, мы вынуждены считать векторное пространство трансляций $\mathscr{V}^m$ лишней структурой. Тогда в рамках этого подхода векторное поле можно определить как отображение

$$\mathsf{v} : \mathscr{A}^m \to \bigcup_{x \in \mathscr{A}^m} \mathscr{V}_x^m, \quad \text{такое, что} \quad \mathsf{v}_x \in \mathscr{V}_x^m \text{ для каждого } x \in \mathscr{A}^m.$$

Таким образом, учитывая изложенные выше соображения о геометрических касательных векторах, для значения векторного поля v можно написать $\mathsf{v}_x = v_x^i \mathsf{c}_i|_x$, где $v^i : \mathscr{A}^m \to \mathbb{R}$, $i \in I_m$, являются скалярными функциями, компонентами v. Таким образом определенное векторное поле называется гладким, если его компоненты являются гладкими функциями.

27°. Векторные поля как дифференциальные операторы. Представление векторных полей как сечений векторных расслоений над гладким многообразием позволяет дать общее описание полей в разных координатах, поскольку они не привязаны к конкретной карте. В то же время это дает гораздо больше. Такое представление позволяет указать на глубокий физический смысл векторного поля как процедуры линеаризации более сложного объекта, являющейся основным инструментом построения физической теории. Действительно, элементы $\mathscr{V}_x^m$ допускают иное, абстрактное, описание, которое является ключом к концепции касательного вектора к многообразию.

Напомним, что линейное отображение $D : C^\infty(\mathscr{A}^m) \to \mathbb{R}$ называется дифференцированием в точке $x \in \mathscr{A}^m$, если оно удовлетворяет правилу Лейбница, т.е., $D(fg) = f(x)Dg + g(x)Df$, для всех f, $g \in C^\infty(\mathscr{A}^m)$. В силу линейности, дифференцирования в x образуют линейное пространство $\mathrm{Der}(\mathscr{A}^m; x)$. Можно показать [51, Proposition 3.2], что соответствие

$$\mathscr{V}_x^m \ni \mathsf{v}_x \mapsto \mathscr{L}_\mathsf{v}|_x \in \mathrm{Der}(\mathscr{A}^m; x), \quad \text{где} \quad \mathscr{L}_\mathsf{v}|_x f := \frac{d}{dt} f(x + t\mathsf{v}) \bigg|_{t=0},$$

есть естественный изоморфизм векторных пространств. Таким образом, можно отождествить векторное пространство $\mathscr{V}_x^m$ с векторным пространством $\mathrm{Der}(\mathscr{A}^m; x)$, а каждый элемент v_x — с производной по направлению $\mathscr{L}_\mathsf{v}|_x$. При этом соответствии базису $(\mathsf{c}_i|_x)_{i \in I_m}$ пространства $\mathscr{V}_x^m$ отвечает базис $(\partial_i|_x)_{i \in I_m}$ пространства $\mathrm{Der}(\mathscr{A}^m; x)$, определенный как $\partial_i|_x f := \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_x$. В результате, вводя координатные векторные поля $\partial_i : x \mapsto \partial_i|_x$, $i \in I_m$, приходим к разложению $\mathsf{v} = v^i \partial_i$.

Напомним, что для гладкой функции $f \in C^\infty(\mathscr{A}^m)$ мы определили действие $\mathsf{v}_x f$ касательного вектора v_x на f. Тем самым можно определить действие векторного поля $\mathsf{v} = v^i \partial_i$ на f как

$$\forall x \in \mathscr{A}^m : \ (\mathsf{v} f)_x := \mathsf{v}_x f = v_x^i \partial_i|_x.$$

Значит, $\mathsf{v}f \in C^\infty(\mathscr{A}^m)$ и v можно рассматривать как соответствие $\mathsf{v} : C^\infty(\mathscr{A}^m) \to C^\infty(\mathscr{A}^m)$. Более того, это соответствие удовлетворяет правилу Лейбница[12], т.е., $\mathsf{v}(fg) = f\mathsf{v}g + g\mathsf{v}f$, для f, $g \in C^\infty(\mathscr{A}^m)$. В этой связи, классическое векторное поле допускает эквивалентное описание как дифференцирование алгебры $C^\infty(\mathscr{A}^m)$. В частности, подобно общим многообразиям, можно определить коммутатор векторных полей u, v:

$$[\mathsf{u}, \mathsf{v}] := \mathsf{u} \circ \mathsf{v} - \mathsf{v} \circ \mathsf{u},$$

являющийся векторным полем, называемым скобкой Ли от полей u и v.

28°. Связность на производном многообразии. Структура гладкого многообразия $\mathscr{A}^m_{\text{man}}$ может быть дополнена метрическим тензором g и аффинной связностью ∇, что приводит к аффинно-метрическому многообразию $(\mathscr{A}^m_{\text{man}}, \mathsf{g}, \nabla)$, являющемуся минимальной структурой, необходимой для введения геометрии. Связность ∇ полностью определяется двухпараметрическим семейством 1-форм связности $\omega^{i\cdot}_{\cdot k}$, i, $k \in I_m$, поскольку, в координатном репере, выполняется соотношение

$$\nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{v} = u^i \left\{\partial_i v^k + v^j \omega^{k\cdot}_{\cdot j}(\partial_i)\right\} \partial_k,$$

для ковариантной производной v вдоль u. Вместе с тем, геометрическая классификация не может быть осуществлена посредством форм связности. Для этой цели можно использовать 1-форму неметричности $\mathfrak{Q}_{ij}$, и 2-формы кручения и кривизны $\mathfrak{T}^i$, $\mathfrak{R}^i_j$, соответственно. Эти поля могут быть получены из структурных уравнений Картана (1.1.823)–(1.1.825), которые в координатном репере имеют вид

$$\omega^{p\cdot}_{\cdot i} g_{pj} + \omega^{p\cdot}_{\cdot j} g_{pi} - dg_{ij} = \mathfrak{Q}_{ij}, \quad \omega^{i\cdot}_{\cdot k} \wedge dx^k = \mathfrak{T}^i, \quad d\omega^{i\cdot}_{\cdot j} + \omega^{i\cdot}_{\cdot k} \wedge \omega^{k\cdot}_{\cdot j} = \mathfrak{R}^i_j.$$

1.7. Приложение 2. Классическое физическое пространство

29°. Физическое пространство. В рамках классической физики предполагается, что сцена, на которой разыгрываются все физические явления, является плоским евклидовым трехмерным многообразием — физическим пространством, — вместе с независимым от него одномерным хронометрическим многообразием, содержащим метки времени.

[12] Это следует из соответствующего свойства для геометрических касательных векторов.

Для синтезирования физического пространства структура $\mathscr{C}^3$ снабжается геометрической суперструктурой, в рамках которой указываются метрика, определяющая меру длин, площадей и объемов, и правило дифференцирования векторных полей. Ограничим себя таким способом определения геометрических полей, в рамках которого требуется задать лишь метрику, а остальные поля определяются ею. Для этой цели дополним структуру $\mathscr{C}^3$ до структуры $\mathscr{E}^3$ следующим образом[13]:

$$\left(\mathscr{A}^3, o, (\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^3\right) =: \mathscr{C}^3 \subset \mathscr{E}^3 := \left(\mathscr{C}^3,\, \boldsymbol{h},\, \boldsymbol{\epsilon},\, \nabla_c\right), \tag{1.1.71}$$

где метрика $\boldsymbol{h}$ определяется в соответствии с физическими рассуждениями в выбранном декартовом базисе $(\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^3$. Согласно классическим физическим наблюдениям, метрика $\boldsymbol{h}$ в этом базисе постулируется в пифагорейском стиле:

$$\boldsymbol{h} = \delta_{ij}\mathfrak{c}^i \otimes \mathfrak{c}^j. \tag{1.1.72}$$

Очевидно, что метрика (1.1.72) может быть выражена в терминах внутреннего произведения: $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v})$.

Теперь связь между векторами и ковекторами может быть установлена посредством музыкальных изоморфизмов $(\cdot)^\flat : \mathscr{V}^3 \to (\mathscr{V}^3)^*$ и $(\cdot)^\sharp : (\mathscr{V}^3)^* \to \mathscr{V}^3$ порожденных метрикой (1.1.72):

$$\begin{aligned} &\mathscr{V}^3 \ni \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u}^\flat \in (\mathscr{V}^3)^*, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}^3 : \left\langle \boldsymbol{u}^\flat,\, \boldsymbol{v}\right\rangle = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}),\\ &(\mathscr{V}^3)^* \ni \mathfrak{t} \mapsto \mathfrak{t}^\sharp \in \mathscr{V}^3, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathscr{V}^3 : \langle \mathfrak{t},\, \boldsymbol{v}\rangle = \boldsymbol{h}\left(\mathfrak{t}^\sharp,\, \boldsymbol{v}\right). \end{aligned} \tag{1.1.73}$$

Музыкальные изоморфизмы позволяют снабдить элементы тензорной башни внутренними произведениями, согласованными с исходной метрикой $\boldsymbol{h}$. Однако в рамках дальнейших рассуждений мы ограничимся заданием метрик на векторных пространствах $\bigwedge^k\left((\mathscr{V}^3)^*\right)$, $k = 1,\, 2,\, 3$. Это может быть сделано следующим образом. Во-первых, для $\omega \in \bigwedge^k\left((\mathscr{V}^3)^*\right)$ определим функционал

$$\omega^\sharp(\mathfrak{h}^1,\, \dots,\, \mathfrak{h}^k) := \omega\left((\mathfrak{h}^1)^\sharp,\, \dots,\, (\mathfrak{h}^k)^\sharp\right),$$

на произвольных ковекторах $\mathfrak{h}^1,\, \dots,\, \mathfrak{h}^k \in (\mathscr{V}^3)^*$. Тем самым мы получили элемент $\bigwedge^k\left(\mathscr{V}^3\right)$, который можно разложить по k-векторам $\boldsymbol{c}_{i_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{c}_{i_k}$, т.е., $\omega^\sharp = \frac{1}{k!}\omega^{i_1\dots i_k}\boldsymbol{c}_{i_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{c}_{i_k}$. Теперь, введем внутреннее произведение на $\bigwedge^k\left((\mathscr{V}^3)^*\right)$ следующим образом. Положим

$$\boldsymbol{h}^{(k)}(\omega,\, \eta) := \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant 3} \omega_{i_1\dots i_k}\eta^{i_1\dots i_k}, \tag{1.1.74}$$

[13] Здесь полагается $I_3 = \{1,\, 2,\, 3\}$ для множества индексов.

где $\eta^{i_1\cdots i_k}$ — компоненты $\eta^\sharp$. Можно проверить, что полученное таким образом метрическое поле $\boldsymbol{h}^{(k)}$ на $\bigwedge^k\left((\mathscr{V}^3)^*\right)$ является симметричным, невырожденным и положительно определенным [53, p. 410].

Используя музыкальные изоморфизмы, можно определить базисы, би-ортогональные к выбранным базисам $(\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^3$ и $\left(\mathfrak{c}^i\right)_{i=1}^3$, в одном с ними пространстве, либо $\mathscr{V}^3$ или $(\mathscr{V}^3)^*$:

$$\left(\boldsymbol{c}^i\right)_{i=1}^3 \subset \mathscr{V}^3,\ \boldsymbol{c}^i = (\mathfrak{c}^i)^\sharp \quad \text{и} \quad (\mathfrak{c}_i)_{i=1}^3 \subset (\mathscr{V}^3)^*,\ \mathfrak{c}_i = (\boldsymbol{c}_i)^\flat.$$

Новый базис $\left(\boldsymbol{c}^i\right)_{i=1}^3$ позволяет получить простое правило для представления координат вектора согласованного с (1.1.63), т.е., если $\boldsymbol{v} = v^i\boldsymbol{c}_i$, то $v^i = \boldsymbol{c}^i\cdot\boldsymbol{v}$. Кажется, что мы не получили ничего нового. Действительно, формально, базисы совпадают:

$$\boldsymbol{c}^i = \boldsymbol{c}_i, \quad \mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}^i, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{1.1.75}$$

Вместе с тем их различие становится существенным по отношению к криволинейным координатам. Кроме того, музыкальные изоморфизмы можно рассматривать с физической точки зрения как операторы, преобразующие энергетически сопряженные величины друг в друга. Например, величины, имеющие размерность силы, в величины, имеющие размерность длины или скорости. Образно говоря, музыкальный изоморфизм можно представить в виде шкалы, наклеенной рядом с пружиной динамометра.

Несмотря на то, что в декартовой арифметизации векторные и ковекторные базисы тривиально связаны друг с другом, мы различаем их, поскольку они имеют разный геометрический и, следовательно, физический смысл.

Замечание 1.8. *Различие между векторами и ковекторами явно проявляется уже на примере скорости и силы. Действительно, в курсах классической физики скорость и сила определяются как векторы, скалярное произведение которых дает скаляр, а именно механическую мощность. Поскольку скалярное произведение определяется по векторам из одного и того же векторного пространства, это означает, в частности, что мы можем прибавить к силе скорость, что бессмысленно с физической точки зрения. Обычно в таких случаях говорят, что сила и скорость имеют разные физические размерности, поэтому их нельзя сложить. Следуя этой точке зрения, ситуацию можно формально улучшить, связав измерения с дополнительными векторными пространствами и представив физическую величину как элемент* *тензорного произведения векторного пространства, характеризующего ее математически, и векторного пространства, характеризующего ее размерность [54]. Однако можно сделать это гораздо проще. Мы по-прежнему продолжаем связывать скорость с вектором, но будем отождествлять силу с некоторым ковектором. Поскольку сложение вектора и ковектора формально не определено, это определение отвечает физическим требованиям. В этом случае степень определяется как каноническое спаривание ковектора с вектором. Последний подход распространен в физике сплошных сред [55].*

Третий элемент в (1.1.71) есть элемент объема $\boldsymbol{\epsilon}$, определенный равенством

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathfrak{c}^1 \wedge \mathfrak{c}^2 \wedge \mathfrak{c}^3. \tag{1.1.76}$$

Эта 3-форма является мерой, с помощью которой можно производить интегрирование по трехмерным областям, и, в частности, определять ориентацию векторного пространства $\mathscr{V}^3$ [53]. Чтобы определить меры для поверхностей и кривых, согласованные с исходной мерой $\boldsymbol{\epsilon}$, можно использовать изоморфизм — звезду Ходжа, — $* : \bigwedge^k \left((\mathscr{V}^3)^*\right) \to \bigwedge^{3-k} \left((\mathscr{V}^3)^*\right)$, определенный равенством [53, p. 411]

$$\omega \wedge *\eta = \boldsymbol{h}^{(k)}(\omega, \eta)\boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{для} \quad \omega, \eta \in \bigwedge^k \left((\mathscr{V}^3)^*\right). \tag{1.1.77}$$

Таким образом, элементы площади представлены следующими 2-формами:

$$\boldsymbol{s}_1 := *\mathfrak{c}^1 = \mathfrak{c}^2 \wedge \mathfrak{c}^3, \quad \boldsymbol{s}_2 := *\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{c}^3 \wedge \mathfrak{c}^1, \quad \boldsymbol{s}_3 := *\mathfrak{c}^3 = \mathfrak{c}^1 \wedge \mathfrak{c}^2. \tag{1.1.78}$$

Наконец, 1-формы

$$*\boldsymbol{s}_1 = \mathfrak{c}^1, \quad *\boldsymbol{s}_2 = \mathfrak{c}^2, \quad *\boldsymbol{s}_3 = \mathfrak{c}^3, \tag{1.1.79}$$

отвечают элементам длины.

Замечание 1.9. *Формулы* (1.1.76)–(1.1.79) *являются составляющими индуктивного определения ориентированного объема для параллелотопа. Для m-мерного евклидова пространства существует последовательность параллелотопов, начинающаяся с прямого элемента и заканчивающаяся m-параллелотопом [56]. Определение объемов дается следующим образом. Объем 1-параллелотопа равен его длине. Объем 2-параллелотопа равен произведению его базовой длины на высоту и так далее. Если мы определили объём $(k-1)$-параллелотопа, то объём*

k-параллелотопа есть произведение базового объёма (объёма $(k-1)$-параллелотопа) на высоту.

Пусть $m = 3$. Тогда любой 3-параллелотоп образован тремя линейно независимыми векторами, исходящими из одного начала. Объем такого параллелотопа можно выразить как модуль определителя, образованного компонентами векторов ортонормированного базиса $(\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^3$. В краткой форме этот объем (со знаком) представлен формулой (1.1.76). При этом любой 2-параллелотоп образован двумя линейно независимыми векторами и его объём (или, как принято говорить, площадь) можно определить через три определителя, образованными компонентами исходных векторов. Этот факт закодирован в терминах трех линейно независимых 2-форм (1.1.78). Наконец, 1-параллелотоп образован ненулевым вектором. Его длину можно определить с помощью трех чисел, которые скрыты в (1.1.79).

Последний элемент ∇_c в (1.1.71) определяет аффинную связность, действующую на векторные поля $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} : A \to \mathscr{V}^3$, и ассоциированную с определенной выше пифагоровой метрикой (1.1.72) следующим образом:

$$(\nabla_c)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} := D\boldsymbol{v}[\boldsymbol{u}] = u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\boldsymbol{c}_j. \tag{1.1.710}$$

Здесь $D\boldsymbol{v} : A \to \mathrm{End}(\mathscr{V}^3)$ — полная производная векторного поля $\boldsymbol{v}$. То есть, для точки $x \in A$ и вектора $\boldsymbol{\xi} \in \mathscr{V}^3$ имеем $\boldsymbol{v}(x+\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{v}(x) + D_x\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\xi}] + \boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{\xi}\|)$. Покомпонентно, $D_x\boldsymbol{v} = \left.\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right|_x \boldsymbol{c}_i \otimes \mathbf{c}^j$, где $\left.\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right|_x := D_x v^i[\boldsymbol{c}_j]$.

Таким образом, пространство, принятое в классической физике, можно определить в терминах гладких многообразий. Такое обобщение, конечно, не дает ничего нового для классических задач механики Ньютона и теории упругости Коши, но является важным шагом в переходе к обобщениям, в частности, к проблемам несовместных деформаций и гравитационного взаимодействия.

30°. Аффинный репер. Обратимся к преобразованиям, которые, с одной стороны, можно рассматривать как технические средства, используемые для упрощения решения краевых задач (что сразу приходит на ум, когда речь идет о криволинейных координатах и физических базисах), но с другой стороны, их можно рассматривать как прототипы фундаментальных обобщений, выводящих нас далеко за пределы евклидовой структуры.

До сих пор мы имели дело лишь с базисом $(\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^3$. Вместе с тем формально возможны и другие базисы. Действительно, любой базис 3 может быть сгенерирован по исходному с помощью некоторой матрицы перехода $\Omega = [\Omega^i_j] \in \mathrm{GL}(3;\,\mathbb{R})$ следующим образом: $\boldsymbol{e}_i = \Omega^i_j\,\boldsymbol{c}_j$. Соответствующий дуальный базис $\big(\mathfrak{e}^i\big)_{i=1}^3$ порождается двойственным базисом $\big(\mathfrak{c}^i\big)_{i=1}^3$ посредством матрицы $\mho = [\mho^i_j]$, обратной к Ω: $\mathfrak{e}^i = \mho^i_j\,\mathfrak{c}^j$.

В частности, если $\mathfrak{Z}$ — некоторый базис, связанный с исходным базисом посредством матрицы Ω, то метрический тензор может быть представлен как

$$\boldsymbol{h} = h_{ij}\mathfrak{e}^i \otimes \mathfrak{e}^j, \quad h_{ij} = \delta_{mn}\Omega^m_i\Omega^n_j. \tag{1.1.711}$$

В этом случае соотношения (1.1.75) заменяются следующими формулами:

$$\boldsymbol{e}^i = h^{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad \mathfrak{e}_i = h_{ij}\mathfrak{e}^j, \quad i = 1,\,2,\,3,$$

для векторов соответствующего дуального векторного базиса $\big(\boldsymbol{e}^i\big)_{i=1}^3$ и ковекторного базиса $(\mathfrak{e}_i)_{i=1}^3$. В первой формуле, $[h^{ij}] = [h_{ij}]^{-1}$. Элемент объема и элементы площади в случае положительно ориентированного базиса $\mathfrak{Z}$ принимают вид

$$\boldsymbol{\epsilon} = J\,\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3,$$
$$\boldsymbol{s}_1 = J_1\,\boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3, \quad \boldsymbol{s}_2 = J_2\,\boldsymbol{e}^3 \wedge \boldsymbol{e}^1, \quad \boldsymbol{s}_3 = J_3\,\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2,$$

где $J = \det\Omega = \sqrt{\det\boldsymbol{h}}$, а $J_1,\ J_2,\ J_3$ — миноры Ω.

Координатное отображение $\mathrm{Ar}\mathfrak{Z}\ :\ A \to \mathbb{R}^3$, соответствующее аффинному реперу $\{o,\,\mathfrak{Z}\}$, определяется как

$$\mathrm{Ar}\mathfrak{Z}(a) := \big(\mathfrak{e}^i \circ \mathrm{vec}(o,\,a)\big)_{i=1}^3.$$

Значения этого отображения — аффинные координаты, которые мы обозначим через $y^1,\ y^2,\ y^3$. Выражение (1.1.710) для аффинной связности сохраняет свой вид:

$$(\nabla_c)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = u^i\,\frac{\partial v^j}{\partial y^i}\,\boldsymbol{e}_j,$$

где $\boldsymbol{u} = u^i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{v} = v^i\boldsymbol{e}_i$.

31°. Криволинейные координаты. Наряду с прямоугольными координатами $(x^1,\,x^2,\,x^3)$ можно ввести криволинейные координаты $(q^1,\,q^2,\,q^3)$, связанные с прямоугольными отображением перехода

$$\psi:\ D \to \mathbb{R}^3, \quad x^i = x^i(q^1,\,q^2,\,q^3), \quad i = 1,\,2,\,3,$$

определенным на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^3$. Предполагается, что отображение ψ имеет, по меньшей мере, класс C^2 и его якобиан отличен от нуля: $\det\left[\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right] \neq 0$ на D. таким образом, отображение

$$\psi^{-1} \circ \mathrm{C}_{\left\{o,\,(\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^3\right\}} : A' \to \mathbb{R}^3$$

представляет некоторую карту на A (которая, в общем случае, уже не покрывает A, т.е., $A' \subsetneqq A$).

Криволинейные координаты порождают поле локальных базисов $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1}^3$ по правилу

$$\boldsymbol{e}_i := \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial q^i} = \frac{\partial x^k}{\partial q^i}\,\boldsymbol{c}_k,\ i = 1,\ 2,\ 3, \tag{1.1.712}$$

где $\boldsymbol{p} = x^i \boldsymbol{c}_i$ — поле векторов места. Если через $\Omega = \left[\frac{\partial x^i}{\partial q^j}\right]$ обозначить матрицу перехода от $(\boldsymbol{c}_i)_{i=1}^3$ к $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1}^3$, то последнее выражение может быть записано в лаконичном виде как $\boldsymbol{e}_i = \Omega_i^k \boldsymbol{c}_k$. Поле дуальных векторных базисов $\left(\boldsymbol{e}^i\right)_{i=1}^3$ определяется как

$$\boldsymbol{e}^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^j}\,\boldsymbol{c}^j,\ i = 1,\ 2,\ 3.$$

Метрический тензор $\boldsymbol{h}$, в свою очередь, имеет следующее представление:

$$\boldsymbol{h} = h_{ij}\,\mathfrak{e}^i \otimes \mathfrak{e}^j, \quad h_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial q^i} \frac{\partial x^n}{\partial q^j}. \tag{1.1.713}$$

Заметим, что в отличие от формулы (1.1.711), в которой компоненты h_{ij} являются постоянными числами, компоненты диадного представления (1.1.713) являются скалярными полями.

Различие между произвольным базисом пространства $\mathscr{V}^3$ и полем локальных базисов становится ярким, если выразить ковариантную производную $(\nabla_c)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ в криволинейных координатах. Действительно, справедливо равенство

$$(\nabla_c)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = u^k \left(\frac{\partial v^i}{\partial q^k} + v^j \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj} \right) \boldsymbol{e}_i, \tag{1.1.714}$$

где $\boldsymbol{u} = u^i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{v} = v^j \boldsymbol{e}_j$ — разложения векторных полей по локальному базису, а $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj}$ — символы Кристоффеля, т.е., скалярные поля, определенные соотношениями

$$\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj} = \boldsymbol{e}^i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial q^k}. \tag{1.1.715}$$

Следует отметить, что последняя формула может быть выражена в следующем эквивалентном виде: $(\nabla_c)_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_j = \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj}\boldsymbol{e}_i$.

Определение (1.1.715) символов Кристоффеля влечет следующие свойства последних:

$$(i)\quad \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj} = \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk},\ i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3; \quad (ii)\quad h_{is}\Gamma^{s\cdot\cdot}_{\cdot kj} + h_{js}\Gamma^{s\cdot\cdot}_{\cdot ki} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial q^k}.$$

Свойство (i) вытекает из перестановочности повторных производных:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial q^k} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial q^k q^j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial q^j q^k} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_k}{\partial q^j},$$

а свойство (ii) может быть получено путем дифференцирования тождества $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = h_{ij}$ по q^k.

Из свойств (i) и (ii) вытекает явная зависимость символов Кристоффеля от компонент метрического тензора. Для ее получения рассмотрим циклические перестановки индексов $i,\ j,\ k$: $(i,\ j,\ k) \mapsto (j,\ k,\ i) \mapsto (k,\ i,\ j)$. Каждой из этих трех перестановок отвечает свой вариант формулы из (ii). Складывая первую и третью формулы, а затем вычитая вторую из результата, получаем соотношение между различными символами Кристоффеля и компонентами метрического тензора. Принимая во внимание условие симметрии (i), можно исключить все символы Кристоффеля, за исключением одного, который входит в формулу с множителем 2 и сверткой с метрическим тензором. Используя невырожденность метрики, приходим к окончательной формуле

$$\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \frac{h^{is}}{2}\left(\frac{\partial h_{sk}}{\partial q^j} + \frac{\partial h_{sj}}{\partial q^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial q^s}\right), \tag{1.1.716}$$

где $[h^{ij}]$ — поле матриц, обратное к $[h_{ij}]$.

32°. Неголономный репер. Даже в классической физике наряду с полями локальных базисов используются поля базисов, которые не могут быть порождены никакой системой криволинейных координат. Поле физических базисов для ортогональной системы криволинейных координат является примером. Пусть $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1}^3$ — поле локальных базисов, порожденное криволинейными координатами $(q^1,\ q^2,\ q^3)$, и пусть $\Omega = [\Omega^i_j]$ — поле обратимых 3×3-матриц, элементы которых вещественны. Определим тройку полей $(\boldsymbol{z}_i)_{i=1}^3$, элементы которой связаны с $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1}^3$ следующими формулами перехода: $\boldsymbol{z}_i = \Omega^j_i \boldsymbol{e}_j$. Поскольку поле Ω невырождено в каждой точке, мы получаем, что $(\boldsymbol{z}_i)_{i=1}^3$ является полем базисов. Соответствующее поле дуальных базисов $\left(\boldsymbol{z}^i\right)_{i=1}^3$ связано с полем дуальных базисов $\left(\boldsymbol{e}^i\right)_{i=1}^3$ как $\boldsymbol{z}^i = \mho^i_j \boldsymbol{e}^j$, где $\mho = [\mho^i_j]$ — поле матриц, обратных к Ω.

Метрический тензор $\boldsymbol{h}$ представлен в поле $(\boldsymbol{z}_i)_{i=1}^3$ разложением

$$\boldsymbol{h} = \widetilde{h}_{ij}\mathfrak{z}^i \otimes \mathfrak{z}^j, \quad \widetilde{h}_{ij} = h_{mn}\Omega_i^m\Omega_j^n,$$

где h_{mn} — компоненты метрического тензора в заданных криволинейных координатах.

Если $\boldsymbol{u} = u^i\boldsymbol{z}_i$, $\boldsymbol{v} = v^i\boldsymbol{z}_i$ — векторные поля, разложенные относительно поля $(\boldsymbol{z}_i)_{i=1}^3$, то выражение для ковариантной производной принимает вид

$$(\nabla_c)_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v} = u^s\left(\Omega_s^k\frac{\partial v^i}{\partial q^k} + v^j\gamma_{\cdot sj}^{i\cdot\cdot}\right)\boldsymbol{z}_i.$$

Здесь $\gamma_{\cdot sj}^{i\cdot\cdot}$ — аналоги символов Кристоффеля. В явном виде,

$$\gamma_{\cdot sj}^{i\cdot\cdot} = \Omega_s^k\boldsymbol{z}^i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{z}_j}{\partial q^k}. \tag{1.1.717}$$

Из последней формулы можно напрямую получить соотношение между символами Кристоффеля $\Gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot}$ и функциями $\gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot}$. Действительно, используя формулу (1.1.717), можно записать

$$\gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} = \Omega_j^s\boldsymbol{z}^i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{z}_k}{\partial q^s} = \Omega_j^s\boldsymbol{z}^i\cdot\frac{\partial}{\partial q^s}\left(\Omega_k^r\boldsymbol{e}_r\right).$$

Применяя правило Лейбница, получаем

$$\gamma_{\cdot jk}^{i\cdot\cdot} = \mho_p^i\Omega_j^s\Omega_k^r\Gamma_{\cdot sr}^{p\cdot\cdot} + \mho_r^i\Omega_j^s\frac{\partial\Omega_k^r}{\partial q^s}.$$

1.8. Приложение 3. Пространства аффинной связности

1.8.1. Ковариантная производная и ее координатное представление

В математике приняты два подхода к построению геометрических структур на многообразиях. В рамках первого подхода используется методология «внешней» геометрии, когда многообразие вкладывается в евклидово пространство возможно большей размерности[14] и евклидово

[14]Согласно теореме Уитни, это всегда возможно [57].

правило параллельного переноса индуцируется на это многообразие подобно тому, как это делается в классической теории поверхностей. Вместе с тем, несмотря на идейную простоту, реализация такого подхода имеет, по меньшей мере, две проблемы: 1) за счет высокой размерности формулы получаются громоздкими, и 2) неизвестна физическая интерпретация объемлющего пространства[15]. В этой связи, как правило используется второй подход, основанный на методологии «внутренней» геометрии. Именно, процедура параллельного переноса определяется аксиоматически, с использованием лишь структуры рассматриваемого многообразия. В основе такого подхода лежит понятие аффинной связности[16].

Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Через $\mathrm{Vec}(M)$ обозначается $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на M.

Определение 1.1. *Аффинной связностью на многообразии M называется отображение*

$$\nabla : \mathrm{Vec}(M) \times \mathrm{Vec}(M) \to \mathrm{Vec}(M), \quad (\mathsf{u},\, \mathsf{v}) \mapsto \nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{v},$$

удовлетворяющее следующим свойствам [58, 59]:

1) $\forall \mathsf{u},\, \mathsf{v},\, \mathsf{w} \in \mathrm{Vec}(M) :\ \nabla_{\mathsf{u}+\mathsf{v}}\mathsf{w} = \nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{w} + \nabla_{\mathsf{v}}\mathsf{w}$;

2) $\forall \mathsf{u},\, \mathsf{v} \in \mathrm{Vec}(M)\ \forall f \in C^\infty(M) :\ \nabla_{f\mathsf{u}}\mathsf{v} = f\nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{v}$;

3) $\forall \mathsf{u},\, \mathsf{v},\, \mathsf{w} \in \mathrm{Vec}(M) :\ \nabla_{u}(\mathsf{v} + \mathsf{w}) = \nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{v} + \nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{w}$;

4) $\forall \mathsf{u},\, \mathsf{v} \in \mathrm{Vec}(M)\ \forall f \in C^\infty(M) :\ \nabla_{\mathsf{u}}(f\mathsf{v}) = f\nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{v} + (\mathsf{u}f)\mathsf{v}$.

В определении 1.1 символ $\mathsf{u}f$ обозначает действие векторного поля u, рассматриваемого как дифференцирование, на скалярное поле f. В координатной окрестности U, таким образом, имеем соотношение

$$\mathsf{u}f = u^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Векторное поле $\nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{v}$ называется ковариантной производной векторного поля v по векторному полю u.

[15] Эта проблема является особенно существенной при построении геометрии пространства-времени. Если наблюдатель находится внутри него, то он не может полностью идентифицировать геометрию пространства, в которое вкладывается пространство-время. Возможно лишь строить геометрию пространства-времени теми средствами, которые доступны наблюдателю.

[16] Следует, при этом, отметить, что мы окончательно не порываем с «внешней» геометрией; она используется в качестве опоры мысли.

В произвольной карте $(U,\ \varphi) = (U,\ x^1,\ \ldots,\ x^n)$ на многообразии M ограничение связности ∇ на U может быть представлено в координатной форме. Действительно, пусть $(\partial_i)_{i=1}^n$ — координатный репер на U, а $(dx^i)_{i=1}^n$ — соответствующий корепер, то есть,

$$\langle dx^i,\ \partial_j \rangle = \delta^i_j, \quad i,\ j = 1,\ \ldots,\ n.$$

Полагая $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} := \langle dx^i,\ \nabla_{\partial_j}\partial_k \rangle$, получаем, что на U выполняется равенство

$$\nabla_{\partial_j}\partial_k = \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}\partial_i.$$

Функции $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} \in C^\infty(U)$, $i,\ j,\ k = 1,\ \ldots,\ n$, называются коэффициентами связности в карте $(U,\ \varphi)$. Тогда для любых векторных полей $\mathsf{u},\ \mathsf{v} \in \mathrm{Vec}(U)$, в силу аксиом связности, будем иметь, что

$$\nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{v} = u^i \left\{ \partial_i v^k + v^j \Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} \right\} \partial_k.$$

Пусть теперь $(V,\ \psi) = (V,\ \widetilde{x}^1,\ \ldots,\ \widetilde{x}^n)$ — другая карта на M, пересекающаяся с исходной картой $(U,\ \varphi)$, то есть, $U \cap V \neq \varnothing$. Обозначая через $\widetilde{\Gamma}^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ коэффициенты связности, соответствующие карте $(V,\ \psi)$, прямым вычислением можно показать, что на $U \cap V$ выполняется следующий закон преобразования коэффициентов связности:

$$\widetilde{\Gamma}^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^l}{\partial \widetilde{x}^j}\frac{\partial x^m}{\partial \widetilde{x}^k}\Gamma^{p\cdot\cdot}_{\cdot lm} + \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial^2 x^p}{\partial \widetilde{x}^j \partial \widetilde{x}^k}. \tag{1.1.81}$$

Формула (1.1.81) показывает, в частности, что функции $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ не образуют тензорного *поля* на M.

Замечание 1.10. *Следует отличать тензоры, определяемые как алгебраические объекты*[17]*, от тензорных полей, определяемых как соответствия, сопоставляющие каждой точке многообразия некоторый тензор. Так, при фиксированном координатном репере в данной точке* $x \in U$ *значения* $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}(x)$ *единственным образом определяют некоторый тензор* A *третьего ранга. Вместе с тем, выбрав в этой точке другую карту (и соответствующий координатный репер) мы, при пересчете компонент по тензорному закону, получим, что новые компоненты тензора* A *будут отличаться от значений коэффициентов связности* $\widetilde{\Gamma}^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}(x)$.

[17]То есть, элементы тензорной башни над точкой.

1.8.2. Параллельный перенос

Пусть $\gamma : \mathbb{I} \to M$ — некоторая гладкая кривая на M.

Определение 1.2. *Векторное поле* $\mathsf{u} \in \mathrm{Vec}(M)$ *называется параллельным вдоль* γ, *если для всех значений* $t \in \mathbb{I}$ *выполняется равенство*

$$\nabla_{\gamma'(t)}\mathsf{u} = \mathsf{0}, \tag{1.1.82}$$

где $\gamma'(t)$ — *вектор скорости кривой* γ.

Выбирая карту $(U, x^1, \ldots, x^n)$ на M, и предполагая, что образ кривой γ целиком лежит в U, запишем уравнение (1.1.82) в компонентах:

$$\dot{u}^k + \dot{x}^i u^j \Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} = 0, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Здесь $\mathsf{u} = u^i\partial_i$, $\gamma' = \dot{x}^i\partial_i$, а точка сверху обозначает операцию взятия полной производной d/dt.

Пусть $p = \gamma(t_0)$, тогда можно сформулировать следующее начальное условие: $\mathsf{u}_p = \mathsf{u}_0$. Таким образом, в координатной области U существует единственное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{u}^k + \dot{x}^i u^j \Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} = 0, \quad k = 1, \ldots, n \\ u^k_p = u^k_0, \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.1.83}$$

В этой связи, можно определить отображение

$$P^t_{t_0} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t)}M,$$

которое с каждым элементом $\mathsf{u}_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ ассоциирует значение $\mathsf{u}(t)$ решения u задачи Коши (1.1.83): $P^t_{t_0} : \mathsf{u}_0 \mapsto \mathsf{u}(t)$. Это отображение линейно и называется оператором параллельного переноса [60].

Пусть теперь u, $\mathsf{v} \in \mathrm{Vec}(M)$ — два векторных поля и пусть $\gamma : \mathbb{I} \to M$ — кривая на многообразии[18], которой касается u в точке $p = \gamma(t_0)$. Тогда значение ковариантной производной $\nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{v}|_p$ в точке p может быть вычислено в виде предела

$$\nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{v}|_p = \lim_{h\to 0} \frac{P^{t_0}_{t_0+h}\mathsf{v}_{\gamma(t_0+h)} - \mathsf{v}_{\gamma(t_0)}}{h} = \frac{d}{dt}P^{t_0}_t \mathsf{v}_{\gamma(t)}\bigg|_{t=t_0}.$$

Здесь вектор $P^{t_0}_{t_0+h}\mathsf{v}_{\gamma(t_0+h)}$ принадлежит $T_{\gamma(t_0)}M$, и это означает, что для достаточно малого h разность $P^{t_0}_{t_0+h}\mathsf{v}_{\gamma(t_0+h)} - \mathsf{v}_{\gamma(t_0)}$ определена корректно и принадлежит $T_{\gamma(t_0)}M$. Таким образом, элемент $\nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{v}|_p \in T_{\gamma(t_0)}M$ может быть рассмотрен как производная векторного поля v в точке p вдоль вектора u.

[18] Интегральная кривая векторного поля u.

1.8.3. Кручение, кривизна и неметричность

Если на многообразии M выбрана некоторая связность ∇, то мы будем называть пару (M, ∇) пространством аффинной связности[19] [49]. В таком пространстве определено правило параллельного переноса и потому, в частности, имеется возможность дифференцировать тензорные поля, что является необходимым условием для формулировки уравнений баланса. Если же на M задана еще и метрика g, то мы будем говорить о пространстве аффинной связности с метрикой и обозначать его в виде упорядоченной тройки (M, g, ∇).

Параллельный перенос, индуцируемый связностью, задает на многообразии некоторую геометрию, которая, в общем случае, отлична от евклидовой. Для описания этой геометрии коэффициенты связности не подходят: уже в евклидовом пространстве коэффициенты связности равны нулю в декартовых координатах, и отличны от нуля в криволинейных координатах[20]. В этой связи, по связности определяются дополнительные тензорные поля, характеризующие степень неевклидовости геометрии.

Пусть (M, g, ∇) — пространство аффинной связности с метрикой. Связность ∇ определяет тензорные поля кручения $\mathfrak{T} : \mathrm{Vec}(M) \times \mathrm{Vec}(M) \to \mathrm{Vec}(M)$, кривизны $\mathfrak{R} : \mathrm{Vec}(M)\times\mathrm{Vec}(M)\times\mathrm{Vec}(M) \to \mathrm{Vec}(M)$, и неметричности $\mathfrak{Q} : \mathrm{Vec}(M) \times \mathrm{Vec}(M) \times \mathrm{Vec}(M) \to C^\infty(M)$ по формулам [59, 61]

$$\mathfrak{T}(\mathsf{u}, \mathsf{v}) := \nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{v} - \nabla_{\mathsf{v}}\mathsf{u} - [\mathsf{u}, \mathsf{v}]; \tag{1.1.84}$$

$$\mathfrak{R}(\mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w}) := [\nabla_{\mathsf{u}}, \nabla_{\mathsf{v}}]\mathsf{w} - \nabla_{[\mathsf{u}, \mathsf{v}]}\mathsf{w}; \tag{1.1.85}$$

$$\mathfrak{Q}(\mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w}) := \mathsf{g}(\nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{v}, \mathsf{w}) + \mathsf{g}(\mathsf{v}, \nabla_{\mathsf{u}}\mathsf{w}) - \mathsf{u}[\mathsf{g}(\mathsf{v}, \mathsf{w})]. \tag{1.1.86}$$

Здесь[21] $[\mathsf{u}, \mathsf{v}]$ и $[\nabla_{\mathsf{u}}, \nabla_{\mathsf{v}}]$ — коммутаторы,

$$[\mathsf{u}, \mathsf{v}] = \mathsf{u} \circ \mathsf{v} - \mathsf{v} \circ \mathsf{u}, \quad [\nabla_{\mathsf{u}}, \nabla_{\mathsf{v}}] = \nabla_{\mathsf{u}} \circ \nabla_{\mathsf{v}} - \nabla_{\mathsf{v}} \circ \nabla_{\mathsf{u}},$$

а $\mathsf{u}[\mathsf{g}(\mathsf{v}, \mathsf{w})]$ есть действие векторного поля u на скалярное поле $\mathsf{g}(\mathsf{v}, \mathsf{w})$.

В карте (U, φ) тензорные поля $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{Q}$ (вернее, их сужения на U) имеют следующие компоненты:

$$\mathfrak{T}^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} = \Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} - \Gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ji}; \tag{1.1.87}$$

$$\mathfrak{R}^{t\cdot\cdot\cdot}_{\cdot ijk} = \partial_i\Gamma^{t\cdot\cdot}_{\cdot jk} - \partial_j\Gamma^{t\cdot\cdot}_{\cdot ik} + \Gamma^{l\cdot\cdot}_{\cdot jk}\Gamma^{t\cdot\cdot}_{\cdot il} - \Gamma^{l\cdot\cdot}_{\cdot ik}\Gamma^{t\cdot\cdot}_{\cdot jl};$$

$$-\mathfrak{Q}^{\cdot\cdot\cdot}_{ijk} = \partial_i g_{jk} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot ij}g_{mk} - \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot ik}g_{mj}, \tag{1.1.88}$$

[19] Следует отметить, что хотя бы одна аффинная связность на многообразии всегда существует [59].

[20] Такая особенность обусловлена законом преобразования (1.1.81).

[21] При интерпретации векторных полей как дифференцирований алгебры $C^\infty(M)$.

где $i,\ j,\ k,\ t = 1\ \ldots,\ n$.

Из формул (1.1.87) и (1.1.88) вытекает следующее соотношение между коэффициентами связности, кручением и неметричностью в координатном репере:

$$\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \frac{g^{im}}{2}\left(\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk}\right) + \frac{g^{im}}{2}\left(\mathfrak{T}_{mjk} + \mathfrak{T}_{kmj} + \mathfrak{T}_{jmk}\right) + \\ + \frac{g^{im}}{2}\left(\mathfrak{Q}_{jkm} + \mathfrak{Q}_{kmj} - \mathfrak{Q}_{mjk}\right), \quad (1.1.89)$$

где $\mathfrak{T}_{kij} = g_{km}\mathfrak{T}^{m\cdot\cdot}_{\cdot ij}$.

1.8.4. Связность в неголономном репере

Предположим теперь, что в некоторой координатной окрестности U карты $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ задано гладкое поле невырожденных $n\times n$-матриц $\Omega = [\Omega^i_j] : U \to \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$. Относительно координатного репера $(\partial_i)^n_{i=1}$ это поле определяет новый репер $(\mathsf{z}_i)^n_{i=1}$ на том же множестве U:

$$\mathsf{z}_i = \Omega^j_i \partial_j,$$

который уже может быть неголономным, то есть, $[\mathsf{z}_i,\ \mathsf{z}_j] \neq 0$. С физической точки зрения репер $(\mathsf{z}_i)^n_{i=1}$ может представлять собой совокупность искаженных осей кристаллической решетки, а поле Ω — поле искажений.

Корепер $(\vartheta^i)^n_{i=1}$, дуальный к $(\mathsf{z}_i)^n_{i=1}$, определяется системой из n^2 равенств $\left\langle \vartheta^i,\ \mathsf{z}_j \right\rangle = \delta^i_j$, $i,\ j = 1,\ \ldots,\ n$. В явном виде,

$$\vartheta^i = \mho^i_j dx^j.$$

Здесь $(dx^i)^n_{i=1}$ — координатный корепер, а $\mho = \Omega^{-1}$ — поле обратных матриц: $\mho^i_k\,\Omega^k_j = \Omega^i_k\,\mho^k_j = \delta^i_j$ в каждой точке U.

Поскольку для любых значений $i,\ j = 1,\ \ldots,\ n$ коммутатор $[\mathsf{z}_i,\ \mathsf{z}_j]$ является векторным полем на U, то его можно разложить по элементам репера $(\mathsf{z}_i)^n_{i=1}$:

$$[\mathsf{z}_i,\ \mathsf{z}_j] = -c^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}\mathsf{z}_k.$$

Коэффициенты $c^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} \in C^\infty(U)$ этого разложения называются объектами анголономии и могут быть выражены явным образом через элементы матричных полей Ω и $\mho$:

Предложение 1.1. *Поля $c^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}$ могут быть определены из равенства*

$$c^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} = \mho^k_m\left(\Omega^s_j\,\partial_s\Omega^m_i - \Omega^s_i\,\partial_s\Omega^m_j\right), \quad (1.1.810)$$

или, эквивалентно, из равенства

$$c^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} = \Omega^m_i \Omega^q_j \left(\partial_m \mho^k_q - \partial_q \mho^k_m\right). \tag{1.1.811}$$

Доказательство. Мы воспользуемся равенством (**??**). В нашем случае,

$$[\mathsf{z}_i,\, \mathsf{z}_j] = [\Omega^l_i \partial_l,\, \Omega^m_j \partial_m] = \Omega^l_i \Omega^m_j\, [\partial_l,\, \partial_m] + \Omega^l_i (\partial_l \Omega^m_j) \partial_m - \Omega^m_j (\partial_m \Omega^l_i) \partial_l.$$

Так как $(\partial_i)^n_{i=1}$ — координатный репер, то $[\partial_l,\, \partial_m] = \mathsf{0}$ для всех l и m. Кроме того, $\partial_m = \mho^k_m\, \mathsf{z}_k$, $\partial_l = \mho^k_l\, \mathsf{z}_k$. Принимая во внимание полученные соотношения, приходим к равенству

$$[\mathsf{z}_i,\, \mathsf{z}_j] = -\left(\Omega^m_j \mho^k_l\, \partial_m \Omega^l_i - \Omega^l_i \mho^k_m\, \partial_l \Omega^m_j\right) \mathsf{z}_k,$$

из которого, в силу единственности разложения по реперу (и путем соответствующего переобозначения индексов суммирования), получается формула (1.1.810).

Для вывода формулы (1.1.811) продифференцируем равенства

$$\Omega^m_i \mho^k_m = \delta^k_i, \quad \Omega^m_j \mho^k_m = \delta^k_j$$

по x^s. Это приводит к соотношениям

$$\mho^k_m \partial_s \Omega^m_i = -\Omega^m_i \partial_s \mho^k_m, \quad \mho^k_m \partial_s \Omega^m_j = -\Omega^m_j \partial_s \mho^k_m,$$

подстановка которых в (1.1.810) дает

$$c^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} = -\Omega^s_j \Omega^m_i \partial_s \mho^k_m + \Omega^s_i \Omega^m_j \partial_s \mho^k_m.$$

Меняя местами индексы s и m в последнем слагаемом, приходим к равенству (1.1.811). □

Объекты анголономии также являются компонентами внешнего дифференциала $d\vartheta^k$ относительно корепера $(\vartheta^i)^n_{i=1}$:

Предложение 1.2. *Справедливо следующее соотношение:*

$$d\vartheta^k = \sum_{p<q} c^{k\cdot\cdot}_{\cdot pq} \vartheta^p \wedge \vartheta^q. \tag{1.1.812}$$

Доказательство. Используя определение внешнего дифференциала, получаем

$$d\vartheta^k = d(\mho^k_j dx^j) = d\mho^k_j \wedge dx^j = \partial_i \mho^k_j\, dx^i \wedge dx^j = \\ = \sum_{i<j} \partial_i \mho^k_j\, dx^i \wedge dx^j + \sum_{i>j} \partial_i \mho^k_j\, dx^i \wedge dx^j.$$

Используя равенство $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, второе слагаемое в полученном соотношении можно преобразовать к виду

$$\sum_{i>j} \partial_i \mho_j^k \, dx^i \wedge dx^j = -\sum_{i>j} \partial_j \mho_i^k \, dx^i \wedge dx^j.$$

Таким образом,

$$d\vartheta^k = \sum_{i<j} \left(\partial_i \mho_j^k - \partial_j \mho_i^k\right) \, dx^i \wedge dx^j.$$

Допуская теперь суммирование по всем i, j, приходим к равенству

$$d\vartheta^k = \frac{1}{2} \left(\partial_i \mho_j^k - \partial_j \mho_i^k\right) \, dx^i \wedge dx^j.$$

Здесь $dx^i = \Omega_p^i \vartheta^p$ и $dx^j = \Omega_q^j \vartheta^q$, что дает

$$d\vartheta^k = \frac{1}{2} \Omega_p^i \Omega_q^j \left(\partial_i \mho_j^k - \partial_j \mho_i^k\right) \, \vartheta^p \wedge \vartheta^q.$$

Используя формулу (1.1.811), мы в итоге (рассматривая $p < q$) получаем равенство (1.1.812). $\square$

Пусть теперь $\gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \left\langle \vartheta^i, \, \nabla_{\mathsf{z}_j} \mathsf{z}_k \right\rangle$ и $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \left\langle dx^i, \, \nabla_{\partial_j} \partial_k \right\rangle$ — коэффициенты связности ∇ относительно реперов $(\mathsf{z}_i)_{i=1}^n$ и $(\partial_i)_{i=1}^n$ соответственно:

$$\nabla_{\mathsf{z}_j} \mathsf{z}_k = \gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} \mathsf{z}_i \quad \text{и} \quad \nabla_{\partial_j} \partial_k = \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} \partial_i. \tag{1.1.813}$$

В следующем утверждении установлена связь между $\gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ и $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$:

Предложение 1.3. *Поля $\gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ и $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ на U, определенные разложениями* (1.1.813), *связаны соотношением*

$$\gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq} \mho_m^i \Omega_j^s \Omega_k^q + \mho_m^i \Omega_j^s \partial_{x^s} \Omega_k^m. \tag{1.1.814}$$

Доказательство. Используя аксиомы связности, выполним следующие преобразования:

$$\nabla_{\mathsf{z}_j} \mathsf{z}_k = \nabla_{(\Omega_j^s \partial_s)} (\Omega_k^q \partial_q) = \Omega_j^s \nabla_{\partial_s} (\Omega_k^q \partial_q) = \Omega_j^s \{\Omega_k^q \nabla_{\partial_s} \partial_q + (\partial_s \Omega_k^q) \partial_q\}.$$

Здесь $\nabla_{\partial_s} \partial_q = \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq} \partial_m$, так что

$$\nabla_{\mathsf{z}_j} \mathsf{z}_k = \Omega_j^s \{\Omega_k^q \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq} + \partial_s \Omega_k^m\} \partial_m. \tag{1.1.815}$$

С другой стороны,

$$\gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \left\langle \vartheta^i, \, \nabla_{\mathsf{z}_j} \mathsf{z}_k \right\rangle = \mho_l^i \left\langle dx^l, \, \nabla_{\mathsf{z}_j} \mathsf{z}_k \right\rangle. \tag{1.1.816}$$

Подставляя (1.1.815) в (1.1.816) и учитывая, что $\left\langle dx^l, \, \partial_m \right\rangle = \delta_m^l$, приходим к равенству (1.1.814). $\square$

Из равенства (1.1.814), как частный случай (когда $(\mathsf{z}_i)_{i=1}^n$ является координатным репером, порожденным другой картой), следует равенство (1.1.81).

Соотношение (1.1.814) несимметрично в том смысле, что оно связывает коэффициенты связности в голономном и неголономном реперах. В этой связи, имеет смысл получить из него соотношение, выражающее $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ через $\gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$.

Для этого домножим обе части (1.1.814) на $\Omega^o_i \mho^j_l \mho^k_r$ и просуммируем по i, j, k. В результате получим

$$\gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}\Omega^o_i\mho^j_l\mho^k_r = \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, sq}\delta^o_m\delta^s_l\delta^q_r + \delta^o_m\delta^s_l\mho^k_r\partial_{x^s}\Omega^m_k,$$

то есть,

$$\Gamma^{o\cdot\cdot}_{\cdot lr} = \gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}\Omega^o_i\mho^j_l\mho^k_r - \mho^k_r\partial_{x^l}\Omega^o_k.$$

Соответствующая замена индексов дает выражение

$$\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \gamma^{o\cdot\cdot}_{\cdot lr}\Omega^i_o\mho^l_j\mho^r_k - \mho^l_k\partial_{x^j}\Omega^i_l. \tag{1.1.817}$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (1.1.817). Для этого продифференцируем равенство $\Omega^i_l\mho^l_k = \delta^i_k$ по x^j:

$$\mho^l_k\partial_{x^j}\Omega^i_l + \Omega^i_l\partial_{x^j}\mho^l_k = 0,$$

что приводит к соотношению

$$\mho^l_k\partial_{x^j}\Omega^i_l = -\Omega^i_l\partial_{x^j}\mho^l_k.$$

Подставляя его в (1.1.817), окончательно получаем

$$\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \gamma^{o\cdot\cdot}_{\cdot lr}\Omega^i_o\mho^l_j\mho^r_k + \Omega^i_l\partial_{x^j}\mho^l_k. \tag{1.1.818}$$

Определим компоненты тензоров кручения, кривизны и неметричности в неголономном репере. Пусть

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T} &= \mathfrak{T}^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}\,\mathsf{z}_k\otimes\vartheta^i\otimes\vartheta^j,\\
\mathfrak{R} &= \mathfrak{R}^{m\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\, ijk}\,\mathsf{z}_m\otimes\vartheta^i\otimes\vartheta^j\otimes\vartheta^k,\\
\mathfrak{Q} &= \mathfrak{Q}^{\cdot\cdot\cdot}_{ijk}\,\vartheta^i\otimes\vartheta^j\otimes\vartheta^k
\end{aligned}$$

— полиадные разложения тензорных полей $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{Q}$ по реперу $(\mathsf{z}_i)_{i=1}^n$ и кореперу $(\vartheta^i)_{i=1}^n$. Коэффициенты этих разложений представлены в следующем утверждении:

Предложение 1.4. *В репере* $(\mathsf{z}_i)_{i=1}^n$*, связанном с координатным репером* $(\partial_i)_{i=1}^n$ *равенствами* $\mathsf{z}_i = \Omega_i^j \partial_j$, $i = 1, \ldots, n$*, выполнены соотношения:*

$$\mathfrak{T}^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} = \gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} - \gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ji} + c^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}, \tag{1.1.819}$$

$$\mathfrak{R}^{m\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\, ijk} = \Omega_i^s\, \partial_s \gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, jk} - \Omega_j^s\, \partial_s \gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, ik} + \gamma^{s\cdot\cdot}_{\cdot jk}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, is} - \gamma^{s\cdot\cdot}_{\cdot ik}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, js} + c^{s\cdot\cdot}_{\cdot ij}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, sk}, \tag{1.1.820}$$

$$-\mathfrak{Q}^{\cdot\cdot\cdot}_{ijk} = \Omega_i^s\, \partial_s g_{jk} - g_{mk}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, ij} - g_{jm}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, ik}. \tag{1.1.821}$$

Здесь $\gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ *— коэффициенты связности* ∇ *в репере* $(\mathsf{z}_i)_{i=1}^n$*, а* g_{ij} *— компоненты метрики в том же репере;* $g_{ij} = \mathsf{g}(\mathsf{z}_i,\, \mathsf{z}_j)$.

Доказательство. Согласно формуле (1.1.84),

$$\mathfrak{T}(\mathsf{z}_i,\, \mathsf{z}_j) = \nabla_{\mathsf{z}_i}\mathsf{z}_j - \nabla_{\mathsf{z}_j}\mathsf{z}_i - [\mathsf{z}_i,\, \mathsf{z}_j] = \gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}\mathsf{z}_k - \gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ji}\mathsf{z}_k + c^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}\mathsf{z}_k,$$

что в силу равенства $\mathfrak{T}^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij} = \left\langle \vartheta^k,\, \mathfrak{T}(\mathsf{z}_i,\, \mathsf{z}_j)\right\rangle$ приводит к (1.1.819).

Используя определение кривизны (формула (1.1.85)), получаем

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(\mathsf{z}_i,\, \mathsf{z}_j,\, \mathsf{z}_k) &= \nabla_{\mathsf{z}_i}\nabla_{\mathsf{z}_j}\mathsf{z}_k - \nabla_{\mathsf{z}_j}\nabla_{\mathsf{z}_i}\mathsf{z}_k - \nabla_{[\mathsf{z}_i,\, \mathsf{z}_j]}\mathsf{z}_k = \\ &= \nabla_{\mathsf{z}_i}\left(\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, jk}\mathsf{z}_m\right) - \nabla_{\mathsf{z}_j}\left(\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, ik}\mathsf{z}_m\right) - \nabla_{(-c^{s\cdot\cdot}_{\cdot ij}\mathsf{z}_s)}\mathsf{z}_k = \\ &= \gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, jk}\nabla_{\mathsf{z}_i}\mathsf{z}_m + \mathsf{z}_i[\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, jk}]\mathsf{z}_m - \gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, ik}\nabla_{\mathsf{z}_j}\mathsf{z}_m - \mathsf{z}_j[\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, ik}]\mathsf{z}_m + c^{s\cdot\cdot}_{\cdot ij}\nabla_{\mathsf{z}_s}\mathsf{z}_k = \\ &= \gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, jk}\gamma^{s\cdot\cdot}_{\cdot im}\mathsf{z}_s + \Omega_i^s\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, jk}\mathsf{z}_m - \gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, ik}\gamma^{s\cdot\cdot}_{\cdot jm}\mathsf{z}_s - \Omega_j^s\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, ik}\mathsf{z}_m + c^{s\cdot\cdot}_{\cdot ij}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, sk}\mathsf{z}_m.\end{aligned}$$

Из последнего равенства, согласно соотношению $\mathfrak{R}^{m\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\, ijk} = \langle\vartheta^m,\, \mathfrak{R}(\mathsf{z}_i,\, \mathsf{z}_j,\, \mathsf{z}_k)\rangle$, вытекает формула (1.1.820).

Наконец, для неметричности (формула (1.1.86)) получаем

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}^{\cdot\cdot\cdot}_{ijk} = \mathfrak{Q}(\mathsf{z}_i,\, \mathsf{z}_j,\, \mathsf{z}_k) &= \mathsf{g}(\nabla_{\mathsf{z}_i}\mathsf{z}_j,\, \mathsf{z}_k) + \mathsf{g}(\mathsf{z}_j,\, \nabla_{\mathsf{z}_i}\mathsf{z}_k) - \mathsf{z}_i[\mathsf{g}(\mathsf{z}_j,\, \mathsf{z}_k)] = \\ &= \mathsf{g}(\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, ij}\mathsf{z}_m,\, \mathsf{z}_k) + \mathsf{g}(\mathsf{z}_j,\, \gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, ik}\mathsf{z}_m) - \Omega_i^s\partial_s g_{jk} = \\ &= \gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, ij}g_{mk} + \gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\, ik}g_{jm} - \Omega_i^s\partial_s g_{jk},\end{aligned}$$

откуда напрямую вытекает (1.1.821). □

1.8.5. Структурные уравнения Картана и тождества Бианки

Удобно представление связности в виде набора полей внешних 1-форм, поскольку в рамках такого представления могут быть получены соотношения, определяющие пару $(\nabla,\ (\vartheta_i)_{i=1}^n)$ как решение системы уравнений, правые части которой — кручение, кривизна и неметричность, представленные в виде наборов 2-форм (для кручения и кривизны) и наборов 1-форм (для неметричности). Эти соотношения (называемые уравнениями Картана) будут рассмотрены далее.

Пусть U — координатная область, а $(\partial_i)_{i=1}^n$ — соответствующий координатный репер. Пусть, далее, $(\mathsf{z}_i)_{i=1}^n$ — некоторый репер на U, связанный с координатным репером посредством поля невырожденных матриц $\Omega:\ U \to \mathrm{GL}(n;\ \mathbb{R})$, то есть, $\mathsf{z}_i = \Omega_i^j \partial_j$.

Определим на множестве U два семейства 1-форм, которые будем называть формами связности. Первое семейство представлено формами

$$\omega_j^i = \gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj}\,\vartheta^k, \quad i,\ j = 1,\ \ldots,\ n,$$

где $\gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ — коэффициенты связности ∇ относительно репера $(\mathsf{z}_i)_{i=1}^n$, а $(\vartheta^i)_{i=1}^n$ — корепер, дуальный к $(\mathsf{z}_i)_{i=1}^n$.

Второе семейство представлено формами

$$\Gamma_j^i = \Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj}\,dx^k, \quad i,\ j = 1,\ \ldots,\ n.$$

Здесь $\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj}$ — коэффициенты связности ∇ в координатном репере $(\partial_i)_{i=1}^n$.

Определим соотношение между семействами форм ω_j^i и Γ_j^i. Для этого удобно использовать равенство (1.1.814):

$$\gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk} = \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq}\mho_m^i \Omega_j^s \Omega_k^q + \mho_m^i \Omega_j^s \partial_{x^s}\Omega_k^m.$$

Домножим обе его части на ϑ^j и просуммируем по j:

$$\omega_k^i = \gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}\,\vartheta^j = \Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq}\mho_m^i \Omega_j^s \Omega_k^q\,\vartheta^j + \mho_m^i \Omega_j^s (\partial_{x^s}\Omega_k^m)\vartheta^j.$$

Поскольку $\Omega_j^s \vartheta^j = dx^s$ и $\Gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot sq}\,dx^s = \Gamma_q^m$, то мы получаем, что

$$\omega_k^i = \mho_m^i \Omega_k^q\,\Gamma_q^m + \mho_m^i (\partial_{x^s}\Omega_k^m)dx^s.$$

Но член $(\partial_{x^s}\Omega_k^m)dx^s$ есть не что иное, как внешний дифференциал $d\Omega_k^m$. Поэтому приходим к окончательному выражению

$$\omega_k^i = \mho_m^i \Omega_k^q\,\Gamma_q^m + \mho_m^i d\Omega_k^m, \tag{1.1.822}$$

связывающему семейства форм ω_j^i и γ_j^i.

Пусть на координатной окрестности $U \subset M$ задано поле реперов $(\mathsf{z}_i)_{i=1}^n$, связанное с исходным полем координатных реперов $(\partial_i)_{i=1}^n$ равенствами $\mathsf{z}_i = \Omega_i^j \partial_j$, где $\Omega = [\Omega_j^i]$ — гладкое поле обратимых матриц на U.

Пусть, далее, $\omega^i_k = \gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}\vartheta^j$ — формы связности, где $\gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ — коэффициенты связности ∇ в репере $(\mathsf{z}_i)^n_{i=1}$, а $(\vartheta^i)^n_{i=1}$ — корепер, дуальный к $(\mathsf{z}_i)^n_{i=1}$. Определим поля форм $\mathfrak{Q}_{jk}$, $\mathfrak{T}^i$ и $\mathfrak{R}^i_j$ равенствами

$$\mathfrak{Q}_{jk} = \mathfrak{Q}^{\cdot\cdot\cdot}_{ijk}\vartheta^i,$$
$$\mathfrak{T}^i = \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{i\cdot\cdot}_{\cdot ms}\vartheta^m \wedge \vartheta^s,$$
$$\mathfrak{R}^i_j = \frac{1}{2}\mathfrak{R}^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot klj}\vartheta^k \wedge \vartheta^l.$$

Здесь $\mathfrak{Q}^{\cdot\cdot\cdot}_{ijk}$, $\mathfrak{T}^{i\cdot\cdot}_{\cdot ms}$ и $\mathfrak{R}^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot klj}$ — компоненты соответствующих полей в репере (z_i). Как правило, форму $\mathfrak{Q}_{jk}$ называют формой неметричности, форму $\mathfrak{T}^i$ — формой кручения, а $\mathfrak{R}^i_j$ — формой кривизны.

Справедливо следующее предложение:

Предложение 1.5. *Имеют место соотношения*

$$g_{mk}\omega^m_j + g_{mj}\omega^m_k - dg_{jk} = \mathfrak{Q}_{jk} \tag{1.1.823}$$

(нулевое структурное уравнение Картана; здесь $g_{jk} = \mathsf{g}(\mathsf{z}_j,\, \mathsf{z}_k)$),

$$d\vartheta^i + \omega^i_j \wedge \vartheta^j = \mathfrak{T}^i \tag{1.1.824}$$

(первое структурное уравнение Картана) и

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \mathfrak{R}^i_j \tag{1.1.825}$$

(второе структурное уравнение Картана).

Доказательство. Уравнения Картана есть не более, чем формулировка равенств (1.1.819)–(1.1.821) в терминах дифференциальных форм.

Действительно, домножим обе части равенства (1.1.821) на ϑ^i справа и просуммируем по i:

$$-\Omega^s_i\partial_s g_{jk}\vartheta^i + g_{mk}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot ij}\vartheta^i + g_{jm}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot ik}\vartheta^i = \mathfrak{Q}^{\cdot\cdot\cdot}_{ijk}\vartheta^i.$$

Правая часть полученного равенства равна $\mathfrak{Q}_{jk}$. Что касается левой части, то ее второе и третье слагаемое равны, соответственно,

$$g_{mk}\omega^m_j \quad \text{и} \quad g_{jm}\omega^m_k.$$

Наконец, первое слагаемое есть dg_{jk}:

$$dg_{jk} = \partial_s g_{jk}dx^s = \Omega^s_i\partial_s g_{jk}\vartheta^i.$$

Все это влечет соотношение (1.1.823).

Домножив обе части соотношения (1.1.819) на бивектор $\frac{1}{2}\vartheta^i \wedge \vartheta^j$ справа и суммируя по всем i, j, получаем

$$\frac{1}{2}\gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}\vartheta^i \wedge \vartheta^j - \frac{1}{2}\gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ji}\vartheta^i \wedge \vartheta^j + \frac{1}{2}c^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}\vartheta^i \wedge \vartheta^j = \frac{1}{2}\mathfrak{T}^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}\vartheta^i \wedge \vartheta^j.$$

Правая часть полученного равенства есть форма $\mathfrak{T}^k$. Третье слагаемое левой части равно, согласно (1.1.812), форме $d\vartheta^k$. Что же касается первых двух слагаемых левой части, то они дают

$$\frac{1}{2}\gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ij}\vartheta^i \wedge \vartheta^j - \frac{1}{2}\gamma^{k\cdot\cdot}_{\cdot ji}\vartheta^i \wedge \vartheta^j = \frac{1}{2}\omega^k_j \wedge \vartheta^j + \frac{1}{2}\omega^k_i \wedge \vartheta^i = \omega^k_i \wedge \vartheta^i$$

(во втором слагаемом поменяли местами сомножители бивектора). Таким образом, с точностью до обозначений индексов, мы получили (1.1.824).

Наконец, домножим обе части равенства (1.1.820) на $\frac{1}{2}\vartheta^i \wedge \vartheta^j$ справа и просуммируем по всем i, j. Это приводит к следующему соотношению:

$$\frac{1}{2}\Omega^s_i\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,jk}\vartheta^i\wedge\vartheta^j - \frac{1}{2}\Omega^s_j\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,ik}\vartheta^i\wedge\vartheta^j + \frac{1}{2}\gamma^{s\cdot\cdot}_{\cdot jk}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,is}\vartheta^i\wedge\vartheta^j - \frac{1}{2}\gamma^{s\cdot\cdot}_{\cdot ik}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,js}\vartheta^i\wedge\vartheta^j +$$
$$+ \frac{1}{2}c^{s\cdot\cdot}_{\cdot ij}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,sk}\vartheta^i \wedge \vartheta^j = \frac{1}{2}\mathfrak{R}^{m\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\,ijk}\vartheta^i \wedge \vartheta^j.$$

В правой части полученного равенства стоит форма $\mathfrak{R}^m_k$. Третье и четвертое слагаемые дают

$$\frac{1}{2}\gamma^{s\cdot\cdot}_{\cdot jk}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,is}\vartheta^i \wedge \vartheta^j - \frac{1}{2}\gamma^{s\cdot\cdot}_{\cdot ik}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,js}\vartheta^i \wedge \vartheta^j = \frac{1}{2}\omega^m_s \wedge \omega^s_k - \frac{1}{2}\omega^s_k \wedge \omega^m_s = \omega^m_s \wedge \omega^s_k.$$

Остается рассмотреть сумму

$$\frac{1}{2}\Omega^s_i\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,jk}\vartheta^i \wedge \vartheta^j - \frac{1}{2}\Omega^s_j\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,ik}\vartheta^i \wedge \vartheta^j + \frac{1}{2}c^{s\cdot\cdot}_{\cdot ij}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,sk}\vartheta^i \wedge \vartheta^j. \qquad (1.1.826)$$

Меняя местами индексы i и j во втором слагаемом и затем переставляя в нем сомножители бивектора, получаем:

$$\frac{1}{2}\Omega^s_i\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,jk}\vartheta^i \wedge \vartheta^j - \frac{1}{2}\Omega^s_i\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,jk}\vartheta^j \wedge \vartheta^i = \Omega^s_i\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,jk}\vartheta^i \wedge \vartheta^j.$$

Таким образом, (1.1.826) имеет вид

$$\frac{1}{2}\Omega^s_i\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,jk}\vartheta^i \wedge \vartheta^j - \frac{1}{2}\Omega^s_j\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,ik}\vartheta^i \wedge \vartheta^j + \frac{1}{2}c^{s\cdot\cdot}_{\cdot ij}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,sk}\vartheta^i \wedge \vartheta^j =$$
$$= \Omega^s_i\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,jk}\vartheta^i \wedge \vartheta^j + \gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,sk}d\vartheta^s,$$

где также использовано равенство (1.1.812). Первое слагаемое полученного выражения также может быть преобразовано:

$$\Omega_i^s\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,jk}\vartheta^i\wedge\vartheta^j=\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,jk}dx^s\wedge\vartheta^j=d\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,sk}\wedge\vartheta^s.$$

Поэтому, в действительности, выражение (1.1.826) равно

$$\frac{1}{2}\Omega_i^s\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,jk}\vartheta^i\wedge\vartheta^j-\frac{1}{2}\Omega_j^s\,\partial_s\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,ik}\vartheta^i\wedge\vartheta^j+\frac{1}{2}c^{s\cdot\cdot}_{\cdot\,ij}\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,sk}\vartheta^i\wedge\vartheta^j=$$
$$=d\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,sk}\wedge\vartheta^s+\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,sk}d\vartheta^s=d(\gamma^{m\cdot\cdot}_{\cdot\,sk}\wedge\vartheta^s)=d\omega_k^m.$$

Собирая полученные результаты, приходим к соотношению (1.1.825). □

Уравнения Картана (1.1.823)–(1.1.825) могут быть переформулированы в терминах семейства 1-форм $\Gamma_j^i=\Gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj}dx^k$ и координатного корепера $(dx^i)_{i=1}^n$ вместо, соответственно, семейства $\omega_j^i=\gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj}\vartheta^k$ и корепера $(\vartheta^i)_{i=1}^n$. Для этого достаточно использовать равенство (1.1.822), связывающее поля ω_j^i и Γ_j^i. В результате приходим к следующей совокупности соотношений:

$$\Gamma_m^p\,\overset{\circ}{g}_{pl}+\Gamma_l^p\,\overset{\circ}{g}_{pm}-d\overset{\circ}{g}_{ml}=\overset{\circ}{\mathfrak{Q}}_{ml},$$
$$\Gamma_k^m\wedge dx^k=\overset{\circ}{\mathfrak{T}}{}^m,$$
$$d\Gamma_j^i+\Gamma_k^i\wedge\Gamma_j^k=\overset{\circ}{\mathfrak{R}}{}_j^i.$$

Здесь $\overset{\circ}{g}_{ij}=\mathsf{g}(\partial_i,\,\partial_j)$ — компоненты метрики g в координатном репере, а $\overset{\circ}{\mathfrak{Q}}_{ij}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{T}}{}^i$ и $\overset{\circ}{\mathfrak{R}}{}_j^i$ являются, соответственно, формами неметричности, кручения и кривизны, записанными в координатном репере:

$$\overset{\circ}{\mathfrak{Q}}_{ij}=\overset{\circ}{\mathfrak{Q}}_{pij}\,dx^p,\quad \overset{\circ}{\mathfrak{T}}{}^i=\frac{1}{2}\,\overset{\circ}{\mathfrak{T}}{}^i_{ms}dx^m\wedge dx^s,\quad \overset{\circ}{\mathfrak{R}}{}_j^i=\frac{1}{2}\,\overset{\circ}{\mathfrak{R}}{}^i_{klj}dx^k\wedge dx^l,$$

где $\overset{\circ}{\mathfrak{Q}}_{pij}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{T}}{}^i_{ms}$ и $\overset{\circ}{\mathfrak{R}}{}^i_{klj}$ — компоненты неметричности, кручения и кривизны в координатном репере.

Напомним, что семейства форм ω_j^i, $\mathfrak{Q}_{jk}$, $\mathfrak{T}^i$ и $\mathfrak{R}_j^i$ определялись через разложения по кореперу $(\vartheta^i)_{i=1}^n$. Их компоненты имеют геометрический смысл (связность, неметричность, кручение и кривизна). В терминах этих разложений удается сравнительно легко получить уравнения Картана (1.1.823)–(1.1.825), связывающие тройку $(g_{ij},\,\omega_j^i,\,\vartheta^i)$ с тройкой $(\mathfrak{Q}_{jk},\,\mathfrak{T}^i,\,\mathfrak{R}_j^i)$. Вместе с тем, возможны и другие разложения, например, по координатному кореперу $(dx^i)_{i=1}^n$:

$$\omega_j^i=A^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj}dx^k,\ \mathfrak{Q}_{jk}=B^{\cdot\cdot\cdot}_{ijk}dx^i,\ \mathfrak{T}^i=\frac{1}{2}C^{i\cdot\cdot}_{\cdot pq}dx^p\wedge dx^q,\ \mathfrak{R}_j^i=\frac{1}{2}D^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot pqj}dx^p\wedge dx^q.$$

Коэффициенты $A^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$, $B^{\cdot\cdot\cdot}_{ijk}$, $C^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}$ и $D^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot jkl}$, вообще говоря, уже не имеют того геометрического смысла, который имели коэффициенты разложения этих же полей по кореперу $(\vartheta^i)_{i=1}^n$. Однако, одни коэффициенты легко выражаются через другие:

$$A^{i\cdot\cdot}_{\cdot kj} = \gamma^{i\cdot\cdot}_{\cdot lj}\mho^l_k, \tag{1.1.827}$$

$$\begin{aligned} B^{\cdot\cdot\cdot}_{ijk} &= \mathfrak{Q}^{\cdot\cdot\cdot}_{ljk}\mho^l_i, \\ C^{i\cdot\cdot}_{\cdot pq} &= \mathfrak{T}^{i\cdot\cdot}_{\cdot jk}\mho^j_p\mho^k_q, \\ D^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot pqj} &= \mathfrak{R}^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot klj}\mho^k_p\mho^l_q. \end{aligned} \tag{1.1.828}$$

Структурные уравнения Картана позволяют вывести соотношения для дифференциалов кручения, кривизны и неметричности:

Предложение 1.6. *Справедливы следующие тождества:*

$$d\mathfrak{Q}_{jk} = g_{mk}\mathfrak{R}^m_j + g_{mj}\mathfrak{R}^m_k - \mathfrak{Q}_{mk}\wedge\omega^m_j - \mathfrak{Q}_{mj}\wedge\omega^m_k, \tag{1.1.829}$$

$$d\mathfrak{T}^i = \mathfrak{R}^i_j\wedge\vartheta^j - \omega^i_j\wedge\mathfrak{T}^j, \tag{1.1.830}$$

$$d\mathfrak{R}^i_j = \mathfrak{R}^i_k\wedge\omega^k_j - \omega^i_k\wedge\mathfrak{R}^k_j. \tag{1.1.831}$$

Доказательство. Каждое из соотношений (1.1.829)–(1.1.831) может быть получено лишь с использованием уравнений Картана (1.1.823)–(1.1.825). Действительно, применяя внешний дифференциал к нулевому уравнению Картана (1.1.823), получаем[22]

$$d\mathfrak{Q}_{jk} = dg_{mk}\wedge\omega^m_j + g_{mk}d\omega^m_j + dg_{mj}\wedge\omega^m_k + g_{mj}d\omega^m_k. \tag{1.1.832}$$

С другой стороны, нулевое и второе уравнения Картана (1.1.823) и (1.1.825) влекут равенства:

$$\begin{aligned} dg_{mk} &= g_{sk}\omega^s_m + g_{sm}\omega^s_k - \mathfrak{Q}_{mk}, \\ dg_{mj} &= g_{sj}\omega^s_m + g_{sm}\omega^s_j - \mathfrak{Q}_{mj}, \\ d\omega^m_j &= \mathfrak{R}^m_j - \omega^m_s\wedge\omega^s_j, \\ d\omega^m_k &= \mathfrak{R}^m_k - \omega^m_s\wedge\omega^s_k. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в (1.1.832) и приводя подобные, приходим к (1.1.829).

Действуя оператором внешнего дифференцирования d на обе части первого уравнения Картана (1.1.824) и учитывая, что $d\circ d = 0$, получаем

$$d\mathfrak{T}^i = d\omega^i_j\wedge\vartheta^j - \omega^i_j\wedge d\vartheta^j. \tag{1.1.833}$$

[22]Здесь учтено, что $ddg_{jk} = 0$.

Далее, из первого и второго уравнений Картана (1.1.824) и (1.1.825) следуют выражения для $d\omega^i_j$ и $d\vartheta^j$:

$$d\omega^i_j = \mathfrak{R}^i_j - \omega^i_k \wedge \omega^k_j,$$
$$d\vartheta^j = \mathfrak{T}^j - \omega^j_k \wedge \vartheta^k.$$

Их подстановка в (1.1.833) влечет (1.1.830).

Наконец, подействуем оператором d на второе уравнение Картана (1.1.825) (и учтем равенство $d \circ d = 0$):

$$d\mathfrak{R}^i_j = d\omega^i_k \wedge \omega^k_j - \omega^i_k \wedge d\omega^k_j. \tag{1.1.834}$$

С другой стороны, из второго уравнения Картана можно получить представления для $d\omega^i_k$ и $d\omega^k_j$:

$$d\omega^i_k = \mathfrak{R}^i_k - \omega^i_s \wedge \omega^s_k,$$
$$d\omega^k_j = \mathfrak{R}^k_j - \omega^k_s \wedge \omega^s_j,$$

подстановка которых в (1.1.834) дает (1.1.831). □

Мы будем называть равенства (1.1.829)–(1.1.831) тождествами Бианки.

Уравнения Картана и тождества Бианки могут быть записаны в лаконичной форме. Для этого определим обобщение операции внешнего дифференцирования, — внешнюю ковариантную производную [62, стр. 139]. Рассмотрим семейство p-форм

$$\Pi^{i_1\ldots i_k\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,j_1\ldots j_l} = \frac{1}{p!} A^{i_1\ldots i_k\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,j_1\ldots j_l j_{l+1} j_{l+p}}\, \vartheta^{j_{l+1}} \wedge \cdots \wedge \vartheta^{j_{l+p}}, \quad i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l = 1, \ldots, n,$$

где $A^{i_1\ldots i_k\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,j_1\ldots j_l j_{l+1} j_{l+p}}$ — компоненты $(k,\, l+p)$-тензора, антисимметричные по последним p нижним индексам. Тогда внешняя ковариантная производная $D\Pi^{i_1\ldots i_k\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,j_1\ldots j_l}$ определяется как

$$\begin{aligned} D\Pi^{i_1\ldots i_k\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,j_1\ldots j_l} = d\Pi^{i_1\ldots i_k\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,j_1\ldots j_l} + \omega^{i_1}_{\cdot s} \wedge \Pi^{s\ldots i_k\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,j_1\ldots j_l} + \cdots + \omega^{i_k}_{\cdot s} \wedge \Pi^{i_1\ldots s\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,j_1\ldots j_l} - \\ - \omega^{s}_{\cdot j_1} \wedge \Pi^{i_1\ldots i_k\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,s\ldots j_l} - \cdots - \omega^{s}_{\cdot j_l} \wedge \Pi^{i_1\ldots i_k\cdot\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,j_1\ldots s}, \end{aligned} \tag{1.1.835}$$

где d — стандартный внешний дифференциал. В частности,

$$D\Pi^i_{\cdot} = d\Pi^i_{\cdot} + \omega^i_{\cdot k} \wedge \Pi^k_{\cdot} \quad \text{и} \quad D\Pi^{i\cdot}_{\cdot j} = d\Pi^{i\cdot}_{\cdot j} + \omega^{i\cdot}_{\cdot k} \wedge \Pi^{k\cdot}_{\cdot j} - \omega^{k\cdot}_{\cdot j} \wedge \Pi^{i\cdot}_{\cdot k}.$$

Таким образом, D повышает ранг «внешней» части на 1.

С использованием операции D, уравнения Картана (1.1.823)–(1.1.825) принимают вид

$$Dg_{ij} = -\mathfrak{Q}_{ij}, \quad D\vartheta^i = \mathfrak{T}^i, \quad D\omega_j^i = \mathfrak{R}_j^i. \tag{1.1.836}$$

В свою очередь, тождества Бианки (1.1.829)–(1.1.831), представлены равенствами

$$D\mathfrak{Q}_{jk} = g_{mk}\mathfrak{R}_j^m + g_{mj}\mathfrak{R}_k^m, \quad D\mathfrak{T}^i = \mathfrak{R}_j^i \wedge \vartheta^j, \quad D\mathfrak{R}_j^i = 0.$$

Библиография

1. Ferrarese G., Bini D. Introduction to Relativistic Continuum Mechanics. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.

2. Zeeman E.C. The topology of Minkowski space // Topology. — 1967. — Vol. 6, no. 2. — P. 161–170.

3. Gourgoulhon É. Special Relativity in General Frames. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.

4. Hawking S., Ellis G. The Large Scale Structure of Space-Time. — Cambridge University Press, 1973.

5. Rovelli C. Quantum Gravity. — Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

6. Poisson Eric. A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics. — Cambridge University Press, 2004.

7. Palatini A. Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton // Rend. Circ. Matem. Palermo. — 1919. — Vol. 43. — P. 203–212.

8. Aldrovandi R., Pereira J. G. Teleparallel Gravity: An Introduction. — Springer Dordrecht, 2013.

9. Gasperini M. Theory of Gravitational Interactions. — Springer Cham, 2017.

10. Heinicke C., Hehl F. W. Schwarzschild and Kerr solutions of Einstein's field equation: An Introduction // International Journal of Modern Physics D. — 2015. — Vol. 24, no. 02. — P. 1530006.

11. Chandrasekhar S. The mathematical theory of black holes. — Oxford University Press, 1983.

12. Born Max. Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips // Annalen der Physik. — 1909. — Vol. 335, no. 11. — P. 1–56.

13. Born Max. Zur Kinematik des starren Körpers im System des Relativitätsprinzips // Göttinger Nachrichten. — 1910. — Vol. 2. — P. 161–179.

14. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. — 1916. — Vol. 7. — P. 189–196.

15. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus Inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie // Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften. — 1916. — P. 424–434.

16. Tolman R. C. Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid // Phys. Rev. — 1939. — Vol. 55. — P. 364–373.

17. Reissner H. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie // Annalen der Physik. — 1916. — Vol. 50, no. 9. — P. 106–120.

18. Nordström G. On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory // Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. — 1918. — Vol. 26. — P. 1201–1208.

19. Patel L.K., Pandya B.M. A Reissner-Nordström interior solution // Acta Physica Hungarica. — 1986. — Vol. 60. — P. 57–65.

20. Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials, I Fundamental concepts // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A 240. — 1948. — P. 459–490.

21. Marsden Jerrold E, Hughes Thomas JR. Mathematical foundations of elasticity. — Courier Corporation, 1994.

22. Truesdell Clifford, Noll Walter. The Non-Linear Field Theories of Mechanics/Die Nicht-Linearen Feldtheorien der Mechanik. — Springer Science & Business Media, 2013. — Vol. 2.

23. Lychev S., Koifman K., Djuzhev N. Incompatible Deformations in Additively Fabricated Solids: Discrete and Continuous Approaches // Symmetry. — 2021. — Vol. 13, no. 12. — P. 2331.

24. Non-Euclidean Geometry and Defected Structure for Bodies with Variable Material Composition / S. A. Lychev, G. V. Kostin, T. N. Lycheva, K. G. Koifman // Journal of Physics: Conference Series. — 2019. — Vol. 1250, no. 1. — P. 012035.

25. Gurtin M. E. An Introduction to Continuum Mechanics. — Academic Press, 1981.

26. Schield R.T. Inverse deformation results in finite elasticity // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). — 1967. — Vol. 18. — P. 490–500.

27. Carter B., Quintana H. Foundations of general relativistic high-pressure elasticity theory // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1972. — Vol. 331. — P. 57–83.

28. Bressan Aldo. Una teoria di relatività generale includente, oltre all'elettromagnetismo e alla termodinamica, le equazioni costitutive dei materiali ereditari. Sistemazione assiomatica // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. — 1964. — Vol. 34. — P. 74–109. — URL: http://www.numdam.org/item/RSMUP_1964__34__74_0/.

29. Bragg L.E. On relativistic worldlines and motions, and on non-sentient response // Arch. Rational Mech. Anal. — 1965. — Vol. 18. — P. 127–166.

30. Söderholm L. A principle of objectivity for relativistic continuum mechanics // Arch. Rational Mech. Anal. — 1970. — Vol. 39. — P. 89–107.

31. Epstein M., Burton D. A., Tucker R. Relativistic anelasticity // Classical and Quantum Gravity. — 2006. — Vol. 23, no. 10. — P. 3545–3571.

32. Gurtin M. E., Fried E., Anand L. The mechanics and thermodynamics of continua. — Cambridge university press, 2010.

33. Delphenich D. H. Proper Time Foliations of Lorentz Manifolds. — 2002. — gr-qc/0211066.

34. Gundlach C., Hawke I., Erickson S. J. A conservation law formulation of nonlinear elasticity in general relativity // Classical and Quantum Gravity. — 2011. — Vol. 29, no. 1. — P. 015005.

35. Beig R., Schmidt B. G. Relativistic elasticity // Classical and Quantum Gravity. — 2003. — Vol. 20, no. 5. — P. 889.

36. Maugin G. A., Eringen A. C. Relativistic Continua with Directors // J. Math. Phys. — 1972. — Vol. 13. — P. 1788–1797.

37. Kondo K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint // Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering science by means of geometry. — 1955. — Vol. 1. — P. 6–17.

38. Noll Walter. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1967. — Vol. 27, no. 1. — P. 1–32.

39. Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1967. — Vol. 27, no. 1. — P. 33–94.

40. Ruggiero M. L., Tartaglia A. Einstein–Cartan theory as a theory of defects in space-time // American Journal of Physics. — 2003. — 12. — Vol. 71, no. 12. — P. 1303–1313.

41. The Relation between the Model of a Crystal with Defects and Plebanski's Theory of Gravity / D. L. Bennett, C. R. Das, L. V. Laperashvili, H. B. Nielsen // International Journal of Modern Physics A. — 2013. — Vol. 28, no. 13. — P. 1350044.

42. Synge J.L. A theory of elasticity in general relativity // Math. Z. — 1959. — Vol. 72. — P. 82–87.

43. Rayner C. B. Elasticity in General Relativity // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1963. — Vol. 272. — P. 44–53.

44. Andersson L., Oliynyk T.A., Schmidt B.G. Dynamical Compact Elastic Bodies in General Relativity // Arch Rational Mech Anal. — 2016. — Vol. 220. — P. 849–887.

45. Weyl H. Space, Time, Matter. — Dover Publications Inc., 1952. — ISBN: 0486602672.

46. Penrose R., Rindler W. Spinors and Space-Time. — Cambridge University Press, 1984. — Vol. 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields.

47. Postnikov M.M. Lectures in Geometry: Analytic Geometry. — URSS, 1994.

48. Postnikov M.M. Lectures in Geometry: Linear Algebra and Differential Geometry. — URSS, 1994.

49. Norden A. P. Spaces of an Affine Connection (in Russian). — URSS, 2018.

50. Cooperstein Bruce. Advanced linear algebra. — CRC Press, 2015.

51. Lee John M. Introduction to Smooth Manifolds. — Springer New York, 2012.

52. Lychev S., Koifman K. Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. — De Gruyter, 2018.

53. Abraham R., Marsden J. E., Ratiu T. Manifolds, tensor analysis, and applications. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 75.

54. Modugno M., Vitolo R. The geometry of Newton's law and rigid systems // Archivum Mathematicum. — 2007. — Vol. 043, no. 3. — P. 197–229.

55. On the geometric character of stress in continuum mechanics / Eva Kanso, Marino Arroyo, Yiying Tong et al. // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. — 2007. — Vol. 58, no. 5. — P. 843–856.

56. Coxeter H. S. M. Regular Polytopes. — Dover Publications, 2012.

57. Hirsch M. W. Differential Topology. — Springer New York, 1976.

58. Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S. Lectures on Differential Geometry. — World Scientific Publishing, 1999.

59. Postnikov M. M. Geometry VI: Riemannian Geometry. — Springer Berlin, Heidelberg, 2001.

60. Sternberg Shlomo. Lectures on differential geometry. — Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1964. — Vol. 2.

61. Lee John M. Introduction to Riemannian Manifolds. — Springer, Cham, 2018.

62. Lovelock D., Rund H. Tensors, Differential Forms, and Variational Principles. — Dover Publications, 1989.